Demodulación de una onda

Elio

Eso surge como parte de lo de ver qué tan zonales son las ondas planetarias. La idea es entender una onda planetaria de número de onda k como una sinusoide modulada por una amplitud variable a lo largo del círculo de latitud.

Matemática

Sea x una serie de datos, en vez de descomponerla como una suma de sinusoides, voy a proponer que es:

$$x = A(\lambda)\cos(k(\lambda - \phi_k))$$

De forma trivial, si se pide que $A(\lambda) = x/\cos(k(\lambda - \phi_k))$, el ajuste de los datos es perfecto. Pero si el espectro de A incluye frecuencias mayores a k, ¿tiene sentido decir que está modulando la amplitud? Me parece razonable restringir la forma de A a suma de sinusoides con número de onda mayor a k. De manera que la ecuación anterior queda:

$$\tilde{x}_k = \sum_{k<k} [A_j \cos(j\lambda) + B_j \sin(j\lambda)] \cos(k(\lambda - \phi_k))$$

Donde $\tilde{x}_k$ es la serie original eliminando los números de onda menores a k.

En esta ecuación las únicas incógnitas son A_j, B_j y ϕ_k. Este último lo voy a fijar simplemente haciendo fourier en la serie x y que los anteriores salen de hacer un ajuste lineal usando $\cos(j\lambda)\cos(k(\lambda - \phi_k))$ y $\sin(j\lambda)\cos(k(\lambda - \phi_k))$ como "bases".

NOTA: Hacer el ajuste lineal seguro que es muy ineficiente y el hecho de que todos sean senos y cosenos me sugiere que hay una forma más directa. Pero por ahora queda así.

Esto se traduce en este código:

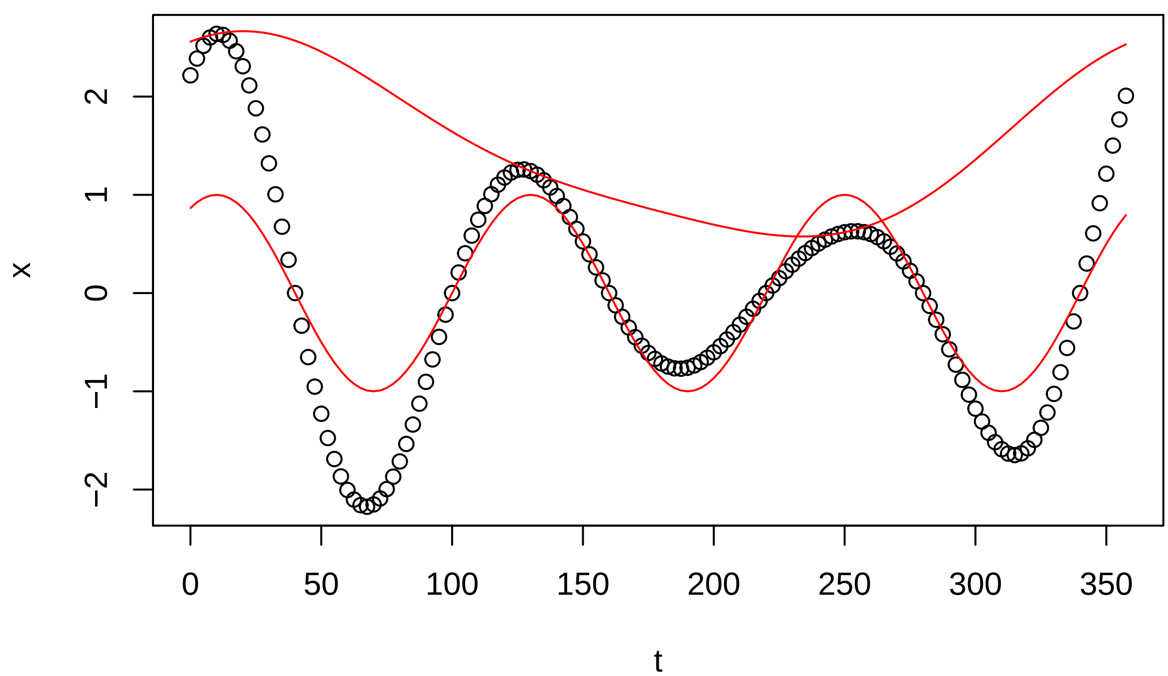
```r
Demodulate  <- function(x, k) {
   t <- seq(0, 360 - 360/length(x), by = 360/length(x))*pi/180

   # Onda carrier
   fit1 <- FitWave(x, k = k)
   carrier <- cos(k*(t - fit1$phase))

   # "bases" de senos y cosenos de la amplitud
   js <- seq_len(k-1)
   cosjs <- lapply(js, function(j) cos(t*j)*carrier)
   sinjs <- lapply(js, function(j) sin(t*j)*carrier)

   # Fit de todo esto
   X <- do.call(cbind, c(list(carrier), cosjs, sinjs))
   new_fit <- .lm.fit(X, x)

   A <- (X/carrier) %*% new_fit$coefficients

   return(list(carrier = carrier,
               amplitude = A))
}
```

