

SAVOIRS

PHYSIQUE

ACTUELS

INSTABILITÉS

HYDRODYNAMIQUES



FRANÇOIS CHARRU



François Charru

Instabilités hydrodynamiques

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Instabilité de Kelvin-Helmholtz au-dessus de Laramie, Wyoming, États-Unis, entre deux couches d'air atmosphérique de vitesses différentes, révélée par la vapeur d'eau condensée de la couche inférieure. Ce phénomène peut exister en l'absence de nuage : il est alors invisible et les pilotes doivent en être avertis. © 2001 Brooks Martner, NOAA Environmental Technology Laboratory.

Imprimé en France.

© 2007, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,

91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-86883-985-5

ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-06565-0

À mon père

Table des matières

Préface	xiii
Avant-propos	xv
1 Introduction	1
1.1 Espace des phases, portrait de phase	1
1.2 Stabilité d'un point fixe	3
1.2.1 Points fixes	3
1.2.2 Stabilité linéaire d'un point fixe	3
1.2.3 Stabilité d'un point fixe non hyperbolique	6
1.3 Bifurcations	6
1.3.1 Définition	6
1.3.2 Bifurcation nœud-col	7
1.3.3 Bifurcation fourche	9
1.3.4 Bifurcation de Hopf	12
1.4 Illustrations hydrodynamiques	13
1.4.1 Stabilité d'un film de savon	13
1.4.2 Stabilité d'une bulle	17
1.4.3 Stabilité d'une suspension colloïdale	21
1.4.4 Convection dans un anneau	23
1.4.5 Double diffusion thermique et massique	27
1.5 Non-normalité de l'opérateur linéarisé	30
1.5.1 Croissance algébrique transitoire	30
1.5.2 Excitation optimale d'un mode instable	34
1.6 Exercices	37
1.6.1 Oscillateur harmonique forcé	37
1.6.2 Particule dans un potentiel à deux puits	37
1.6.3 Avalanches dans un tas de sable	38
1.6.4 Transition de phase du second ordre	39
1.6.5 Transition de phase du premier ordre	39
1.6.6 Problème modèle de l'instabilité d'un film de savon	40
1.6.7 Croissance transitoire et perturbation optimale	40

1.6.8	Excitation optimale d'un mode instable	41
1.6.9	Bifurcation sous-critique <i>via</i> une croissance transitoire	41
2	Instabilités de fluides au repos	43
2.1	Introduction	43
2.2	Instabilité gravitationnelle de Jeans	44
2.2.1	Ondes acoustiques	44
2.2.2	Effet de la gravitation aux grandes échelles	47
2.2.3	Discussion	51
2.3	Instabilité interfaciale de Rayleigh-Taylor	53
2.3.1	Analyse dimensionnelle	53
2.3.2	Équations des perturbations	55
2.3.3	Linéarisation, modes normaux et relation de dispersion	59
2.3.4	Discussion	60
2.3.5	Effets des parois et de la viscosité	61
2.4	Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau	64
2.4.1	Description	64
2.4.2	Analyse dimensionnelle	66
2.5	Instabilité thermique de Rayleigh-Bénard	68
2.5.1	Description	68
2.5.2	Mécanisme de l'instabilité ($Pr \gg 1$)	71
2.5.3	Étude de stabilité dans l'approximation de Boussinesq	72
2.6	Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni	76
2.6.1	Description	76
2.6.2	Analyse dimensionnelle	77
2.7	Discussion	78
2.7.1	Échelles caractéristiques et sélection de modes	78
2.7.2	Caractéristiques générales d'une instabilité à seuil	79
2.8	Exercices	80
2.8.1	Instabilité de Rayleigh-Taylor entre parois	80
2.8.2	Instabilité d'un film mince suspendu	81
2.8.3	Instabilité de Saffman-Taylor en milieu poreux	81
2.8.4	Instabilité de Darrieus-Landau d'un front de flamme	83
3	Écoulements ouverts : notions de base	87
3.1	Introduction	87
3.1.1	Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes	87
3.1.2	Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité asymptotique	91
3.1.3	Stabilité et instabilité linéaires	92
3.2	Critère de stabilité linéaire	95
3.2.1	Évolution spatio-temporelle d'une perturbation générale	95
3.2.2	Illustration	97
3.3	Instabilités convective et absolue	98
3.3.1	Critère d'instabilité absolue	98
3.3.2	Branches spatiales d'une instabilité convective	99

3.3.3	Illustrations	99
3.3.4	Relation de Gaster	100
3.4	Exercices	101
3.4.1	Dispersion d'un paquet d'ondes	101
3.4.2	Branches spatiales d'une instabilité convective	102
4	Instabilité non visqueuse des écoulements parallèles	103
4.1	Introduction	103
4.2	Résultats généraux	106
4.2.1	Équations linéarisées des petites perturbations	106
4.2.2	Théorème de Squire	108
4.2.3	Équation de Rayleigh des perturbations bidimensionnelles	109
4.2.4	Théorème du point d'inflexion de Rayleigh	112
4.2.5	Conditions de saut entre deux couches de vorticité uniforme	113
4.3	Instabilité d'une couche de mélange	115
4.3.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une feuille de vorticité	115
4.3.2	Cas d'une épaisseur de vorticité non nulle	120
4.3.3	Effets de la viscosité	123
4.4	Instabilité centrifuge de Couette-Taylor	124
4.4.1	Introduction	124
4.4.2	Maurice Couette (1890) et Geoffrey Taylor (1923)	125
4.4.3	Critère d'instabilité pour un écoulement non visqueux	127
4.4.4	Effet de la viscosité - Nombre de Taylor	128
4.5	Exercices	132
4.5.1	Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec gravité et capillarité	132
4.5.2	Effet de parois sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz	132
4.5.3	Ondes internes dans un écoulement cisillé stratifié en densité	132
4.5.4	Instabilité de l'écoulement non visqueux de Couette-Taylor	134
4.5.5	Instabilité d'un film visqueux	134
5	Instabilité visqueuse des écoulements parallèles	137
5.1	Introduction	137
5.1.1	Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube	138
5.1.2	Instabilité d'une couche limite	140
5.2	Résultats généraux	142
5.2.1	Équations linéarisées des perturbations	142
5.2.2	Théorème de Squire	143
5.2.3	Équation d'Orr-Sommerfeld	145
5.2.4	Mécanisme de l'instabilité visqueuse	148
5.3	Écoulement de Poiseuille plan	150

5.3.1	Stabilité marginale, modes propres	150
5.3.2	Étude expérimentale pour de petites perturbations	151
5.3.3	Croissance transitoire	156
5.4	Écoulement de Poiseuille en tube	157
5.5	Couche limite sur une plaque plane	158
5.5.1	Mise en évidence expérimentale	158
5.5.2	Analyse locale	159
5.5.3	Modes propres, stabilité marginale, effets non parallèles	159
5.5.4	Croissance transitoire	162
6	Instabilités à faible nombre de Reynolds	165
6.1	Introduction	165
6.2	Films tombant sur un plan incliné	168
6.2.1	Écoulement de base et échelles caractéristiques	169
6.2.2	Formulation du problème de stabilité	170
6.2.3	Instabilité interfaciale de grande longueur d'onde	172
6.2.4	Mécanisme de l'instabilité interfaciale	176
6.2.5	Étude expérimentale	179
6.2.6	Instabilité à faible pente du mode de paroi	184
6.3	Films liquides cisaillés	185
6.3.1	Introduction	185
6.3.2	Mécanisme de l'instabilité des ondes longues	186
6.3.3	Ondes « moins longues »	190
6.4	Exercices	191
6.4.1	Inclinaison critique d'un film tombant	191
6.4.2	Conditions aux limites sur une interface libre	191
6.4.3	Résolution pour les ondes longues	191
7	Avalanches, rides et dunes	193
7.1	Introduction	193
7.2	Avalanches	194
7.2.1	Dynamique d'un écoulement granulaire dense	195
7.2.2	Stabilité	197
7.2.3	Expériences	198
7.3	Transport de sédiments par un écoulement	201
7.3.1	Analyse dimensionnelle	201
7.3.2	Vitesse des grains mobiles	201
7.3.3	Densité de grains mobiles	203
7.3.4	Flux de grains	204
7.3.5	Effets de relaxation	204
7.4	Rides et dunes : première analyse dimensionnelle	207
7.4.1	Rides et dunes éoliennes	207
7.4.2	Rides et dunes aquatiques	208
7.5	Rides aquatiques sous un écoulement continu	210
7.5.1	Le modèle classique	210

7.5.2	Phénomènes de relaxation	214
7.5.3	Discussion	217
7.6	Rides aquatiques sous un écoulement oscillant	223
7.6.1	Introduction	223
7.6.2	Observations	224
7.6.3	Mécanisme d'initiation des rides à grains roulant	227
7.6.4	Discussion	231
7.7	Dunes aquatiques : un modèle élémentaire	232
7.7.1	Introduction	232
7.7.2	Modélisation et écoulement de base	232
7.7.3	Stabilité sur un fond rigide	234
7.7.4	Stabilité sur un fond érodable	235
7.8	Exercices	238
7.8.1	Dunes : coefficient de frottement constant	238
7.8.2	Dunes : coefficient de frottement non constant	238
8	Dynamique non linéaire à petit nombre de degrés de liberté	239
8.1	Introduction	239
8.2	Oscillateurs non linéaires	242
8.2.1	Oscillateur fortement dissipatif dans un potentiel à deux puits	243
8.2.2	Oscillateur de Van der Pol : saturation de l'amplitude .	245
8.2.3	Oscillateur de Duffing : correction de la fréquence . .	247
8.2.4	Oscillateurs forcés	251
8.3	Systèmes à petit nombre de degrés de liberté	253
8.3.1	Équation modèle	253
8.3.2	Équations d'amplitude	254
8.3.3	Réduction à la dynamique du mode marginal au voisinage du seuil	254
8.4	Illustration : instabilité d'une interface cisaillée	256
8.5	Exercices	260
8.5.1	Oscillateur de Van der Pol-Duffing	260
8.5.2	Oscillateur de Van der Pol – Restabilisation	260
8.5.3	Oscillateur de Van der Pol – Accrochage de fréquence .	261
8.5.4	Oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage constant	261
8.5.5	Oscillateur paramétrique	262
8.5.6	Dynamique faiblement non linéaire de l'équation KS-KdV	263
9	Dynamique non linéaire d'une onde dispersive	265
9.1	Introduction	265
9.2	Instabilité des ondes de gravité	266
9.2.1	Ondes de Stokes	266
9.2.2	Instabilité de Benjamin-Feir	269

9.3	Instabilité par interactions résonnantes	272
9.3.1	Problème modèle	272
9.3.2	Onde non linéaire de Klein-Gordon	273
9.3.3	Instabilité d'une onde non linéaire monochromatique . .	275
9.4	Instabilité vis-à-vis de modulations	277
9.4.1	Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes : équation d'enveloppe	278
9.4.2	Dynamique non linéaire : l'équation de Schrödinger . .	279
9.4.3	Stabilité d'une onde quasi monochromatique	280
9.4.4	Interprétation en termes d'instabilité de phase	282
9.4.5	Dérivation de l'équation NLS pour l'onde de Klein-Gordon	282
9.5	Retour sur les résonances	284
9.6	Exercices	285
9.6.1	Onde non linéaire incluant un harmonique (1)	285
9.6.2	Onde non linéaire incluant un harmonique (2)	286
9.6.3	Onde non linéaire de Korteweg-de Vries	287
10	Dynamique non linéaire des systèmes dissipatifs	289
10.1	Introduction	289
10.2	Dynamique faiblement non linéaire	290
10.2.1	Évolution linéaire d'un paquet d'ondes	290
10.2.2	Effets faiblement non linéaires : équation de Ginzburg-Landau	292
10.2.3	Exemple de dérivation de l'équation de Ginzburg-Landau	293
10.3	Saturation de l'instabilité primaire	294
10.4	Instabilité secondaire d'Eckhaus	295
10.4.1	Critère d'instabilité	295
10.4.2	Interprétation en termes de dynamique de la phase . .	296
10.4.3	Illustrations expérimentales	298
10.5	Instabilité d'une onde propagative	300
10.5.1	Évolution d'un paquet d'ondes	301
10.5.2	Onde non linéaire	302
10.5.3	Instabilité de Benjamin-Feir-Eckhaus	303
10.5.4	Ondes de Tollmien-Schlichting et transition à la turbulence	305
10.6	Couplage avec un champ à grande échelle	307
10.6.1	Invariance galiléenne et lois de conservation	307
10.6.2	Équations d'évolution couplées	308
10.6.3	Stabilité des ondes	310
10.6.4	Illustration expérimentale	310
10.7	Exercices	313

10.7.1	Dérivation de l'équation GL à partir du modèle de Swift-Hohenberg	313
10.7.2	Invariance par translation et invariance galiléenne	314
11	Systèmes dynamiques et bifurcations	315
11.1	Introduction	315
11.2	Espace des phases, attracteurs	316
11.2.1	Flot engendré par un champ de vecteurs. Orbites dans l'espace des phases	316
11.2.2	Systèmes dissipatifs et conservatifs. Attracteurs	318
11.2.3	Sections de Poincaré	320
11.3	Étude du système linéarisé – Stabilité linéaire	323
11.3.1	Solution du système linéarisé	323
11.3.2	Sous-espaces invariants	324
11.3.3	Types de points fixes	324
11.3.4	« Ressemblance » des champs non linéaire et linéarisé	325
11.4	Variétés invariantes et formes normales	327
11.4.1	Variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique	327
11.4.2	Variété centrale	329
11.4.3	Forme normale d'un champ de vecteurs	331
11.5	Stabilité structurelle et générnicité	334
11.5.1	Position du problème	334
11.5.2	Stabilité structurelle et générnicité : définitions	336
11.5.3	Conditions de stabilité structurelle	337
11.6	Bifurcations	340
11.6.1	Introduction	340
11.6.2	Définition d'une bifurcation	340
11.6.3	Codimension d'une bifurcation	341
11.6.4	Bifurcation noeud-col	343
11.6.5	Bifurcation de Hopf	347
11.6.6	Un exemple de bifurcation de codimension deux	349
11.7	Exercices	353
11.7.1	Attracteur de Hénon	353
11.7.2	Exponentielles de matrice	354
11.7.3	Intégration de systèmes différentiels linéaires	354
11.7.4	Portrait de phases	354
11.7.5	Variétés stable et instable	354
11.7.6	Variété centrale	354
11.7.7	Résonances de valeurs propres	355
11.7.8	Forme normale	355
11.7.9	Stabilité structurelle d'une orbite hétérocline	355
11.7.10	Forme normale des équations de Lorenz	355
11.7.11	Diagramme de bifurcation (1)	355
11.7.12	Diagramme de bifurcation (2)	356

11.7.13 Bifurcation de Hopf	356
11.7.14 Bifurcation de Hopf du système de Lorenz	356
Annexe A : Équations de Saint-Venant	357
A.1 Débit sortant d'une tranche d'un écoulement	357
A.2 Conservation de la masse	358
A.3 Conservation de la quantité de mouvement	358
A.4 Modélisation du frottement pariétal	360
Bibliographie	363
Index	381

Préface

Les instabilités hydrodynamiques occupent une place de choix en mécanique des fluides. Depuis Osborne Reynolds et G. I. Taylor, on sait en effet que la transition d'un écoulement laminaire vers la turbulence est due au caractère instable de l'état laminaire vis-à-vis de certaines classes de perturbations, soit infinitésimales, soit d'amplitude finie. Ce paradigme a été pour la première fois magistralement mis en évidence par les travaux de G. I. Taylor sur l'instabilité de l'écoulement de Couette produit par la mise en rotation différentielle de deux cylindres coaxiaux. La théorie de l'instabilité hydrodynamique fait désormais partie de l'arsenal de techniques mis à la disposition du mécanicien des fluides pour étudier les transitions dans une grande variété d'écoulements en génie mécanique, en génie chimique, en aérodynamique et dans l'étude des phénomènes naturels (climatologie, météorologie, géophysique interne).

La littérature sur le sujet est si vaste que peu de chercheurs se sont attaqués à la rédaction d'ouvrages pédagogiques rendant compte des développements majeurs du domaine. Devant l'ampleur de la tâche, il est tentant de couvrir une multitude de situations physiques au risque de se répéter et de lasser le lecteur en mettant en œuvre toujours les mêmes approches méthodologiques. François Charru a su éviter cet écueil et relever le défi. Il a, dans son ouvrage, trouvé un positionnement original à côté des livres classiques de Chandrasekhar et de Drazin & Reid, et de celui plus récent de Schmid & Henningson.

La théorie classique de l'instabilité porte essentiellement sur les écoulements cisaillés quasi parallèles ou parallèles, tels que la couche de mélange, le jet, le sillage, l'écoulement de Poiseuille dans un canal, l'écoulement de couche limite, etc. De telles configurations sont privilégiées dans les livres de Drazin & Reid et de Schmid & Henningson, et elles retiennent tout particulièrement l'attention des chercheurs de sensibilité « mécanicienne ». François Charru a choisi de donner une présentation synthétique de ces situations classiques, en évitant soigneusement de traiter la couche critique dans tous ces états (*cf.* Drazin & Reid), source de bien des difficultés. Il ouvre des perspectives sur les développements plus récents dans l'étude de la transition dans les écoulements cisaillés, par exemple les phénomènes de croissance non modale, la transition « by-pass » et les instabilités convective ou absolue.

Dans les vingt-cinq dernières années, notre vision des instabilités a considérablement évolué sous l'influence conjointe des physiciens et des

mathématiciens du non-linéaire et de la théorie des systèmes dynamiques. En particulier, l'afflux des physiciens du macroscopique, dans le terrain de jeu idéal que constitue la mécanique des fluides, a conduit à un profond renouvellement de notre discipline. Il convenait donc d'initier l'étudiant aux concepts essentiels, sans se perdre dans les détails techniques. Là aussi, François Charru a réussi à faire une présentation attrayante des notions les plus importantes qui font désormais partie du bagage de tout spécialiste des instabilités. Sont également introduits les fondements de la dynamique spatio-temporelle des structures dissipatives, tels qu'on peut les aborder dans les ouvrages de Manneville et de Godrèche & Manneville. De nombreux travaux ont maintenant démontré que l'étude d'équations d'amplitude modèles de type Ginzburg-Landau ou Schrödinger non linéaire permet d'éclairer la nature de la dynamique faiblement non linéaire au voisinage du seuil d'instabilité. On sait aussi que ces « toy-models » sont également pertinents loin des seuils, en régime largement supercritique, pour extraire les caractéristiques d'instabilités génériques telles que celles de Benjamin-Feir ou d'Eckhaus, et pour mettre à l'épreuve des outils méthodologiques tels que la dynamique de phase des textures dissipatives.

Il convient finalement d'inviter le lecteur à savourer les deux chapitres du cœur du livre, consacrés aux instabilités interfaciales de films et à celles régissant la formation des rides et des dunes. L'auteur a, par ses propres travaux, contribué de façon très significative et pérenne à l'avancée des connaissances dans ces deux domaines et il nous livre ici sa propre vision. Soulignons à ce propos que la loi de comportement des milieux granulaires n'est pas encore « inscrite dans le marbre ». Les instabilités observées expérimentalement dans ces milieux complexes permettent alors de valider ou au contraire de rejeter telle ou telle loi de comportement postulée dans les modèles théoriques. En ouvrant de belles perspectives sur les recherches en cours, l'auteur fait ainsi apprécier à l'étudiant la vitalité et l'actualité de la discipline.

L'approche résolument « physique » adoptée par l'auteur constitue une caractéristique essentielle de cet ouvrage. Pour chaque classe d'instabilité, François Charru présente, à l'aide de l'analyse dimensionnelle et d'arguments physiques élégants, le mécanisme responsable de l'amplification des perturbations. Ce type de raisonnement et l'évaluation des ordres de grandeur afférents sont souvent effectués avant tout développement mathématique systématique. L'auteur a également à cœur de présenter des exemples d'expériences de laboratoire permettant de valider les résultats théoriques. Ce mode d'exposition permet à l'étudiant de se familiariser avec la démarche du chercheur, qu'il soit théoricien ou expérimentateur.

Le lecteur est donc encouragé à s'approprier les concepts et les méthodes présentés dans ce livre, à s'imprégner de la démarche de l'auteur qui laisse une large place à l'intuition et à la compréhension physique des phénomènes. Il/Elle pourra ensuite voler de ses propres ailes et découvrir à son tour de belles instabilités hydrodynamiques.

Patrick HUERRE

Avant-propos

*La raison a tant de formes, que nous ne savons à laquelle nous prendre ;
l'expérience n'en a pas moins.*
Montaigne, *Essais*, Livre 3, 13.

Depuis plus d'un siècle, les instabilités hydrodynamiques se révèlent un champ d'étude foisonnant et constamment renouvelé, enrichi par un dialogue fructueux avec d'autres domaines de la physique : transitions de phase, optique et chimie non linéaires, plasmas, astrophysique et géophysique... L'expérimentation s'en trouve stimulée, tant par l'observation que par la simulation numérique, ainsi que le développement ou la transposition de nouveaux concepts d'analyse, liés en particulier à l'analyse asymptotique multi-échelles et à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. D'une part, l'intérêt se maintient pour le problème fondamental de la transition à la turbulence, toujours ouvert depuis les observations de Reynolds en 1883 ; cet intérêt est aujourd'hui vivifié par des concepts tels que la croissance transitoire liée à la non-normalité des opérateurs, et par l'importance reconnue des solutions non linéaires instables. D'autre part, de nouveaux problèmes ont émergé, où la pertinence des lois de comportement est cruciale, comme la stabilité des écoulements de fluides complexes, non newtoniens ou diphasiques, et la stabilité des écoulements granulaires.

Cet ouvrage s'est construit au cours de dix années d'enseignement à des étudiants du Master (ex-DEA) de Dynamique des Fluides de Toulouse. Il s'adresse à tout étudiant, chercheur ou ingénieur désirant s'initier, au-delà de ses connaissances de base en hydrodynamique, aux questions évoquées ci-dessus. Les phénomènes y sont discutés, autant que possible, en termes d'échelles caractéristiques et d'analyse dimensionnelle pour accéder aux mécanismes physiques ou à un « contenu qualitatif des équations », suivant un vœu de Feynman¹. Cette approche s'intègre bien avec la théorie des systèmes dynamiques, des bifurcations et des ruptures de symétrie, qui structure l'ouvrage. Les méthodes asymptotiques ont aussi une large place ; leur puissance et leur succès, parfois bien au-delà des limites attendues, sont toujours une

1. Le Cours de Physique, Électromagnétisme 2, §41.6, InterEditions, 1979.

surprise. De nombreuses études expérimentales sont discutées en détail, qui viennent conforter les interprétations théoriques ou au contraire montrer leurs limites.

La première partie (chapitres 1 à 7) est essentiellement consacrée à la stabilité linéaire, et la seconde partie (chapitres 8 à 11), aux aspects non linéaires. Le premier chapitre est une introduction à la théorie des systèmes dynamiques ; il est illustré par de nombreux problèmes hydrodynamiques « simples », et introduit aussi la notion de croissance transitoire. Le second chapitre présente la méthodologie générale d'une analyse de stabilité : perturbation d'un état de base, linéarisation, modes normaux, relation de dispersion, illustrée par les problèmes classiques d'instabilités thermiques, capillaires, ou gravitaires.

Les chapitres 3 à 5 exposent les analyses classiques des instabilités dans les écoulements ouverts (critère d'instabilité, instabilités convective et absolue, croissance temporelle et spatiale), puis les instabilités des écoulements parallèles : instabilités non visqueuses dans le chapitre 4 (théorème de Rayleigh du point d'inflexion, instabilité de Kelvin-Helmholtz), et visqueuses dans le chapitre 5 (équations d'Orr-Sommerfeld, ondes de Tollmien-Schlichting dans les couches limites et l'écoulement de Poiseuille).

Les chapitres 6 et 7 discutent des problèmes peu abordés dans les ouvrages classiques : (i) les instabilités à petit nombre de Reynolds, qui surviennent en particulier en présence d'interfaces déformables (films liquides tombant sur un plan incliné ou cisaillés par un autre fluide, écoulements de plusieurs couches superposées) ; et (ii) les instabilités de lits granulaires s'écoulant sur une pente (avalanches) ou érodés par un écoulement, qui donnent lieu à la croissance d'ondes de surface, de rides et de dunes. Le chapitre 7 est aussi une introduction (très partielle) à la physique des milieux granulaires, et illustre comment la stabilité est fortement affectée par la modélisation, par l'introduction de phénomènes de relaxation en particulier.

Les chapitres 8 à 10 sont une introduction à la dynamique faiblement non linéaire, où la méthode des échelles multiples trouve une large place. Le chapitre 8 discute les oscillateurs non linéaires et les effets non linéaires « canoniques » : saturation de l'amplitude et correction de la fréquence (équation de Landau), et accrochage de fréquence pour les oscillateurs forcés ; ensuite, l'analyse de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, mais confinés spatialement, révèle comment la dynamique est gouvernée au voisinage du seuil de l'instabilité par un « mode maître ». Le chapitre 9 est consacré aux ondes non linéaires dispersives dont le modèle canonique est l'onde de gravité de Stokes, et à l'instabilité de Benjamin-Feir ; cette instabilité est analysée à partir de deux points de vue : en termes de résonances (équations d'amplitudes), et en termes de modulations de l'enveloppe (équation de Schrödinger non linéaire). Le chapitre 10 présente la dynamique des systèmes dissipatifs dans les cas supercritique et sous-critique, typiquement

la convection de Rayleigh-Bénard ou l'écoulement de Couette-Taylor pour le premier, et les écoulements de Poiseuille et de couche limite pour le second ; on analyse ensuite, dans le cas supercritique, les instabilités secondaires de type Eckhaus, ou Benjamin-Feir-Eckhaus dans le cas des ondes ; on étudie enfin la situation où, du fait d'une invariance particulière (galiléenne, ou liée à une loi de conservation), le mode de nombre d'onde nul est marginal, conduisant à un couplage non trivial de deux modes de phase presque neutres.

Le dernier chapitre est un développement plus mathématique de la théorie des bifurcations (théorème de la variété centrale, formes normales, bifurcations de codimension supérieure à un), qui systématisé des notions introduites dans les chapitres précédents. Enfin, une annexe présente les équations de Saint-Venant qui offrent un cadre simple pour l'analyse de problèmes où les gradients longitudinaux sont faibles dans la direction de l'écoulement.

Chaque chapitre se termine par des exercices, qui sont souvent des ouvertures vers des problèmes nouveaux. Enfin, onze notices biographiques présentent quelques grands noms attachés à l'étude des instabilités : Bagnold, Chandrasekhar, Helmholtz, Kapitza, Kelvin, Landau, Poincaré, Rayleigh, Reynolds, Stokes, et Taylor.

Cet ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif ; des choix ont dû être faits, qui ne rendent pas justice à toute la richesse des avancées réalisées ; des domaines et des concepts importants comme les tourbillons, la croissance transitoire et les modes globaux, moins bien maîtrisés par l'auteur, ne sont que brièvement traités ou restent dans l'ombre ; des indications bibliographiques générales sont alors données.

L'auteur tient enfin à remercier les collègues et amis, qui, au travers de nombreuses conversations, ont contribué à enrichir cet ouvrage, au premier rang desquels Alessandro Bottaro, Grégoire Casalis, Gérard Iooss, John Hinch, Paolo Luchini et Jacques Magnaudet. Il remercie également Bruno Andreotti, Alessandro Bottaro et Pierre Brancher pour leur relecture attentive du manuscrit et leurs bonnes suggestions.

Chapitre 1

Introduction

Ce premier chapitre est une introduction à la stabilité des systèmes discrets et aux bifurcations, selon le point de vue géométrique de la théorie des systèmes dynamiques dans l'espace des phases. La première partie, à caractère plus mathématique que physique, définit les notions fondamentales. Ces notions sont ensuite illustrées par des exemples empruntés à l'hydrodynamique et à la physique des liquides. Une brève présentation de la notion de croissance transitoire, liée à la non-orthogonalité des vecteurs propres du système linéarisé, clôt le chapitre.

1.1 Espace des phases, portrait de phase

L'évolution temporelle d'un système physique discret (non continu) est généralement gouvernée par des équations différentielles, issues des principes de conservation de la physique et de lois de comportement phénoménologiques. Ces équations peuvent toujours s'écrire comme un système d'*équations différentielles ordinaires* (EDO) du premier ordre (Glendinning 1994) :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, n. \quad (1.1)$$

Les variables x_i sont appelées *degrés de liberté du système*¹. Considérons par exemple un pendule simple amorti, dont la position par rapport à la verticale est repérée par l'angle θ ; l'équation de son mouvement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mu \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (1.2)$$

1. Les degrés de liberté en question sont les degrés de liberté dynamiques (ici, position et vitesse), différents des degrés de liberté cinématiques dans l'espace physique (positions).

peut également s'écrire comme un système de deux EDO, en posant $x_1 = \theta$, $x_2 = d\theta/dt$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 - \omega_0^2 \sin x_1. \quad (1.3)$$

Toute solution d'un système d'EDO issue d'une condition initiale donnée peut se représenter par une courbe dans l'espace des degrés de liberté, appelé *espace des phases*. Pour le système (1.3), l'espace des phases est le plan (x_1, x_2) . La figure 1.1 représente des trajectoires typiques issues de quelques conditions initiales, pour $\mu = 0$ et $\mu > 0$. Le cas $\mu = 0$ correspond à un oscillateur non dissipatif (*i.e.* dont l'énergie mécanique reste constante), et le cas $\mu > 0$, à un oscillateur dissipatif (*i.e.* dont l'énergie mécanique diminue au cours du temps). Une telle représentation, qui retient l'essentiel des solutions d'un système d'EDO, est appelée *portrait de phase* du système d'EDO. Un portrait de phase doit permettre de tracer qualitativement la trajectoire issue de toute condition initiale. On appelle *système dynamique* tout système d'EDO étudié dans la perspective d'obtenir son portrait de phase.

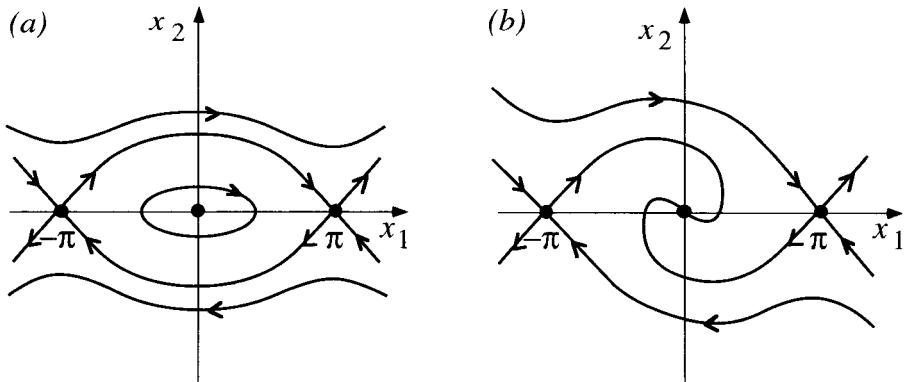


FIG. 1.1 – Portraits de phase de l'oscillateur (1.3). (a) $\mu = 0$; (b) $\mu > 0$.

Pour un système aussi élémentaire que le pendule (1.3), le portrait de phase peut être deviné facilement. Pour des systèmes moins élémentaires, une première étape consiste à déterminer les points fixes puis à étudier leur stabilité. Lorsqu'il existe plusieurs points fixes, la seconde question importante est celle de la détermination de l'ensemble des conditions initiales à partir desquelles le système évolue vers tel ou tel point fixe. Cet ensemble est appelé *bassin d'attraction* du point fixe.

