Estacionariedad

Elio

July 20, 2018

Concepto básico

Antes de poder tener una medida de la *estacionariedad* de un conjunto de ondas tengo que entender qué quiero decir con ondas estacionarias.

Primero, la estacionariedad no es una propiedad de una onda sino de un conjunto de ondas. Para ser más preciso, la estacionariedad es la propiedad de la *población* de ondas generadas a partir de un proceso (físico o estadíco) y lo que voy a hacer ahora es estimarla a partir de las propiedade de una *muestra* de ondas.

Segundo, un conjunto de ondas perfectamente estacionario tiene fase constante, mientras que la amplitud puede variar como quiera. Es decir, la estacionariedad es describe la variabilidad en la localización de máximos y mínimos pero no su intensidad. Sin embargo, esta propiedad no sirve para definir estacionariedad de forma continua (estacionariedad en mayor o menor grado). Una onda con una fase completamente aleatoria pero con amplitud mayor cuando se da en una fase preferencial (fase estacionaria) *es* estacionaria. De ahí que en estacionariedad no sólo está involucrada la distribución de la fase sino también la relación entre ésta y la amplitud.

La estacionariedad, entonces, involucra dos efectos: la distribución de la fase (estacionariedad de fase) y la relación entre la amplitud y la fase (estacionariedad de amplitud). Un conjunto de ondas puede ser estacionario por tener la mayoría de sus elementos con fase similar a la fase estacionaria y una amplitud constante o aleatoria, o puede serlo teniendo una fase aleatoria pero una mayor amplitud cuando la fase está cerca de la fase estacionaria. El primer efecto se puede observar en la distribución de densidad de la fase mientras que el segundo se aprecia en la amplitud media en función de la fase.

Una forma de combinar ambos efectos y visualizar la estacionariedad es la distribución de la fase pesada por la amplitud. Esto se ve en la Figura 1 que muestra la distribución de probabilidad de la fase pesada por la amplitud para dos latitudes distintas. Queda claro que la onda 3 es más estacionaria en 10°S que en 55°S. En este caso tanto la estacionariedad de fase como la de amplitud es mayor en 10°S que en 55°S.

Notar que en estos casos las distriuciones son claramente unimodales. En el caso de ser multimodal, habría que definir la estacionariedad con respecto a cada moda. En cualquier caso, queda claro que la estacionariedad se define con refernecia a una determinada fase estacionaria. Las líneas verticales marcan la fase de la onda promedio para cada latitud (que es idéntica a la media de la fase pesado por la amplitud) que es la fase estacionaria considerada. Se puede observar que este valor no coincide exactamente con la moda de la distribución.

Posibles medidas

Desvió estándar de la fase

Una forma intuitiva de media la estacionariedad podría ser la variabilidad en la fase con respecto a la fase estacionaria. Una onda perfectamente estacionaria debería tener nula variabilidad en la fase mientras que una onda totalmente “antiestacionaria” tendría un desvío estándar igual al de una distribución uniforme entre 0 y 2π $(2\pi/\sqrt(12) \sim 1.8)$.

De la discusión anterior se desprende que esta medida puede representar la estacionariedad de fase, pero no la estacionariedad de amplitud.