Ejemplo ideal

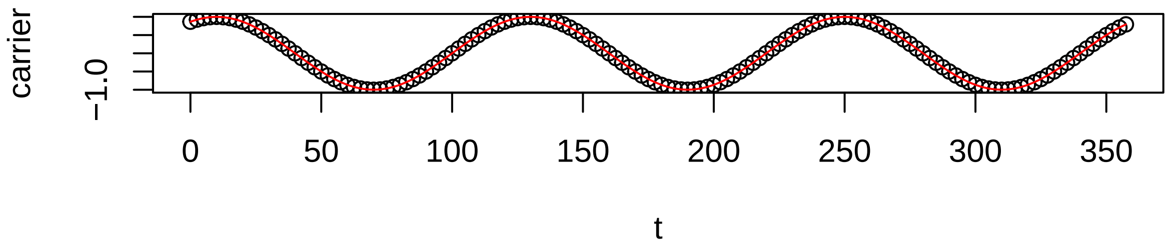
Voy a hacer un ejemplo ideal, en el cual conozco la verdad.

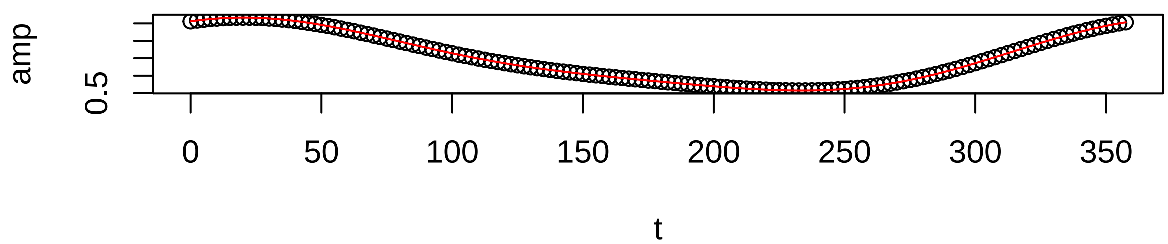
```r
t <-  seq(0, 360 - 360/144, by = 360/144)

# Modelación de la amplitud (onda 1 y onda 2)
amp <- 1.5 + cos(t*pi/180 - 30*pi/180)  + 0.2*cos(2*t*pi/180 - 15*pi/180)

# Onda 3 pura
carrier <- cos(3*(t - 10)*pi/180)

# Señal total
x <- carrier*amp
```

Los puntos son la señal total observada, las líneas rojas son la onda 3 pura con su amplitud modulada y la línea negra es la onda 3 modulada.