1.2 Stabilité d'un point fixe

1.2.1 Points fixes

Les états d'équilibre d'un système physique correspondent aux solutions stationnaires du système d'EDO, définies par

$$\frac{dx_i}{dt} = 0, \quad i = 1, n.$$

Ces solutions sont représentées dans l'espace des phases par des points appelés *points fixes*. Les points fixes sont déterminés en résolvant le système algébrique

$$X_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, n.$$

Ainsi les points fixes du système (1.3) sont $(x_1, x_2) = (0, 0)$ et $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$ (modulo 2π). Dans le cas d'un système où les forces qui travaillent dérivent d'un potentiel $V(x_1, \dots, x_n)$, ou sont proportionnelles aux vitesses (forces de frottement visqueux), les états d'équilibre correspondent aux extrema du potentiel (Landau & Lifshitz 1969).

1.2.2 Stabilité linéaire d'un point fixe

Une fois les points fixes déterminés, se pose la question de leur stabilité (*i.e.* la stabilité des états d'équilibre correspondants). Lorsque ces états d'équilibre sont les extrema d'un potentiel, les équilibres stables et instables correspondent respectivement aux minimums et maximums du potentiel (Landau & Lifchitz 1969) ; la connaissance du potentiel suffit alors pour tracer le portrait de phase. Par exemple, le portrait de phase du système (1.3) pour $\mu = 0$ se trace aisément en remarquant que la seule force qui intervient dans l'équation du mouvement, le poids, dérive du potentiel $V(\theta) = -mg \cos \theta$. Lorsqu'un tel potentiel n'existe pas, une méthode générale, fondée sur l'algèbre linéaire, permet d'étudier la stabilité d'un point fixe vis-à-vis de petites perturbations. Considérons donc le système (1.1), que l'on écrit sous forme vectorielle

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

présentant un point fixe en $\mathbf{x} = \mathbf{a}$. L'idée consiste à considérer que, pour de petites perturbations de l'état d'équilibre, d'amplitude $\epsilon \ll 1$, on peut négliger les produits de perturbations issus des termes non linéaires des équations car ils sont d'ordre ϵ^2 , et ne retenir que le système linéarisé autour de l'état d'équilibre. Posant $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$, ce système linéarisé s'écrit

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{a})\mathbf{y} \tag{1.4}$$

où $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ calculée au point \mathbf{a} , dont les éléments sont $L_{ij} = \partial X_i / \partial x_j(\mathbf{a})$. Si les éléments L_{ij} ne dépendent pas du temps

– système dit *autonome* –, le système (1.4) est linéaire à coefficients constants et ses solutions sont des exponentielles $\exp(st)$. Le problème se ramène alors à un problème algébrique aux valeurs propres $\mathbf{L}(\mathbf{a})\mathbf{y} = s\mathbf{y}$, qui n'admet de solution non nulle que si le déterminant de $\mathbf{L} - s\mathbf{I}$ est nul, où \mathbf{I} est la matrice unité. Ce déterminant est un polynôme en s , appelé *polynôme caractéristique*, dont les racines sont les *valeurs propres*. Si les parties réelles des valeurs propres sont toutes négatives, la solution est une somme d'exponentielles décroissantes, et toute perturbation de l'équilibre s'amortit aux temps longs : le point fixe est asymptotiquement stable. En revanche, il suffit que l'une des valeurs propres ait une partie réelle positive pour que le point fixe soit instable. Une étude de *stabilité linéaire* d'un point fixe consiste donc à (i) déterminer les valeurs propres du problème linéarisé, (ii) déterminer les vecteurs ou directions propres dans l'espace des phases et (iii) tracer le portrait de phase au voisinage du point fixe.

En dimension deux, la classification des types de points fixes est simple. Le polynôme caractéristique $\det(\mathbf{L} - sI)$ ne dépend en effet que de la trace, $\text{tr}(\mathbf{L})$, et du déterminant, $\det(\mathbf{L})$, de la matrice \mathbf{L} :

$$\det(\mathbf{L} - sI) = s^2 - \text{tr}(\mathbf{L})s + \det(\mathbf{L}). \quad (1.5)$$

Les différents cas, illustrés sur la figure 1.2, sont les suivants :

- $\det(\mathbf{L}) < 0$: s_1 et s_2 sont réelles et de signe contraire ; les trajectoires sont des hyperboles dont les asymptotes sont les directions propres, et le point fixe est appelé *col* (figure 1.2a).
- $\det(\mathbf{L}) > 0$ et $4\det(\mathbf{L}) \leq \text{tr}^2(\mathbf{L})$ (discriminant positif ou nul) : s_1 et s_2 sont réelles et du signe de $\text{tr}(\mathbf{L})$; le point fixe est appelé *nœud*, attractif (stable) si $\text{tr}(\mathbf{L}) < 0$ ou répulsif (instable) si $\text{tr}(\mathbf{L}) > 0$ (figure 1.2b). Si le discriminant est nul, s est racine double, et deux cas doivent encore être distingués : soit \mathbf{L} est multiple de l'identité \mathbf{I} , les trajectoires sont alors des droites et le nœud est dit étoile, soit \mathbf{L} est non diagonalisable, et le nœud est dit impropre. Dans ce dernier cas, \mathbf{L} peut au mieux être ramenée à un bloc de Jordan :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

- $\det(\mathbf{L}) > 0$ et $4\det(\mathbf{L}) > \text{tr}^2(\mathbf{L})$ (discriminant négatif) : $s_1 = s_2^*$ sont complexes conjuguées, de partie réelle $\text{tr}(\mathbf{L})/2$ et de partie imaginaire non nulle ; les trajectoires sont des spirales et le point fixe est un *foyer*, attractif (stable) si $\text{tr}(\mathbf{L}) < 0$, ou répulsif (instable) si $\text{tr}(\mathbf{L}) > 0$ (figure 1.2c).
- $\det(\mathbf{L}) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{L}) = 0$: $s_1 = s_2^*$ sont imaginaires pures ; les trajectoires sont des ellipses et le point fixe est un *centre* (figure 1.2d) ; une perturbation n'est ni amplifiée ni amortie, la stabilité est dite neutre.

- $\det(\mathbf{L}) = 0$: \mathbf{L} n'est pas inversible (figure 1.2e). Si $\text{tr}(\mathbf{L}) \neq 0$, zéro est valeur propre simple, et si $\text{tr}(\mathbf{L}) = 0$, zéro est valeur propre double. Dans ce dernier cas, si le sous-espace propre est de dimension 2, \mathbf{L} est diagonalisable ($\mathbf{L} = \mathbf{0}$) sinon \mathbf{L} est un bloc de Jordan de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des trois premiers cas, la partie réelle de chacune des deux valeurs propres est *non nulle* et le point fixe est dit *hyperbolique* ; dans les deux derniers, les parties réelles sont nulles et le point fixe est dit *non hyperbolique*.

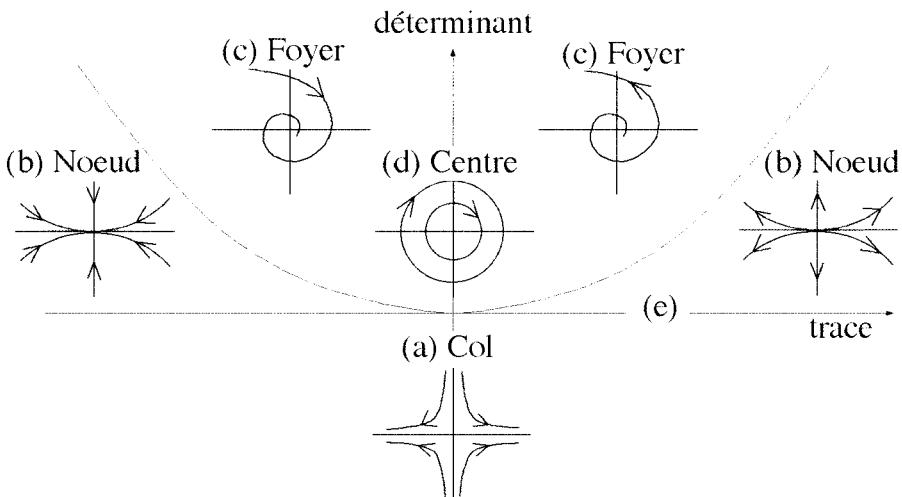


FIG. 1.2 – Types de points fixes dans \mathbf{R}^2 . La parabole correspond à $\text{tr}^2\mathbf{L} - 4\det\mathbf{L} = 0$ (discriminant du polynôme caractéristique nul).

Considérons par exemple la stabilité du point fixe $(0, 0)$ du système (1.3). Le système linéarisé s'écrit

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\mu x_2 - \omega_0^2 x_1. \quad (1.6)$$

La trace et le déterminant de la matrice de ce système sont respectivement $-\mu$ et ω_0^2 . Les valeurs propres sont $s_{\pm} = \frac{1}{2}(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\omega_0^2})$. Pour $\mu < -2\omega_0$ ou $\mu > 2\omega_0$, le discriminant est positif, les valeurs propres sont réelles et de même signe, celui de $-\mu$; le point fixe est un noeud, et la détermination des vecteurs propres permet de tracer le portrait de phase local. Pour $-2\omega_0 < \mu < 2\omega_0$, les valeurs propres sont complexes conjuguées, et le point fixe est un foyer, ou un centre pour $\mu = 0$. En définitive, $(0, 0)$ est attractif (stable) pour $\mu > 0$ et répulsif (instable) pour $\mu < 0$. Une analyse semblable peut être menée pour

l'autre point fixe $(\pi, 0)$, pour lequel la trace et le déterminant de la matrice \mathbf{L} sont respectivement $-\mu$ et $-\omega_0^2$; les valeurs propres sont réelles de signe opposé, et le point fixe est donc un col.

1.2.3 Stabilité d'un point fixe non hyperbolique

Une situation particulière est celle où les valeurs propres sont toutes à partie réelle négative, sauf une (ou plusieurs) dont la partie réelle est *nulle*. Le point fixe est alors dit *non hyperbolique*, et l'étude de stabilité linéaire ne permet pas de conclure quant à sa stabilité. Cette stabilité est alors déterminée par les termes non linéaires, dont l'effet peut être stabilisant ou déstabilisant. Considérons par exemple l'oscillateur décrit par le système (1.3) dans le cas non dissipatif ($\mu = 0$), avec une force supplémentaire $\beta(d\theta/dt)^3$; le système linéarisé autour du point fixe $(0, 0)$ possède deux valeurs propres $\pm i\omega_0$, purement imaginaires : on ne peut rien conclure de l'étude de stabilité linéaire. On peut cependant, dans ce cas particulier, montrer simplement sans linéarisation que le point fixe est stable pour $\beta > 0$ et instable pour $\beta < 0$. En effet, multiplions la première équation de (1.3) par x_1 et la seconde par x_2 , et additionnons les deux équations ; il vient, en introduisant la distance au point fixe $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$$r \frac{dr}{dt} = -\beta x_2^4. \quad (1.7)$$

La distance r varie donc de façon monotone au cours du temps, en décroissant pour $\beta > 0$ et en croissant pour $\beta < 0$, d'où le résultat.

1.3 Bifurcations

1.3.1 Définition

Le comportement d'un système physique est en général dépendant d'un certain nombre de paramètres, par exemple le coefficient d'amortissement μ pour l'oscillateur (1.3). Une question importante est la suivante : comment se comporte le système lorsqu'un de ces paramètres varie ? La réponse est qu'il ne se passe pas grand-chose en général, sauf lorsque le paramètre traverse des valeurs particulières où le comportement du système change qualitativement. Considérons par exemple l'oscillateur (1.3) ; lorsque μ varie sans changer de signe, l'oscillateur est seulement plus ou moins instable lorsque μ est négatif, ou plus ou moins stable lorsque μ est positif. Par contre, lorsque μ traverse la valeur critique $\mu_c = 0$, la stabilité de la position d'équilibre change. On dit que l'oscillateur subit une *bifurcation* pour $\mu = \mu_c$. La définition générale d'une bifurcation de point fixe est la suivante.

Définition. Soit un système dynamique dépendant d'un paramètre μ et présentant un point fixe $\mathbf{a}(\mu)$. Ce système subit une *bifurcation* de point fixe

pour $\mu = \mu_c$ si, pour cette valeur du paramètre, le système linéarisé au point fixe \mathbf{a} admet une valeur propre à partie réelle nulle, *i.e.* le point fixe est non hyperbolique.

La suite de cette section est dédiée à l'étude de trois bifurcations importantes.

1.3.2 Bifurcation nœud-col

Considérons le système mécanique représenté sur la figure 1.3. Une tige de longueur l est montée sur un pivot à son extrémité inférieure, et porte à son autre extrémité une masse m ; sa position angulaire est repérée par l'angle θ . Un ressort spiral de raideur angulaire C est lié d'un côté à la tige et de l'autre côté à un plan pouvant être incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale; ce ressort tend à ramener la tige dans la direction normale au plan de liaison. On prend en compte un moment de frottement visqueux $-mgl\tau^*d\theta/dt$ autour du pivot, où τ^* est un temps de relaxation.

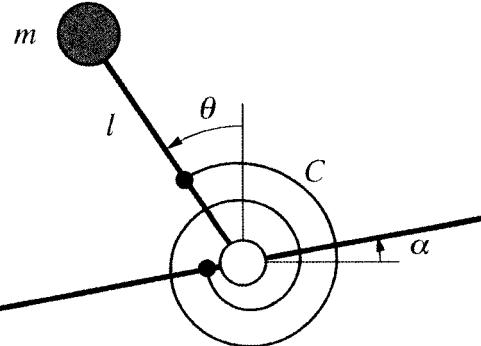


FIG. 1.3 – Schéma de l'oscillateur décrit par (1.10).

Choisissons m , l et $\sqrt{l/g}$ comme échelles de masse, de longueur et de temps, le potentiel de l'oscillateur dans le champ de la pesanteur prend la forme

$$V(\omega^2, \alpha, \theta) = \frac{\omega^2}{2}(\theta - \alpha)^2 + \cos \theta - 1, \quad (1.8)$$

où la pulsation propre ω est définie par

$$\omega^2 = \frac{C}{mgl}. \quad (1.9)$$

Avec les mêmes échelles, le moment de frottement prend la forme $-\tau d\theta/dt$, où $\tau = \tau^*/\sqrt{l/g}$ est le temps de relaxation adimensionnel. L'équation du

mouvement s'écrit alors²

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \tau \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}. \quad (1.10)$$

On peut réécrire cette équation sous la forme d'un système dynamique de deux EDO dans l'espace des phases $(\theta, d\theta/dt)$. Les points fixes (états d'équilibre) sont définis par $d\theta/dt = 0$ et θ racine de l'équation des extrema du potentiel :

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} = \omega^2(\theta - \alpha) - \sin \theta. \quad (1.11)$$

La dépendance des états d'équilibre vis-à-vis des deux paramètres ω^2 et α peut être déterminée graphiquement, ou, pour $|\alpha|$ petit et ω^2 voisin de l'unité, par un développement en série de Taylor autour de $\theta = 0$. Pour $|\alpha|$ petit et $\omega^2 < 1$, le système possède un état d'équilibre instable θ_0 proche de $\theta = 0$ (le point fixe correspondant est un col), et deux états d'équilibres stables de part et d'autre, $\theta_- < 0$ et $\theta_+ > 0$ (les points fixes correspondants sont des noeuds). Pour $\alpha < 0$, l'état $\theta_- < 0$ a le potentiel le plus bas et c'est donc l'état le plus stable, alors que l'état $\theta_+ > 0$ est seulement métastable. Cette situation est renversée pour $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 0$, les potentiels des équilibres θ_- et θ_+ sont égaux. Pour $\alpha > 0$ et $\omega^2 < 1$. (figure 1.4a).

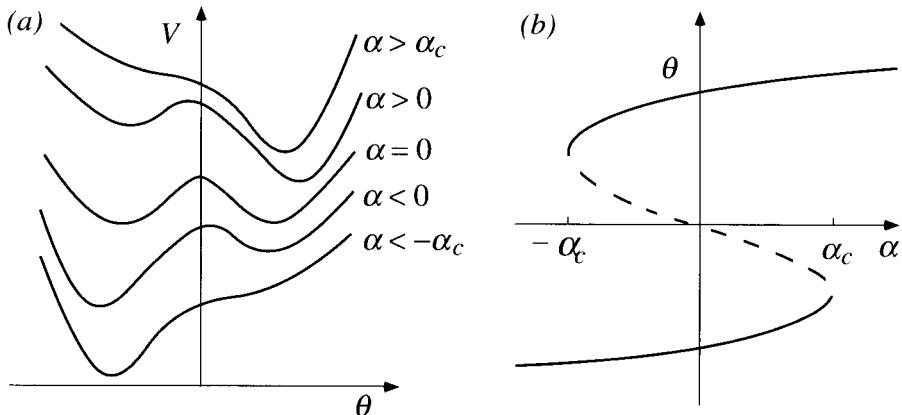


FIG. 1.4 – (a) Potentiel $V(\theta)$ pour différentes inclinaisons α (la position verticale relative des différentes courbes est arbitraire). (b) Diagramme de bifurcation ; trait continu = états d'équilibre stables, trait interrompu = états instables.

Considérons le système dans l'état θ_- avec α positif et petit; pour α croissant, les équilibres métastable θ_- et instable θ_0 se rapprochent, et il existe une inclinaison critique α_c pour laquelle les deux équilibres coalescent. Pour

2. Charru (1997) présente une extension de cette étude au cas d'une chaîne d'oscillateurs couplés.

$\alpha > \alpha_c$, le système saute sur la branche stable θ_+ . Pour $\alpha = \alpha_c$ le portrait de phase du système subit donc un changement qualitatif, par coalescence du noeud stable $(\theta_-, 0)$ et du col instable $(\theta_0, 0)$. Ce changement qualitatif correspond à une bifurcation : pour $\alpha = \alpha_c$, une valeur propre du système linéarisé autour de chacun des points fixes $(\theta_0, 0)$ et $(\theta_-, 0)$ traverse l'axe imaginaire (vérification laissée en exercice). La bifurcation correspondante est appelée *bifurcation nœud-col*. Une bifurcation similaire survient pour α décroissant, lorsque α atteint la valeur $-\alpha_c$. La figure 1.4b, qui représente les points fixes en fonction du paramètre α , est appelée *diagramme de bifurcation*. À chacune des bifurcations, le système saute d'une branche à une autre, et la valeur critique du paramètre de bifurcation α est différente selon que celui-ci croît ou décroît : le système présente une hystéresis.

L'exemple ci-dessus a mis en évidence une bifurcation par coalescence de deux points fixes, appelée bifurcation nœud-col. La définition générale d'une telle bifurcation est la suivante.

Définition. Un système dynamique présentant un point fixe stable \mathbf{a} subit une *bifurcation nœud-col* en $\mu = \mu_c$ si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de \mathbf{a} traverse l'axe imaginaire pour $\mu = \mu_c$. Pour μ voisin de μ_c , le comportement du système est alors gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation nœud-col :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2. \quad (1.12)$$

La figure 1.5 présente le diagramme de bifurcation correspondant.

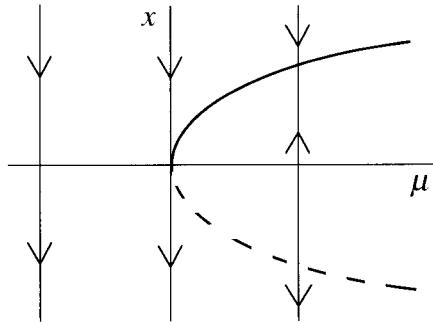


FIG. 1.5 – Diagramme de la bifurcation nœud-col ; (—), états stables ; (---), états instables.

1.3.3 Bifurcation fourche

Reprenons l'oscillateur de la figure 1.3, et considérons maintenant ce qui se passe lorsqu'on fait varier ω^2 pour $\alpha = 0$ fixé. Pour ω^2 croissant, la barrière

de potentiel entre les deux minima s'aplatit, et les trois équilibres coalescent pour $\omega_{c0}^2 = 1$ (figure 1.6a). Pour $\omega^2 > \omega_{c0}^2$ ne subsiste que l'équilibre stable $\theta = 0$. Ce changement qualitatif du portrait de phase correspond encore à une bifurcation : pour $\omega^2 = \omega_{c0}^2$, une valeur propre du système linéarisé autour de $(0, 0)$ traverse l'axe imaginaire (vérification laissée en exercice). La bifurcation correspondante est appelée *bifurcation fourche supercritique* ; la figure 1.6b présente le diagramme de bifurcation correspondant. Le qualificatif supercritique signifie qu'à la traversée de la bifurcation, les positions d'équilibre varient continûment, sans discontinuité.

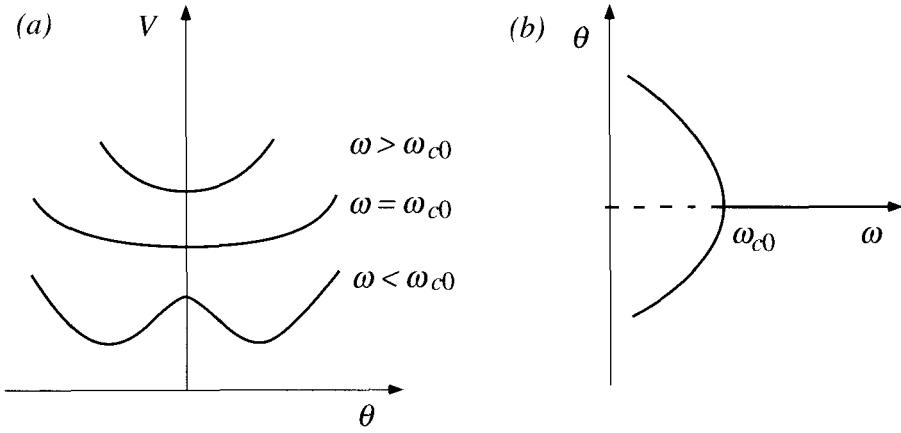


FIG. 1.6 – (a) Potentiel pour différents ω et pour $\alpha = 0$ (la position verticale relative des différentes courbes est arbitraire). (b) Diagramme de bifurcation ; (—), états stables ; (---), états instables.

L'exemple précédent a mis en évidence une bifurcation fourche ; l'existence de cette bifurcation est liée de façon cruciale à la symétrie du problème par rapport à $\theta = 0$, i.e. l'invariance de l'équation par la transformation de θ en $-\theta$, dite invariance par réflexion. Plus généralement, une bifurcation fourche est définie comme suit.

Définition. Un système dynamique invariant par réflexion, i.e. invariant par la transformation $x \rightarrow -x$ (liée à une symétrie du système physique), et présentant un point fixe stable \mathbf{a} , subit une *bifurcation fourche* en $\mu = \mu_c$ si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de \mathbf{a} traverse l'axe imaginaire pour $\mu = \mu_c$. Pour μ voisin de μ_c , le comportement du système est gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation fourche :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \delta x^3, \quad \delta = \pm 1. \quad (1.13)$$

Le cas $\delta = 1$ est dit supercritique, le cas $\delta = -1$ est dit sous-critique.

La figure 1.7 présente les diagrammes de bifurcation correspondants. Dans le cas supercritique, l'état d'équilibre $x = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$; dans ce dernier cas, toute perturbation de cet état d'équilibre fait bifurquer le système vers l'une des branches stables $\pm\sqrt{\mu}$. Dans le cas sous-critique et $\mu < 0$, $x = 0$ est toujours stable vis-à-vis de perturbations d'amplitude infinitésimale, mais une perturbation d'amplitude supérieure à $\pm\sqrt{-\mu}$, *i.e.* d'amplitude finie, peut le déstabiliser; pour $\mu > 0$, toute perturbation de l'état $x = 0$ fait bifurquer le système vers un comportement dont la forme normale (1.13) ne peut pas rendre compte : la considération de termes d'ordre supérieur (de degré cinq au moins) serait nécessaire.

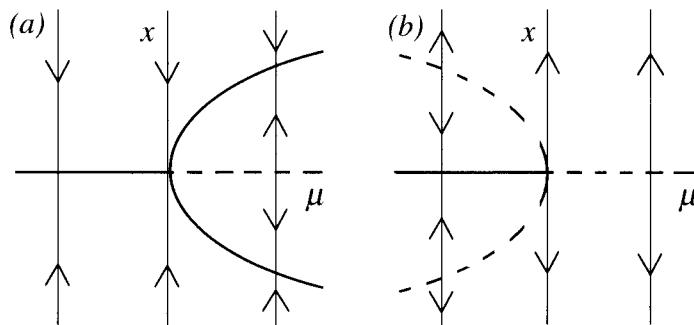


FIG. 1.7 – Diagrammes de la bifurcation fourche : (a) supercritique ($\delta = +1$), (b) sous-critique ($\delta = -1$) ; (—), états stables ; (---), états instables.

Que se passe-t-il pour un système dont la symétrie de réflexion $x \rightarrow -x$ serait brisée par une imperfection ? Reprenons l'oscillateur de la figure 1.3 avec un angle α petit non nul, ce qui brise l'invariance $\theta \rightarrow -\theta$, et considérons l'effet d'une variation de ω . Pour ω petit, on a toujours deux positions d'équilibre stables de part et d'autre d'une position instable, mais les positions stables ne sont plus symétriques par rapport à la verticale, et la position instable ne coïncide plus avec la verticale (figure 1.8a). Pour α croissant, les deux branches stables se rapprochent comme pour $\alpha = 0$, mais ne se rejoignent pas : la branche inférieure coalesce avec la branche instable pour $\omega_c^2(\alpha) < \omega_{c0}^2$ (figure 1.8b) : on retrouve une bifurcation noeud-col. Cet exemple montre que la bifurcation fourche est un cas particulier, qui correspond à un système invariant par le changement de variable $\theta \rightarrow -\theta$, *i.e.* présentant une symétrie de réflexion. La brisure de cette symétrie fait disparaître la bifurcation fourche au profit d'une bifurcation noeud-col. Cette dernière est dite *générique* c'est-à-dire robuste vis-à-vis de termes supplémentaires dans l'équation (1.13) décrivant les « imperfections » du système physique considéré.

Une autre perturbation d'une bifurcation fourche peut survenir, dont le diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 1.9. Cette autre brisure de symétrie, qui a pour effet de décentrer les branches paraboliques, restitue une bifurcation noeud-col pour $\mu < 0$, mais une autre bifurcation survient en

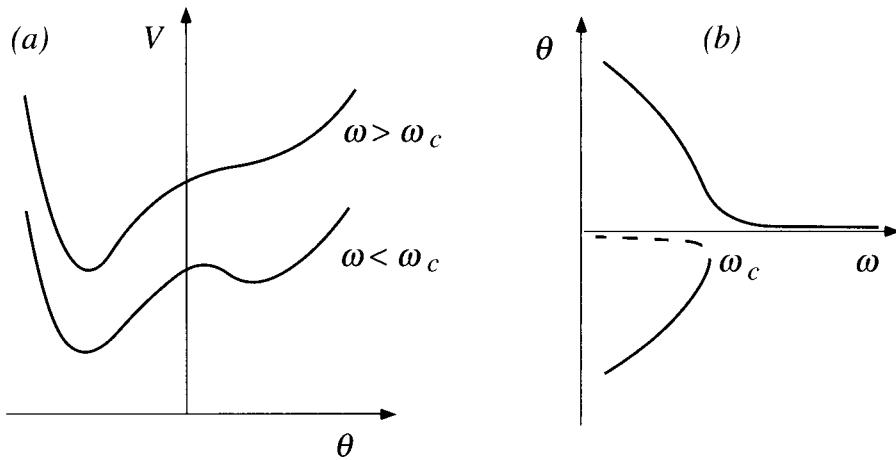


FIG. 1.8 – (a) Potentiel pour différents ω et pour $\alpha \neq 0$. (b) Diagramme de bifurcation ; (—), états stables ; (- -), états instables. Une bifurcation nœud-col survient pour $\omega = \omega_c$.

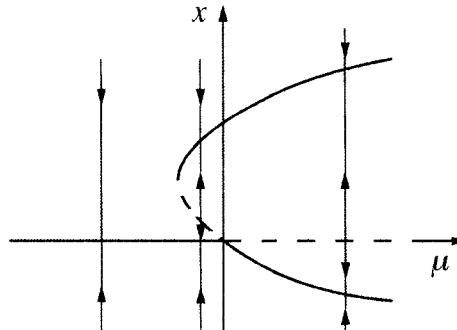


FIG. 1.9 – Apparition d'une bifurcation transcritique par brisure de symétrie d'une bifurcation fourche ; (—), états stables ; (---), états instables.

$\mu = 0$; cette autre bifurcation, dite *transcritique*, correspond à l'échange de stabilité de deux branches de points fixes. Une illustration en est donnée dans le chapitre 11.

1.3.4 Bifurcation de Hopf

Nous venons de voir qu'une bifurcation nœud-col pour $\mu = \mu_c$ correspond à la traversée de l'axe imaginaire par une valeur propre réelle s : $s(\mu_c) = 0$. La bifurcation de Hopf (1942) correspond, elle, à la traversée de l'axe imaginaire par un couple de valeurs propres complexes conjuguées $s = \sigma \pm i\omega$,

avec $\sigma(\mu_c) = 0$. Par exemple, l'oscillateur (1.3) subit une bifurcation de Hopf pour $\mu = 0$, comme le montrent les valeurs propres du système linéarisé (1.6). Une bifurcation de Hopf se traduit souvent par l'apparition d'un comportement oscillant, correspondant dans l'espace des phases à un *cycle limite*. En coordonnées polaires, la forme normale de cette bifurcation est

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - \delta r^3, \quad \delta = \pm 1, \quad (1.14)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega. \quad (1.15)$$

Le cas $\delta = 1$ est dit supercritique, le cas $\delta = -1$ est dit sous-critique. La figure 1.10 présente le diagramme correspondant au premier cas. Ce type de bifurcation sera étudié plus en détail dans le chapitre consacré aux oscillateurs non linéaires.

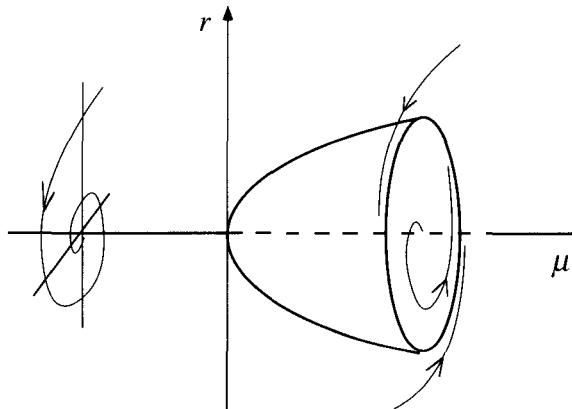


FIG. 1.10 – Diagramme de la bifurcation de Hopf supercritique.

1.4 Illustrations hydrodynamiques

1.4.1 Stabilité d'un film de savon

Trempons deux anneaux de rayon a dans de l'eau savonneuse, et retirons-les ; un film s'est formé entre les deux anneaux (figure 1.11). Augmentons la distance $2d$ entre les anneaux : le film se rompt et disparaît pour $d/a \approx 0,66$ (Taylor & Michael 1973). Pourquoi le film se rompt-il ?

Formes d'équilibre

La forme prise par l'interface est déterminée par la loi de Laplace-Young (1805), d'après laquelle la différence des pressions de part et d'autre d'une

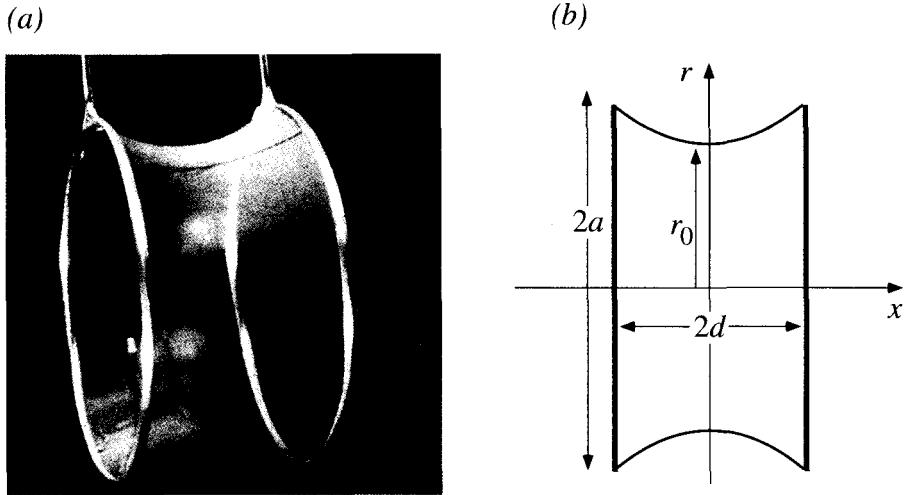


FIG. 1.11 – (a) Film de savon entre deux anneaux circulaires (Guyon, Hulin & Petit 2001) ; (b) section diamétrale de la caténoïde.

interface est égale au produit de la tension interfaciale γ par la courbure du film (Guyon *et al.* 2001) :

$$P_2 - P_1 = \gamma \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right), \quad (1.16)$$

où R' et R'' sont les rayons de courbure dans deux plans perpendiculaires (la somme des courbures $1/R'$ et $1/R''$ est un invariant indépendant du choix de ces plans).