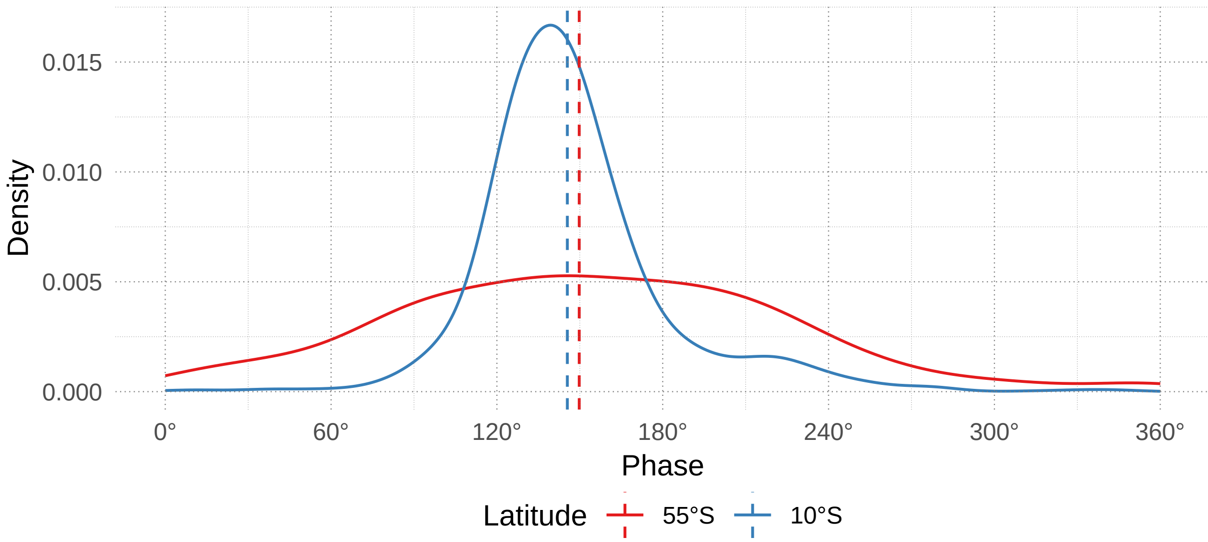

Figure 1: Estimated density of wave 3 phase weighted by amplitude in 55°s (red) and 10°S (blue) at 200hPa. Vertical lines show the stationary phase, which is identical to the mean phase weighet by amplitude.

Correlación entre fase y amplitud

Para capturar la estacionariedad de amplitud podría considerarse la correlación entre la amplitud de las ondas y el corrimiento de fase con respecto a la fase estacionaria. Cuanto más negativa, más estacionaria.

El problema es que esta medida no represetna la estacionariedad de fase. Además no queda claro cómo interpretar las correlaciones positivas.

Desvío estándar de la fase pesado por la amplitud

Una forma de combinar ambos tipos de estacionariedad es calcular el desvío de la fase pero pesarlo por la magnitud de la amplitud (ASD). Ondas que se alejan mucho de la fase estacionaria pero tienen poca amplitud contriburían poco a esta medida, capturando el efecto de estacionariedad de amplitud. Esta medida equivale al desvío estandar de la función de densidad pesada por la amplitud (Figura 1).

Esta métrica parece funcionar relativamente bien. En la Figura 2 se muestra la estacionariedad según ASD (valores altos implican poca estacionariedad) en sombreado.

Por lo que estuve viendo, esta métrica sirve bastante bien aunque tiene un problema en que no es una medida necesariamente lineal, como se muestra en la Figura 2. Además, si bien una onda perfectamente estacionaria tendría un sd nulo, una no estacionaria alcanzaría un máximo que no conozco.

AMOMA

Otra forma de pensar en la estacionariedad de las ondas es considerando el efecto de la interferencia destructiva. En un conjunto de ondas estacinario, la suma de las ondas es siempre constructiva, mientras que en uno no estacionario, hay la misma cantidad de interferencia constructiva y destructiva. Una forma de medir este efecto es comparando la amplitud de la onda media (AM) que sufre el efecto de la interferencia destructiva y la media de la amplitud de las ondas (MA), que no tiene en cuenta éste efecto.