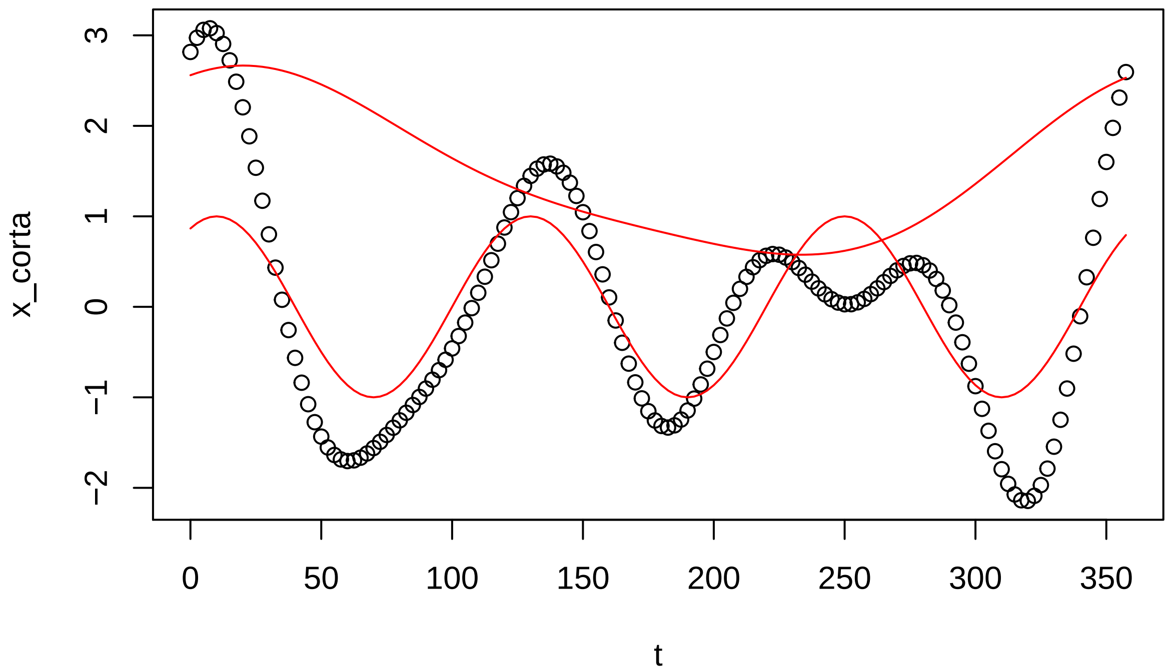
Y estos son los resultados de la demodulación, en puntos la verdad y e línea roja lo estimado.



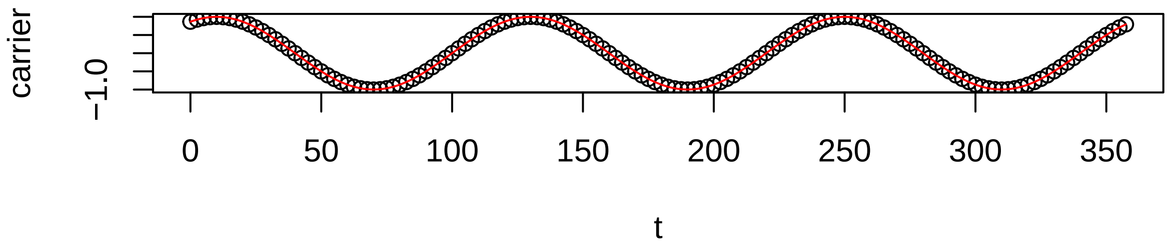


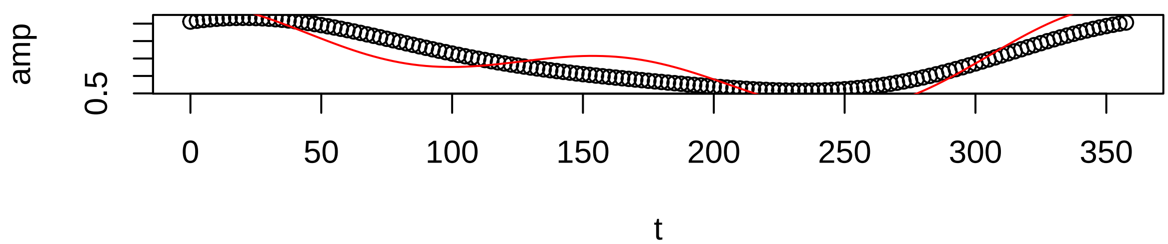
La encaja perfecto, pero es un ejemplo ideal. ¿Cómo afecta esto la presencia de ondas más cortas? Por ejemplo, sumándole ondas más cortas:

```
# Más ondas de frecuencia mayor (onda 5)
cortas <- 0.6*cos(5*t*pi/180)

x_corta <- x + cortas
```