Dans le cas d'un film de savon, les pressions sont égales de part et d'autre : la courbure doit donc être nulle en tout point. La surface vérifiant cette condition est une caténoïde, dont l'expression en coordonnées cylindriques (r, x) est

$$\frac{r}{r_0} = \cosh \frac{x}{r_0}, \quad (1.17)$$

où r_0 est le rayon de la caténoïde au col (figure 1.11b). Ce rayon est défini par la condition de raccord de la caténoïde sur les deux anneaux circulaires, qui s'écrit

$$\frac{a}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}, \quad \text{ou encore} \quad \frac{a}{d} \frac{d}{r_0} = \cosh \frac{d}{r_0}. \quad (1.18)$$

La dernière expression permet de déterminer d/r_0 graphiquement pour a/d donné, à l'intersection de la droite de pente a/d et du cosinus hyperbolique (figure 1.12a). Il apparaît qu'il existe une valeur critique de la pente a/d pour laquelle la droite tangente le cosinus hyperbolique ; cette valeur critique, définie par $d/r_0 = \coth(d/r_0) = 1,200$, correspond à un écartement des anneaux

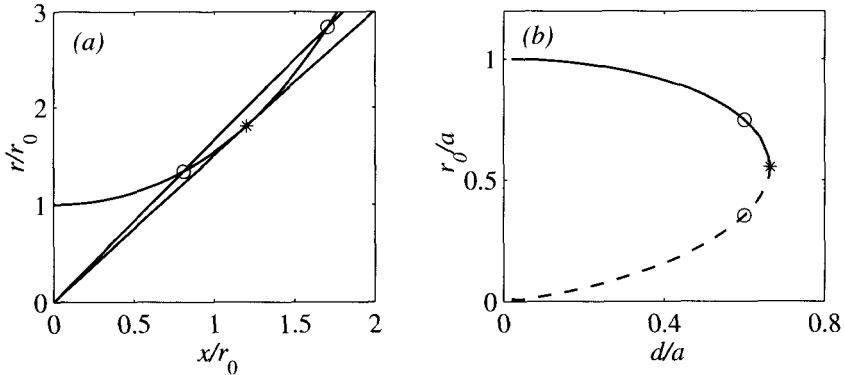


FIG. 1.12 – (a) (o), solutions d/r_0 satisfaisant (1.18) pour $a/d = 0,6$; (*), *idem* pour $a/d = 0,6627$ (point critique); (b) diagramme de la bifurcation nœud-col, montrant les branches stables (—) et les branches instables (---). Noter la correspondance entre ce diagramme et celui de la forme normale (figure 1.5).

$d = 0,663 a$. Pour $d/a < 0,663$, il existe deux solutions pour d/r_0 , situées de part et d'autre de la valeur critique 1,200. Pour $d/a > 0,663$ il n'y a pas de solution, et donc pas de film de savon possible. Expérimentalement, la condition d'existence $d/a < 0,663$ est bien vérifiée, mais on n'observe qu'une seule caténoïde, celle qui correspond au plus grand rayon r_0 . Pourquoi n'observe-t-on jamais l'autre ?

Stabilité des caténoïdes

Étudions donc la stabilité de ces deux caténoïdes en évaluant la variation de la force de rappel exercée par le film sur les anneaux, dans une variation δd de leur distance (Taylor & Michael 1973). Cette force se calcule en projetant sur l'axe de révolution la tension exercée par le film sur l'anneau :

$$F = 4\pi a \gamma / \cosh(d/r_0).$$

Dans une variation δd de la distance, la variation δF de la force de rappel est $\delta F = F'(d)\delta d$ où F' est la dérivée de F par rapport à d . Si $F'(d) < 0$, δF est une force de rappel et le film est stable ; dans le cas contraire, le film est instable. En tenant compte de (1.18) dont la différentiation permet de calculer $r'_0(d)$, on trouve

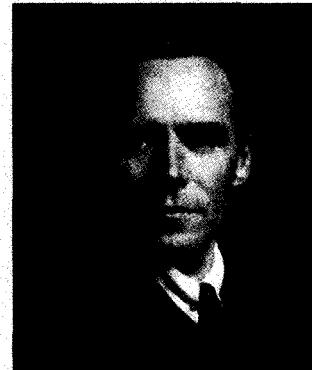
$$F'(d) = \frac{4\pi\gamma}{d/r_0 - \coth(d/r_0)}. \quad (1.19)$$

$F'(d)$ est donc négatif pour la plus petite des deux solutions d/r_0 de (1.18), et le film de plus grand rayon r_0 est donc stable. L'autre solution de (1.18)

correspond à un film instable³. La figure 1.12b montre la variation du rayon au col r_0/a des deux solutions avec la distance d/a . Il apparaît que la valeur critique correspond à la fusion des deux branches stable et instable, et correspond donc à une bifurcation nœud-col.

Geoffrey Ingram Taylor (1886–1975)

Né à Londres, Angleterre, d'un père artiste, peintre et décorateur de paquebots de croisière, et d'une mère fille de George Boole (l'algèbre de Boole). Intérêt précoce pour les sciences, rencontre avec William Thomson (Lord Kelvin). Études à *Trinity College*, Cambridge. Parmi ses premiers travaux, une étude théorique des ondes de choc (Prix Smith) et une étude expérimentale inspirée par J.J. Thomson pour tester la théorie quantique. Nommé sur un poste de *Reader* en Météorologie Dynamique à *Trinity College*, travaux sur la turbulence. Après le naufrage du *Titanic* en 1912, travaille comme météorologue sur le navire *the Scotia* affecté à la surveillance des icebergs dans l'Atlantique Nord ; ses mesures de température, pression et humidité lui serviront pour élaborer un modèle de mélange turbulent de l'air. Durant la Première Guerre mondiale, participe à la conception et à la fabrication des aéroplanes à la *Royal Aircraft Factory* de Farnborough ; il y étudie les contraintes sur les hélices, apprend à piloter et à sauter en parachute. Retourne ensuite à *Trinity College*, et travaille sur les écoulements turbulents en océanographie et sur le problème des corps traversant un fluide en rotation. En 1923, est nommé comme *Research Professor* par la *Royal Society of London*, ce qui lui permet d'abandonner l'enseignement. (*He was not a natural lecturer and not much interested in teaching...* écrira G. Batchelor.) Accomplit de nombreux travaux essentiels en particulier sur la déformation des solides cristallins, et introduit une nouvelle approche statistique des fluctuations de vitesse de la turbulence. Encore Batchelor : *His investigations in the*



3. Le calcul de stabilité plus complet de Taylor & Michael (1973) fait appel au calcul des variations. Le calcul présenté ici, plus court, ne requiert pas le calcul de la dérivée seconde de l'aire de la caténoïde,

$$A = 2\pi r_0^2 \left(\frac{d}{r_0} + \frac{1}{2} \sinh \frac{2d}{r_0} \right).$$

Notons que la variation δF de la force peut aussi s'écrire $\delta F = -E_p''(d)\delta d$, où $E_p = \gamma A$ est l'énergie potentielle du film (énergie libre). La condition de stabilité est donc bien une condition de convexité de l'énergie potentielle ($E_p''(d) > 0$). Remarquons enfin que l'équilibre ne correspond pas à un extremum de l'énergie du film vis-à-vis de variations de d : $E_p'(d) = -F \neq 0$ (voir l'exercice 1.6.6).

mechanics of fluids and solids covered an extraordinary wide range, and most of them exhibited the originality and insight for which he was now becoming famous... The nature of his thinking was like that of Stokes, Kelvin and Rayleigh, although he got more from experiments than any one of these three. Au cours de la Deuxième Guerre mondiale, travaille sur la propagation des ondes de détonation, et poursuit ses recherches à Cambridge jusqu'en 1972, vingt ans après sa retraite. Son nom est associé à plusieurs concepts de turbulence et phénomènes hydrodynamiques, ainsi qu'à trois instabilités fondamentales : Couette-Taylor, Rayleigh-Taylor et Saffman-Taylor. Élu *Fellow of the Royal Society* en 1919, honoré par la *Royal Medal* (1933), la *Copley Medal* (1944) et plus de vingt autres médailles, Chevalier de l'Ordre du Mérite, membre de sociétés académiques de nombreux pays européens, d'URSS et des États-Unis. A publié plus de 250 articles en mathématiques appliquées, physique mathématique, génie mécanique et génie chimique. Passionné de botanique, de voyages et de navigation à voile, nombreuses croisières avec sa femme sur leur bateau⁴.

1.4.2 Stabilité d'une bulle

On considère une bulle de rayon r dans un liquide à la pression p et à la température T (figure 1.13). La bulle contient un mélange de vapeur du liquide et de gaz incondensable (de l'air par exemple). Comment varient le rayon de la bulle et sa stabilité lorsque la pression ou la température du liquide environnant varient ?

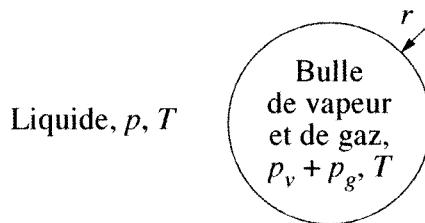


FIG. 1.13 – Bulle de vapeur et de gaz incondensable dans un liquide.

Rayons d'équilibre

Considérant le mélange idéal, la pression dans la bulle est la somme de la pression p_g du gaz incondensable et de la pression $p_v(T)$ de la vapeur en

4. Cette notice biographique, comme plusieurs autres de cet ouvrage, est extraite pour l'essentiel de l'excellent site *MacTutor History of Mathematics* de J.J. O'Connor et E.F. Robertson de l'Université St Andrews, Scotland, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>. La photographie provient aussi de ce site.

équilibre avec le liquide (pression de vapeur saturante)⁵. La loi de Laplace-Young et l'évolution isotherme du gaz (considéré comme parfait) donnent la relation entre pression et rayon :

$$p = p_v(T) + p_g - \frac{2\gamma}{r}, \quad p_g = p_{g0} \frac{r_0^3}{r^3}, \quad (1.20)$$

où l'indice 0 repère un état de référence de la bulle. Pour r suffisamment petit, le terme en $1/r^3$ domine et la pression $p(r)$ est une fonction décroissante. Pour r suffisamment grand, c'est l'autre terme en $-1/r$ qui domine, et la pression $p(r)$ est une fonction croissante. La courbe $p = p(r)$ admet donc un minimum correspondant à un rayon r_c et une pression p_c dans le liquide donnés par

$$r_c = \left(\frac{3p_{g0}r_0^3}{2\gamma} \right)^{1/2}, \quad p_c = p_v - \frac{4\gamma}{3r_c}.$$

En choisissant r_c et γ/r_c comme échelles de longueur et de pression, la relation entre pression et rayon devient

$$\frac{p - p_v(T)}{\gamma/r_c} = \frac{2}{3} \left(\frac{r_c}{r} \right)^3 - 2 \frac{r_c}{r},$$

dont les variations sont présentées sur la figure 1.14. Notons que pour $r/r_c > 0,6$, la pression p est inférieure à la pression de saturation $p_v(T)$ (et éventuellement négative), et l'équilibre du liquide est métastable du point de vue thermodynamique.

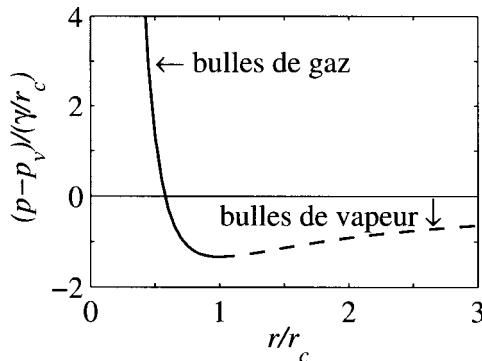


FIG. 1.14 – Variations du rayon d'équilibre r/r_c d'une bulle avec la pression $(p - p_v(T))/(\gamma/r_c)$; (—), bulles stables de gaz incondensable, (- -), bulles instables de vapeur. Le minimum correspond à une bifurcation noeud-col.

5. On ignore ici le déplacement de la courbe d'équilibre liquide-vapeur $p_v(T)$ induit par la tension de surface, qui n'est significatif que pour des bulles de diamètre inférieur au micromètre.

Stabilité du point de vue mécanique

La stabilité des rayons d'équilibre peut être étudiée en évaluant la force nette à laquelle est soumise une demi-bulle écartée de son rayon d'équilibre r . À une perturbation δr de ce rayon, est associée une perturbation δp_g de la pression $p_g + p_v(T)$ de la bulle (la pression de vapeur saturante p_v ne dépend que de la température et ne varie donc pas dans une perturbation lente). La force nette dirigée vers l'extérieur agissant sur une demi-bulle est donc

$$((p_v(T) + p_g + \delta p_g) - p) \pi(r + \delta r)^2 - \gamma 2\pi(r + \delta r).$$

Développant cette expression et linéarisant autour du rayon d'équilibre, il vient

$$2\pi\gamma\delta r + \pi r^2 \delta p_g. \quad (1.21)$$

Pour $r \ll r_c$, la pression dans la bulle est dominée par la pression p_g , la pression de vapeur est négligeable. Cette bulle se comporte comme une bulle de gaz incondensable dont la variation de pression est liée à la variation de rayon par $\delta p_g/p_g + 3\delta r/r = 0$ pour une évolution isotherme. La force nette linéarisée devient

$$(2\pi\gamma - 3\pi r p_g)\delta r = -(2p_g + p)\pi r \delta r.$$

Cette force, de signe opposé à celui de δr , est donc une force de rappel, et la bulle est donc *stable* (ce résultat n'est pas modifié par la considération d'une évolution isentropique).

Pour $r \gg r_c$, la pression dans la bulle est maintenant dominée par la pression p_v de la vapeur, la pression du gaz est négligeable. Cette bulle se comporte comme une bulle de vapeur dont la pression est imposée par la température. La force nette (1.21) agissant sur une demi-bulle se réduit donc au terme $2\pi\gamma\delta r$. Cette force, de même signe que celui de δr , est donc une force qui tend à amplifier la perturbation initiale, et la bulle est donc *instable*.

Stabilité du point de vue thermodynamique

Du point de vue thermodynamique, on peut remarquer tout d'abord que la pente de la courbe $p(r)$ est liée à la compressibilité isotherme de la bulle

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = -3 \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial p}.$$

Cette compressibilité est positive sur la branche décroissante de la figure 1.14, diverge au minimum, et est négative sur la branche croissante. Selon un résultat général de stabilité thermodynamique (Callen 1985), la branche décroissante correspond donc à des états d'équilibre stables, et la branche croissante à des états instables. On retrouve bien le résultat de l'analyse mécanique précédente.

Le résultat général de stabilité thermodynamique sur le signe de la compressibilité repose sur le second principe de thermodynamique d'extremum de l'entropie pour un système isolé. On peut retrouver ce résultat dans le cas particulier considéré ici en faisant intervenir non pas l'entropie (la bulle n'est pas un système isolé), mais l'énergie libre F du système constitué de la bulle et d'une fine pellicule liquide de vapeur condensée⁶. Considérons le cas simple de la bulle de vapeur. Cette bulle est en contact avec un réservoir thermique qui lui impose sa température (mais pas sa pression du fait de la tension de surface). Dans une variation dV de son volume, la variation dF de son énergie libre est donc égale au travail $\delta W_{rev} = -pdV$ des forces extérieures. On en déduit $d(F + pV) = 0$: la fonction $F + pV$ est extrémale. Cette fonction peut s'exprimer en fonction du rayon de la bulle :

$$F + pV = -p_v V + \gamma A + F_0 + pV = -(p_v - p) \frac{4\pi r^3}{3} + \gamma 4\pi r^2 + F_0,$$

où A est l'aire de la bulle, et F_0 est une énergie libre de référence qui fait intervenir le potentiel chimique mais pas le rayon de la bulle. La condition d'équilibre

$$\frac{\partial(F + pV)}{\partial r} = 0$$

redonne la loi de Laplace-Young. Le potentiel $F + pV$ de la bulle croît donc comme r^2 pour les rayons plus petits que le rayon d'équilibre, et décroît au-delà comme $-r^3$. L'extremum du potentiel est un maximum, et l'équilibre de la bulle de vapeur est donc instable.

En conclusion, le minimum de la courbe $p(r)$ de la figure 1.14 correspond à la fusion de deux branches d'états d'équilibre, l'une stable et l'autre instable ; ce minimum correspond donc à une bifurcation nœud-col.

Illustration numérique

À titre d'illustration numérique, considérons une bulle de rayon $r_0 = 1 \mu\text{m}$ dans de l'eau à la pression atmosphérique $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ et à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$. À cette température, la pression de vapeur saturante est $p_v(T_0) = 2,3 \text{ kPa}$, et avec $\gamma = 0,070 \text{ N/m}$, la pression du gaz dans la bulle est $p_{g0} = 239 \text{ kPa}$. Le minimum de la courbe $p(r)$ correspond à $r_c = 2,3 \mu\text{m}$ et $p_c = -38,9 \text{ kPa}$. Le rayon r_0 est donc inférieur à r_c et la bulle est stable. Considérons l'effet sur cet équilibre d'une variation de pression ou de température.

- Lors d'une diminution de pression à température constante, la bulle deviendra instable lorsque la pression du liquide atteindra $p_c = -38,9 \text{ kPa}$, pression négative correspondant à un état de tension métasable de l'eau.

6. L'adjonction de la pellicule de vapeur condensée permet de considérer une bulle de masse constante. On pourrait aussi considérer que le liquide impose le potentiel chimique μ et faire alors intervenir le grand potentiel $\Omega = F - \mu N$.

Si une bulle plus grosse est présente dans l'eau, *i.e.* de rayon r_0 initial supérieur à $1\text{ }\mu\text{m}$, celle-ci deviendra instable pour une pression du liquide moins négative, ou positive, mais toujours inférieure à la pression de saturation $p_v(T_0)$ du fait de la tension de surface.

Lors d'une élévation de température à pression p_0 constante, la bulle deviendra instable lorsque la pression de vapeur saturante atteindra $p_v(T) = p_c + 4\gamma/3r_c = 142\text{ kPa}$ avec $p_c = p_0$, soit $T = 110\text{ }^\circ\text{C}$. Cette température (que la prise en compte de la dépendance de γ avec la température corrigerait un peu) est nettement supérieure à la température $T = 100\text{ }^\circ\text{C}$ d'équilibre d'une interface plane. Une bulle initialement plus grosse ($r_0 > 1\text{ }\mu\text{m}$) deviendra instable pour une température inférieure à $110\text{ }^\circ\text{C}$, mais toujours supérieure à $100\text{ }^\circ\text{C}$ du fait de la tension de surface.

1.4.3 Stabilité d'une suspension colloïdale

De nombreux fluides qui apparaissent homogènes à l'œil nu contiennent en réalité des particules de taille micrométrique en suspension dans un liquide : ces fluides sont appelés colloïdes ou suspensions colloïdales. Citons par exemple les boues (particules d'argile dans l'eau), les encres, les peintures (particules d'oxyde de zinc, blanc, dans de l'eau par exemple), les jus de fruits, les émulsions (gouttelettes d'eau dans de l'huile, ou l'inverse comme le lait). Ces suspensions sont en général instables : les particules ont tendance à se regrouper pour former des agrégats, des « flocs », et les petites gouttelettes coalescent pour en former de plus grosses. L'origine de cette instabilité réside dans les forces de van der Waals, attractives, entre particules. La portée de ces forces est très faible, de l'ordre du micromètre, mais l'agitation thermique ou le mouvement du liquide peuvent rapprocher suffisamment les particules pour que ces forces deviennent dominantes et « collent » les particules. Les colloïdes peuvent être stabilisés par l'adjonction d'additifs, comme des molécules de polymères (surfactants). On peut au contraire chercher à encourager la flocculation pour séparer le liquide des particules, dans le traitement des eaux par exemple.

Nous étudions ici l'influence d'un sel dissous sur la stabilité d'une suspension, phénomène étudié initialement par Faraday (1791-1867). Faraday avait observé qu'un colloïde d'or, préparé en frottant dans l'eau deux électrodes en or reliées à une pile électrique, est stable⁷. Dans ce colloïde, les particules, bien que soumises à l'attraction des forces de van der Waals, restent isolées. La raison en est que les particules d'or portent spontanément des charges négatives sur leur surface, et ces charges maintiennent les particules loin les unes des autres à cause de leur répulsion électrostatique (figure 1.15a). Pour confirmer cette explication, Faraday dissout du chlorure de sodium dans

7. L'expérience est ici décrite telle que la rapportent de Gennes & Badoz (1994).

l'eau. La couleur du colloïde passe du rouge au bleu : la suspension est devenue instable et les particules ont formé des agrégats. Que s'est-il passé ? Le chlorure de sodium s'est dissous ; des ions Na^+ , attirés par les particules d'or chargées négativement, se sont agglomérées sur celles-ci, et ont constitué un écran à l'interaction électrostatique créée par ces charges (figure 1.15b). La force répulsive ayant été neutralisée, la force de van der Waals domine, et la suspension flocale.

Une variante de l'expérience de Faraday consiste à observer l'effet de l'addition de sel dans une suspension de particules d'argile dans de l'eau. Comme les particules d'or, la surface des plaquettes d'argile porte des charges négatives, et la suspension est stable. Ces particules, plus lourdes que l'eau, sédimentent lentement. L'addition de sel rend la suspension instable, et conduit à la flocculation des particules. La vitesse de sédimentation variant comme le carré de la dimension des particules (Guyon *et al.* 2001), cette instabilité se manifeste par une augmentation notable de leur vitesse de sédimentation. Faites l'expérience !

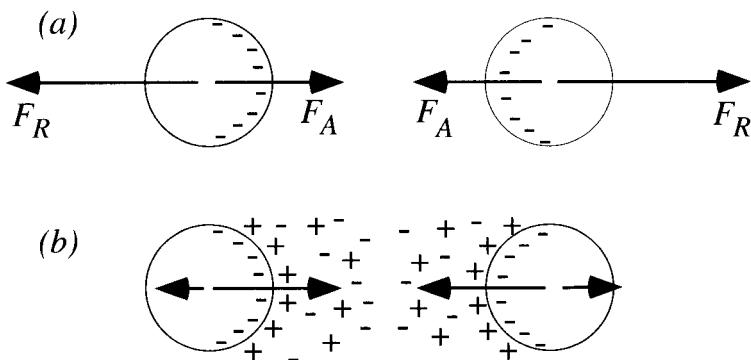


FIG. 1.15 – Forces entre deux sphères chargées. (a) La répulsion électrostatique domine l'attraction de van der Waals : la suspension est stable ; (b) les ions positifs d'un sel dissous font écran à la force électrostatique, et la force attractive domine : la suspension est instable.

Passons à une analyse plus quantitative. Pour deux sphères de rayon a dont les surfaces sont séparées d'une distance $d \ll a$, le calcul du potentiel d'interaction attractif V_A de van der Waals conduit à

$$V_A = -\frac{Aa}{12d} \quad (1.22)$$

où $A = 10^{-19}$ joule est la constante de Hamaker (Probstein 2003). Le potentiel électrostatique répulsif V_R créé par la double couche de charges négatives et positives décroît très rapidement avec la distance, exponentiellement. Au voisinage d'une particule, *i.e.* jusqu'à une distance de l'ordre de son rayon, ce

potentiel est donné par

$$V_R = 2\pi a \epsilon \phi_w^2 e^{-d/\lambda_D}, \quad \lambda_D = \left(\frac{\epsilon k_B T}{2z^2 e^2 N_A C} \right)^{1/2}, \quad (1.23)$$

où ϕ_w est le potentiel à la surface de la particule, et λ_D , la longueur de Debye, représente la portée de la force électrostatique de double couche⁸. Cette portée est d'autant plus faible que la concentration C en ions est plus forte ; pour une solution aqueuse d'ions monovalents, elle est voisine de 1 nm pour une concentration de 10^2 mol m⁻³ et de 10 nm pour 1 mol m⁻³.

La figure 1.16 montre l'allure du potentiel attractif V_A et du potentiel répulsif V_R pour trois concentrations différentes, ainsi que le potentiel net $V_A + V_R$ dans les trois cas. Cette figure montre que la barrière de potentiel, qui maintient les particules séparées, diminue lorsque la concentration augmente. La concentration critique, au-delà de laquelle la suspension est instable, correspond à la disparition de la barrière par fusion du maximum avec le minimum (ce minimum, à droite du maximum, est très « plat »). En termes de systèmes dynamiques, cette fusion de deux états d'équilibre, l'un stable et l'autre instable, correspond à une bifurcation nœud-col, comme pour le film de savon.

1.4.4 Convection dans un anneau

La convection thermique peut être modélisée de façon très schématique par un système de trois EDO, établi par Lorenz (1963). Ce système présente une bifurcation fourche qui représente une transition entre un régime de fluide au repos, où le transfert thermique s'effectue par diffusion, et un régime de rouleaux de convection. Ce système peut s'obtenir simplement de la manière suivante (Welander 1967). Considérons un anneau torique de rayon a , rempli d'un fluide de masse volumique ρ (figure 1.17), plongé dans un gradient vertical de température :

$$\bar{T} = T_0 - T_1 \frac{z}{a} = T_0 - T_1 \cos \phi. \quad (1.24)$$

On s'intéresse aux états stationnaires du fluide à l'intérieur de l'anneau, et à leur stabilité.

Soit $U(t, \phi)$ la vitesse moyenne du fluide dans une section de l'anneau, et $T(t, \phi)$ la température moyenne dans une section. L'équation de conservation de la quantité de mouvement intégrée sur une section de l'anneau s'écrit alors

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \alpha g(T - \bar{T}) \sin \phi - \gamma U. \quad (1.25)$$

8. ϵ est la permittivité électrique de l'électrolyte ($7,1 \times 10^{10}$ C V⁻¹m⁻¹ pour l'eau), $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ est la constante de Boltzmann, z est la valence des ions (1 pour Na⁺ et Cl⁻), $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C est la charge électrique élémentaire et $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol⁻¹ est le nombre d'Avogadro.

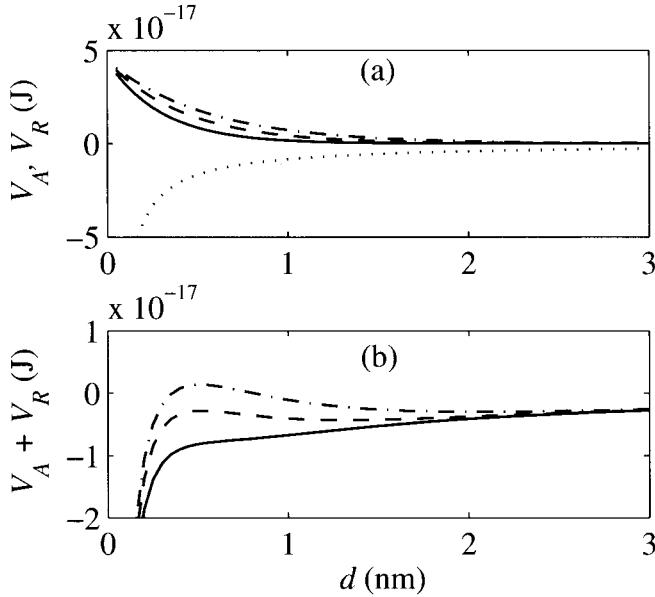


FIG. 1.16 – (a) Potentiel de van der Waals V_A négatif (...) et potentiel électrostatique V_R positif pour des ions monovalents de concentration $C = 300 \text{ mol m}^{-3}$ (- · -), $C = 500 \text{ mol m}^{-3}$ (— · —) et $C = 1\,000 \text{ mol m}^{-3}$ (···); $\phi_w = 0,1 \text{ V}$. (b) Potentiel résultant $V_A + V_R$; pour la concentration la plus élevée, la barrière de potentiel a disparu.

Cette équation s'obtient dans l'approximation de Boussinesq (Rieutord 1997), c'est-à-dire en négligeant les variations de masse volumique, sauf dans le terme de gravité. Elle ne fait pas intervenir d'accélération advective, car l'incompressibilité impose $\partial_\phi U = 0$. La pression p qui y apparaît est l'écart à la distribution hydrostatique $\bar{p}(z)$, solution de l'équation $0 = \partial_z \bar{p} - \bar{p}(z)g$. Le terme suivant correspond à la flottabilité, où le coefficient de dilatation α s'introduit à partir de l'équation d'état

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha dT + \kappa_T dP,$$

qui, en négligeant la compressibilité κ_T et en considérant le coefficient de dilatation constant, s'intègre en

$$\rho - \bar{\rho} = -\alpha \bar{\rho}(T - \bar{T}).$$

Le dernier terme de l'équation (1.25) correspond au freinage visqueux, avec un coefficient γ égal à ν/a^2 à une constante numérique près.

On recherche pour la température une solution de la forme

$$T(t, \phi) = \bar{T} + T_A(t) \sin \phi - T_B(t) \cos \phi, \quad (1.26)$$

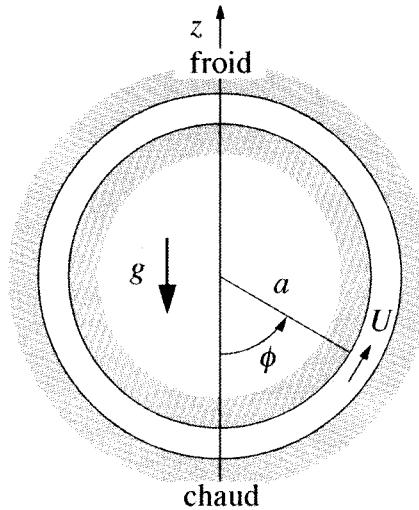


FIG. 1.17 – Anneau fluide plongé dans un gradient vertical de température.

où $T_A(t)$ et $T_B(t)$ sont deux amplitudes. La pression peut être éliminée du problème en intégrant (1.25) de $\phi = 0$ à $\phi = 2\pi$. On obtient alors

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\alpha g}{2} T_A - \gamma U. \quad (1.27)$$

Cette équation montre que si la différence de température $2T_A$ entre les branches gauche et droite de l'anneau est faible, une perturbation de l'état de repos décroît exponentiellement ; sinon, cette différence de température agit comme un forçage déstabilisant.