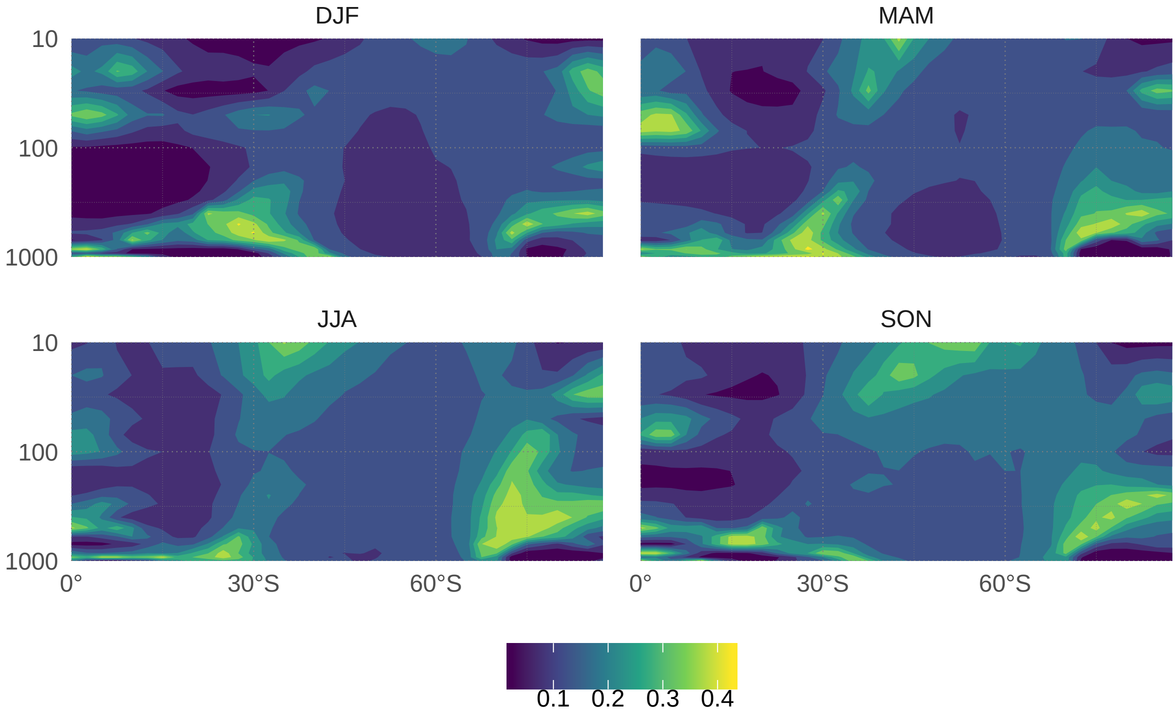

Figure 2: Standard deviation of wave 3 phase with respect of stationary phase. Lower values represent higher stationarity and viceversa.

Formalismo matemático

Intuitivamente, la amplitud de la onda media debería ser 0 para un grupo de ondas no estacionarias e igual a la amplitud media en un grupo de ondas perfectamente estacionarias. De modo que *AMMOMA* (AM over MA) tomaría valores entre 0 y 1 indicando el nivel de estacionariedad del conjunto de ondas.

Formalizando matemáticamente, si la amplitud de una onda w_i es $A(w_i)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{AM} = \quad & A(\overline{w_i}) = \quad & A\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i\right) \\ \text{MA} = \quad & \overline{A(w_i)} = \quad & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A(w_i) \end{aligned}$$

La segunda expresión no tiene demasiada complicación, pero la primera hay que desarrollarla.

Suponiendo el caso $N = 2$, se tiene que

$$w_1 = A_1 \cos(k(\phi - \alpha_1)) \quad w_2 = A_2 \cos(k(\phi - \alpha_2))$$

La suma de las ondas será una tecer onda con igual período pero distinta amplitud y fase. Se puede demostrar que la amplitud A_3 de dicha suma es

$$A(w_1 + w_2) = A_3 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

En el caso de ondas perfectamente estacionarias se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_i = \alpha_0$ (o equivalentemente, $\alpha_i \neq \alpha_0 \rightarrow A_i = 0$) de manera que $A_3 = A_1 + A_2$ y generalizando a la suma en N, se llega a que