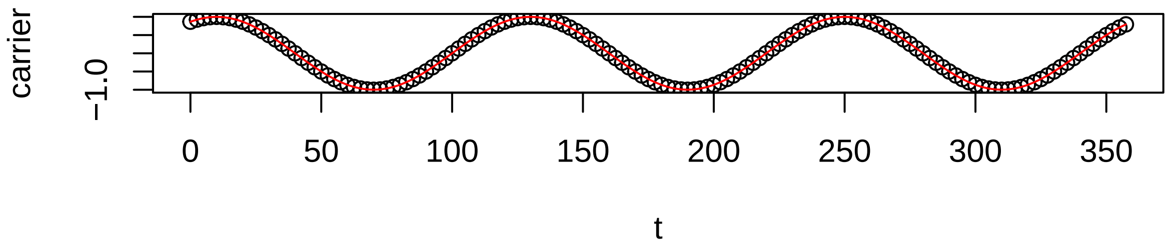


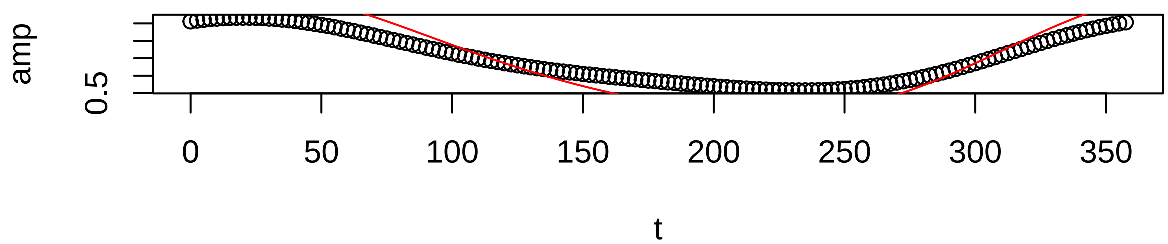
Este es el resultado:





Bastante malo . Si le agrego ondas largas:



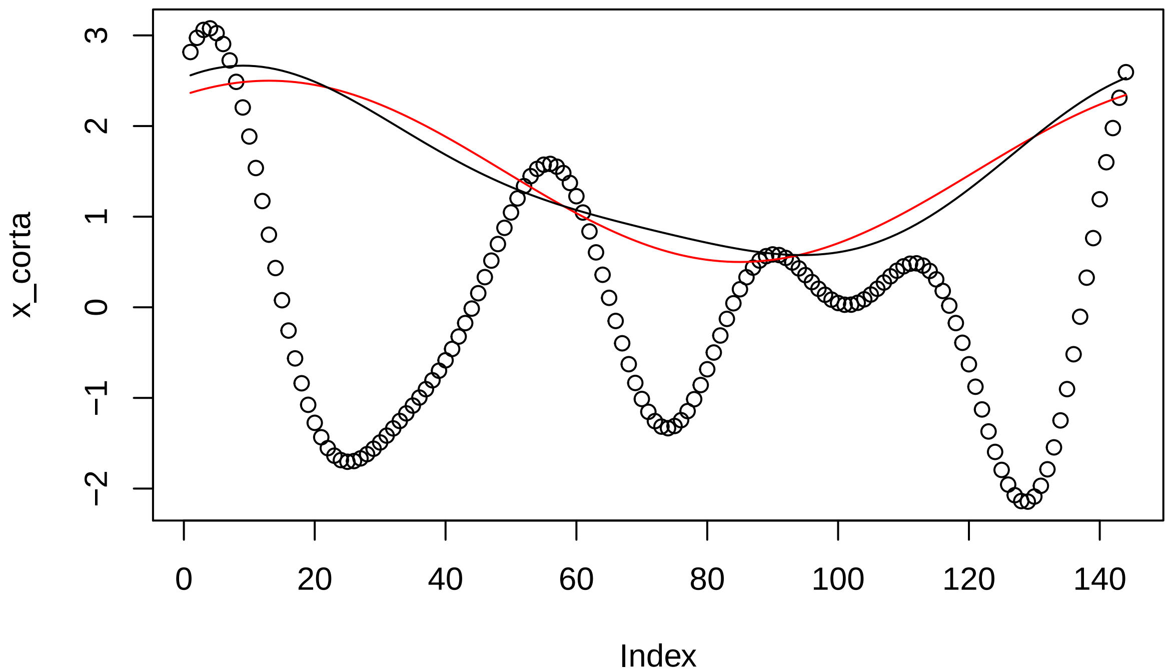


También esetá choto .