L'équation de conservation de l'énergie est écrite sous la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U}{a} \frac{\partial T}{\partial \phi} = k(T - \bar{T}). \quad (1.28)$$

Le membre de gauche représente la dérivée partielle de la température, et le membre de gauche correspond au transfert thermique avec l'extérieur ; la dissipation visqueuse est ici négligée, ainsi que le coefficient qui devrait affecter le terme d'advection (la moyenne d'un terme non linéaire n'est pas égal au produit des moyennes). Compte tenu de (1.26), et considérant que (1.28) doit être vérifiée pour tout ϕ , on obtient les deux équations différentielles régissant les variations de T_A et T_B :

$$\frac{dT_A}{dt} = -\frac{U}{a}(T_B - T_1) - kT_A, \quad (1.29a)$$

$$\frac{dT_B}{dt} = \frac{U}{a}T_A - kT_B. \quad (1.29b)$$

Les équations différentielles (1.27) et (1.29) constituent un système dynamique à trois degrés de liberté, U , T_A et T_B , non linéaire (les non-linéarités proviennent de l'advection de la température par l'écoulement). Par un changement d'échelle

$$X = \frac{1}{ka}U, \quad Y = \frac{\alpha g}{2\gamma ka}T_A, \quad Z = \frac{\alpha g}{2\gamma ka}T_B, \quad \tau = kt, \quad (1.30)$$

ce système devient

$$\frac{dX}{d\tau} = -PX + PY, \quad (1.31a)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -Y - XZ + RX, \quad (1.31b)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = -Z + XY, \quad (1.31c)$$

où les paramètres P et R , définis par

$$P = \frac{k}{\gamma}, \quad R = \frac{\alpha g T_1}{2\gamma ka},$$

sont analogues aux nombres de Prandtl et de Rayleigh. Le système (1.31) s'identifie au système obtenu par Lorenz (1963) pour décrire de façon simplifiée les mouvements atmosphériques. L'étude de ce système a révélé qu'un système à trois degrés de liberté pouvait présenter des comportements désordonnés, « imprédictibles », et a joué un rôle essentiel dans la compréhension du chaos déterministe (Bergé, Pomeau & Vidal 1984 ; Schuster & Wolfram 2005).

Les points fixes du système dynamique (1.31) sont $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, qui correspond au fluide au repos, et, pour $r = R - 1$ positif, $(X, Y, Z) = (\pm\sqrt{r}, \pm\sqrt{r}, r)$, qui correspondent à un écoulement stationnaire tournant dans un sens ou dans l'autre.

Étudions la stabilité linéaire du point fixe correspondant au fluide au repos ; linéarisant (1.31) autour de $(0, 0, 0)$, on obtient un système linéaire à coefficients constants dont les solutions sont de type $\exp(st)$. Le système aux valeurs propres ainsi obtenu n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul, soit

$$(\sigma + 1)(\sigma^2 + (P + 1)\sigma - rP) = 0. \quad (1.32)$$

On vérifie aisément que les racines du polynôme du second degré sont réelles, toutes deux négatives pour $r < 0$, et de signe contraire pour $r > 0$. On en conclut que l'état de repos est stable pour $r < 0$, et instable pour $r > 0$.

La stabilité des deux autres branches de points fixes s'étudie de la même façon. Le polynôme caractéristique, identique pour les deux branches, est

$$\sigma^3 + (P + 2)\sigma^2 + (P + 1 + r)\sigma + 2rP = 0. \quad (1.33)$$

Au voisinage du seuil $r = 0$ de l'instabilité du fluide au repos, on peut rechercher les solutions sous la forme d'une série de puissances de r , $\sigma = \sigma^{(0)} + r\sigma^{(1)} + \dots$, d'où il vient :

$$\sigma_1 = -\frac{2rP}{P+1} + \mathcal{O}(r^2), \quad (1.34a)$$

$$\sigma_2 = -1 + \mathcal{O}(r), \quad (1.34b)$$

$$\sigma_3 = -(P+1) + \mathcal{O}(r). \quad (1.34c)$$

Ces trois racines sont négatives, les branches $(X, Y, Z) = (\pm\sqrt{r}, \pm\sqrt{r}, r)$ sont donc stables, et la bifurcation en $r = 0$ est une bifurcation fourche supercritique.

On peut aller plus loin en remarquant que le polynôme caractéristique (1.33), de la forme $\sigma^3 + A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$, est à coefficients réels positifs : une racine réelle ne peut être que négative, et une instabilité correspond donc nécessairement à une racine complexe $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. Le seuil d'instabilité des branches $(X, Y, Z) = (\pm\sqrt{r}, \pm\sqrt{r}, r)$ correspond donc à $\sigma_r = 0$. On montre alors que pour $P < 2$, les branches $(X, Y, Z) = (\pm\sqrt{r}, \pm\sqrt{r}, r)$ sont stables pour tout R , et que pour $P > 2$, elles deviennent instables pour $R = P(P+4)/(P-2)$, par une bifurcation de Hopf (Glendinning 1994).

1.4.5 Double diffusion thermique et massique

La présence d'un gradient de concentration d'un sel dissous, en plus d'un gradient de température, conduit à des phénomènes d'instabilité remarquables, comme le développement de doigts de sel. Ce phénomène, illustré sur la figure 1.18, survient lorsque la concentration en sel est plus élevée en haut qu'en bas. L'eau salée étant plus dense que l'eau douce, une telle distribution de concentration saline est instable, d'où les doigts observés.

Nous étudions ici la situation opposée d'une distribution de concentration saline $C(z)$ *stabilisante*, c'est-à-dire induisant une masse volumique décroissant avec l'altitude. Cette masse volumique est donnée par l'équation d'état $\rho = \rho(P, T, C)$, dont la différentielle s'écrit, en négligeant la compressibilité :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha dT + \beta dC, \quad (1.35)$$

où $\alpha > 0$ est le coefficient de dilatation thermique, et $\beta > 0$ est un coefficient analogue pour les variations de masse volumique avec la concentration en sel.

Au voisinage de l'altitude z_0 , le profil de concentration est

$$\bar{C}(z) = C_0 + C'_0(z - z_0),$$

où C_0 et C'_0 sont la concentration et le gradient de concentration à l'altitude z_0 . Une stratification stable correspond à une masse volumique $\bar{\rho}(z)$ décroissant avec l'altitude, et comme le coefficient β est positif, C'_0 doit donc être

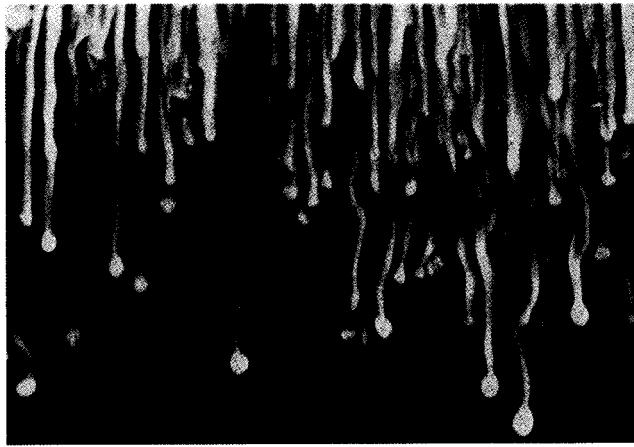


FIG. 1.18 – Développement de doigts d'eau salée descendants, formés en versant une solution d'eau salée dans de l'eau douce présentant un gradient de température stabilisant. Les doigts sont rendus visibles en additionnant de la fluorescéine à l'eau salée et en éclairant par dessous au travers d'une fente (Huppert & Turner 1981).

négatif. On étudie l'effet, sur cette stratification stable, d'une distribution de température

$$\bar{T}(z) = T_0 + T'_0(z - z_0),$$

avec les mêmes notations que pour le profil de concentration.

Afin de simplifier l'analyse, on considère ici une particule fluide déplacée verticalement à partir de sa position initiale z_0 (figure 1.19), et on étudie son mouvement sous l'effet de son poids et de la force d'Archimède ; les autres forces sont négligées. On fait de plus les hypothèses suivantes :

- la diffusivité thermique de l'eau étant cent fois plus grande que la diffusivité moléculaire du sel, on considère que, dans son mouvement, la particule conserve sa concentration initiale C_0 ;
- on confond dans le terme d'inertie la masse volumique ρ de la particule avec sa masse volumique non perturbée $\bar{\rho}$ (approximation de Boussinesq) ;
- le taux de variation de la température $T(z, t)$ de la particule fluide est proportionnel à l'écart entre la température de la particule et celle $\bar{T}(z)$ du fluide environnant (simplification de l'équation de conservation de l'énergie), soit

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \bar{T}), \quad (1.36)$$

où k est une constante.

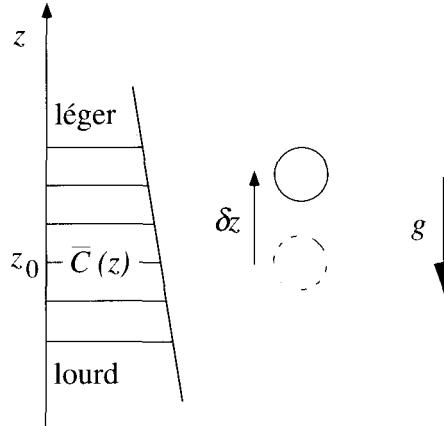


FIG. 1.19 – Particule fluide déplacée dans un fluide stratifié en densité par un gradient de concentration.

Considérons tout d'abord le cas d'un gradient de température nul. Une particule déplacée de sa position d'équilibre z_0 à la position $z_0 + \delta z$ est soumise à son poids $-\bar{\rho}(z_0)V_0g\mathbf{e}_z$ et à la force d'Archimède $\bar{\rho}(z_0 + \delta z)V_0g\mathbf{e}_z$, où V_0 est le volume constant de la particule. L'équation de son mouvement est donc

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = g\beta C'_0\delta z.$$

Pour $C'_0 < 0$, la force verticale nette est une force de rappel qui induit des oscillations de la particule avec une pulsation $N^2 = -g\beta C'_0$, appelée fréquence de Brunt-Väisälä.

Considérons maintenant un gradient de température T'_0 non nul. Une particule déplacée de δz est soumise à son poids $-\bar{\rho}(z_0)V_0g\mathbf{e}_z$, comme précédemment, et à la force d'Archimède $\bar{\rho}(z_0 + \delta z)(V_0 + \delta V)g\mathbf{e}_z$, où $\delta V = V_0\alpha\delta T$ est la variation de son volume liée à sa variation de température $\delta T = T - T_0$. L'équation du mouvement devient

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta z = \alpha g\delta T + \beta C'_0 g\delta z. \quad (1.37)$$

Introduisant la variation de température δT dans l'équation de conservation de l'énergie (1.36), celle-ci devient

$$\frac{d}{dt}\delta T = -k\delta T + kT'_0\delta z. \quad (1.38)$$

Le système (1.37-1.38) se présente comme un système différentiel linéaire à coefficients constants : il admet des solutions exponentielles de la forme

$\exp(\sigma t)$ non nulles pourvu que la valeur propre σ soit solution du polynôme caractéristique

$$(\sigma + k)(\sigma^2 + N^2) - \alpha g k T'_0 = 0. \quad (1.39)$$

Pour un gradient de température T'_0 faible, on peut chercher les valeurs propres comme des perturbations σ' des valeurs propres $\pm iN$ correspondant à un gradient de température nul, soit $\sigma = \pm iN + \sigma'$. Il vient alors

$$\sigma'_\pm = \frac{-N \pm ik}{2N(N^2 + k^2)} \alpha g k T'_0. \quad (1.40)$$

La partie imaginaire de ces valeurs propres correspond à la correction de la fréquence de Brunt-Väisälä. La partie réelle correspond à un amortissement de l'oscillation si le gradient de température T'_0 est positif, et à une amplification si ce gradient est négatif. Pour $T'_0 = 0$, le couple de valeurs propres complexes conjuguées traverse l'axe imaginaire en $\pm N$: il s'agit bien d'une bifurcation de Hopf. On peut interpréter physiquement ce résultat en remarquant que pour $T'_0 < 0$, la particule subit, en plus de la force de rappel liée au gradient de concentration qui entretient des oscillations à la fréquence N , une force de rappel supplémentaire liée au gradient de température. Ainsi, la particule, rappelée plus fortement, traverse sa position initiale avec une vitesse plus grande, puis dépasse sa position extrême antérieure : l'amplitude des oscillations augmente.

1.5 Non-normalité de l'opérateur linéarisé

1.5.1 Croissance algébrique transitoire

Une étude de stabilité linéaire ne peut conclure qu'à la stabilité d'un état d'équilibre vis-à-vis de perturbations d'amplitude « infinitésimale », à strictement parler. Or, dans la réalité, les perturbations (fluctuations diverses, vibrations, etc.) ont une amplitude finie. Très heureusement, il s'avère que pour de nombreux systèmes physiques, les prédictions d'une analyse de stabilité linéaire sont bien vérifiées expérimentalement pour des amplitudes (normalisées par une échelle caractéristique du problème) de l'ordre de 10^{-2} ou même 10^{-1} pour lesquelles les effets non linéaires restent négligeables. Cependant, le domaine de validité de l'analyse linéaire est parfois restreint à des perturbations d'amplitude vraiment très petite, disons 10^{-3} , supérieure à celle des « bruits » ambients ordinaires ; alors, en dehors d'expérimentations très contrôlées où ces bruits sont maîtrisés, les prédictions peuvent ne pas correspondre aux observations.

L'effet d'un bruit est en particulier crucial au voisinage d'une bifurcation sous-critique. Considérons le cas simple d'une bifurcation fourche sous-critique dont la forme normale est donnée par l'équation (1.13). Comme le montre le diagramme de bifurcation, pour $\mu < 0$, l'équilibre $x = 0$ est stable vis-à-vis

de perturbations infinitésimales mais instable si la perturbation initiale est supérieure à $\sqrt{-\mu}$. Ainsi, si le système est soumis à un bruit d'amplitude caractéristique ϵ , la bifurcation pour μ croissant surviendra pour $\mu \approx -\epsilon^2$ et non pas pour $\mu = 0$. Expérimentalement, on observera une dispersion des seuils de bifurcation mesurés, liés au caractère aléatoire du bruit.

Le phénomène décrit ci-dessus devient dramatique pour des systèmes pour lesquels certaines perturbations, bien que décroissant exponentiellement aux temps longs, peuvent croître de façon transitoire. Cette *croissance transitoire* peut amplifier l'énergie initiale de la perturbation d'un facteur 10^2 ou 10^3 ; les effets non linéaires deviennent alors significatifs, et peuvent prendre le relais pour déstabiliser définitivement le système. Comme illustré ci-dessous à partir d'un exemple simple, ce phénomène est lié à la non-normalité de l'opérateur linéarisé, *i.e.* au caractère non orthogonal des vecteurs propres. Pour une introduction plus complète à ce problème, voir Trefethen, Trefethen, Reddy & Driscoll (1993) et l'ouvrage de Schmid & Henningson (2001, §4).

Considérons le système dynamique linéaire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

où \mathbf{A} est un bloc de Jordan. Ce système admet une valeur propre nulle double, à laquelle est associé le vecteur propre unique $\mathbf{e} = (1, 0)$. La solution de ce système pour la condition initiale (x_{10}, x_{20}) est

$$x_1 = x_{20}t + x_{10}, \quad x_2 = x_{20}.$$

La solution croît donc au cours du temps de façon non exponentielle, mais *algébrique*.

Considérons maintenant le système « perturbé »

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\epsilon & 1 \\ 0 & -2\epsilon \end{pmatrix}, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (1.42)$$

Ce système admet l'origine $(0, 0)$ comme seul point fixe, et ce point fixe est stable : les valeurs propres sont $-\epsilon$ et -2ϵ , et les vecteurs propres associés sont $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (1, -\epsilon)$, respectivement. Notons que l'angle entre ces deux vecteurs est d'ordre ϵ , et qu'il est donc petit. La solution de ce système pour la condition initiale (x_{10}, x_{20}) est

$$\mathbf{x} = x_{10} e^{-\epsilon t} \mathbf{e}_1 + x_{20} e^{-2\epsilon t} \mathbf{e}_2. \quad (1.43)$$

Comment, lorsque ϵ tend vers zéro, la décroissance exponentielle se raccorde-t-elle à la croissance algébrique pour $\epsilon = 0$? Pour répondre à cette question, étudions la façon dont l'énergie $E(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$ de la perturbation varie au cours du temps. Aux temps longs, *i.e.* pour $\epsilon t \gg 1$, le comportement de la solution (1.43) est sans surprise : la composante suivant la direction la plus stable \mathbf{e}_2 s'éteint, et la solution se comporte comme

$$\mathbf{x} \sim x_{10} e^{-\epsilon t} \mathbf{e}_1,$$

dont l'énergie décroît exponentiellement. La réponse à la question doit être cherchée aux temps courts ($\epsilon t \ll 1$), où un développement de l'énergie en série de Taylor donne

$$E(t) = (x_{10} + x_{20})^2 + (\epsilon x_{20})^2 - (2x_{10}^2 + 4(1 + \epsilon^2)x_{20}^2 + 6x_{10}x_{20})\epsilon t + \mathcal{O}(\epsilon^2 t^2). \quad (1.44)$$

Ce développement montre que l'énergie peut croître aux temps courts si le facteur de ϵt est négatif, ce qui se produit pour des conditions initiales particulières qu'il s'agit de déterminer. Le système dynamique étant linéaire, on ne perd aucune généralité en considérant x_{10} positif et en posant $x_{20} = -ax_{10}$ (le cas exclu $x_{10} = 0$ correspond au cas trivial d'une condition initiale sur la direction propre la plus stable). La discussion du signe du facteur de ϵt montre alors qu'une condition nécessaire de croissance aux temps courts est $\epsilon^2 < 1/8$, et que les conditions initiales pour lesquelles l'énergie est amplifiée sont telles que

$$a_- < a < a_+, \quad \text{avec} \quad a_\pm = \frac{3 \pm \sqrt{1 - 8\epsilon^2}}{4(1 + \epsilon^2)}. \quad (1.45)$$

Ainsi, toutes les conditions initiales situées dans un secteur du plan des phases (x_1, x_2) limité par des droites de pente $-a_-$ et $-a_+$ (dans la base des vecteurs propres) donnent lieu à une croissance transitoire de l'énergie. Insistons sur le fait que cette croissance aux temps courts ne peut être que transitoire, et qu'aux temps longs la décroissance exponentielle prévaut toujours.

On peut ensuite se demander laquelle des conditions initiales ci-dessus correspond à la plus forte croissance transitoire. Cette condition initiale particulière, appelée « perturbation optimale » dans le cadre de la théorie du contrôle, s'obtient en deux étapes. La première consiste à rechercher la date à laquelle une condition initiale donnée voit son énergie $E(t)$ passer par un maximum ; on trouve par différentiation que cette date t_{max} est

$$\epsilon t_{max} = \ln \frac{a}{a_-}, \quad a_- \leq a \leq a_+.$$

Le rapport entre le maximum atteint $E(t_{max})$ et l'énergie initiale E_0 , qu'on appelle le « gain », est alors

$$\frac{E(t_{max})}{E_0} = \frac{a_-^2}{a^2} \frac{(1 + \epsilon^2)a_-^2 - 2a_- + 1}{(1 + \epsilon^2)a^2 - 2a + 1}. \quad (1.46)$$

La deuxième étape consiste à rechercher la condition initiale qui maximise ce gain. On trouve, toujours par différentiation, que cette condition optimale correspond à

$$a_{opt} = a_+,$$

d'où le gain maximal :

$$\max_a \left(\frac{E(t_{max})}{E_0} \right) = \frac{(3a_- - 1)(1 - a_-)}{(3a_+ - 1)(1 - a_+)}. \quad (1.47)$$

Les conditions initiales correspondant aux perturbations optimales sont donc situées sur la droite de pente $-a_{opt}$; pour une énergie initiale E_0 donnée, il existe donc deux perturbations optimales symétriques par rapport à l'origine. On peut vérifier que la perturbation optimale, celle qui donne le gain maximum ci-dessus, correspond à un taux de croissance initial nul : $dx^2/dt = 0$ à l'instant initial $t = 0$. Ce gain maximum ne dépend que de ϵ , et il est d'autant plus grand que ϵ est petit. Il vaut par exemple 625 pour $\epsilon = 10^{-2}$ et 62 500 pour $\epsilon = 10^{-3}$.

Les résultats ci-dessus sont illustrés sur les figures 1.20 et 1.21. La figure 1.20 présente l'évolution temporelle de l'énergie du système pour $\epsilon = 0,1$, normalisée par l'énergie initiale, pour deux conditions initiales de même $x_{10} = 1$: l'une, conduisant à une décroissance monotone de l'énergie ($x_{20} = -a_-$), et l'autre correspondant à la condition optimale maximisant le gain ($x_{20} = -a_{opt}$). Le portrait de phase montré sur la figure 1.21 apporte un point de vue géométrique. Du fait de la non-orthogonalité des vecteurs propres, les trajectoires sont d'abord parallèles à la direction propre la plus stable e_2 , puis convergent vers le point fixe sur la direction propre la moins stable e_1 . Les deux étoiles correspondent aux conditions initiales de la figure 1.20 : l'une d'entre elles conduit à une diminution monotone de la norme du vecteur position x et donc de l'énergie $x \cdot x$, tandis que l'autre correspond à la perturbation optimale maximisant la croissance transitoire de cette norme ; le carré (\square) indique l'énergie maximale atteinte. On peut remarquer que la perturbation optimale est située sur une direction normale aux directions propres voisines, nous y reviendrons plus loin.

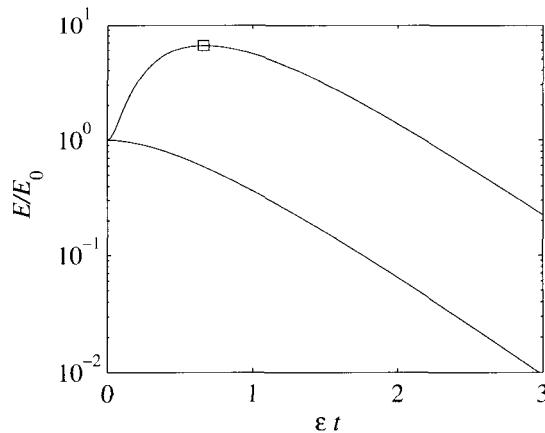


FIG. 1.20 – Évolution temporelle de l'énergie du système (1.42) pour $\epsilon = 0,1$, normalisée par l'énergie initiale, pour deux conditions initiales telles que $x_{10} = 1$: l'une conduisant à une décroissance monotone de l'énergie ($x_{20} = -a_-$), et l'autre correspondant à la condition optimale ($x_{20} = -a_{opt}$) maximisant le gain (\square).

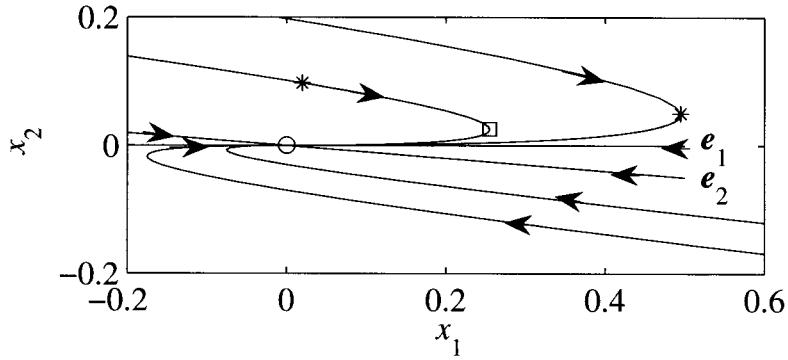


FIG. 1.21 – Portrait de phase du système (1.42) pour $\epsilon = 0,1$; (\circ), point fixe; \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , directions propres; (*), conditions initiales correspondant à la figure 1.20; (□), maximum de l'énergie de la perturbation optimale.

En conclusion, certaines perturbations d'un état d'équilibre stable peuvent se trouver fortement amplifiées de façon transitoire, par un effet *purement linéaire*. Cette croissance transitoire est essentiellement liée au caractère non orthogonal des vecteurs propres du système linéarisé au point fixe. La perturbation optimale est située sur une direction normale aux directions propres voisines.

1.5.2 Excitation optimale d'un mode instable

La discussion ci-dessus de la possibilité d'une croissance transitoire concernait un état d'équilibre linéairement *stable*. Pour un état d'équilibre instable, *i.e.* pour un système présentant une valeur propre à partie réelle positive, une question voisine est celle de l'« excitation optimale » du mode instable (Farrell 1988). Cette excitation optimale correspond à la perturbation initiale qui permet d'atteindre, à un instant donné, l'énergie maximale pour une énergie initiale donnée. Lorsque les vecteurs propres sont orthogonaux, cette perturbation est située sur le sous-espace propre associé à la valeur propre la plus instable ; mais lorsque les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux, alors une partie de l'énergie initiale doit être distribuée sur les modes stables.

À titre d'illustration, considérons le système dynamique

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 1 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont deux petits paramètres positifs. Les valeurs propres du système sont ϵ_1 et $-\epsilon_2$, respectivement associées aux vecteurs propres unitaires

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -(\epsilon_1 + \epsilon_2) \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

et l'évolution d'une condition initiale $\mathbf{x}_0 = x_{10}\mathbf{e}_1 + x_{20}\mathbf{e}_2$ est donnée par

$$\mathbf{x}(t) = x_{10} e^{\epsilon_1 t} \mathbf{e}_1 + x_{20} e^{-\epsilon_2 t} \mathbf{e}_2. \quad (1.50)$$

Le calcul de l'excitation optimale correspondant à ce système est détaillé dans l'exercice 1.6.8. On trouve que la condition initiale d'énergie $E_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = 1$,

$$x_{10,opt} = -\frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \mathcal{O}(1), \quad x_{20,opt} = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \mathcal{O}(1), \quad (1.51)$$

ou son opposé, correspond à l'excitation optimale, c'est-à-dire maximise, à t donné, l'énergie $E(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$ (compte tenu du caractère linéaire du problème, considérer une énergie initiale unité n'enlève pas de généralité au résultat).

Définissons le « gain optimal » G_{opt} à un instant donné comme l'énergie correspondant à l'excitation optimale, rapportée à l'énergie qu'aurait le système au même instant avec une condition initiale sur le seul mode instable ($x_{10} = 1, x_{20} = 0$) :

$$G_{opt} = \frac{\max_{x_{20}}(E)}{E_{x_{20}=0}}. \quad (1.52)$$

Aux temps longs ($\epsilon_{1,2}t \gg 1$), ce gain s'exprime simplement par⁹

$$G_{opt} \sim \frac{1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} \sim \frac{1}{2(1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)}. \quad (1.53)$$

On voit que plus l'angle entre les vecteurs propres est petit, plus le produit scalaire est proche de l'unité, et plus le gain est grand. La figure 1.22 compare, pour $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,1$, la croissance de l'énergie du mode instable seul (une droite dans les coordonnées semi-logarithmiques) à celle de l'excitation optimale. Il apparaît bien que l'énergie de l'excitation optimale croît plus vite que celle du mode instable seul. Aux temps longs, la composante sur le sous-espace stable de l'excitation optimale s'annule exponentiellement, et les deux évolutions temporelles sont donc parallèles, ce qui correspond au gain constant (1.53).

Notons pour terminer qu'un concept mathématique puissant pour aborder les notions de croissance transitoire et d'excitation optimale est celui d'opérateur adjoint. Pour le produit scalaire $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, l'opérateur adjoint \mathbf{A}^\dagger associé à un opérateur \mathbf{A} est défini par la relation

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

pour tout couple (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Pour un opérateur \mathbf{A} matriciel, l'adjoint \mathbf{A}^\dagger correspond à la matrice transposée conjuguée, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{t*}$, et lorsque la matrice \mathbf{A} et ses valeurs propres sont réelles, ce qui est le cas ici, les valeurs propres de \mathbf{A}^\dagger sont identiques à celles de \mathbf{A} . On montre alors que l'excitation optimale

9. Le symbole \sim a ici le sens d'équivalence asymptotique (Hinch 1991).

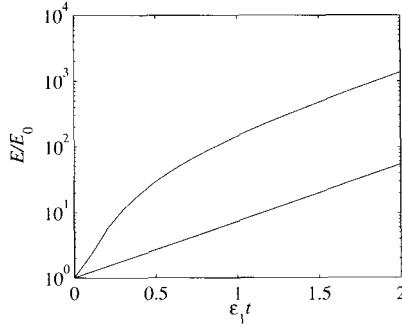


FIG. 1.22 – Croissance de l'énergie pour $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,1$, pour le mode instable seul ($x_{10} = 1$, $x_{20} = 0$, courbe inférieure) et pour l'excitation optimale (1.51) (courbe supérieure).

aux temps longs correspond à un vecteur propre de l'opérateur adjoint, celui qui est associé à la valeur propre la plus instable (Farrell 1988). L'excitation optimale d'énergie unité est donc, aux temps longs, le vecteur propre unitaire de \mathbf{A}^\dagger associé à ϵ_1 , soit

$$\mathbf{e}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}} \begin{pmatrix} \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Ce vecteur propre est orthogonal à \mathbf{e}_2 comme représenté sur la figure 1.23. Remarquons que l'excitation optimale $(x_{10,opt}, x_{20,opt})$ représentée sur cette figure a des composantes opposées à celles de la solution (1.51), ces deux excitations optimales étant identiques du point de vue de leur énergie.

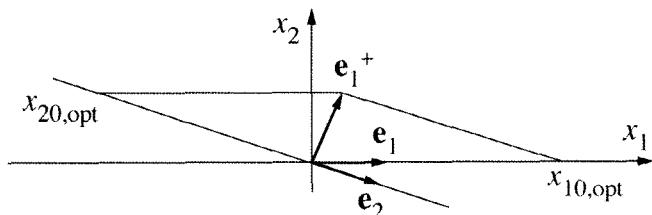


FIG. 1.23 – Vecteurs propres \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 de la matrice \mathbf{A} , vecteur propre \mathbf{e}_1^\dagger de la matrice adjointe \mathbf{A}^\dagger associé à la valeur propre ϵ_1 , et excitation optimale $(x_{10,opt}, x_{20,opt})$.

1.6 Exercices

1.6.1 Oscillateur harmonique forcé

On considère un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement 2μ . L'oscillateur, initialement au repos, est soumis pour $t > 0$   un forçage sinusoïdal de pulsation ω_f et d'amplitude ϵ . Le mouvement de l'oscillateur est alors décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\mu \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \epsilon \cos \omega_f t. \quad (1.55)$$

1. Quel est l'espace des phases du système ? L'équation ci-dessus dépend explicitement du temps par le terme de forçage, elle est dite non autonome. On peut la rendre artificiellement autonome en introduisant un nouveau degré de liberté $w = t$. rire le système d'EDO dans cet espace des phases argi.
2. On considère d'abord le cas non dissipatif, $\mu = 0$. Montrer que, lorsque le forçage n'est pas résonant ($\omega_f \neq \omega_0$), la réponse de l'oscillateur est une superposition de deux mouvements sinusoïdaux de pulsations ω_f et ω_0 :

$$u(t) = \frac{\epsilon}{\omega_f^2 - \omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_f t). \quad (1.56)$$

  quelle condition le mouvement est-il périodique ? Quasi périodique (c'est-à-dire non strictement périodique) ? Que devient la réponse de l'oscillateur lorsqu'il y a résonance entre le forçage et l'oscillateur ? Pourquoi cette réponse n'est-elle pas physiquement admissible aux temps longs ? En introduisant le demi-écart $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_f - \omega_0)$ entre ω_f et ω_0 , montrer que la réponse de l'oscillateur peut s'écrire :

$$u(t) = \frac{\epsilon}{2\Omega(\omega_0 + \Omega)} \sin \Omega t \sin(\omega_0 + \Omega)t. \quad (1.57)$$

Que représente la réponse ci-dessus pour un forçage d'amplitude faible et presque résonant ($\epsilon \ll 1$ et $\Omega/\omega_0 = \mathcal{O}(\epsilon)$) ? Représenter graphiquement l'allure de la réponse de l'oscillateur (par exemple pour $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$, $\epsilon = \Omega/\omega_0 = 0,1$). Généraliser l'étude pour des conditions initiales quelconques. Montrer que comme précédemment, la réponse de l'oscillateur harmonique est la superposition de sa réponse propre et de la réponse forcée.