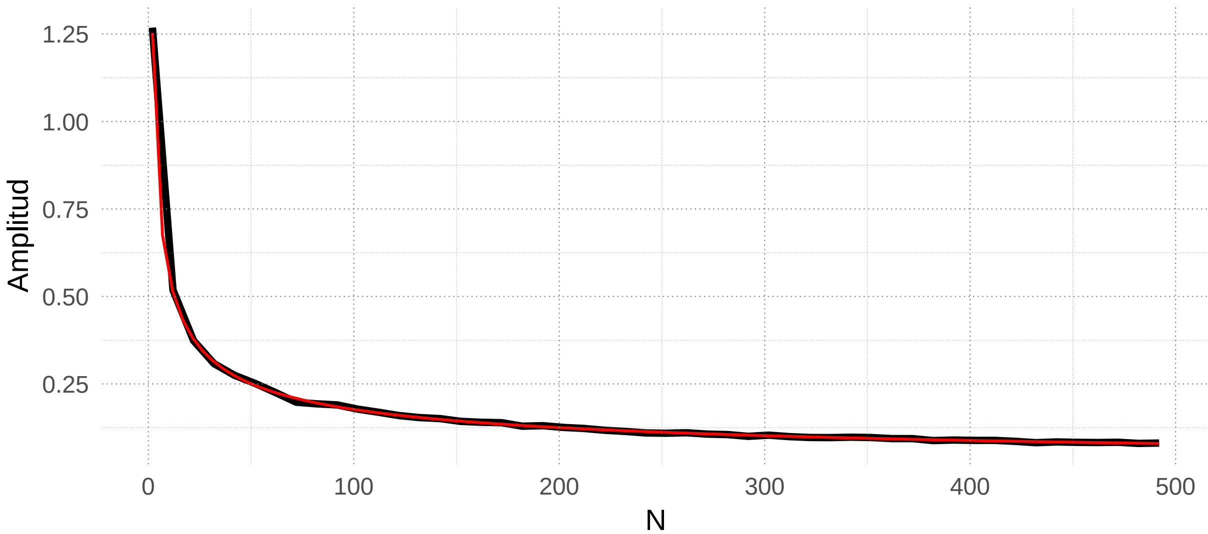

Figure 3: Amplitud del promedio de N ondas con amplitud = 2. La línea roja es la línea $y = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

$$A\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w_i\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A(w_i)$$
$$\text{AM} = \text{MA}$$

Es decir, para ondas perfectamente estacionarias, $AM/MA = 1$.

Para ondas no estacionarias... todavía no encontré el formalismo de matemática pura, pero se puede ver "empíricamente". Para distintos valores de N, calculo la amplitud de la suma de N ondas con amplitud constante (2, en este caso) y fase aleatoria ($\alpha \sim U(0, 2\pi)$). Repito eso 1000 veces y calculo el promedio. Esto me da una estimación de la esperanza matemática de AM para distintos tamaños muestrales.

Se puede ver en la Figura 3 que $\lim_{N\to\infty} \text{AM} = 0$ y que va como $\sim N^{-1/2}$ aunque con una constante multiplicativa que en este caso es $k = 1.771$. La parte más empírica y sucia viene ahora, porque *jugando* con este y otros casos, parece ser que que esa contante es $k = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\pi}{N}}$. De manera que, *empíricamente* se puede ver que en el caso de ondas con fase totalmente aleatorias

$$\text{AM} = \text{MA}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{N}}$$

Poniendo todo en limpio, se demostró (con una mezcla de teoría y práctica), que si se define $\text{AMOMA} = \frac{\text{AM}}{\text{MA}}$ como medida de estacionariedad, se tiene que

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{N}} \leq \text{AMOMA} \leq 1$$

y que las igualdades izquierda y derecha valen para el caso de pura inestacionariedad y pura estacionariedad respectivamente.

Un hecho interesante es que AMOMA es idéntico al promedio de la correlación entre la las ondas y la onda media, pesado por la amplitud (demostración pendiente, pero lo vi numéricamente). Además, la correlación entre dos ondas es igual al coseno de la diferencia entre sus fases. Como esta forma es computacionalmente más eficiente y además más exacta, es la que voy a usar de ahora en adelante para calcular AMOMA.