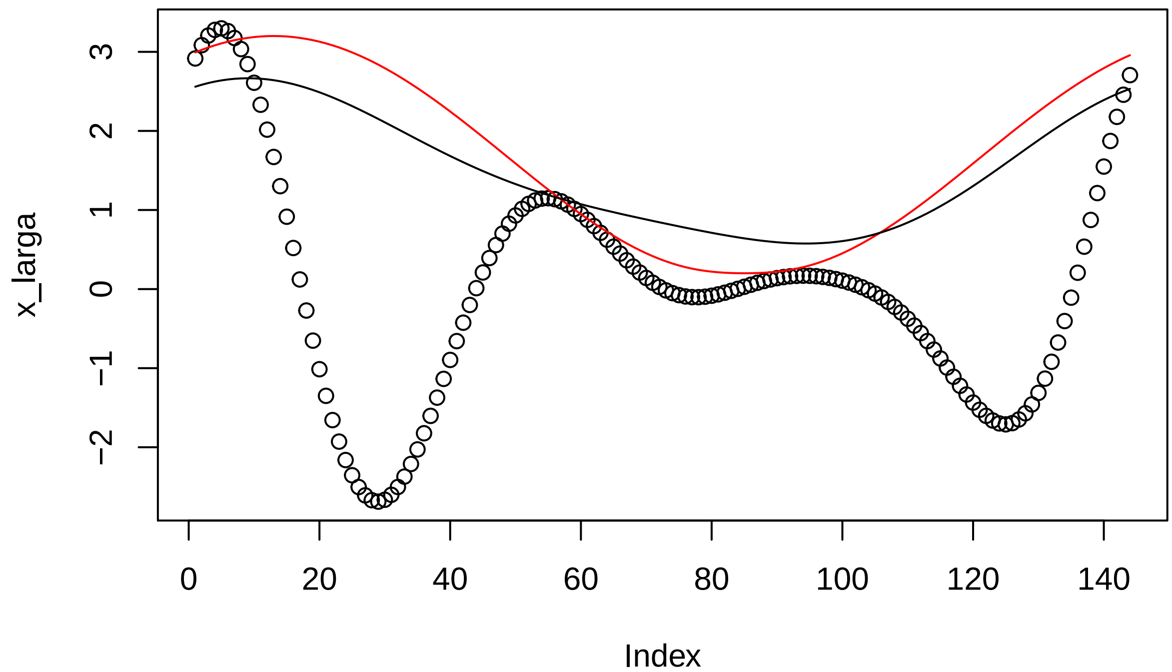
El problema parece ser que este método es muy sensible a mala especificación del modelo.

Otra metodolgía

Primero, una forma más directa de hacer todo esto es usando el wave envelope, así que desde ahora voy a usar eso. Pero además, de la ecuación de la modulación se puede ver que una onda de número de onda k modulada por una onda de número de onda j genera ondas de número de onda $k \pm j$. Entonces se puede reducir los problemas de especificación asumiendo una franja acotada de números de onda que modulan la onda k. Por ejemplo, si para el caso de la contaminación con ondas cortas asumimos que la única modulación de la onda 3 es la onda 1, queda esto (en rojo)



Que funciona razonablemente bien! . La diferencia está en que no estoy considerando la modulación de una onda 2. Esto no resuelve el problema de la contaminación con ondas largas:



La realidad es que el problema de la "contaminación" es irresoluble. No hay forma de distinguir entre ondas "independientes" y ondas producidas por la modulación de otras ondas. En realidad es sólo una cuestión de perspectiva.