3. Dans le cas dissipatif ($\mu > 0$), quel est le comportement asymptotique du système ($t \gg 1/\omega_0$) ?

1.6.2 Particule dans un potentiel à deux puits

On considère une particule de masse unité, à un degré de liberté x , soumise à une force $F = -V'(x)$ qui dérive du potentiel

$$V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}. \quad (1.58)$$

1. Donner un exemple de réalisation mécanique d'un tel système. Écrire l'équation du mouvement sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre. Dans le cas d'une masse m quelconque, par quel changement d'échelle peut-on se ramener à une masse unité ? Quelle est la dimension de l'espace des phases ? Ce système est-il dissipatif ?
2. Déterminer les points fixes du système, ainsi que leur type. Ébaucher le portrait de phase. Montrer que, pour chaque trajectoire, il existe un invariant $H(x, \dot{x})$; que représente physiquement cet invariant ? En déduire l'équation des trajectoires, et compléter le portrait de phase. Interpréter ces trajectoires en termes de mouvements de la particule.
3. Sans faire de calcul, et en raisonnant sur une bille dans un potentiel à deux puits, indiquer comment une force de frottement $-\mu\dot{x}$ ($\mu > 0$) modifie le type des points fixes. Tracer l'allure du portrait de phase.
4. Reprendre les questions ci-dessus pour le potentiel $W(x) = -V(x)$. Pour des compléments, voir Guckenheimer & Holmes (1983, §2.2).

1.6.3 Avalanches dans un tas de sable

On considère l'oscillateur non linéaire

$$\ddot{\psi} - \gamma\dot{\psi}^2 + k\psi = 0, \quad \gamma \geq 0, \quad k \text{ réel.} \quad (1.59)$$

qui peut s'interpréter comme un oscillateur comportant un terme de frottement $\Gamma(\dot{\psi})\dot{\psi}$ faisant intervenir un coefficient de frottement $\Gamma(\dot{\psi}) = -\gamma\dot{\psi}$ non constant. Cet oscillateur est une modélisation rudimentaire des avalanches d'un tas de sable, ψ représentant l'écart de la pente du tas de sable à une pente d'équilibre (Linz 1995). Une avalanche correspond à $\dot{\psi} < 0$, et $\dot{\psi} = 0$ correspond à l'arrêt de l'avalanche.

1. Écrire l'équation (1.59) comme un système de deux EDO du premier ordre, et étudier la stabilité linéaire du point fixe selon la valeur de k . Que peut-on en conclure ?
2. L'équation (1.59) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} (\dot{\psi} e^{-\gamma\psi}) = F(\psi), \quad F(\psi) = -k\psi e^{-\gamma\psi} \quad (1.60)$$

qui peut s'interpréter comme l'équation du mouvement d'une masse $e^{-\gamma\psi}$ dépendant de la position ψ , soumise à une force $F(\psi)$. On définit alors l'énergie cinétique E_c et le potentiel V du système par

$$E_c = \frac{1}{2} e^{-2\gamma\psi} \dot{\psi}^2, \quad V = -\frac{k}{4\gamma^2} (1 + 2\gamma\psi) e^{-2\gamma\psi}. \quad (1.61)$$

Montrer que les extrema de V sont des positions d'équilibre ($F = 0$), minima et maxima correspondant respectivement aux équilibres stables et instables. Vérifier que l'énergie $E_c + V$ du système reste constante au cours de son mouvement.

3. Étudier les variations du potentiel V dans les cas $k < 0$ et $k > 0$. Tracer l'allure du potentiel V en fonction de $\gamma\psi$, pour $k = -4\gamma^2$ et $k = 4\gamma^2$. En déduire les positions d'équilibre du système et leur stabilité. Comparer ces résultats avec ceux de la première question.

4. Pour quelles valeurs de k et de l'énergie le système (1.59) admet-il des solutions périodiques ?
5. D'après l'allure du potentiel V , ébaucher le portrait de phase du système (1.59) pour $k < 0$ et pour $k > 0$.

1.6.4 Transition de phase du second ordre

On considère un corps pur au voisinage d'une transition de phase. L'état thermodynamique du corps est décrit par un « paramètre d'ordre » $A(t)$ supposé uniforme (corps homogène). Ce paramètre d'ordre peut être le volume molaire d'un fluide, ou l'aimantation d'un corps ferromagnétique, ou l'orientation de cristaux liquides. Ce paramètre d'ordre obéit à l'équation réelle

$$\frac{dA}{dt} = -V'(A), \quad V(A) = \mu \frac{A^2}{2} - \alpha \frac{A^4}{4} - \frac{A^6}{6} \quad (1.62)$$

où $V'(A)$ est la dérivée du potentiel thermodynamique $V(A)$. Cette équation traduit le fait que le taux de variation du paramètre d'ordre est proportionnel à la pente du potentiel thermodynamique $V(A)$. μ est le paramètre de contrôle de la transition, proportionnel à l'écart à la température de transition. On considère dans cet exercice $\alpha = 1$.

1. Montrer que les points fixes stables et instables correspondent respectivement aux minima et maxima de $V(A)$. Justifier l'appellation de potentiel thermodynamique donnée à la fonction $V(A)$.
2. Représenter l'allure du potentiel selon la valeur du paramètre de contrôle μ , et en déduire le diagramme de bifurcation en fonction de μ . Préciser la nature de la bifurcation.

1.6.5 Transition de phase du premier ordre

On se place dans le cadre de l'exercice précédent, en considérant maintenant $\alpha = -1$ dans l'expression du potentiel (1.62). Le paramètre d'ordre ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles. Pour fixer les idées, $A = 0$ représente une phase liquide, et $A > 0$ représente la phase solide du même corps pur.

1. Montrer qu'à l'extérieur d'un intervalle $[\mu_1, \mu_2]$ que l'on déterminera, le potentiel ne présente qu'un minimum, et qu'à l'intérieur de cet intervalle, il présente deux minima, qui sont égaux pour une valeur μ_0 que l'on calculera. Représenter graphiquement le potentiel dans les différents cas.
2. Tracer le diagramme de bifurcation en fonction du paramètre de contrôle μ . Préciser la nature des bifurcations rencontrées, en $\mu = \mu_1$ pour μ décroissant à partir de $\mu \gg 0$, et en $\mu = \mu_2$ pour μ croissant à partir de $\mu \ll 0$. Les valeurs de μ_1 et μ_2 sont-elles égales ? Comment s'appelle ce phénomène ? Pourquoi le cas $\alpha = -1$ correspond-il à une transition de phase du premier ordre ?
3. Une phase est dite métastable lorsqu'elle est stable et que son potentiel est supérieur à celui de l'autre phase stable. Retracer le diagramme de bifurcation en portant les phases stables en trait continu, les phases instables en trait interrompu, et les phases métastables en trait mixte. (Solution au chapitre 8.)

1.6.6 Problème modèle de l'instabilité d'un film de savon

On considère le système décrit sur la figure 1.24. Le ressort horizontal 1 et les deux ressorts verticaux identiques 2, ont une raideur k_j et un allongement $l_j - l_{j0}$, $j = 1, 2$, où l_{j0} est leur longueur non contrainte. La masse $m = k_1(l_1 - l_{10})/g$ assure que le nœud A est à l'équilibre en $x = 0$.

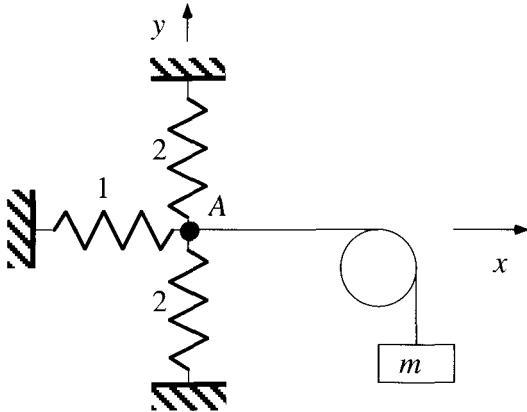


FIG. 1.24 – Schéma du problème modèle de l'instabilité d'un film de savon.

1. Avant tout calcul, discuter qualitativement l'équilibre du nœud A, à partir de la direction de la variation de la force exercée par les ressorts dans un déplacement $(\delta x, \delta y)$. Montrer en particulier que A est stable dans tout déplacement δy .
2. Montrer que dans un petit déplacement δx du nœud A, la variation de la force exercée par les ressorts est donnée par

$$\delta F = -(k_1 + 2k_2(1 - l_{20}/l_2)) \delta x.$$

En déduire la condition de stabilité.

3. Développer en série de Taylor autour de $x = 0$ l'énergie potentielle et le travail de la force des ressorts, pour un déplacement δx du nœud A. Par identification, montrer que la force de rappel à l'équilibre est $F = -E'_p(0)$, et que la variation de cette force est $\delta F = -E''_p(0)\delta x$. En déduire la condition de stabilité en termes de convexité de l'énergie potentielle des ressorts. Quel est le potentiel, différent de l'énergie potentielle E_p , dont les extrema correspondent aux états d'équilibre ?

1.6.7 Croissance transitoire et perturbation optimale

Établir les résultats (1.43) à (1.47) pour le système (1.42).

1.6.8 Excitation optimale d'un mode instable

On considère le système dynamique (1.48) rappelé ci-dessous,

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 1 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix},$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont deux petits paramètres positifs, associés à la condition initiale $x_0 = (x_{10}, x_{20})$.

1. Montrer que les valeurs propres du système sont ϵ_1 et $-\epsilon_2$, respectivement associées aux vecteurs propres unitaires (1.49).
2. On définit l'énergie du système à l'instant t par $E(t) = \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t)$. Compte tenu du caractère linéaire du problème, on peut sans perte de généralité considérer une énergie initiale $E_0 = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_0$ unité. Montrer que l'énergie $E(t)$ s'exprime sous la forme

$$\frac{E(t)/e^{2\epsilon_1 t} - 1}{1 - \alpha} = (2p^2 - 1 - \alpha)x_{20}^2 \pm 2px_{20} \sqrt{1 - (1 - p^2)x_{20}^2},$$

où $\alpha = e^{-(\epsilon_1 + \epsilon_2)t}$ et $p = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$.

3. Montrer que les conditions initiales x_{20} qui rendent l'énergie E extrémale à l'instant t sont racines de l'équation bicarrée

$$(1 - p^2)x_{20}^4 - x_{20}^2 + \frac{p^2}{4p^2(1 - p^2) + (1 - \alpha - 2(1 - p^2))^2} = 0.$$

4. Compte tenu de la linéarité du système différentiel, on peut sans perte de généralité rechercher seulement les racines positives. Montrer que, pour $\epsilon_1 \ll 1$ et $\epsilon_2 \ll 1$ et compte tenu de $1 - p^2 \sim (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2$, les racines positives de l'équation ci-dessus sont

$$x_{20}^{(1)} = \frac{1}{1 - \alpha} + \mathcal{O}(\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad x_{20}^{(2)} = \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \mathcal{O}(1).$$

Déterminer les conditions initiales $x_{10}^{(1)}$ et $x_{10}^{(2)}$ correspondantes.

5. Montrer que le gain optimal (1.52) correspond à la condition initiale $x_{20}^{(2)}$, et qu'aux temps longs ($\epsilon_1 t \gg 1$ et $\epsilon_2 t \gg 1$), ce gain est donné par (1.53). Représenter qualitativement $\ln E/E_0$ en fonction du temps, pour les conditions initiales correspondant (a) à l'énergie sur le seul mode instable, et (b) à l'énergie sur l'excitation optimale. Conclure.
6. Discuter la signification de la condition initiale $x_{20}^{(1)}$.

1.6.9 Bifurcation sous-critique via une croissance transitoire

Construire un système dynamique à deux degrés de liberté, non linéaire, dont un point fixe présente une bifurcation fourche sous-critique pour une valeur critique μ_c d'un paramètre μ , et tel que pour $\mu < \mu_c$, il existe des conditions initiales instables du fait d'une croissance transitoire. On pourra s'inspirer de Trefethen *et al.* (1993).

Chapitre 2

Instabilités de fluides au repos

2.1 Introduction

Ce chapitre discute comment divers phénomènes, gravitationnels, capillaires ou thermiques peuvent initier une instabilité dans un fluide au repos ; l'advection de la quantité de mouvement ne joue alors aucun rôle, contrairement aux situations étudiées dans les chapitres suivants. On donne d'autre part dans ce chapitre les bases techniques d'une étude de stabilité linéaire : établissement des équations des petites perturbations d'un état de base, linéarisation, et détermination des modes propres et de la relation de dispersion.

Une part importante du chapitre est consacrée à l'analyse des problèmes en termes de rapports d'échelles *caractéristiques*. Il s'agit, avant d'entreprendre de longs calculs analytiques ou numériques, de débroussailler un problème en évaluant *l'ordre de grandeur* des phénomènes considérés, afin de ne retenir que les plus importants. Cette démarche de modélisation, essentielle au chercheur comme à l'ingénieur, permet parfois à elle seule de déterminer les lois d'échelle qui gouvernent le problème. Elle permet toujours de faire un choix raisonné des échelles de référence d'une « adimensionnalisation », ou, en d'autres termes, de traduire le problème dans un système d'unités constitué des échelles caractéristiques. Cette analyse dimensionnelle oriente les calculs ultérieurs, en mettant par exemple en évidence un petit paramètre qui suggère un développement asymptotique. Cette analyse dimensionnelle sert aussi après coup, pour justifier – ou infirmer – certaines hypothèses, et donner une meilleure compréhension des phénomènes.

Le plan du chapitre est le suivant. On présente d'abord la technique de base d'une étude de stabilité à partir de l'exemple de l'instabilité gravitationnelle d'un nuage de gaz interstellaire (§2.2). On étudie ensuite quelques instabilités classiques, liées à la pesanteur, à la tension de surface, ou à un gradient de température (§2.3-§2.6). Quelques traits communs et fondamentaux de ces instabilités sont ensuite dégagés, dont la généralité dépasse les exemples traités (§2.7) : il s'agit des notions de *paramètre de contrôle* d'une instabilité à seuil,

de *bifurcation* et de *brisure de symétrie* introduites au chapitre précédent, et de mécanisme de *sélection de structure*.

2.2 Instabilité gravitationnelle de Jeans

L'instabilité d'une distribution de masses en interaction gravitationnelle n'avait pas échappé à Isaac Newton, instabilité qui devait conduire à un effondrement de l'Univers vers son centre. De ses spéculations avec le théologien Richard Bentley sur cet inacceptable effondrement, Newton concluait en 1692 que notre Univers devait être infini (pas de centre, donc pas d'effondrement), « la Providence ayant distribué uniformément les étoiles en des points instables, comme des aiguilles sur leur pointe » (Longair 2006). En 1902, le physicien britannique Sir James Jeans réalisa une avancée majeure dans la résolution de ce problème, en mettant en évidence une échelle de longueur au-dessus de laquelle une masse de gaz distribuée uniformément est effectivement instable. À partir de cette étude et des difficultés qu'elle soulevait, de nombreux travaux ont été et continuent d'être menés, améliorant notre compréhension de la formation et de l'évolution des étoiles, des galaxies, et de l'Univers. Nous présentons dans cette section une introduction élémentaire à cette question ; l'effet de la pesanteur terrestre sur les ondes acoustiques classiques est tout d'abord discuté, discussion qui permet d'introduire les notions fondamentales de mode normal et de relation de dispersion ; le cas d'un champ de gravitation non uniforme est ensuite abordé dans le cadre de l'approximation de Jeans ; enfin, cette approximation est brièvement discutée à la lumière de quelques développements récents.

2.2.1 Ondes acoustiques

État de base, perturbations et linéarisation

Considérons un fluide au repos, liquide ou gaz, dans le champ de la pesanteur terrestre \mathbf{g} . Les champs de vitesse, de masse volumique et de pression

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\rho} = \rho_0, \quad \bar{P} = P_0 - \rho_0 g z, \quad (2.1)$$

où ρ_0 et P_0 sont une masse volumique et une pression de référence à l'altitude $z = 0$, définissent un *état de base* qui satisfait bien la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, au moins sur une hauteur sur laquelle la variation de masse volumique liée à la compressibilité du fluide peut être négligée. Pour fixer les idées, cette variation est de 1,7 % sur une hauteur de 100 m dans l'atmosphère terrestre, et de 0,04 % sur la même hauteur dans l'océan.

Considérons une petite perturbation de cet état de base, les champs de vitesse, de masse volumique et de pression devenant

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}, \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad P = \bar{P} + p.$$

L'évolution de ces champs doit satisfaire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{U}) = 0, \quad (2.2a)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{U}) = -\operatorname{grad} P + \rho \mathbf{g}. \quad (2.2b)$$

On pourra vérifier *a posteriori* que les effets visqueux omis ci-dessus sont effectivement négligeables ; par contre, on a retenu l'effet de la gravité qu'il s'agit de discuter. Une cinquième équation scalaire est nécessaire, rendant compte du comportement thermodynamique du fluide ; en considérant que l'évolution des perturbations est isentropique (adiabatique et réversible), les variations des perturbations de masse volumique et de pression sont liées par l'équation d'état

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s dP = \rho \kappa_s dP \quad (2.3)$$

où κ_s est la compressibilité isentropique (Callen 1985). Prenant en compte l'équation d'équilibre hydrostatique satisfaite par l'état de base, $\mathbf{0} = -\operatorname{grad} \bar{P} + \bar{\rho} \mathbf{g}$, et linéarisant les équations ci-dessus autour de cet état de base en ignorant les produits de perturbations, il vient

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u} = -\operatorname{grad} p + \rho' \mathbf{g}. \quad (2.4b)$$

$$\rho' = \rho_0 \kappa_s p. \quad (2.4c)$$

Prenant la divergence de l'équation (2.4b) et y substituant les équations (2.4a) et (2.4c), il vient une équation où n'intervient que la pression :

$$\partial_t^2 p - c_s^2 \Delta p + \mathbf{g} \cdot \operatorname{grad} p = 0, \quad (2.5)$$

où on a introduit la vitesse c_s définie par

$$c_s^2 = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s}. \quad (2.6)$$

On remarquera que pour $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, on retrouve l'équation classique des ondes acoustiques (Lighthill 1978).

Modes normaux et relation de dispersion

L'équation (2.5) ci-dessus est linéaire à coefficients constants (ce qui reflète l'invariance par translation du problème), et admet donc des solutions exponentielles en temps et en espace. Ces solutions peuvent s'écrire

$$p = \frac{1}{2} \hat{p} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c. \quad (2.7)$$

correspondant à des ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{k} et de pulsation ω , où « c.c. » signifie « complexe conjugué » et où \hat{p} est l'amplitude de la perturbation. Cette amplitude, *a priori* complexe, peut s'écrire $|\hat{p}|e^{i\theta}$, où $|\hat{p}|$ et θ sont le module et la phase de \hat{p} . Pour \mathbf{k} réel et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ complexe, la perturbation s'écrit alors

$$p = |\hat{p}| e^{\omega_i t} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \theta).$$

La partie réelle de la pulsation, ω_r , correspond donc à la propagation de la perturbation avec une célérité $c = \omega_r/k$ où $k = |\mathbf{k}|$; la partie imaginaire, ω_i , apparaît comme le taux de croissance temporel : $\omega_i < 0$ correspond à une perturbation amortie, $\omega_i = 0$, à une perturbation neutre, et $\omega_i > 0$ correspond à une perturbation amplifiée. On envisagera au chapitre suivant la situation plus générale où le nombre d'onde est lui aussi considéré complexe. Une perturbation quelconque, comme une excitation localisée, peut être considérée comme une superposition de perturbations de la forme (2.7); dans le cadre d'un problème linéarisé, ces perturbations évoluent indépendamment les unes des autres (du fait de l'orthogonalité des fonctions exponentielles), et sont appelées *modes normaux ou modes propres*. C'est la raison pour laquelle, dans une étude de stabilité linéaire, on ne considère en général que l'évolution d'un seul mode normal « générique » de la forme (2.7); ce point sera précisé au chapitre suivant.

Avec (2.7), l'équation des ondes (2.5) devient

$$-\omega^2 \hat{p} + c_s^2 k^2 \hat{p} + i \mathbf{g} \cdot \mathbf{k} \hat{p} = 0.$$

Cette équation n'admet de solution non nulle que si le facteur de \hat{p} est nul, soit

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + i \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.8)$$

Cette relation est la *relation de dispersion* des petites perturbations; elle montre que la pulsation et le vecteur d'onde d'un mode normal ne peuvent pas être arbitraires, ils sont liés par la relation de dispersion. Cette relation ne fait pas intervenir l'amplitude de la perturbation, laquelle reste indéterminée du fait du caractère linéaire et homogène de l'équation (2.5). La résolution du système (2.4) a pu ici être faite simplement par substitution; comme on le verra dans la section suivante, l'introduction des modes normaux conduit plus généralement à un système algébrique homogène pour les amplitudes des perturbations, qui n'admet donc de solution non nulle que si son déterminant est nul, condition qui donne la relation de dispersion.

Omettant provisoirement le dernier terme $i \mathbf{g} \cdot \mathbf{k}$ de la relation de dispersion, il apparaît que la pulsation d'une onde de vecteur d'onde réel est $\omega = \pm c_s k$, qu'elle est donc réelle, ce qui correspond à une onde se propageant sans s'amplifier ni s'atténuer. La vitesse ω/k de la phase de cette onde, « encore appelée » célérité, est $\omega/k = \pm c_s$, ce qui donne la signification physique de la vitesse c_s . Notons que cette célérité, ou « vitesse du son », ne dépend pas

du nombre d'onde : ces ondes dites « acoustiques » ne sont pas dispersives. Dans l'air considéré comme un gaz parfait, la compressibilité isentropique est $\kappa_s = \gamma/P$ où $\gamma = c_p/c_v = 1,4$ est l'indice isentropique (rapport des capacités thermiques à pression et volume constant). Compte tenu de la loi de Boyle-Mariotte $P/\rho = rT$, où $r = R/M$ est la constante massique du gaz parfait avec $R = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ et $M = 29,0 \text{ g mol}^{-1}$, on en déduit $c_s = \sqrt{\gamma r T_0} = 340 \text{ m s}^{-1}$ pour $T_0 = 288 \text{ K}$. Ainsi, dans l'air, une onde acoustique typique de fréquence $\omega/2\pi = 1\,000 \text{ Hz}$ a une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/(\omega/c_s) = 0,34 \text{ m}$. Dans l'eau où la compressibilité vaut $\kappa_s \approx 0,47 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$, la vitesse du son est $c_s \approx 1\,460 \text{ m s}^{-1}$, et la longueur d'onde pour la même fréquence est $\lambda = 1,46 \text{ m}$.

Considérons maintenant l'effet de la gravitation correspondant au terme $i\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}$. Tout d'abord, on remarque que cet effet n'intervient que si le vecteur d'onde a une composante suivant la verticale. Pour ce qui est de son ordre de grandeur par rapport à ω^2 , il vaut typiquement 10^{-5} pour les ondes acoustiques audibles de longueur métrique ; ainsi, pour les ondes audibles, l'effet de la gravité est parfaitement négligeable. Cet effet devient toutefois significatif pour les ondes de fréquence inférieure au hertz, de longueur d'onde kilométrique. Mais pour ces ondes de grande longueur d'onde, l'hypothèse de champ de gravitation uniforme doit être revue : c'est l'objet de la section suivante.

2.2.2 Effet de la gravitation aux grandes échelles

Analyse dimensionnelle

Comme montré dans la section précédente, la propagation d'une onde acoustique dans un fluide de masse volumique ρ_0 résulte essentiellement d'un équilibre entre l'inertie du fluide et la force de rappel élastique liée à sa compressibilité κ_s . La célérité c_s de l'onde est donnée par

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s = \frac{1}{\rho_0 \kappa_s}, \quad (2.9)$$

soit $c_s = \sqrt{\gamma r T_0}$ pour un gaz parfait. La gravitation n'intervient qu'aux échelles de longueur supérieures à c_s^2/g , de l'ordre de 10 km pour l'atmosphère terrestre et de 200 km dans l'océan. À l'échelle des phénomènes astrophysiques, la gravitation devient essentielle : elle est en particulier à l'origine d'une instabilité d'un nuage de gaz interstellaire, conduisant à l'effondrement du nuage sur lui-même, effondrement lui-même à l'origine de la formation des étoiles. Cette instabilité peut s'analyser qualitativement de la façon suivante.

Rappelons tout d'abord qu'une masse m crée à une distance r un champ gravitationnel $\mathcal{G} = Gm/r^2$ où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante de gravitation, et que ce champ gravitationnel induit sur une masse m' une force attractive $m'\mathcal{G}$ (Pérez 1995). Considérons maintenant une grande masse de gaz au repos, un nuage de gaz interstellaire par exemple, et une perturbation de cet équilibre par des inhomogénéités $\delta\rho$ et δP de masse volumique

et de pression, sur une échelle spatiale L . Il s'ensuit une inhomogénéité du champ de gravitation, d'ordre $\delta\mathcal{G} \sim G\delta\rho L^3/L^2$. Une particule fluide de dimension caractéristique a se trouve alors soumise à deux forces antagonistes, une force élastique et une force de gravitation. La force élastique, liée à la compressibilité du fluide, est dirigée des régions comprimées vers les régions détendues voisines, et son ordre de grandeur est

$$F_a \sim (\delta P/L)a^3 \sim \delta\rho c_s^2 a^3/L.$$

La force de gravitation nette est dirigée vers la région comprimée qui contient un excès de masse d'ordre $\delta\rho L^3$, et son ordre de grandeur est

$$F_g \sim \rho a^3 \delta\mathcal{G} \sim \rho a^3 G \delta\rho L.$$

Le rapport de ces deux forces est donc $F_g/F_a = \rho GL^2/c_s^2$. Ainsi, si l'échelle spatiale des inhomogénéités est telle que $L \ll c_s/\sqrt{\rho G}$, la force élastique domine, et la perturbation se propage sous la forme d'une onde acoustique, sans amplification. Par contre, pour $L \gg c_s/\sqrt{\rho G}$, c'est la force gravitationnelle qui domine ; un mouvement de gaz s'ensuit donc des régions détendues vers les régions comprimées, qui accroît la différence de masse volumique initiale. L'effet amplifiant la cause, une instabilité se développe qui rompt l'uniformité initiale du nuage et conduit à son effondrement¹.

L'analyse dimensionnelle ci-dessus a donc fait apparaître une échelle de longueur,

$$L_c = \frac{c_s}{\sqrt{\rho G}}, \quad (2.10)$$

au-dessus de laquelle une masse de gaz est susceptible de s'effondrer sur elle-même. Cette longueur correspond (à un facteur numérique près) à la longueur mise en évidence par Jeans (1902). Pour l'atmosphère terrestre, cette longueur est voisine de 36 000 km, valeur très supérieure au rayon terrestre : la gravitation n'intervient pas dans la propagation des ondes acoustiques, et l'atmosphère terrestre ne risque donc pas de s'effondrer ! Pour un nuage de gaz interstellaire peu dense, où les paramètres sont typiquement $c_s = 200 \text{ m s}^{-1}$ et $\rho = 2 \times 10^{-17} \text{ kg m}^{-3}$, la longueur L_c est voisine de $5 \times 10^{12} \text{ km}$ (soit à peu près un millier de fois la dimension de notre système solaire, ou encore la moitié d'une année-lumière)².

État de base, perturbations et linéarisation

Il s'agit maintenant de préciser l'analyse dimensionnelle ci-dessus. Considérons un nuage de gaz interstellaire de grande dimension, de densité ρ ,

1. On notera l'analogie avec une transition de phase liquide-vapeur, où le liquide est le résultat de « l'effondrement » du gaz. Cependant, dans ce cas, ce n'est pas l'interaction gravitationnelle qui est responsable de l'instabilité, mais des interactions d'origine électrique de type van der Waals.

2. Notons que l'analyse ci-dessus ne vaut pas pour des objets astrophysiques très denses, comme les naines blanches dont un ordre de grandeur de la masse volumique est $5 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$: c'est une pression d'origine quantique et non thermique qui s'oppose à l'attraction gravitationnelle et assure l'équilibre (Diu *et al.* 1989).

pression P et température T , considéré comme un gaz parfait (Chandrasekhar 1961, §119). La stabilité de ce nuage peut être étudiée d'un point de vue thermodynamique en recherchant les extrema d'un potentiel thermodynamique approprié (l'entropie pour un système isolé décrit par le formalisme microcanonique, ou l'énergie libre pour un système maintenu à température constante et décrit par le formalisme canonique, (voir (Chavanis 2002)). De manière équivalente, cette stabilité peut être étudiée dans le cadre de la mécanique des milieux continus, c'est ce second point de vue qui est adopté ici. Les équations de conservation sont alors identiques aux équations (2.2) gouvernant les ondes acoustiques, en remplaçant la pesanteur \mathbf{g} par le champ de gravitation $\mathcal{G} = -\mathbf{grad}\Phi$ où Φ est le potentiel gravitationnel :

$$\partial_t \rho + \text{div} \rho \mathbf{U} = 0, \quad (2.11a)$$

$$\rho(\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{U}) = -\mathbf{grad}P - \rho \mathbf{grad}\Phi, \quad (2.11b)$$

et où le potentiel gravitationnel est lié à la distribution de masse volumique par l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.12)$$

Enfin, l'évolution des perturbations est comme précédemment supposée isentropique, l'entropie étant donnée par l'équation d'état

$$s - s_0 = c_v \ln \frac{P}{P_0} - c_p \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2.13)$$

où c_v et c_p sont les capacités thermiques massiques à volume et pression constants, et où l'indice 0 repère un état d'équilibre de référence (Callen 1985).

Remarquons tout d'abord que les équations (2.11-2.12) n'admettent pas de solution où P et ρ seraient uniformes ; en effet, le potentiel Φ serait alors uniforme d'après (2.11b), et l'équation de Poisson (2.12) impliquerait alors $\rho = 0$. Un équilibre hydrostatique non uniforme peut être trouvé pour une distribution sphérique de masse, correspondant à une température uniforme et une densité variant comme $1/r^2$ où r est la distance au centre de la distribution (Binney & Tremaine 1988). Cette distribution correspond cependant à une masse totale infinie (la masse $\int \rho(r) 4\pi r^2 dr$ dans une sphère de rayon R diverge comme R). Cette difficulté peut être contournée en confinant artificiellement le gaz dans une sphère de rayon R (Chavanis 2002). Un traitement complet de ce problème sortant du cadre de cet ouvrage, nous en considérons ici une version simplifiée, précisément celle étudiée par Jeans (1902). Cette simplification consiste à étudier la stabilité d'un état de base *uniforme*, qui ne satisfait donc pas l'équation de Poisson (2.12). En dépit de cette simplification ou « arnaque de Jeans » (Binney & Tremaine 1988), ce calcul mérite d'être reproduit du fait de son importance historique et du fait qu'il donne finalement une condition de stabilité proche de celle donnée par la résolution du problème complet³.

3. L'« arnaque de Jeans » retrouve cependant sa légitimité dans le cadre de la cosmologie lorsque l'expansion de l'Univers est prise en compte, l'équation de Poisson n'intervenant alors que pour les perturbations.

Considérons donc l'état de base, stationnaire et uniforme, défini par

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\rho} = \rho_0, \quad \bar{s} = s_0, \quad \bar{\Phi} = \Phi_0, \quad \bar{P} = P_0, \quad (2.14)$$

et une petite perturbation isentropique de cet état de base, \mathbf{u} , ρ' , ϕ , p . Les équations gouvernant l'évolution de ces perturbations sont donc, d'après (2.11)-(2.13),

$$\partial_t(\rho_0 + \rho') + \operatorname{div}((\rho_0 + \rho')\mathbf{u}) = 0, \quad (2.15a)$$

$$(\rho_0 + \rho')(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{u}) = -\operatorname{grad}(P_0 + p) - (\rho_0 + \rho')\operatorname{grad}(\Phi_0 + \phi), \quad (2.15b)$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho', \quad (2.15c)$$

$$\ln(1 + \frac{p}{P_0}) - \gamma \ln(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}) = 0. \quad (2.15d)$$

On remarquera que l'équation de Poisson est écrite pour les perturbations seulement, car l'état de base considéré ne satisfait pas cette équation. Pour de petites perturbations, on peut linéariser les équations autour de l'état de base en négligeant les produits de perturbations. Ces équations linéarisées s'écrivent

$$\partial_t\rho' + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u} = -\operatorname{grad}p - \rho_0 \operatorname{grad}\phi, \quad (2.16b)$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho', \quad (2.16c)$$

$$p = c_s^2 \rho'. \quad (2.16d)$$

Modes normaux et relation de dispersion

Comme le problème des ondes acoustiques traité précédemment, le problème (2.16) est linéaire à coefficients constants, ce qui reflète encore son invariance par translation. Il admet donc des solutions exponentielles en temps et en espace, qui peuvent s'écrire sous la forme d'ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{k} et de pulsation ω :

$$u = \frac{1}{2} \hat{u} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c. \quad (2.17)$$

avec des expressions similaires pour les autres composantes de la vitesse v et w , ainsi que pour ρ' , p et ϕ .