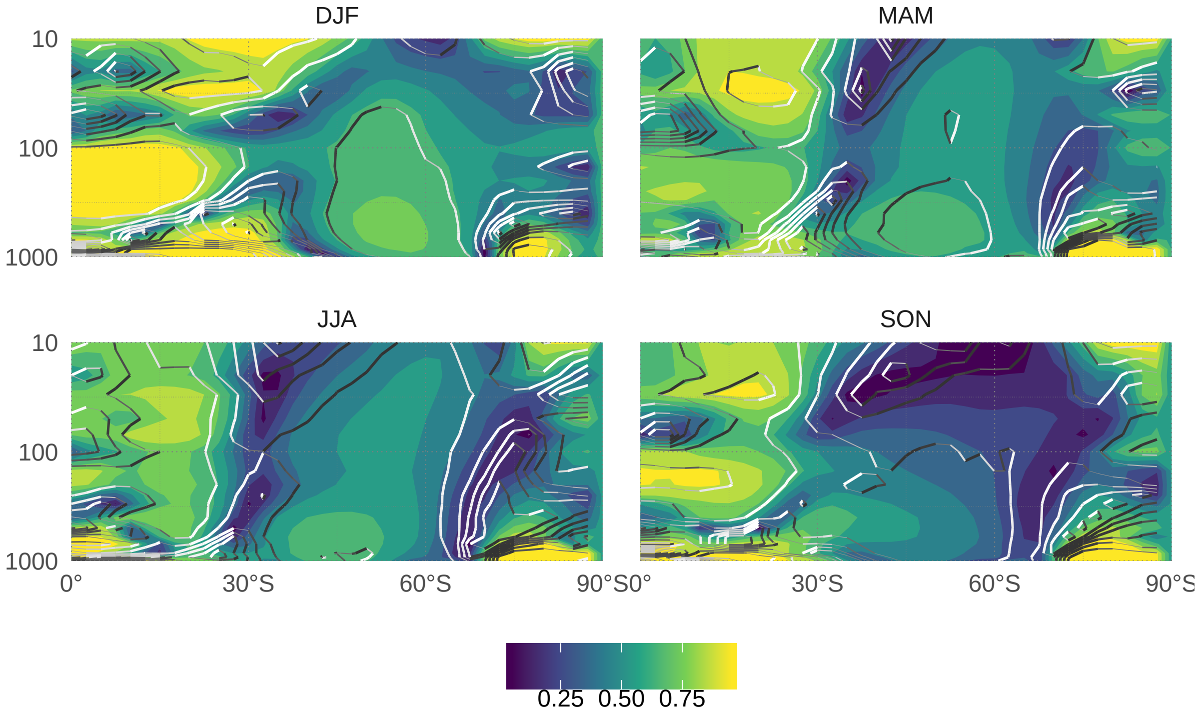

Figure 4: Ratio of amplitude of the mean wave and mean amplitude of waves.

Datos

En la Figura 4 se ve que AMOMA (en sombreado) y ASD (contornos) coindicen a grandes razgos aunque este último es más ruidoso y provee menos detalle (menos contornos) en regiones con mucha estacionariedad. Punto a punto (Figura 5) se ve que aunque en promedio hay buen acuerdo entre ambas medidas, existe mucha variabilidad y ésta es mayor en áreas con mayor estacionariedad (parte derecha del gráfico). La variabilidad es tan gránde que las zonas con menor estacionariedad según ASD coinciden con áreas de mayor estacionariedad según ASD (cuadrante superior derecho)

Curiosamente, con 108 meses el mínimo valor de AMOMA debería ser ~ 0.085, sin embargo en los datos es 0.017, indicando que algo falla con mi "demostración" empírica.

Algunos resultados

Campos espaciales

Mover los campos espaciales acá?

Evolución temporal

La estacionariedad no puede estar definida para un mes en particular sino que sólo se define con respecto a una fase estacionaria que debe ser calculada para un determinado intervalo de tiempo. Lo más directo es usar todo el período, pero si interesa saber el nivel de estacionariedad en una década determinada, por ejemplo, se debe usar la fase estacionaria de esa década. Más aún, la fase estacionaria en realidad debe calcularse *para cada mes* por separado de manera de eliminar la influencia del ciclo anual.

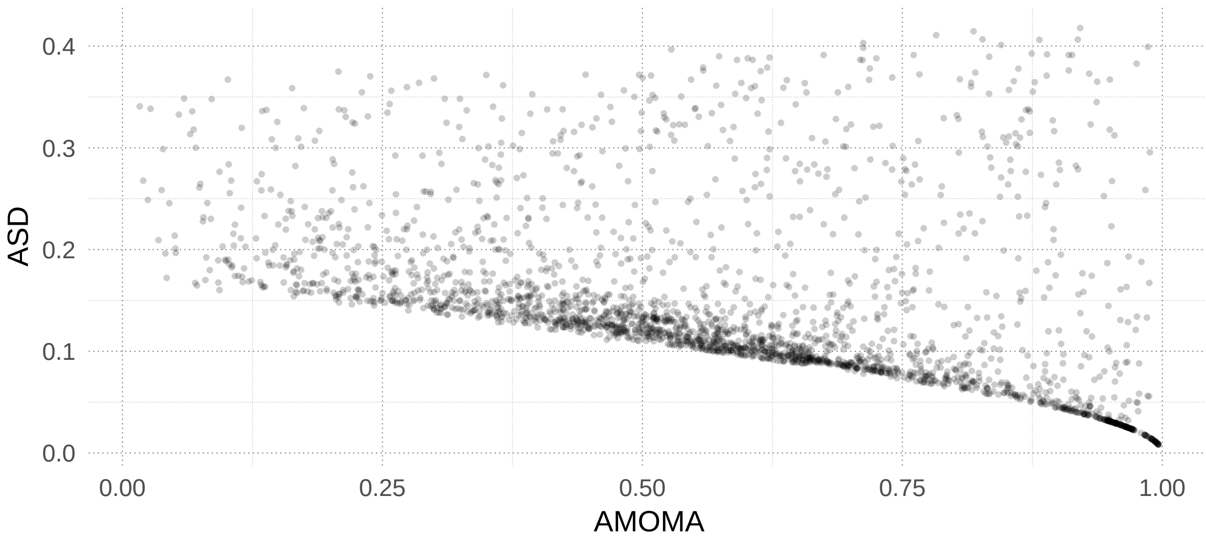

Figure 5: Relationship between ASD and AMOMA.