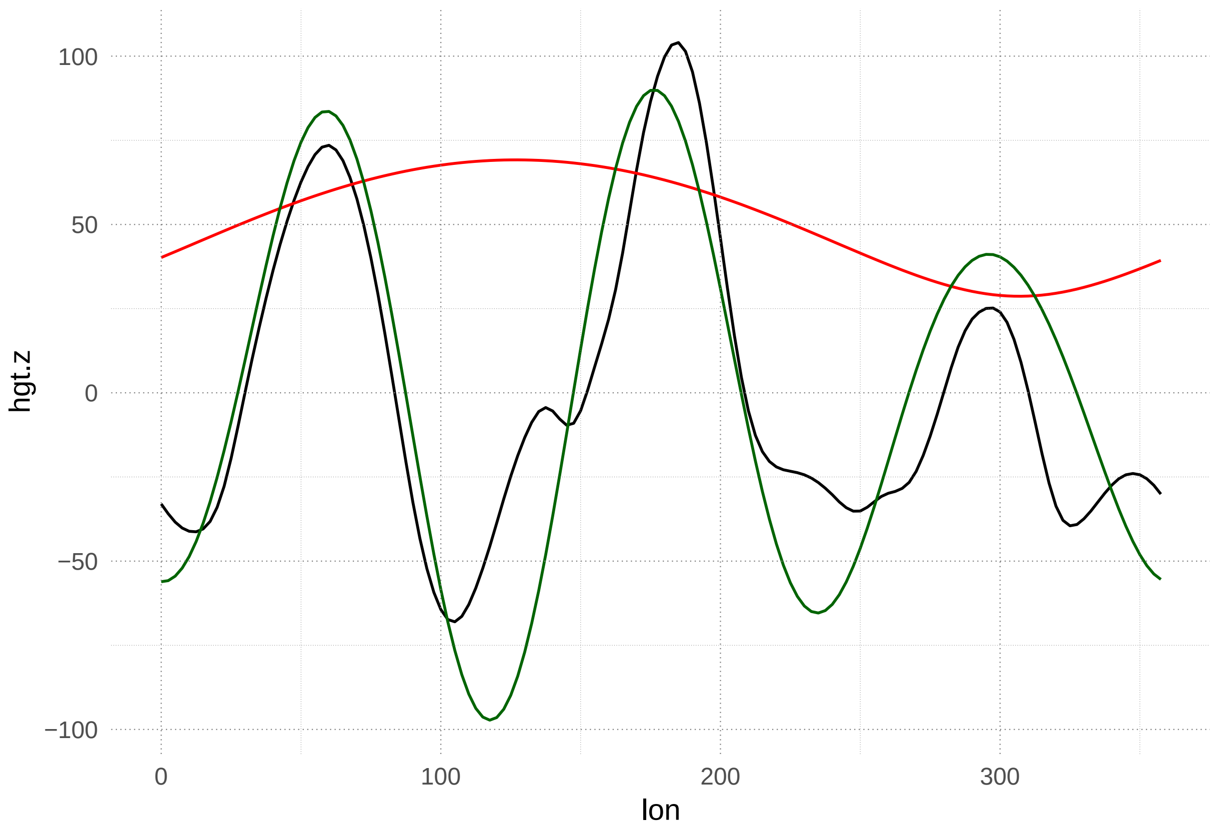
Conclusión

Usar el wave envelope puede ser razonable pero hay que hacer suposiciones bastante fuertes de qué ondas modulan a cual. Lo más básico es pensar en la modulación por una onda 1 (es decir, un hemisferio más intenso que el otro, en promedio).