Prenant la divergence de l'équation (2.16b), on obtient par substitution une équation où n'intervient que la perturbation de pression p :

$$\partial_t^2 p - c_s^2 \Delta p - 4\pi \rho_0 G p = 0. \quad (2.18)$$

Pour un mode normal de la forme (2.17), cette équation devient

$$\omega^2 \hat{p} = c_s^2 k^2 \hat{p} - 4\pi G \rho_0 \hat{p} \quad (2.19)$$

où $k = |\mathbf{k}|$; cette équation n'admet de solution non nulle que si le facteur de \hat{p} est nul, d'où la relation de dispersion

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (2.20)$$

Cette équation correspond à la relation de dispersion des ondes acoustiques, complétée par le terme de gravitation $4\pi G \rho_0$.

2.2.3 Discussion

Passons à l'étude de la relation de dispersion (2.20) en considérant une onde plane de vecteur d'onde \mathbf{k} réel dont il s'agit de déterminer la stabilité temporelle. La relation de dispersion étant ici quadratique en ω , il existe pour tout nombre d'onde deux modes propres de pulsation

$$\omega_{\pm}(k) = \pm \sqrt{c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0}.$$

Ce résultat met en évidence un nombre d'onde critique,

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}, \quad (2.21)$$

annulant le terme sous la racine carrée. Toute perturbation de nombre d'onde supérieur à k_J a une pulsation réelle, et correspond donc à une onde se propageant sans s'amplifier ni s'amortir, avec une vitesse de phase, ou célérité,

$$c_{\pm} = \omega_{\pm}/k = \pm c_s \sqrt{1 - k_J^2/k^2} \quad (k > k_J).$$

Cette célérité est proche de c_s pour les ondes courtes ($k \gg k_J$), et s'annule pour $k = k_J$. D'autre part, toute perturbation de nombre d'onde inférieur à k_J a une pulsation imaginaire pure ; le mode correspondant à $\omega_+ = +i\omega_i$ croît exponentiellement avec un taux de croissance

$$\omega_i = c_s \sqrt{k_J^2 - k^2} \quad (k < k_J),$$

tandis que l'autre, de pulsation $\omega_- = -i\omega_i$, décroît exponentiellement ; la célérité de ces modes, $c = \omega_r/k$, est nulle.

La conclusion de cette analyse est que, dans un nuage de gaz de dimension inférieure à la longueur de Jeans, $L_J = 2\pi/k_J$, toute perturbation se propage sans amplification, et le nuage est donc linéairement stable. Par contre, si la dimension du nuage est supérieure à cette longueur de Jeans, alors le nuage est instable vis-à-vis des perturbations de grande longueur d'onde. Notons que L_J correspond à la longueur critique (2.10) mise en évidence par l'analyse dimensionnelle précédente, au facteur numérique $\sqrt{\pi}$ près.

Subrahmanyan Chandrasekhar (1910–1995)

Né à Lahore, Inde (aujourd’hui Pakistan), dans une famille aisée et cultivée de brahmanes. Un de ses oncles, Sir Chandrasekhara Venkata Raman, reçoit le Prix Nobel de Physique en 1930 pour la découverte de l’effet optique qui porte son nom. Études secondaires et supérieures à Madras, où il publie son premier article dans les *Proceedings of the Royal Society*. Suivant l’exemple de son oncle, il quitte l’Inde en 1930 pour *Trinity College*, Cambridge, Grande-Bretagne, où il soutient son doctorat en 1933. Se marie en Inde en 1936, puis s’installe à l’Université de Chicago où il restera jusqu’à la fin de sa vie. Durant la Seconde Guerre mondiale, travaille sur les ondes de choc et de détonation. Élu *Fellow of the Royal Society of London* en 1944. Acquiert la citoyenneté américaine en 1953 avec sa femme. Contributions à de nombreux domaines de la physique : naines blanches, dynamique stellaire, rayonnement, stabilité hydrodynamique et hydromagnétique, relativité générale, trous noirs, ondes gravitationnelles. Montre en particulier qu’une étoile de masse inférieure à 1,44 masse solaire évolue en fin de vie vers une naine blanche tandis que, si sa masse est supérieure à cette limite, elle s’effondre brutalement et conduit à un objet de densité gigantesque, étoile à neutrons ou trou noir. Ses travaux sur la structure et l’évolution des étoiles lui vaudront le Prix Nobel en 1983. A publié 400 articles, et de nombreux livres qui auront un large impact, en particulier *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (1961). Nombreuses distinctions dont la *Royal Medal* (1962) et la *Copley Medal* (1984) de la *Royal Society of London*. Éditeur en chef du *Astrophysical Journal* pendant 19 ans, auquel il donne un grand essor. S’intéresse aux liens entre art et science, à travers des livres comme *Truth and Beauty : Aesthetics and Motivations in Science* (1987) et *Newton’s Principia for the Common Reader* (1995), des conférences audacieuses sur le thème *Shakespeare, Newton and Beethoven or patterns of creativity* ou sur les liens entre les *Principia* de Newton et les fresques de la Chapelle Sixtine de Michel-Ange.



Revenons sur l’« arnaque » de Jeans considérant un état de base uniforme. Cette arnaque peut être considérée comme acceptable sur une échelle de longueur où le potentiel gravitationnel est à peu près constant, échelle donnée par l’équation de Poisson. En effet, la condition d’équilibre imposant $\rho\Phi/L \sim P/L$

avec $P/\rho = c_s^2/\gamma \approx c_s^2$, l'équation de Poisson donne :

$$\frac{c_s^2}{L^2} \sim \frac{\Phi}{L^2} \sim 4\pi G\rho.$$

L'échelle de longueur L trouvée n'est autre, encore, que la longueur critique (2.10) (à un facteur numérique d'ordre unité près) ! Ainsi, la conclusion qu'un nuage de densité uniforme et de dimension inférieure à L_J est stable, paraît tout à fait raisonnable pour un nuage « réel » de densité non uniforme satisfaisant l'équation de Poisson. L'apparition d'une instabilité pour un nuage de dimension d'ordre L_J , confortée par l'analyse dimensionnelle, paraît elle aussi vraisemblable. Par contre, le résultat d'un taux de croissance maximal pour $k = 0$ ne doit pas être retenu. Les études menées récemment sur le sujet précisent ces conclusions (Chavanis 2002). En particulier, l'étude de l'évolution non linéaire de l'instabilité suggère une organisation fractale de la distribution de masse lors de son effondrement (de Vega, Sanchez & Combes 1996).

2.3 Instabilité interfaciale de Rayleigh-Taylor

2.3.1 Analyse dimensionnelle

Considérons deux couches fluides superposées dans le champ de la pesanteur, séparées par une interface horizontale. Nous supposerons ici que la viscosité n'intervient pas, et que les parois qui bornent les fluides sont suffisamment loin de l'interface pour être ignorées (l'étude de l'effet des parois et de la viscosité est proposée en exercice). Les seules grandeurs physiques prises en compte sont donc les deux masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , la tension interfaciale γ et la gravité g . Ces quatre grandeurs dimensionnelles font intervenir les trois dimensions fondamentales, masse, longueur et temps ; le problème ne dépend donc que d'un paramètre sans dimension, le rapport des masses volumiques, ou encore le paramètre

$$r = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (2.22)$$

Ce paramètre est négatif si le fluide le plus dense est au-dessus, et positif dans l'autre cas ; il est égal à l'unité si le fluide supérieur a une densité négligeable, ce qui est le cas pour un gaz au-dessus d'un liquide.

Considérons une perturbation de l'interface dans un plan vertical (x, y) , d'amplitude a et de nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ (figure 2.1), et analysons les forces exercées sur une « bosse » de fluide 1 entre le plan $y = 0$ (interface au repos) et l'interface déformée. La force nette due à la gravité, ou force de « flottabilité » (somme algébrique du poids et de la force d'Archimède), est

$$(2a/k)(\rho_2 - \rho_1)g$$

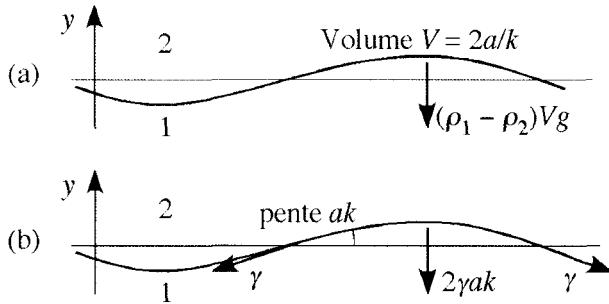


FIG. 2.1 – Forces agissant sur une demi-longueur d'une perturbation de nombre d'onde k et d'amplitude a . (a) Force nette de gravité $(2a/k)(\rho_2 - \rho_1)g$; (b) tension interfaciale γ et résultante $2\gamma ak$.

par unité de largeur. Cette force est stabilisante si $\rho_1 > \rho_2$ (elle est alors négative et tend à ramener la bosse vers le bas), et déstabilisante sinon ; elle est d'autant plus grande que le nombre d'onde est petit. La force due à la tension interfaciale s'exerce de chaque côté de la bosse, et vaut γ par unité de largeur ; sa résultante est verticale et égale à

$$-2\gamma ak.$$

C'est toujours une force de rappel, stabilisante, d'autant plus grande que le nombre d'onde est grand.

On voit donc que pour $\rho_1 > \rho_2$, les deux forces tendent à ramener l'interface à l'horizontale, et se comportent comme un ressort de rappel de raideur $K = F/a$ avec $F = 2\gamma ak + 2(\rho_1 - \rho_2)ga/k$ (force nette par unité de largeur). Cette force de rappel met en mouvement un volume d'ordre $1/k^2$ par unité de largeur, de chaque côté de l'interface, correspondant à une masse M d'ordre $(1/k^2)(\rho_2 + \rho_1)$. Il en résulte des oscillations de pulsation données par la relation classique pour un oscillateur de raideur K et de masse M :

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \sim 2 \frac{\gamma k^3 + (\rho_1 - \rho_2)gk}{(\rho_2 + \rho_1)}.$$

On a donc trouvé par analyse dimensionnelle la relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité entre deux fluides. Le coefficient numérique n'est bien entendu pas tout à fait exact, à cause de l'estimation de la masse en mouvement. La comparaison avec la relation de dispersion exacte (2.40) établie ci-dessous montre que la masse effective est égale au double de la masse estimée ici.

Pour $\rho_1 < \rho_2$, la gravité est déstabilisante, et son action l'emporte sur celle de la tension interfaciale si

$$2(\rho_2 - \rho_1)ag/k - 2\gamma ak > 0.$$

On en déduit que l'interface est instable vis-à-vis de perturbations de nombre d'onde inférieur à un nombre d'onde de coupure k_c , défini par

$$k_c = \frac{1}{l_c}, \quad \text{avec} \quad l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{g|\rho_2 - \rho_1|}} \quad (2.23)$$

où l_c est la *longueur capillaire* (Guyon *et al.* 2001). Pour une interface eau-air ($\gamma = 70 \times 10^{-3}$ N/m), la longueur capillaire est $l_c = 2,7$ mm. En l'absence de tension interfaciale (deux liquides miscibles ou deux gaz, par exemple de l'air froid au-dessus d'une couche d'air chaud), tous les nombres d'ondes sont instables.

Ainsi, avec ou sans tension interfaciale, la configuration d'un fluide lourd au-dessus d'un fluide léger est toujours instable vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde. Cependant si l'interface est confinée sur une longueur plus petite que la longueur capillaire, alors cette interface est stable. C'est ainsi qu'une goutte de rosée tient sur l'envers d'une feuille, ou qu'un tube fin vertical peut retenir une colonne de liquide sans se vider.

Le temps de croissance de l'instabilité, c'est-à-dire le temps pour que l'amplitude de la perturbation varie de façon appréciable, doit être de l'ordre de grandeur de la seule échelle de temps du problème, le temps capillaire

$$\tau_c = \sqrt{\frac{l_c}{g}} = \left(\frac{\gamma}{|\rho_1 - \rho_2|g^3} \right)^{1/4}. \quad (2.24)$$

Les hypothèses de départ peuvent maintenant être précisées, qui considèrent des fluides sans viscosité et d'extension verticale illimitée. L'échelle de longueur du problème étant la longueur capillaire l_c , les parois limitant l'extension verticale des fluides n'interviendront pas si l'épaisseur h_i des couches est grande devant l_c . D'autre part, négliger la viscosité est valide si, pendant le temps caractéristique de croissance de l'instabilité, τ_c , la quantité de mouvement n'a pas diffusé de façon appréciable, c'est-à-dire a diffusé sur une longueur petite devant l_c ; cette condition se traduit par

$$\sqrt{\nu\tau_c} \ll l_c.$$

En d'autres termes, les effets visqueux sont négligeables si le nombre de Reynolds capillaire $Re_{cap} = l_c^2/\tau_c\nu$ est grand devant l'unité; pour une interface eau-air, ce nombre vaut 15. Passons maintenant à une étude détaillée du problème.

2.3.2 Équations des perturbations

État de base et nature des perturbations

L'état de base correspond ici au fluide au repos, à une interface $\eta(x, z, t)$ plane et à une distribution de pression hydrostatique :

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{0}, \quad \bar{\eta} = 0, \quad \bar{P}_j(y) - P_0 = -\rho_j gy, \quad j = 1, 2, \quad (2.25)$$

où P_0 est une pression de référence à l'interface. Cet état satisfait les équations de conservation et les conditions aux limites, comme on pourra le vérifier un peu plus loin. Perturbons cet état de base ; la vitesse, la pression et l'interface deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_j &= \bar{\mathbf{U}}_j + \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j, \\ P_j &= \bar{P}_j + p_j, \\ \bar{\eta} + \eta &= \eta.\end{aligned}$$

Le problème de stabilité peut être résolu pour une perturbation quelconque, mais s'avère plus simple si on considère que la perturbation de vitesse est *irrotationnelle*, et s'écrit donc

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{grad} \phi_j.$$

Cette hypothèse ne peut conduire *a priori* qu'à une condition suffisante (mais non nécessaire) d'instabilité, car elle empêche de conclure sur l'évolution de perturbations rotationnelles. En fait, la condition de stabilité obtenue en considérant des perturbations particulières, irrotationnelles, est nécessaire et suffisante. En effet, l'équation d'Helmholtz des perturbations de vorticité $\boldsymbol{\omega}$, linéarisée autour de l'état de repos du fluide, s'écrit

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega},$$

équation qui se réduit à $\partial_t \boldsymbol{\omega} = 0$ en l'absence de diffusion visqueuse (Guyon *et al.* 2001) ; le champ de vitesse associé à une distribution initiale de vorticité ne peut donc être qu'un champ *constant*, qui ne peut pas participer à la croissance d'une instabilité.

Équations de conservation

Par souci de simplicité, nous ne considérerons de plus que des perturbations bidimensionnelles dans un plan vertical (x, y) . L'équation d'incompressibilité s'écrit alors

$$\partial_{xx} \phi_j + \partial_{yy} \phi_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.27)$$

La conservation de la quantité de mouvement est donnée par l'équation de Bernoulli, intégrale première des équations d'Euler,

$$\rho_j \partial_t \phi_j + \frac{1}{2} \rho_j (\mathbf{grad} \phi_j)^2 + (\bar{P}_j + p_j) + \rho_j g y = P_0, \quad j = 1, 2,$$

où la constante d'intégration, P_0 , est imposée par le fait que l'équation doit être satisfaite par l'écoulement non perturbé (2.25). Par soustraction de cet écoulement non perturbé, il vient l'équation des perturbations

$$\rho_j \partial_t \phi_j + \frac{1}{2} \rho_j (\mathbf{grad} \phi_j)^2 + p_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.28)$$

Conditions aux limites

Les conditions de décroissance de la perturbation à l'infini s'écrivent

$$\phi_1 \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty, \quad (2.29a)$$

$$\phi_2 \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow +\infty. \quad (2.29b)$$

Avant d'expliquer les conditions à l'interface, rappelons quelques résultats de cinématique d'une surface $H(x, y, z, t) = 0$ (figure 2.2). La normale \mathbf{n} à cette surface (vecteur unitaire orthogonal à la surface) s'obtient en considérant que dans un déplacement $d\mathbf{x}$ à t fixé, le long d'une ligne de cette surface, la différentielle de H est nulle : $dH = \mathbf{grad}H.d\mathbf{x} = 0$; la normale est donc parallèle à $\mathbf{grad}H$, d'où

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{grad}H}{|\mathbf{grad}H|}. \quad (2.30)$$

Par ailleurs, la différentielle de $H(x, y, z, t) = 0$ s'écrit

$$dH = \partial_t H dt + \mathbf{grad}H.d\mathbf{x} = 0,$$

avec $d\mathbf{x} = \mathbf{w}dt$, où \mathbf{w} est la vitesse d'un point de la surface. On en déduit la composante normale de la vitesse (la vitesse tangentielle d'une surface géométrique n'est pas définie) :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{-\partial_t H}{|\mathbf{grad}H|}. \quad (2.31)$$

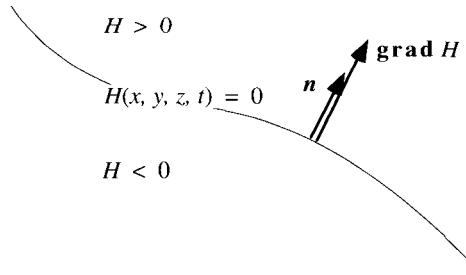


FIG. 2.2 – La normale à une surface $H(x, y, z, t) = 0$ est parallèle à son gradient.

Pour le problème bidimensionnel considéré ici, l'interface est définie géométriquement par

$$H(x, y, t) = y - \eta(x, t) = 0.$$

La normale et la vitesse normale de l'interface sont donc

$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial_x \eta, 1)}{\sqrt{1 + \partial_x^2 \eta}}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial_t \eta}{\sqrt{1 + \partial_x^2 \eta}},$$

où $\partial_x \eta$ est la pente de l'interface.

Les conditions aux limites à l'interface sont de deux types : une condition dite « cinématique » qui traduit l'imperméabilité de l'interface, et une condition sur les contraintes ou condition dynamique. La condition cinématique est que, dans chaque fluide, la vitesse normale $\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}$ à l'interface doit être égale à la vitesse normale $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ de l'interface :

$$\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } y = \eta(x, t), \quad j = 1, 2,$$

soit

$$\partial_x \phi_1 (-\partial_x \eta) + \partial_y \phi_1 = \partial_t \eta \quad \text{en } y = \eta, \quad (2.32a)$$

$$\partial_x \phi_2 (-\partial_x \eta) + \partial_y \phi_2 = \partial_t \eta \quad \text{en } y = \eta. \quad (2.32b)$$

Passons à la condition de raccordement de la contrainte. Cette contrainte est ici purement normale à l'interface, et elle est égale à $-P_1 \mathbf{n}$ dans le fluide inférieur et à $-P_2(-\mathbf{n})$ dans le fluide supérieur (figure 2.3). La condition de raccordement est donnée par la relation de Laplace-Young

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{R} \quad \text{en } y = \eta, \quad (2.33)$$

où γ est la tension interfaciale et R^{-1} est la courbure de l'interface, ici égale à

$$\frac{1}{R} = -\operatorname{div} \mathbf{n} = \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + \partial_x^2 \eta)^{3/2}}.$$

Pour une concavité de l'interface orientée vers le bas (cas de la figure 2.3), on doit avoir $P_1 > P_2$, la courbure doit donc être négative d'après (2.33), ce qui correspond bien à une normale divergente ($\operatorname{div} \mathbf{n} > 0$).

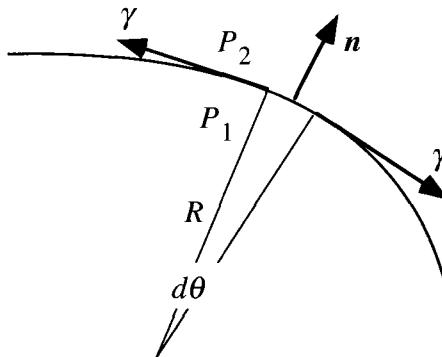


FIG. 2.3 – La différence des pressions de part et d'autre de l'interface est due à la tension interfaciale γ . Pour une interface cylindrique, la condition d'équilibre s'écrit $(P_1 - P_2)Rd\theta = 2\gamma d\theta/2$, d'où $P_1 - P_2 = \gamma/R$ (loi de Laplace-Young).

2.3.3 Linéarisation, modes normaux et relation de dispersion

Linéarisant les équations des perturbations (2.27), (2.28) et les conditions aux limites (2.29), (2.32) et (2.33), il vient un système à coefficients constants, indépendant de x et t . La dépendance en x et t des solutions est donc exponentielle, et les perturbations peuvent être recherchées sous la forme de modes normaux :

$$(\phi_j, p_j, \eta) = \frac{1}{2} \left(\hat{\phi}_j(y), \hat{p}_j(y), \hat{\eta} \right) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad j = 1, 2. \quad (2.34)$$

On remarquera que, contrairement au cas de l'instabilité gravitationnelle dans un gaz d'extension illimitée, la dépendance de ϕ_j et p_j vis-à-vis de y est ici inconnue *a priori*. La raison est que le problème n'est pas invariant par translation suivant y (on passe d'un fluide dans l'autre). Le système des équations linéarisées des perturbations devient

$$(\partial_{yy} - k^2) \hat{\phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.35a)$$

$$-i\omega \rho_j \hat{\phi}_j + \hat{p}_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.35b)$$

avec les conditions aux limites loin de l'interface

$$\hat{\phi}_1 \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty, \quad (2.36a)$$

$$\hat{\phi}_2 \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow +\infty, \quad (2.36b)$$

et les conditions aux limites sur l'interface

$$\partial_y \hat{\phi}_1 = -i\omega \hat{\eta} \quad \text{en } y = 0, \quad (2.37a)$$

$$\partial_y \hat{\phi}_2 = -i\omega \hat{\eta} \quad \text{en } y = 0, \quad (2.37b)$$

$$(\hat{p}_2 - \rho_2 g \hat{\eta}) - (\hat{p}_1 - \rho_1 g \hat{\eta}) = -k^2 \gamma \hat{\eta} \quad \text{en } y = 0. \quad (2.37c)$$

Pour obtenir la dernière équation, on a fait intervenir un développement en série de Taylor de la pression au voisinage $y = 0$:

$$P(\eta) = \bar{P}(\eta) + p(\eta) = \bar{P}(0) + \eta \partial_y \bar{P}(0) + p(0) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

On remarquera que la linéarisation a ramené les conditions interfaciales en $y = 0$.

La solution générale de l'équation (2.35a) s'écrit

$$\hat{\phi}_j = A_j e^{-ky} + B_j e^{-ky}, \quad j = 1, 2. \quad (2.38)$$

La prise en compte des conditions (2.36) de décroissance à l'infini conduit à $A_1 = 0$ et $B_2 = 0$ pour $k > 0$. Remarquons que la fonction propre décroît donc exponentiellement de part et d'autre de l'interface, ce qui signifie

qu'une perturbation de nombre d'onde k se fait sentir sur une profondeur d'ordre $k^{-1} = \lambda/2\pi$. Compte tenu de (2.38) et (2.35b), les conditions interfaciales (2.37) se réécrivent

$$i\omega\hat{\eta} + kB_1 = 0, \quad (2.39a)$$

$$i\omega\hat{\eta} - kA_2 = 0, \quad (2.39b)$$

$$-i\rho_1\omega B_1 + i\rho_2\omega A_2 + (\rho_1 - \rho_2)g\hat{\eta} = -k^2\gamma\hat{\eta}, \quad (2.39c)$$

Ce système algébrique homogène n'admet de solution B_1 , A_2 et $\hat{\eta}$ non nulle que si son déterminant est nul, soit (Rayleigh 1883a) :

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - ((\rho_1 - \rho_2)gk + k^3\gamma) = 0. \quad (2.40)$$

L'équation ci-dessus est la relation de dispersion des petites perturbations pour k positif⁴. Toute l'information sur la stabilité linéaire de deux couches fluides superposées y est contenue.

2.3.4 Discussion

La relation de dispersion a été obtenue sans préciser la nature réelle ou complexe de k et ω . Considérons maintenant l'évolution temporelle d'une onde de nombre d'onde k réel (positif), *i.e.* d'amplitude spatialement uniforme. La relation de dispersion (2.40) étant quadratique en ω , elle admet deux racines ω_{\pm} réelles ou complexes conjuguées.

Pour $\rho_1 > \rho_2$ (fluide le plus lourd en bas, $r > 0$), les racines sont réelles pour tout nombre d'onde ; introduisant la longueur capillaire (2.23) et le temps capillaire (2.24), ces racines s'écrivent

$$\tau_c \omega_{\pm} = \pm \sqrt{rkl_c(1 + k^2l_c^2)}. \quad (2.41)$$

Les modes propres correspondent donc à deux ondes d'amplitude constante se propageant dans deux directions opposées avec la célérité $c_{\pm} = \pm\omega/k$. En particulier, on reconnaît pour $\rho_2 = 0$ ($r = 1$) la classique relation de dispersion des ondes de capillarité-gravité en eau profonde (Lighthill 1978). L'existence de ces deux modes correspond à l'invariance du problème dans la transformation $x \rightarrow -x$, ou symétrie de réflexion spatiale.

Pour $\rho_1 < \rho_2$ (fluide le plus lourd en haut, $r < 0$), les modes propres correspondent toujours à des ondes de stabilité neutre (racines réelles et de signe contraire), tant que le nombre d'onde est suffisamment grand, précisément pour $kl_c > 1$. Mais pour les petits nombres d'onde tels que $kl_c < 1$, les racines de la relation de dispersion sont imaginaires pures :

$$\tau_c \omega_{\pm} = \pm i\sqrt{(-r)kl_c(1 - k^2l_c^2)}. \quad (2.42)$$

4. Pour $k < 0$, il faut substituer un signe $+$ à la place du premier signe $-$ dans (2.40).

Le mode correspondant à ω_- est tel que $e^{-i\omega_- t}$ décroît au cours du temps, c'est-à-dire qu'il est stable ; l'autre mode, ω_+ , est instable. L'existence de ces deux modes de stabilité opposée correspond à l'invariance du problème dans la transformation $t \rightarrow -t$ et $\mathbf{u} \rightarrow -\mathbf{u}$. Cette invariance par réflexion temporelle est liée au caractère non dissipatif de l'écoulement ; elle disparaîtrait avec la prise en compte du terme visqueux $\Delta\mathbf{u}$.

Ainsi, les résultats de l'analyse dimensionnelle sont ici confirmés et précisés : lorsque le fluide lourd est au-dessus, le nombre d'onde tel que $kl_c = 1$ est un nombre d'onde de coupure, au-dessus duquel les perturbations sont neutres, et au-dessous duquel elles s'amplifient : c'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor. La figure (2.4) présente le taux de croissance des deux modes en fonction du nombre d'onde. Le mode le plus amplifié, celui dont le taux de croissance est le plus grand, est tel que $kl_c \approx 0,6$. À partir d'une perturbation contenant un large spectre de nombres d'onde, ce mode est celui qui va finir par dominer au cours du temps, au moins tant que son amplitude reste suffisamment petite pour que les effets non linéaires ne se manifestent pas. Une instabilité telle que la bande de nombres d'onde instables s'étende de $k = 0$ à un nombre d'onde de coupure k_{off} fini est dite *instabilité de grande longueur d'onde*.

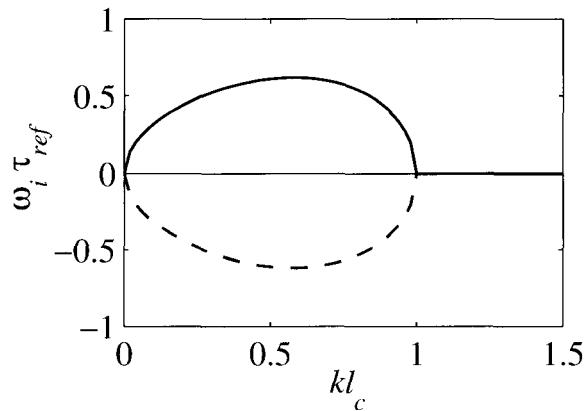


FIG. 2.4 – Taux de croissance des deux modes de Rayleigh-Taylor lorsque le fluide le plus lourd est en haut ($r < 0$), normalisé par $\tau_{ref} = \tau_c(-r)^{-1/2}$, en fonction du nombre d'onde normalisé kl_c ; (- -), mode stable; (—), mode instable.

2.3.5 Effets des parois et de la viscosité

L'étude précédente montre que l'amplitude des fonctions propres (2.38) décroît exponentiellement de part et d'autre de l'interface, avec une profondeur de pénétration k^{-1} . On peut donc attendre que l'effet des parois se fasse sentir si l'épaisseur des couches est du même ordre de grandeur ou plus petite que cette profondeur de pénétration ; le calcul montre que c'est effectivement

le cas (Milne-Thompson 1962). Seul le taux de croissance des petits nombres d'onde est sensiblement modifié : il varie comme k et non plus comme \sqrt{k} . Le nombre d'onde de coupure n'est pas modifié.

L'effet de la viscosité se fait essentiellement sentir sur les grands nombres d'onde, pour lesquels les gradients de vitesse sont forts : la viscosité dissipe l'énergie des ondes courtes. Si la tension interfaciale est nulle (cas de deux fluides miscibles), les ondes courtes demeurent instables mais le taux de croissance décroît comme $1/k$ (figure 2.5). Si la tension interfaciale est non nulle, les ondes courtes sont stables, et leur taux de croissance varie comme $-k$. Un résultat remarquable est que le nombre d'onde de coupure $kl_c = 1$ est indépendant des viscosités (Chandrasekhar 1961, §94).

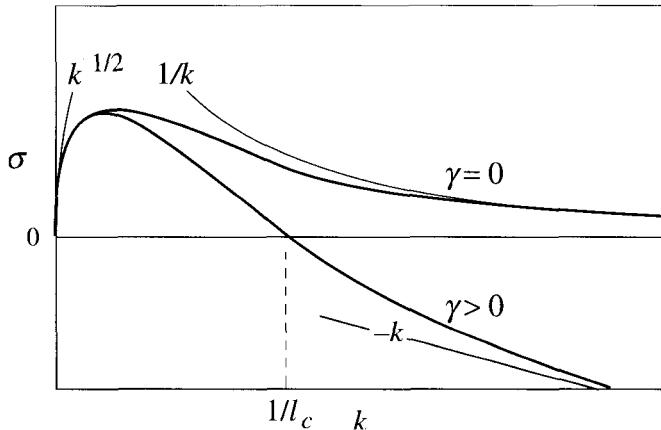


FIG. 2.5 – Taux de croissance lorsque les effets visqueux ne sont pas négligeables, avec et sans tension interfaciale γ , et comportements asymptotiques pour les petits et grands nombres d'onde.

Un cas intéressant est celui d'une couche mince visqueuse suspendue au-dessus d'un fluide plus léger, par exemple un film de peinture étalé sur un plafond. Le développement de perturbations de grande longueur d'onde (devant l'épaisseur du film) est ralenti par la viscosité, et leur taux de croissance varie comme k^2 et non plus comme k (Fermigier *et al.* 1992). La structure de l'interface qui résulte de cette instabilité est illustré sur la figure 2.6 : des gouttes pendantes, stables, qui s'arrangent de façon périodique ; ce réseau de gouttes peut être hexagonal ou carré, selon la géométrie de la plaque qui supporte le film et la présence éventuelle de défauts sur la plaque.