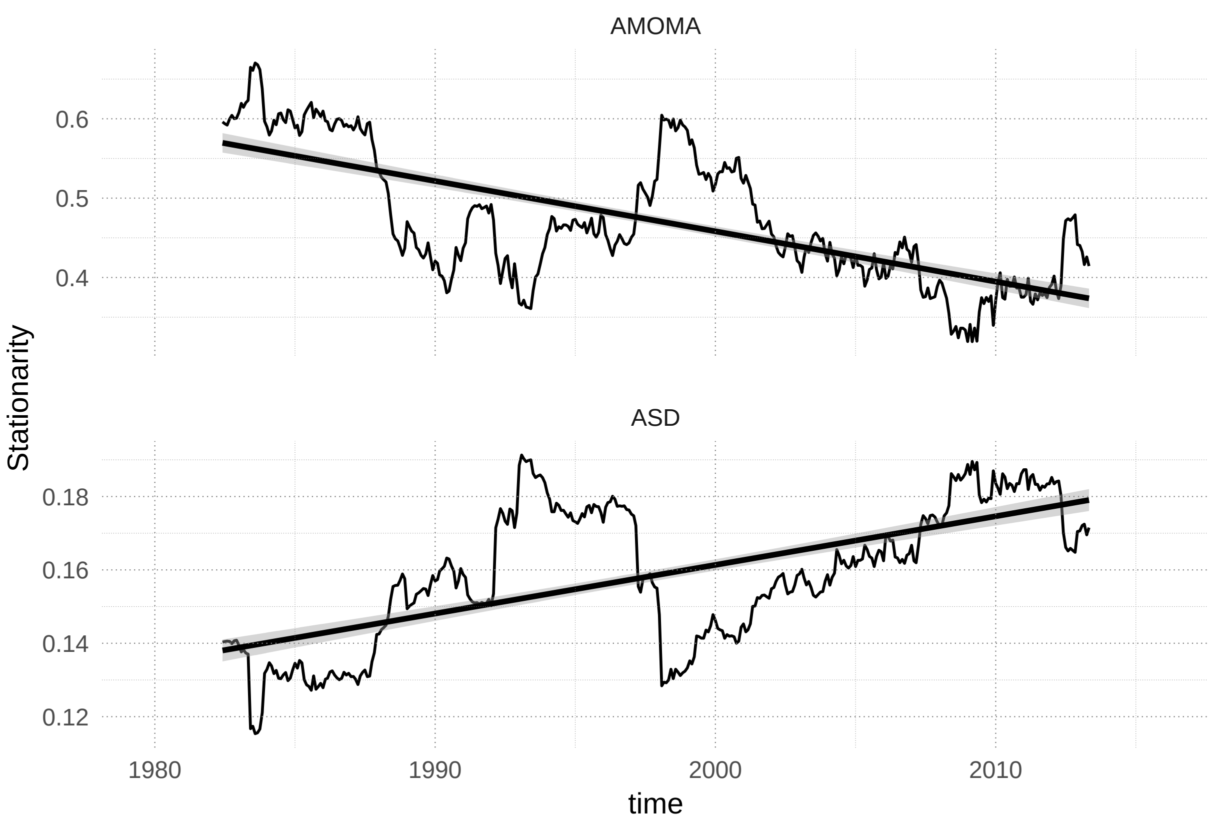

Figure 6: Stationarity as meassured by AMOMA and ASD at 55°S and 200hPa

La Figura 6 muestra la serie temporal de estacionariedad según los dos métodos se en 55°S y 200hPa con una ventana móvil de 5 años. Es notorio que ambas variables coinciden en gran medida (recordar que un valor mayor de ASD implica una menor estacionariedad). Una tendencia a la baja con mínimos locales en los 90, mediados de 2010 y máximo a principios de los 2000.