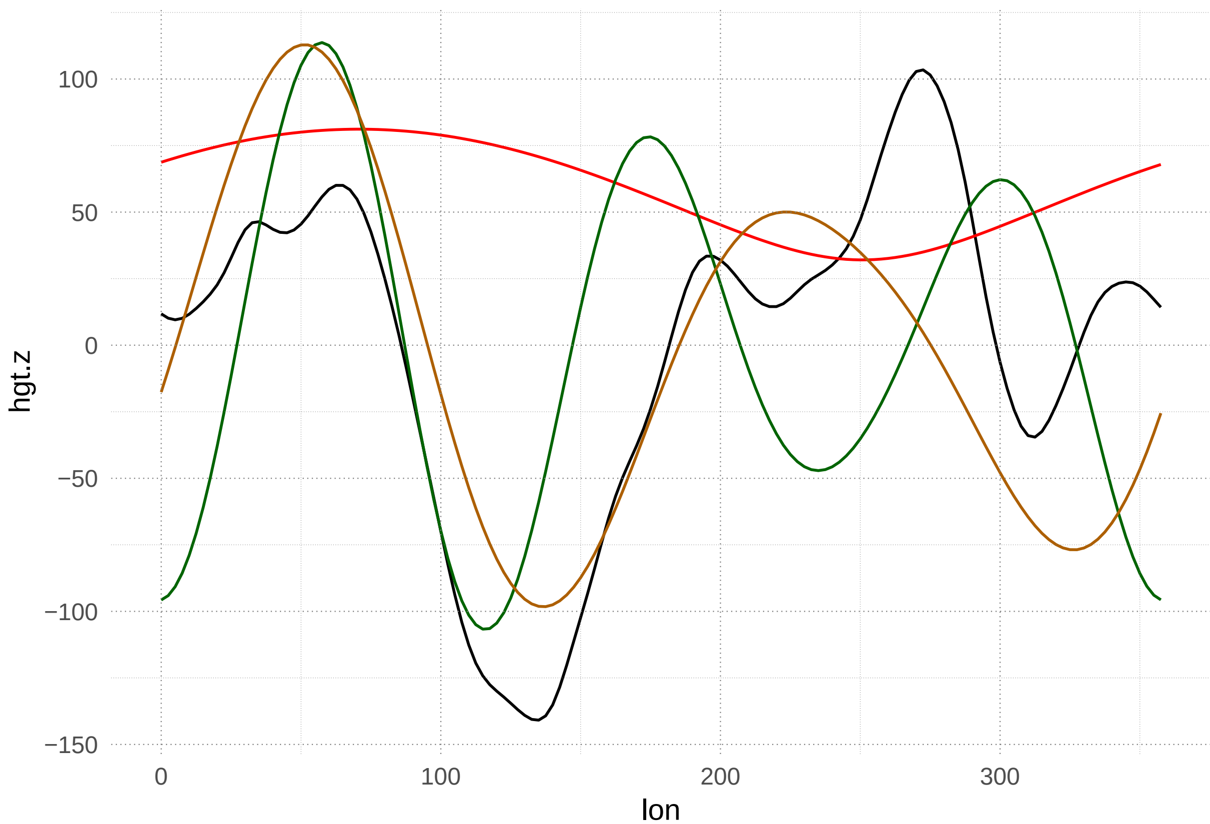
Ejemplo real

Para ir a un caso real, voy a usar datos de altura geopotencial media entre 50°S y 30°S en 300hPa. Además voy a asumir la modulación únicamente de la onda 1.

Este es un caso para el 1979-03-01 (en negro la anomalía zonal de altura geopotencial, en rojo la modulación de la onda 3 y en verde la onda 3 modulada.)



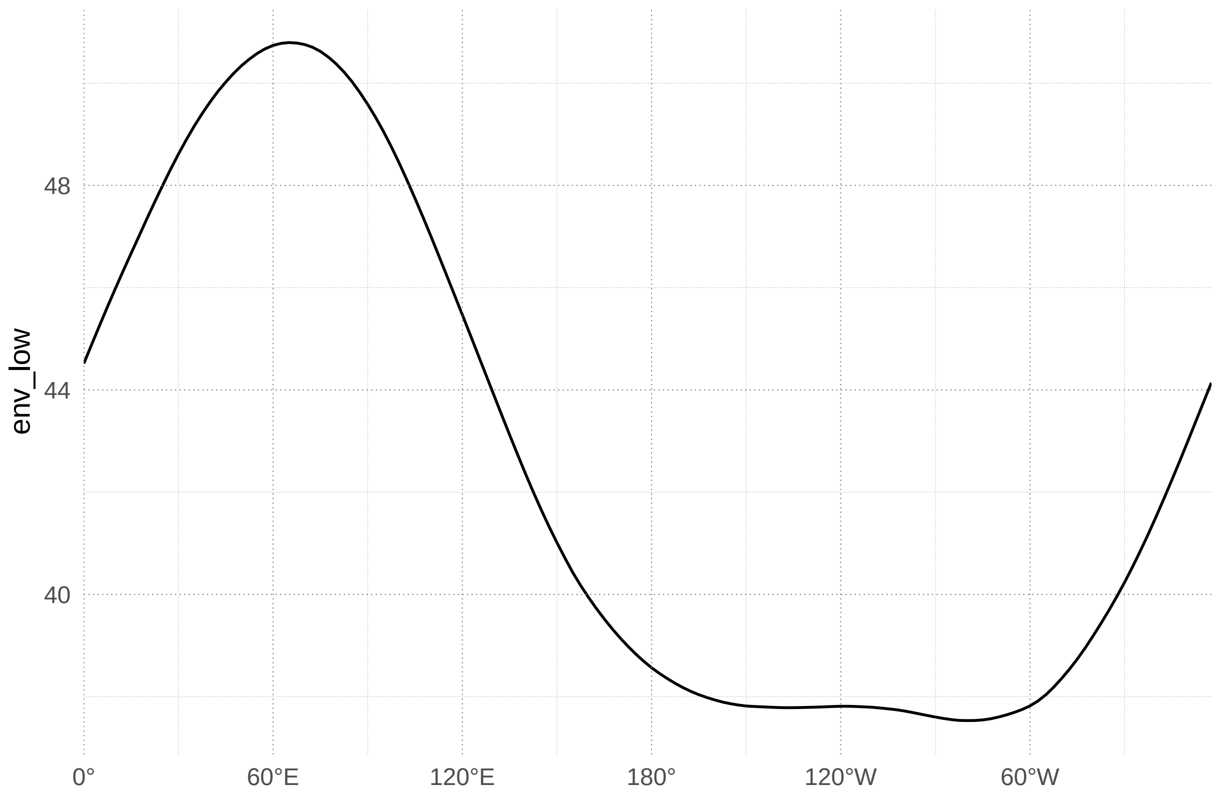
Da un resultado muy razonable! Pära contrastar un poco, esto es lo mismo pero para el 1981-06-01:



El resultado de modular la onda 3 (linea verde) no es malo per sé, pero resulta inadecuado si se lo comprara con el resultado de modular la onda 2 (línea naranja). Esto surge de la ambigüedad de qué onda está modulando a cuál. En este caso, se ve que la varianza de los residuos tomando la onda 2 modulada por la envolvente es la mitad que la onda 3 modulada por la envolvente.