L'instabilité de Rayleigh-Taylor se manifeste également dans le cas d'une interface fortement accélérée (Taylor 1950). La gravité joue alors un rôle mineur, et c'est l'accélération dans le repère de l'interface qu'il faut prendre en compte. Si l'accélération relative est dirigée vers le fluide le moins dense, l'interface est instable. Ce phénomène se manifeste par exemple lors de l'impact

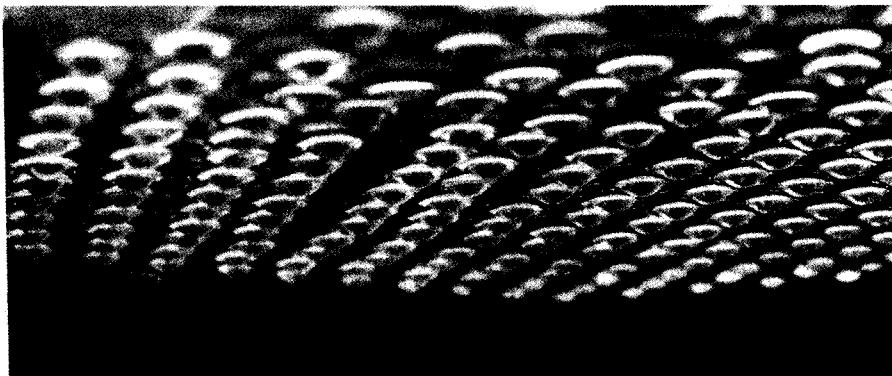


FIG. 2.6 – Une couche mince d'huile est déposée sur une plaque plane, puis la plaque est retournée. le film d'huile est instable et l'instabilité se manifeste par l'apparition de gouttes pendantes disposées sur un réseau ici hexagonal (Fermigier *et al.* 1990).

d'une goutte sur une couche liquide de faible épaisseur, illustré sur la figure 2.7. L'impact de la goutte crée un voile liquide cylindrique (suivant un mécanisme que nous ne discutons pas ici), voile dont le bourrelet supérieur se rétracte ensuite sous l'effet de la tension de surface. Fortement accéléré vers le bas,



FIG. 2.7 – Impact d'une goutte sur une surface liquide. La couronne de filaments résulte d'une instabilité de Rayleigh-Taylor. Cliché A. Davidhazy, Rochester Inst. of Techn., New York.

ce bourrelet est le siège d'une instabilité de Rayleigh-Taylor qui conduit à la formation de doigts ou filaments, lesquels se fractionnent à leur tour en gouttelettes (selon un mécanisme décrit dans la section suivante). L'ordre de grandeur de l'accélération g' du bourrelet peut être obtenu en considérant un bourrelet torique de rayon r et d'épaisseur e , dont la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho 2\pi r \pi (e/2)^2 g' \approx 2\gamma 2\pi r.$$

Avec $e = 0,2$ mm et $\gamma = 0,07$ Pa.m, il vient $g' \approx 5\ 000$ m/s², accélération très grande devant celle de la pesanteur. Le temps caractéristique de croissance de l'instabilité peut être estimé à partir du temps capillaire (2.24) en substituant g' à g , d'où $\tau_c \approx 0,2$ ms. Ce temps très court indique que la visualisation du phénomène nécessite de la cinématographie rapide.

2.4 Instabilité capillaire de Rayleigh-Plateau

2.4.1 Description

Quiconque s'est arrêté devant un robinet laissant échapper un mince filet d'eau a pu observer une instabilité capillaire : la rupture du filet en gouttelettes. Il est possible de contrôler la fréquence des gouttes, et donc leur espacement et leur taille, en excitant le filet liquide par des ondes acoustiques envoyées par un haut-parleur placé à proximité. La figure 2.8 montre la formation de telles gouttelettes « forcées » ; plus la fréquence d'excitation est basse, plus la fréquence de passage des gouttes est basse et leur espacement grand. La taille des gouttes peut aussi être forcée par des vibrations de la buse créées par un élément piézo-électrique : cette technique est très utilisée dans les imprimantes à jet d'encre où l'on cherche à envoyer sur le papier des gouttes aussi petites et bien calibrées que possible (de quelques picolitres de volume). On remarquera aussi sur la figure 2.8 le caractère très déformé des gouttes lors de la rupture du filet, ainsi que la présence de petites gouttelettes secondaires entre les gouttes principales.

Les premières observations de la rupture d'un filet fluide en gouttelettes ont été faites par le Français F. Savart (1833), sans pourtant que soit reconnue la tension de surface comme phénomène à l'origine de l'instabilité (cette tension de surface avait été mise en évidence en 1805 par le Français P. S. de Laplace et l'Anglais T. Young). Une telle reconnaissance est due au physicien belge J. Plateau (1857). Les nombreuses observations de Plateau, qui forçait la fréquence des gouttes à l'aide d'un violoncelle, ont été reprises dans son ouvrage de 1873 qui rapporte en particulier qu'une viscosité plus élevée augmente la longueur d'onde des perturbations et donc le volume des gouttes. La première étude de stabilité est due à Rayleigh (1879), dont le calcul non visqueux identifiait correctement l'inertie du liquide comme le phénomène retardant l'effet déstabilisant de la tension de surface. Rayleigh donne pour le

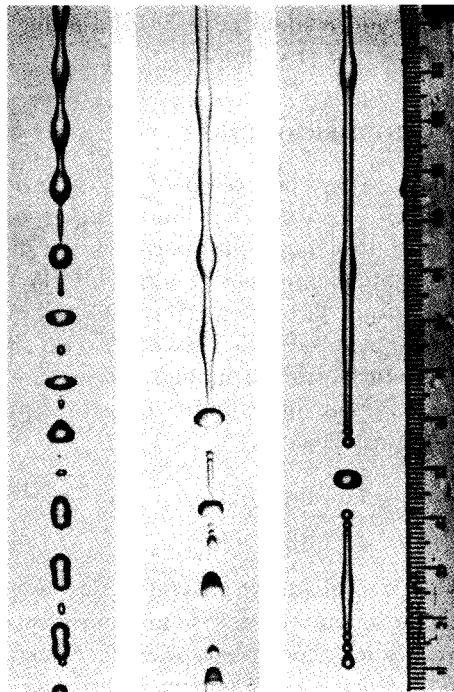


FIG. 2.8 – Un filet d'eau issu d'un tube de 4 mm de diamètre est perturbé à différentes fréquences par un haut-parleur. Les « longueurs d'onde » du chapelet de gouttes sont de 4,6, 12,5 et 42 diamètres. Cliché Rutland et Jameson 1971 (Van Dyke 1982).

nombre d'onde k_{max} le plus amplifié

$$k_{max}a = 0,697,$$

où a est le rayon du filet fluide, correspondant à une longueur d'onde $\lambda_{max} = 9,01 a$. Cette prédiction s'accordait aux observations de Savart à 3 % près ! Les calculs de Rayleigh (non visqueux en 1879 puis purement visqueux en 1892) ont été étendus aux nombres de Reynolds finis par Chandrasekhar (1961). Un développement du résultat de Chandrasekhar pour les petits nombres d'onde ($ka \ll 1$) donne pour le nombre d'onde le plus amplifié

$$(k_{max}a)^2 = \frac{1}{2 + \sqrt{18/Re}}$$

où $Re = Ua/\nu$ est le nombre de Reynolds construit avec la vitesse capillaire $U = \sqrt{\gamma/\rho a}$; cette relation s'avère être une très bonne approximation pour toutes les longueurs d'onde et viscosités. Une excellente présentation de développements plus récents, au-delà de l'analyse linéaire, est donnée par Eggers

(1997). Nous nous en tiendrons dans cette section à une analyse dimensionnelle du problème linéaire non visqueux.

2.4.2 Analyse dimensionnelle

Comme discuté dans la section précédente, la tension interfaciale stabilise l'interface *plane* entre deux couches fluides superposées dans le champ de la pesanteur. La raison est que toute perturbation d'une interface plane augmente son aire A , et augmente donc l'énergie interfaciale γA . Dans le cas présent d'un filet cylindrique, la tension interfaciale est au contraire déstabilisante, c'est elle qui est responsable de l'instabilité. En effet, pour un volume de fluide donné, l'aire interfaciale est moindre pour un ensemble de gouttes de rayon r sphériques que pour un cylindre de rayon a ; plus précisément, le rapport des aires est (figure 2.9a)

$$\frac{\text{aire des gouttes}}{\text{aire du cylindre}} = \frac{3}{2} \frac{a}{r}.$$

Ainsi, le rapport des aires est d'autant plus faible que les gouttes formées sont plus grosses (et donc moins nombreuses) : la minimisation de l'aire interfaciale doit conduire aux gouttes les plus grosses possible. L'instabilité correspond à la transition vers un état de moindre énergie interfaciale. Cependant, la formation de grosses gouttes exige de grands déplacements des particules fluides, déplacements auxquels s'oppose l'inertie du fluide (figure 2.9). Le diamètre des

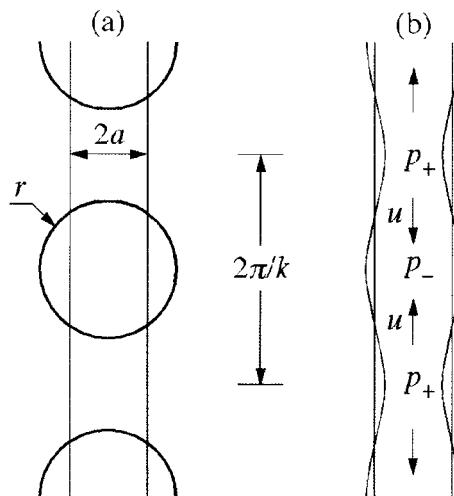


FIG. 2.9 – Instabilité capillaire d'un filet d'eau : une perturbation de l'interface s'amplifie du fait d'un gradient de pression capillaire, et conduit à la formation de gouttelettes.

gouttes va donc être déterminé par un compromis entre un facteur déstabilisant, la tension interfaciale, et un facteur stabilisant, ou au moins retardant, l'inertie du fluide.

On peut estimer le temps de formation des gouttes par une analyse dimensionnelle, en omettant les effets visqueux. Considérons un repère lié au filet d'eau, dont on admet qu'il avance à vitesse constante : dans ce repère galiléen, le filet est au repos. Les grandeurs dont dépend le problème sont la masse volumique ρ , le rayon a du filet, et la tension interfaciale γ (dont la dimension est MT^{-2}), et les seules échelles de longueur et de temps sont le rayon a et le temps capillaire

$$\tau_c = \sqrt{\rho a^3 / \gamma}. \quad (2.43)$$

On peut donc avancer que ces échelles donnent les ordres de grandeur du diamètre des gouttes et du temps de leur formation. Ce temps de formation des gouttes croîtrait avec la masse ρa^3 des gouttes, et décroîtrait avec la tension interfaciale, ce qui paraît raisonnable. Pour un filet d'eau d'un millimètre de rayon dans l'air, l'échelle de temps τ_c vaut 3,8 millisecondes.

De façon plus précise, considérons une perturbation de longueur d'onde $2\pi/k$ et d'amplitude η de l'interface cylindrique, comme schématisé sur la figure 2.9b (cette perturbation conserve le volume à des termes d'ordre $(\eta/a)^2$ près, négligeables pour η/a petit). Si cette longueur d'onde est très petite devant le rayon a , la perturbation « voit » une interface plane, il s'agit donc d'une onde capillaire neutre (taux de croissance nul). Si au contraire la longueur d'onde est très grande, la perturbation induit une différence des rayons de courbure : celui-ci est voisin de $a-\eta$ aux pincements et $a+\eta$ aux renflements du filet. La différence des courbures, qui peut s'écrire

$$\frac{1}{a-\eta} - \frac{1}{a+\eta} \approx \frac{2\eta}{a^2},$$

pour η/a petit, entraîne donc d'après la loi de Laplace-Young une différence de pression $p_+ - p_- \approx 2\gamma\eta/a^2$, et donc un gradient de pression moyen $(k/\pi)(p_+ - p_-) \approx 2k\gamma\eta/\pi a^2$. Ce gradient induit une accélération du fluide vers les ventres où la pression est plus basse, d'ordre

$$\frac{du}{dt} \sim \frac{k(p_+ - p_-)}{\rho} \sim \frac{ak\eta}{\tau_c^2},$$

où on a introduit le temps capillaire (2.43). La conservation de la masse donne une autre équation : le volume de fluide sortant pendant un temps dt d'un pincement est d'ordre $ua^2 dt$; ce débit correspond à une variation de volume d'ordre $(a/k)d\eta$, où $d\eta$ est la variation de η pendant dt ; on en déduit $ua^2 dt \sim (a/k)d\eta$, soit

$$\frac{d\eta}{dt} \sim kau.$$

Dérivant la première équation par rapport au temps, et compte tenu de la seconde, il vient

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \sigma^2 u, \quad \sigma \sim \frac{ka}{\tau_c}. \quad (2.44)$$

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux exponentielles dont l'une, de taux de croissance σ , correspond bien à l'instabilité cherchée.

Comme le montre la figure 2.10, le calcul non visqueux de Rayleigh (1879) et les mesures de Donnelly & Glaberson (1966) confirment ces estimations : augmentation linéaire du taux de croissance avec le nombre d'onde pour $ka \ll 1$, taux de croissance maximum d'ordre τ_c pour $ka \approx 0,70$ (soit $\lambda/a = 9,0$), puis décroissance et extinction pour $ka = 1$.

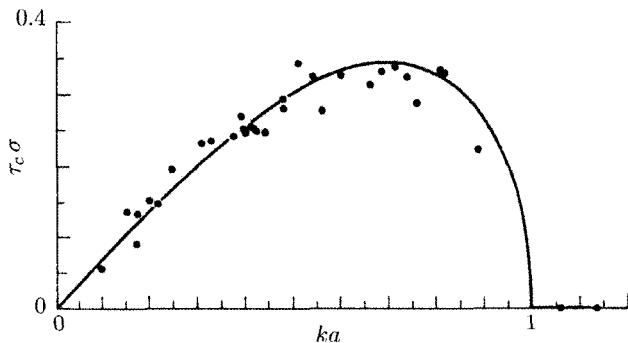


FIG. 2.10 – Taux de croissance $\tau_c\sigma$, avec $\tau_c = \sqrt{\rho a^3/\gamma}$, de l'instabilité d'un filet fluide non visqueux, et points expérimentaux de Donnelly & Glaberson (1966).

Notons qu'on observe des oscillations des gouttes formées, oscillations amorties après quelques périodes par la viscosité qui dissipe finalement l'énergie de surface libérée. On peut trouver l'ordre de grandeur de la période des oscillations (du mode de plus basse fréquence) par un raisonnement semblable au précédent, une goutte se comportant comme un oscillateur dont la masse est d'ordre ρa^3 et la raideur d'ordre γ : on trouve que la période est de l'ordre du temps capillaire τ_c , comme attendu puisque τ_c est la seule échelle de temps du problème.

2.5 Instabilité thermique de Rayleigh-Bénard

2.5.1 Description

L'instabilité thermique d'une couche fluide chauffée par le bas est à l'origine de mouvements de convection observés sur une très large gamme d'échelles spatiales, depuis les échelles millimétriques des dispositifs de refroidissement de boîtiers électroniques jusqu'aux échelles planétaires ou stellaires.

L'expérience modèle qui permet d'étudier cette instabilité est schématisée sur la figure 2.11. Un fluide est interposé entre deux plaques parallèles horizontales, distantes d'une longueur d . Ces plaques sont portées à des températures aussi uniformes que possible T_1 et $T_2 < T_1$.

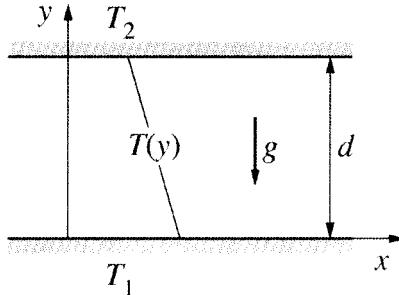


FIG. 2.11 – Schéma de l'expérience de mise en évidence de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Lorsque la différence de température est suffisamment faible, le transfert thermique s'effectue par diffusion (ou « conduction ») du bas vers le haut : le fluide est au repos, et le profil vertical de température, solution de l'équation de conservation de l'énergie, est linéaire. Lorsque la différence de température atteint un seuil critique, cette situation devient instable, et le fluide se met en mouvement sous forme de rouleaux de convection : c'est l'instabilité de Rayleigh-Bénard⁵. Deux rouleaux adjacents tournent en sens contraire comme deux roues d'engrenage. Leur géométrie dépend des conditions imposées au bord des plaques : rouleaux rectilignes parallèles dans une « boîte » rectangulaire (figure 2.12), ou rouleaux concentriques dans une boîte circulaire (figure 2.13). Les rouleaux de convection une fois apparus, le transfert thermique ne s'effectue plus seulement par diffusion, car le fluide participe à ce transfert par son mouvement ; ce transfert thermique par convection est beaucoup plus efficace que le transfert purement diffusif : il varie non plus linéairement avec la différence de température $T_1 - T_2$, mais comme son carré (Drazin & Reid 2004).

L'augmentation de la différence de température conduit à une déstabilisation des rouleaux de convection issus de l'instabilité primaire, qui peuvent se mettre en « zigzags », ou peuvent osciller de façon périodique. Au fur et à mesure que la différence de température augmente, des comportements de plus en plus désordonnés et difficiles à analyser se manifestent. Ces comportements ont été très étudiés dans les années 1980 comme manifestations d'un chaos à petit nombre de degrés de liberté (Bergé, Pomeau & Vidal 1984). Un ouvrage de référence décrivant ces phénomènes est celui de Koschmieder (1993).

5. On considère ici le cas d'un fluide dont le coefficient de dilatation isobare est positif, situation la plus courante ; dans le cas contraire (l'eau entre 0 et 4 °C par exemple), l'instabilité surviendrait en chauffant la plaque supérieure.

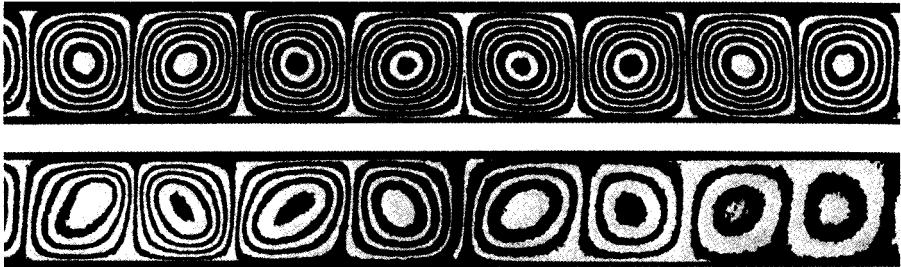


FIG. 2.12 – Rouleaux de convection thermique dans une huile silicone. Les lignes de courant sont visualisés par interférogrammes. Les dimensions relatives de la boîte sont 10:4:1. Haut : rouleaux réguliers orientés parallèlement au petit côté, pour un gradient de température uniforme. Bas : la différence de température et donc l'intensité des rouleaux décroît de la gauche vers la droite. Cliché Oertel & Kirchartz, 1979 (Van Dyke 1982).

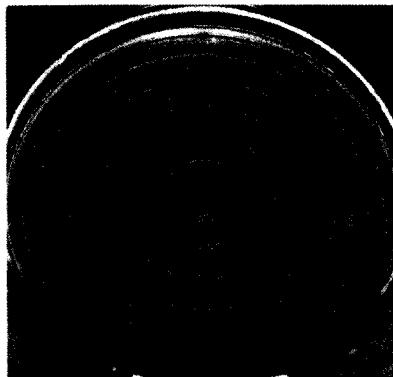


FIG. 2.13 – Vue de dessus de rouleaux de convection thermique dans une huile silicone, visualisés par de la poudre d'aluminium à travers une paroi supérieure en Plexiglas. La frontière circulaire induit des rouleaux circulaires. $Ra = 2,9 Ra_c$. Cliché Koschmieder, 1974 (Van Dyke 1982).

La différence de température n'est pas le seul paramètre dont une variation conduit à une instabilité : on pourrait par exemple rapprocher les parois en maintenant les températures constantes, ce qui augmenterait le gradient vertical de température. L'apparition de l'instabilité est en fait gouvernée par un nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh Ra qui est le paramètre de contrôle de l'instabilité ; ce nombre, défini ci-dessous, représente un rapport entre deux phénomènes, l'un déstabilisant, la force d'Archimède, et l'autre stabilisant, la diffusion thermique.

2.5.2 Mécanisme de l'instabilité ($Pr \gg 1$)

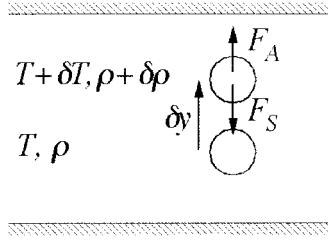


FIG. 2.14 · Particule fluide perturbée verticalement dans un gradient de température.

Considérons une petite particule fluide de rayon $a \ll d$, de température T et de densité ρ , qui, du fait de fluctuations, se trouve déplacée vers le haut d'une distance δy (figure 2.14) ; cette particule se trouve alors environnée de fluide plus froid et plus dense, de température $T + \delta T$ et de densité $\rho + \delta\rho$ telles que

$$\begin{aligned}\delta T &= \frac{T_2 - T_1}{d} \delta y < 0, \\ \delta\rho &= -\alpha_p \rho \delta T > 0,\end{aligned}$$

où α_p est le coefficient de dilatation isobare du fluide⁶. La particule se trouve alors soumise à une force de flottabilité (somme du poids et de la force d'Archimède), dirigée vers le haut et égale à

$$F_A = \frac{4}{3}\pi a^3 \delta\rho g.$$

Mais le mouvement ascensionnel qui en résulte est freiné par la résistance visqueuse. Considérons le cas d'un fluide à nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ élevé, où κ est la diffusivité thermique. Alors le temps de relaxation du mouvement de la particule, d'ordre a^2/ν , est bien plus court que le temps pendant lequel se maintient la différence de température, lui-même d'ordre a^2/κ . La particule atteint donc sa vitesse d'équilibre v sans que sa température ait significativement varié, cette vitesse d'équilibre correspondant à l'équilibre entre la force d'Archimède et la force de traînée de Stokes :

$$F_S + F_A = 0, \quad \text{avec} \quad F_S = -6\pi\mu av.$$

6. L'équation d'état générale s'écrit

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\alpha_p \delta T + \kappa_T \delta P,$$

où α_p est le coefficient de dilatation isobare et κ_T la compressibilité isotherme, mais l'effet de la compressibilité est ici négligeable.

Cette vitesse d'équilibre est donc

$$v = \frac{2}{9} \frac{\alpha_p g a^2 \delta T}{\nu}. \quad (2.46)$$

D'après cette équation, la vitesse v de la particule s'adapte donc très vite à la différence de température δT , dont elle est « esclave ».

Dans le mouvement ascensionnel, deux phénomènes sont en compétition : la diffusion thermique, qui tend à annuler la différence de température et donc à stopper le mouvement, et l'advection à la vitesse v vers du fluide plus froid, qui régénère la différence de température et tend à amplifier ce mouvement. La stabilité marginale doit correspondre à un équilibre entre ces deux phénomènes, qui peut s'exprimer par l'égalité de deux temps caractéristiques : le temps de diffusion thermique de la différence de température δT , égal à a^2/κ , et le temps de régénération de cette différence, égal à $\delta y/v$ avec $\delta y/d = \delta T/(T_1 - T_2)$; on en déduit

$$\frac{a^2}{\kappa} \sim \frac{\delta T d}{(T_1 - T_2)v}. \quad (2.47)$$

Cette condition de stabilité marginale dépend du rayon a de la particule ; la force déstabilisante F_A variant comme a^3 et la force de freinage F_S comme a , les grosses particules seront déstabilisées les premières. Introduisons le nombre de Rayleigh

$$Ra = \frac{\alpha_p g (T_1 - T_2) d^3}{\nu \kappa}. \quad (2.48)$$

Pour les plus grosses particules de rayon $d/2$, qui correspondent à la dimension des rouleaux de convection observés, la condition de stabilité marginale (2.47) associée à (2.46) s'écrit alors $Ra = Ra_c$ où $Ra_c \sim 72$ est la valeur du nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité. Cette valeur critique n'est pas exacte ce qui ne doit pas surprendre compte tenu du caractère dimensionnel de l'analyse ; le calcul complet conduit à $Ra_c = 1\,708$, valeur indépendante du nombre de Prandtl. L'important ici n'est pas la valeur numérique du seuil, mais la mise en évidence, par un raisonnement en termes d'échelles caractéristiques, d'un nombre sans dimension contrôlant l'apparition de l'instabilité, ce nombre mesurant un rapport entre effets stabilisants et déstabilisants. Pour $Ra < Ra_c$, la diffusion thermique l'emporte sur l'advection et toute perturbation est dissipée ; pour $Ra > Ra_c$, le mouvement s'amplifie.

2.5.3 Étude de stabilité dans l'approximation de Boussinesq

Le problème met en jeu la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les coefficients thermodynamiques et les coefficients de diffusion dépendant de la température et de la pression, la difficulté principale réside dans la formulation d'hypothèses ramenant le problème à un jeu

d'équations de complexité raisonnable (Rieutord 1997). Le modèle classique repose sur l'approximation de Boussinesq :

1. Les variations de masse volumique ne sont retenues que dans le terme de flottabilité de l'équation de Navier-Stokes. En effet, les variations relatives sont typiquement de l'ordre de 10^{-2} ou 10^{-3} , et peuvent être considérées comme des corrections du second ordre dans les équations des perturbations de l'état de base, sauf dans le terme de gravité, où elles sont une correction du premier ordre.
2. Dans l'équation de conservation de l'énergie, la puissance des forces intérieures (ici la dissipation visqueuse) est négligée, ainsi que la dépendance de l'énergie interne vis-à-vis de la pression.
3. Les coefficients thermodynamiques sont supposés constants (ce qui est valide si la différence de température n'est pas trop grande, disons inférieure à 10 K). De plus, les variations de masse volumique ne sont dues qu'à des variations de température (la compressibilité est négligée).

Le calcul complet a été résolu par Rayleigh (1916a) pour des conditions aux limites libres (glissement et non pas adhérence aux parois), qui conduit à un nombre de Rayleigh critique $Ra_c = 27\pi^4/4 \approx 657$. Ce calcul, et d'autres correspondant à différents types de conditions aux limites, sont détaillés dans de nombreux ouvrages (*e.g.* Manneville 1991; Koschmieder 1993; Rieutord 1997; Drazin & Reid 2004). Le résultat principal est la courbe de stabilité marginale dans le plan nombre d'onde - nombre de Rayleigh, présentée sur la figure 2.15 pour des conditions aux limites rigides. Cette courbe montre en particulier le nombre de Rayleigh critique $Ra_c = 1\,708$, indépendant du nombre de Prandtl, et le nombre d'onde le premier déstabilisé, $k_c d = 3,117$, qui correspond à une longueur d'onde très proche de $2d$. Au-delà de Ra_c , la largeur δk de la bande instable est centrée sur k_c et croît comme $\sqrt{Ra - Ra_c}$. Ce résultat est en bon accord avec les expériences, qui doivent être très soignées pour assurer en particulier l'uniformité des conditions aux limites sur les plaques.

Revenons pour terminer sur la question du mécanisme de l'instabilité, en écrivant les deux équations de conservation de la quantité de mouvement verticale et de conservation de l'énergie. Linéarisées autour de l'état de base, ces deux équations s'écrivent

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial_y p}{\rho} + \nu \Delta v + \alpha_p g \delta T, \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = \kappa \Delta \delta T + v \frac{T_1 - T_2}{d}. \quad (2.49b)$$

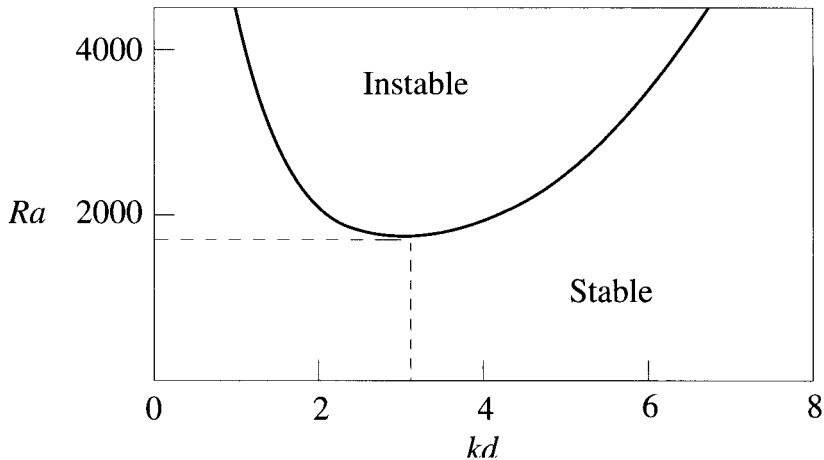


FIG. 2.15 – Allure de la courbe de stabilité marginale de l’instabilité de Rayleigh-Bénard.

Dans la première équation, les deux premiers termes du membre de droite correspondent au freinage visqueux⁷, et le troisième à la force d’Archimède ; l’équilibre entre ces deux forces, valable pour $Pr \gg 1$ où la vitesse est esclave de la température, correspond bien à l’équation dimensionnelle (2.46) avec $\Delta \sim -1/a^2$. La seconde équation montre que l’instabilité dépend du poids relatif de la diffusion thermique, stabilisante, et de l’advection, déstabilisante ; l’équilibre de ces deux termes correspond bien à la condition de stabilité marginale donnée par l’équation dimensionnelle (2.46), toujours avec $\Delta \sim -1/a^2$. Avec l’estimation (2.46) pour la vitesse, on peut déduire de (2.49b) une estimation du taux de croissance à grand nombre de Prandtl :

$$\sigma \sim \frac{\kappa}{d^2} \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}. \quad (2.50)$$

On remarquera que ce taux de croissance, dont l’échelle est le temps de diffusion thermique d^2/κ , est proportionnel à l’écart au seuil $Ra - Ra_c$.

Rayleigh (1916a) pensait par son calcul expliquer des observations, réalisées par Bénard (1900), de cellules de convection sur de minces couches de liquide chauffées par le bas. Il s’est avéré plus tard que l’instabilité mise en évidence par Rayleigh ne correspond pas à la situation étudiée par Bénard, à cause de la finesse du liquide. Dans ces expériences, l’instabilité du régime diffusif est due non pas à la force d’Archimède mais à des gradients de tension interfaciale engendrés par des inhomogénéités de température de la surface libre ; cette nouvelle instabilité est discutée dans la section suivante.

7. La force de pression est du même ordre de grandeur que la force visqueuse, comme dans la force de Stokes où les deux contributions sont exactement égales à $3\pi\mu av$. Le rôle de la pression est d’assurer la compatibilité des deux champs de vitesse u et v par la création d’un écoulement potentiel.