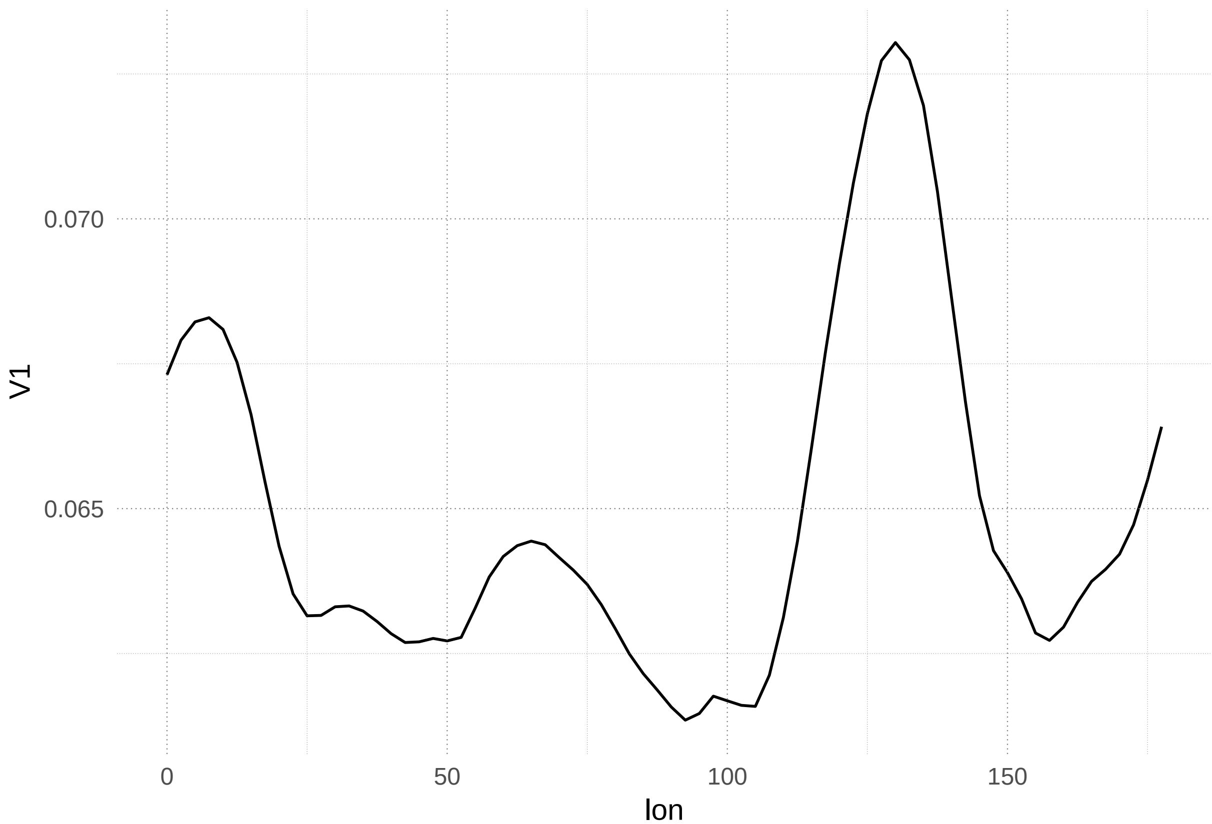
Pero bueno, sto no es más que otra ilustración de las ambigüedades involucradas en el modelo.

De todas formas, si vemos la envolvente promedio asociada a las ondas 2 y 3 (que podría interpretarse como una modulación de baja frecuencia para la onda 3) se ve esto:



Coincidente con otros análisis, se puede interpretar que la onda 3 es más activa en el hemisferio oriental que en el occidental. En realidad técnicamente lo que dice este gráfico es que, considerando únicamente las ondas 2, 3 y 4, el hemisferio oriental tiene más actividad de las ondas zonales que el occidental.

La correlación de la amplitud de cada longitud con la opuesta es esta:



Se ve que es una correlación muy baja, por lo que se puede interpretar que no hay casi nada de comportamiento hemisférico.