John William Strutt, Lord Rayleigh (1842–1919)



Né à Langford Grove, fils du second Baron Rayleigh of Terling Place, Witham, dans le Comté d'Essex, Angleterre. Études à Cambridge sous le parrainage du mathématicien Edward Routh. Influence déterminante de Gabriel G. Stokes. Première publication inspirée par l'article de Maxwell (1865) sur la théorie électromagnétique. Élu en 1865 *Fellow of Trinity College*, Cambridge. Publie en 1871 sa théorie de la dispersion de la lumière, première explication correcte de la couleur bleue du ciel. En 1871, suite à une sérieuse maladie, embarque avec sa femme pour une croisière de plusieurs mois sur le Nil, au cours duquel il commence à écrire son livre majeur, *Theory of Sound*, qui sera publié en 1877 (tome 1) et 1878 (tome 2). Acquiert le titre de Troisième Baron Rayleigh à la mort de son père en 1872, et installe son laboratoire dans la résidence familiale. Élu *Fellow of the Royal Society* en 1873. En 1879, succède à Maxwell à la chaire Cavendish de physique expérimentale à Cambridge. Travail expérimental important pour la standardisation de l'Ohm. En 1884, quitte la Chaire Cavendish et retourne à la tranquillité de Terling pour poursuivre ses recherches. Honoré par de nombreuses Sociétés Savantes, appointé comme conseiller scientifique par des associations maritimes et aéronautiques, devient chancelier de l'Université de Cambridge en 1908. Entretient une correspondance abondante avec de nombreux scientifiques de premier plan. Œuvre scientifique considérable : 446 publications de physique et de mathématiques appliquées, parfois sur des sujets inhabituels : *Insects and the colour of flowers* (1874), *On the irregular flight of a tennis ball* (1877), *The soaring of birds* (1883), ou *The problem of the Whispering Gallery* (1910). Notons également le papier de 1879 sur les ondes progressives qui a conduit à la théorie des solitons, et celui de 1885, sur les ondes se propageant à la surface d'un solide élastique, ondes qui jouent un rôle majeur en sismologie. Importantes contributions à l'hydrodynamique, en particulier sur la similitude et la stabilité des écoulements. Découvre l'argon en 1895 (nommé d'après un mot grec signifiant « inactif »), en liaison avec des expériences de mesure de densité de l'azote : deux méthodes de mesure conduisaient à une petite différence, d'un millième !, différence que Rayleigh n'a pas laissé passer : « *It is a good rule in experimental work to seek to magnify a discrepancy when it first appears rather than to follow the natural instinct to trying to get quit of it. What was the difference between the two kinds of nitrogen ?* ». Ce travail lui vaut le Prix Nobel en 1904.

2.6 Instabilité thermocapillaire de Bénard-Marangoni

2.6.1 Description

Lorsqu'une couche mince de liquide est chauffée par la plaque sur laquelle elle repose, une instabilité survient sous la forme de cellules de convection, généralement hexagonales, comme illustré sur les figures 2.16 et 2.17. Remarquer, sur la figure 2.16, comment les cellules hexagonales s'adaptent à une frontière circulaire, ainsi que le défaut en forme de fleur, au centre droit du cliché, provoqué par une petite bosse sur la plaque de cuivre inférieure. Ce phénomène de convection, découvert et étudié par Bénard (1900), ressemble à l'instabilité de Rayleigh-Bénard décrite précédemment, mais son origine physique est différente : cette origine est liée non pas à la force d'Archimède mais à des gradients de tension interfaciale dus à des inhomogénéités de température. À cette instabilité dite thermocapillaire est aujourd'hui associé le nom du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925), qui avait remarqué qu'un gradient de tension de surface, induit par un gradient de température ou de concentration d'un soluté, peut engendrer un mouvement du fluide, phénomène connu sous le nom d'effet Marangoni (Marangoni 1871, Probstein 2003). La bonne interprétation des expériences de Bénard est due à Pearson (1958).

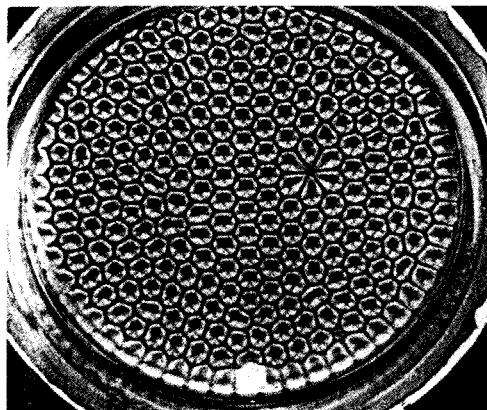


FIG. 2.16 – Cellules de convection thermocapillaire dans une fine couche d'huile silicone de viscosité $0,5 \text{ cm}^2/\text{s}$. Cliché Koschmieder, 1974 (Van Dyke 1982).

Le mécanisme de cette instabilité thermocapillaire est lié à la variation de la tension interfaciale avec la température. Pour un liquide en équilibre avec sa vapeur ou avec l'air, l'équation d'état empirique suivante est bien vérifiée

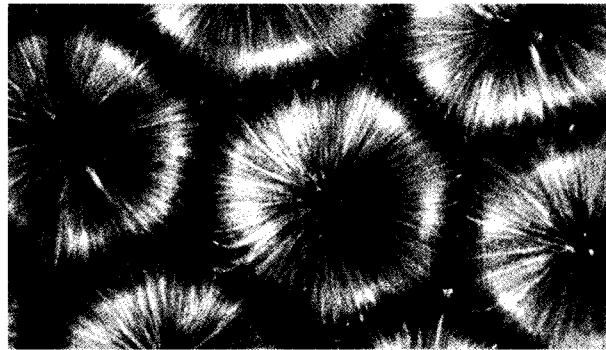


FIG. 2.17 – Vue de dessus de cellules de convection thermocapillaire dans une couche d'huile silicone de 1 mm d'épaisseur, surmontée par de l'air. La lumière réfléchie par des particules d'aluminium montre le fluide montant au cœur de la cellule hexagonale et descendant sur les bords. Le temps d'exposition est de 10 s, et le fluide traverse la cellule du centre au bord en 2 s. La dimension des cellules est 3,6 mm. Cliché Velarde, Yuste & Salan (Van Dyke 1982).

sur une large gamme de températures (Rocard 1967)

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{1,03 T}{T_c} \right), \quad (2.51)$$

où T_c est la température critique du fluide, et γ_0 une tension interfaciale fictive déterminée à partir d'une valeur connue de γ à une température donnée. Cette loi indique donc une diminution de la tension interfaciale linéaire avec la température, valable jusque très près du point critique (où la tension interfaciale s'annule). Ainsi, de petites hétérogénéités de température sur une interface engendrent des gradients de tension interfaciale. Une particule fluide située sur l'interface est donc tirée plus fort du côté où la température est moins élevée ; il en résulte un courant de surface des points chauds vers les points froids (figure 2.18). Du fluide plus chaud remonte donc remplacer le fluide qui est parti : l'effet amplifie la cause, d'où l'instabilité.

2.6.2 Analyse dimensionnelle

On peut, par un raisonnement analogue à celui qui a été mené pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, mettre en évidence le nombre adimensionnel qui gouverne le problème. Considérons une couche fluide d'épaisseur d , de viscosité μ et de diffusivité thermique κ , soumise à une différence de température $\Delta T > 0$ entre la plaque inférieure et la surface libre (figure 2.18). Supposons que le flux thermique, et donc le gradient de température $\Delta T/d$, sont imposés. Considérons une perturbation de vitesse u au voisinage de l'interface, sur une échelle spatiale horizontale k^{-1} . Cette vitesse horizontale engendre une

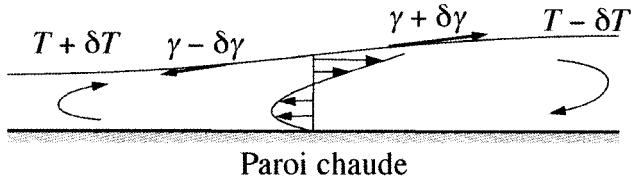


FIG. 2.18 – Mouvement fluide induit dans un film liquide par un gradient de tension interfaciale.

vitesse verticale d'ordre $v = kd u$ du fait de l'incompressibilité, et une variation $\delta d = v \delta t$ de la hauteur de fluide au bout d'un temps δt . Cette variation de hauteur découvre du fluide plus chaud dans le creux, la température de surface variant de $\delta T = -\Delta T \delta d/d$. Un élément de surface de longueur k^{-1} entre les points chaud et froid est alors soumis à une force nette F_γ d'ordre $\delta\gamma = \gamma' \delta T$ par unité de largeur, où $\gamma' = d\gamma/dT$, qui tend à l'éloigner du point chaud. Choisissons $\delta t = d^2/\kappa$, temps caractéristique pendant lequel se maintient la différence de température. La force déstabilisante F_γ est alors de l'ordre de

$$F_\gamma \sim \frac{k\gamma' \Delta T u d^2}{\kappa}.$$

Par ailleurs, cet élément de surface est soumis à une force de freinage visqueux, de l'ordre de

$$F_v \sim \frac{\mu u}{kd},$$

par unité de largeur. Les perturbations de grande longueur d'onde ($kd \ll 1$) sont donc soumises à une force déstabilisante faible et une force de freinage importante, et sont donc plus fortement dissipées que les perturbations telles que $k^{-1} \sim d$. Pour ces dernières, le seuil de l'instabilité est atteint lorsque la force déstabilisante est de l'ordre de la force de freinage. Le rapport de ces forces définit le nombre de Marangoni Ma :

$$Ma = \frac{\gamma' \Delta T d}{\kappa \mu}, \quad (2.52)$$

qui est donc le paramètre de contrôle de l'instabilité. Pour une analyse plus complète de cette instabilité thermocapillaire, voir la revue de synthèse de Schatz & Neitzel (2001).

2.7 Discussion

2.7.1 Échelles caractéristiques et sélection de modes

La présentation et la discussion de quelques instabilités a fait apparaître l'importance des échelles caractéristiques du problème. Nous avons montré

que la taille de la structure, ou motif (*pattern* en anglais), sélectionnée par l'instabilité, correspond souvent à cette longueur caractéristique. De même, le taux de croissance de l'instabilité est souvent donné par un temps caractéristique du problème. L'analyse dimensionnelle est donc un élément essentiel d'une étude de stabilité. Ceci dit, lorsque qu'un problème présente plusieurs échelles caractéristiques de longueur ou de temps, il devient difficile de comprendre à partir d'arguments simples, sans calcul détaillé, pourquoi telle ou telle échelle de longueur ou de temps est privilégiée par l'instabilité. L'analyse dimensionnelle retrouve de l'intérêt dans la limite où une échelle est très petite devant l'autre, certaines variables jouant alors un rôle passif (voir la discussion sur la vitesse esclave de la température dans l'instabilité de Rayleigh-Bénard à grand nombre de Prandtl).

Un élément important dans la sélection d'une structure est la taille du domaine offert au développement de l'instabilité. Par exemple, pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard, la taille des rouleaux est déterminée par la distance des parois horizontales, mais elle peut être influencée par les parois latérales si celles-ci sont proches, disons distantes de deux ou trois tailles de rouleaux seulement. Par contre, si ces parois latérales sont très éloignées, elles joueront peu sur la taille des rouleaux. Des hétérogénéités de structure pourront alors apparaître, des modulations par exemple, ou des défauts, situations étudiées aux chapitres 9 et 10.

2.7.2 Caractéristiques générales d'une instabilité à seuil

Plusieurs instabilités rencontrées dans ce chapitre, comme l'instabilité thermique ou thermocapillaire, sont des *instabilités à seuil* gouvernées par un *paramètre de contrôle* R . La valeur critique R_c du paramètre marquant la déstabilisation d'un nombre d'onde marginal k_c reflète une inversion du rapport entre un phénomène stabilisant et un phénomène déstabilisant. On peut déduire quelques propriétés générales d'une instabilité à seuil, à partir du développement en série de Taylor de son taux de croissance au voisinage du point critique (k_c, R_c) (en supposant que la relation de dispersion est analytique au voisinage de ce point, ce qui est en général le cas). Tronquant ce développement à ses premiers termes, il vient

$$\sigma(k, R) = \frac{\partial \sigma}{\partial R}(k_c, R_c)(R - R_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2}(k_c, R_c)(k - k_c)^2, \quad (2.53)$$

où on a tenu compte qu'à la stabilité marginale, la courbe $\sigma(k)$ est tangente à l'axe $\sigma = 0$ (figure 2.19a), ce qui implique $\sigma(k_c, R_c) = 0$ et $\partial_k \sigma(k_c, R_c) = 0$, et où on a aussi pris en compte que les dérivées seconde omises sont négligeables car $R - R_c \sim (k - k_c)^2$ comme le fait apparaître la relation ci-dessous.

De l'expression (2.53) on peut déduire l'allure du taux de croissance $\sigma(k)$ dans les trois cas d'écoulement stable ($R < R_c$), marginal ($R = R_c$) et instable ($R > R_c$) (figure 2.19a). L'expression (2.53) permet également de déduire la

forme de la courbe de stabilité marginale $\sigma(k, R) = 0$ près du seuil : cette forme est parabolique (figure 2.19b) :

$$R - R_c = -\frac{1}{2} \frac{\partial_{kk}\sigma(k_c, R_c)}{\partial_R\sigma(k_c, R_c)}(k - k_c)^2.$$

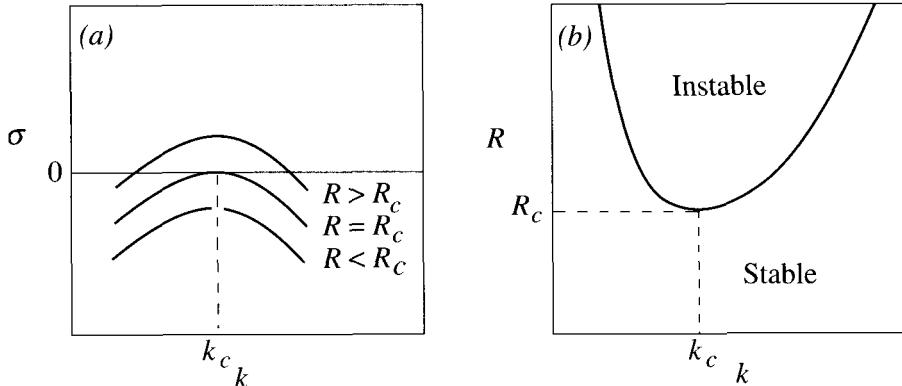


FIG. 2.19 – (a) Taux de croissance $\sigma(k)$ pour $R < R_c$, $R = R_c$ et $R > R_c$; (b) allure parabolique de la courbe de stabilité marginale $\sigma(k, R) = 0$ près du seuil (k_c, R_c) .

L’expression (2.53) montre que le temps de croissance τ d’un nombre d’onde instable voisin de k_c , qu’on définit par l’inverse du taux de croissance σ , diverge comme $1/(R - R_c)$ au voisinage du seuil. Ainsi, plus on est près du seuil, plus il faut attendre longtemps pour voir l’instabilité se manifester. Notons enfin que l’étude expérimentale d’une instabilité à seuil requiert que le paramètre de contrôle R varie suffisamment lentement, de façon « quasi-statique », pour que l’écoulement puisse à chaque instant être considéré en équilibre. Plus précisément, le temps caractéristique de variation du paramètre de contrôle doit être au moins égal au temps de relaxation de l’écoulement. Pour une instabilité thermique par exemple, ce temps de relaxation est d’ordre d^2/κ . Ce temps doit également être court devant le temps de croissance, sans quoi l’instabilité se développe sur un écoulement instationnaire.

2.8 Exercices

2.8.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor entre parois

Établir la relation de dispersion des perturbations de deux couches fluides non visqueuses superposées dans le champ de la gravité, en introduisant des perturbations de vitesse rotationnelles sous la forme $u = \partial_y\psi$, $v = -\partial_x\psi$ (Milne-Thompson 1962). Montrer que cette relation est identique à (2.40). Établir la relation de dispersion dans le cas de deux couches d’épaisseurs h_1 et h_2 . La bande de nombres d’onde instables est-elle différente ? Comment varie le taux de croissance pour k petit ?

2.8.2 Instabilité d'un film mince suspendu

On considère un film liquide d'épaisseur h mince, de viscosité μ et de masse volumique ρ , déposé sous une paroi plane horizontale dans le champ de la pesanteur $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$. On étudie la stabilité de ce film vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles dans le plan vertical (x, y) . La surface libre du film non perturbé est définie par $y = 0$ (la paroi est donc en $y = h$), la pression étant alors $\bar{P} = P_0 - \rho gy$ où P_0 est la pression de l'air sous le film.

On considère des perturbations de longueur d'onde grande devant l'épaisseur du film ($kh \ll 1$) ($\partial_x u + \partial_y v = 0$ implique $v \sim (kh)u \ll u$, l'écoulement est quasi parallèle), et on considère de plus l'écoulement quasi statique (c'est-à-dire qu'il s'adapte très rapidement aux conditions aux limites : le temps n'intervient que dans la condition à la surface libre déformée $\eta(x, t) = \hat{\eta} e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$). Les équations linéarisées des perturbations de l'état de base s'écrivent donc

$$0 = -\partial_x p + \mu\partial_{yy}u, \quad 0 = -\partial_y p.$$

1. On rappelle que les composantes du tenseur des contraintes d'un fluide newtonien sont données par $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(\partial_{x_j}U_i + \partial_{x_i}U_j)$. Montrer que, en considérant que l'air sous le film impose simplement sa pression P_0 (condition de surface libre), les conditions de raccordement des contraintes tangentielle et normale à la surface libre $y = \eta(x, t)$, une fois linéarisées autour de $y = 0$, s'écrivent

$$\partial_y u = 0, \quad p - \rho g \eta = \gamma \partial_{xx} \eta,$$

2. En utilisant les conditions aux limites à la paroi et à la surface libre, déterminer la vitesse u en fonction du gradient de pression $\partial_x p$.
3. Déterminer la vitesse v en fonction du gradient de pression $\partial_x p$.
4. En déduire, avec la condition cinématique à l'interface, l'expression suivante du taux de croissance des perturbations

$$\omega_i = \frac{1}{3\tau} k^2 h^2 (1 - k^2 l_c^2), \quad \tau = \frac{\mu}{\rho g h}, \quad l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

Commenter le résultat.

2.8.3 Instabilité de Saffman-Taylor en milieu poreux

Lorsqu'un fluide visqueux 2 est poussé par un autre fluide moins visqueux 1 dans un milieu poreux ou dans une cellule de Hele-Shaw (figure 2.20), le front initialement rectiligne est instable et des digitations croissent comme illustré sur la figure 2.21. On veut déterminer la condition de stabilité linéaire du front horizontal entre les deux fluides (Saffman & Taylor 1958). Le mouvement dans chaque fluide est régi par l'équation de Darcy

$$\mathbf{U}_j = -\frac{K}{\mu_j} \mathbf{grad}(P_j + \rho_j g y), \quad j = 1, 2, \tag{2.54}$$

où ρ_j et μ_j sont la densité et la viscosité dynamique du fluide j , et où K est la perméabilité, supposée uniforme, du milieu poreux. L'épaisseur du front est supposée négligeable devant les autres longueurs caractéristiques du problème, et les contraintes visqueuses sont négligées devant la pression. On néglige également la tension interfaciale entre les deux fluides.

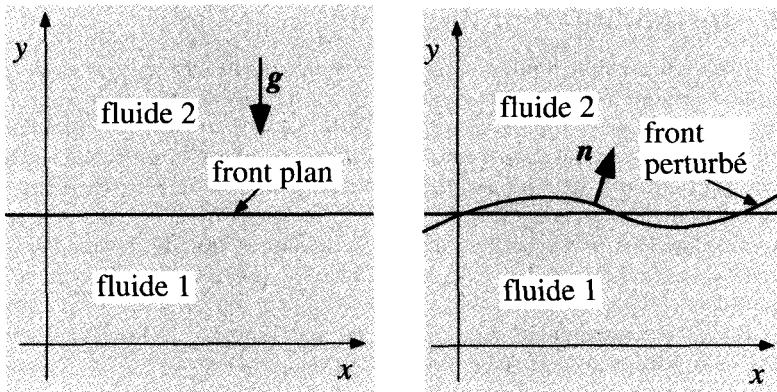


FIG. 2.20 – Front entre deux fluides visqueux en milieu poreux ou en cellule de Hele-Shaw.

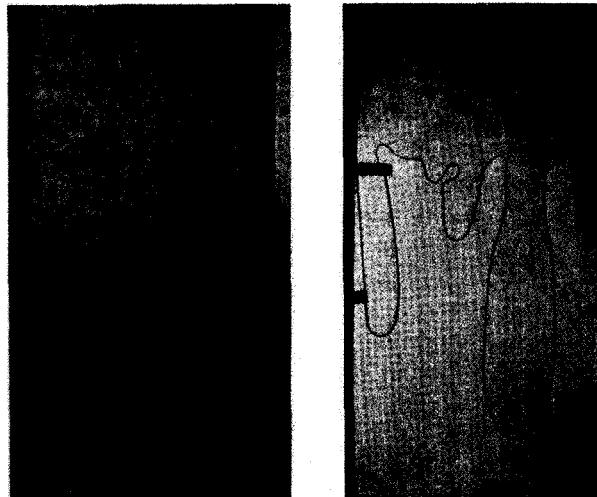


FIG. 2.21 – Deux stades de la croissance de l'instabilité de Saffman-Taylor dans une cellule de Hele-Shaw verticale, à l'interface entre de la glycérine poussée vers le bas par de l'air au-dessus ; la section de la cellule est $0,9 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$ et la vitesse descendante du front est $V \approx 1 \text{ mm/s}$ (Saffman & Taylor 1958).

1. Montrer à partir de l'équation de Darcy l'existence d'un potentiel des vitesses Φ_j dont on donnera l'expression.
2. Montrer que le problème admet la solution de base

$$\bar{\Phi}_j = Vz, \quad \bar{P}_j = -\left(\frac{\mu_j V}{K} + \rho_j g\right) z + P_0(t) \quad (2.55)$$

où V est la vitesse uniforme d'ascension des fluides, $z = y - Vt$ est la distance au front non perturbé, et $P_0(t)$ est une pression de référence sur le front.

3. Établir les équations linéarisées des petites perturbations du potentiel, $\phi_j(x, z, t)$, de la pression, $p_j(x, z, t)$ et de la position du front, $h(x, t)$: équation de conservation de la masse, équation de Darcy, et conditions aux limites (i) en $z = \pm\infty$, et (ii) sur le front (continuité de la vitesse normale et de la pression, et imperméabilité du front).
4. On introduit des perturbations proportionnelles à $\exp(ikx + \sigma t)$, k réel. Justifier la forme choisie, donner la signification de k et σ , et écrire le système d'équations vérifiées par les amplitudes des perturbations. Résoudre ce système et en déduire la relation de dispersion

$$\sigma = k \frac{K}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{K} V + (\rho_2 - \rho_1) g \right). \quad (2.56)$$

5. Tracer les allures possibles de $\sigma(k)$ pour $\rho_1 = \rho_2$, puis pour $\rho_1 \neq \rho_2$. Commenter. La divergence de $\sigma(k)$ pour k grand est-elle physique ? Au-delà de quel ordre de grandeur du nombre d'onde le modèle n'est-il plus valide ?
6. On cherche à extraire du pétrole ($\rho_2 = 900 \text{ kg/m}^3$, $\mu_2 = 0,1 \text{ Pa.s}$) d'un milieu poreux de perméabilité $K = 10 \text{ darcys}$ (1 darc = 10^{-12} m^2), par une injection d'eau au fond d'un puits ($\rho_1 = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, $\mu_1 = 10^{-3} \text{ Pa.s}$). Au-delà de quelle vitesse l'écoulement est-il instable ? Pour une vitesse de 1 cm/s, quel temps faut-il pour que l'amplitude d'une perturbation de nombre d'onde $k = 1 \text{ cm}^{-1}$ soit multipliée par 10 ?

2.8.4 Instabilité de Darrieus-Landau d'un front de flamme

Dans une combustion, le front de la flamme séparant les gaz frais des gaz brûlés peut être instable. Cette instabilité, étudiée théoriquement par Darrieus (1938) puis Landau (1944), a été mise en évidence dans une expérience bien contrôlée par Clanet & Searby (1998). La figure 2.22 montre à gauche le dispositif expérimental : un mélange air-propane est injecté dans le bas d'un tube vertical, les gaz brûlés s'échappant par le haut. Le front de flamme, plan, est excité par une onde acoustique générée par un haut-parleur, et sa position est enregistrée par une caméra rapide. L'amplification temporelle de la perturbation acoustique du front est visible sur les enregistrements à droite de la figure.

La situation est schématisée sur la figure 2.23. Les équations gouvernant le problème admettent une solution stationnaire dans un repère lié au front plan, de vitesses uniformes \bar{U}_1 à l'amont et \bar{U}_2 à l'aval. On fait les hypothèses suivantes pour l'écoulement perturbé (Landau & Lifchitz 1989, §128 ; Joulain & Vidal 1998) :

- l'écoulement est incompressible de chaque côté du front, et les effets visqueux sont négligeables ;
- la masse volumique de chaque gaz reste uniforme, avec $\rho_1 > \rho_2$;
- la vitesse relative locale U_L du front de flamme par rapport aux gaz frais est constante ;
- l'épaisseur du front de flamme est très petite devant la longueur d'onde des perturbations.

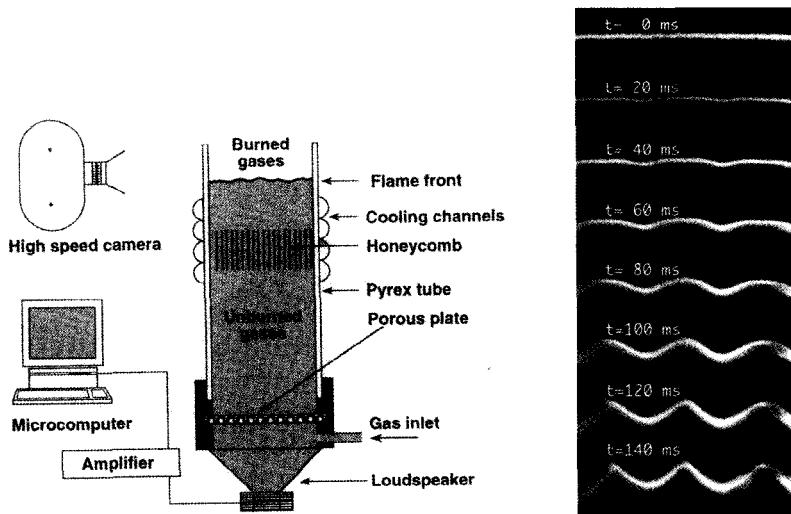


FIG. 2.22 – Mise en évidence expérimentale de l'instabilité de Darrieus-Landau (Clanet & Searby 1998). À gauche : schéma du dispositif de combustion d'un mélange air-propane ; le front de flamme créé dans le tube est excité sinusoïdalement par un haut-parleur. À droite : croissance temporelle du mode propre sélectionné par l'excitation.

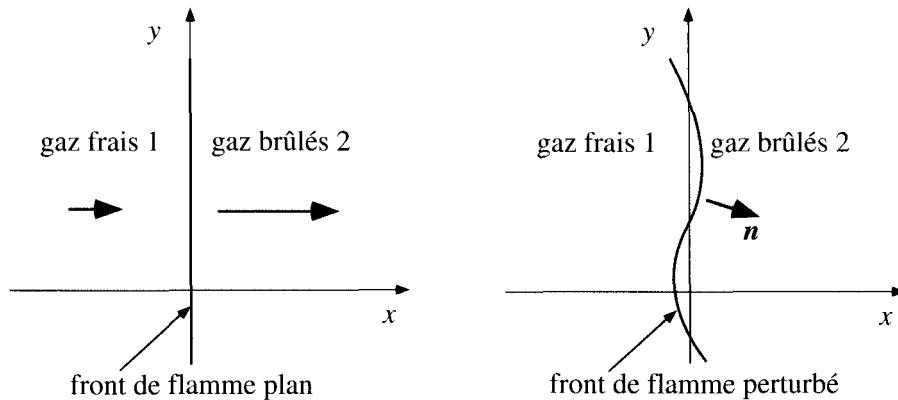


FIG. 2.23 – Écoulement à travers un front de flamme plan et un front de flamme perturbé.

Les équations gouvernant le problème sont donc les équations d'Euler :

$$\operatorname{div} \mathbf{U}_j = 0, \quad (2.57a)$$

$$\rho_j (\partial_t \mathbf{U}_j + (\mathbf{U}_j \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{U}_j) = -\operatorname{grad} P_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.57b)$$

Les conditions aux limites sont, d'une part, la décroissance des perturbations à l'infini amont et à l'infini aval et, d'autre part, les conditions de saut suivantes

à travers le front de flamme $x = \zeta(y, t)$:

$$\rho_1(\mathbf{U}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \rho_2(\mathbf{U}_2 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}, \quad (2.58a)$$

$$P_1 + \rho_1 ((\mathbf{U}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n})^2 = P_2 + \rho_2 ((\mathbf{U}_2 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n})^2, \quad (2.58b)$$

$$\mathbf{U}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{n}, \quad (2.58c)$$

$$(\mathbf{U}_1 - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_L. \quad (2.58d)$$

Définissant la position du front par $H(x, y, t) = x - \zeta(y, t) = 0$, la normale \mathbf{n} et la vitesse normale $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ au front sont données par (2.30) et (2.31).

1. Donner la signification physique des quatre conditions de saut ci-dessus. Tracer une ligne de courant traversant obliquement le front. Par analogie avec l'optique géométrique, comment appeler ce phénomène ?
2. Montrer que l'écoulement de base est donné par

$$\bar{U}_1 = U_L,$$

$$\bar{U}_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} U_L,$$

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + \rho_1 \bar{U}_1^2 - \rho_2 \bar{U}_2^2.$$

3. Écrire les équations linéarisées des petites perturbations de l'écoulement de base.
4. On introduit des perturbations sous la forme de modes normaux proportionnels à $\exp(iky + \sigma t)$, k réel. Justifier la forme choisie, donner la signification de k et σ , et écrire le système d'équations vérifiées par les amplitudes de ces modes.
5. Déterminer la solution générale pour les amplitudes des modes normaux, qui prennent en compte la décroissance des perturbations à l'infini amont et à l'infini aval (par anticipation, on prendra $\sigma > 0$, hypothèse à vérifier en fin de calcul).
6. Écrire le système de quatre équations algébriques correspondant aux conditions de saut à travers le front de flamme, et en déduire que la relation de dispersion s'écrit, avec $r = \rho_1/\rho_2$:

$$(1+r)\sigma^2 + 2rkU_L\sigma + r(1-r)k^2U_L^2 = 0. \quad (2.60)$$

7. Discuter le type des valeurs propres, et tracer l'allure du graphe $\sigma(k)$. La divergence de $\sigma(k)$ pour k grand est-elle physique ? Quelle est l'échelle de longueur, non prise en compte dans le modèle ci-dessus, en deçà de laquelle le modèle n'est plus valide ?

Chapitre 3

Écoulements ouverts : notions de base

Ce chapitre aborde la stabilité des écoulements. Il s'agit tout d'abord de préciser les notions de stabilité linéaire introduites au chapitre précédent (§3.1). L'approche en termes de modes normaux temporels, pour décider du caractère stable ou instable d'un écoulement, est ici justifiée à partir de l'étude de l'évolution spatio-temporelle d'une perturbation quelconque (§3.2). Dans les écoulements ouverts, où une perturbation ne repasse jamais deux fois au même point (par opposition à un écoulement fermé comme l'écoulement de Couette entre deux cylindres), une distinction apparaît entre deux types d'instabilités : convective et absolue (§3.3). Les notions introduites dans ce chapitre de façon assez abstraite sont illustrées dans les chapitres suivants.

3.1 Introduction

3.1.1 Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes

On établit ici quelques résultats classiques sur la propagation d'un paquet d'ondes dispersives, dans le cas particulier d'un paquet gaussien ; pour une présentation plus générale, voir par exemple Lighthill (1978, §3.7). Considérons une onde représentée par l'intégrale de ses composantes de Fourier spatiales

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk, \quad (3.1)$$

où le nombre d'onde k et la pulsation $\omega(k)$ sont réels, et $\hat{u}(k)$ est le spectre du paquet d'ondes¹. Considérant les ondes se propageant avec une célérité $c = \omega/k$ positive, on choisit la branche correspondante de la relation de dispersion :

1. Ce spectre ne correspond pas tout à fait à la transformée de Fourier de $u(x)$, à cause du facteur $1/\pi$ omis par commodité dans l'équation (3.1).

$\omega(k)$ de même signe que k . Alors, avec $\hat{u}(-k) = \hat{u}^*(k)$, l'intégrale ci-dessus peut encore s'écrire

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + c.c. \quad (3.2)$$

Cette intégrale peut être évaluée, pour x grand et x/t fixé, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire²; cette intégrale peut aussi être évaluée directement dans le cas d'un spectre gaussien de largeur σ^{-1} centré sur un nombre d'onde k_0 (figure 3.1a) :

$$\hat{u}(k) = \hat{u}_0 e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}, \quad k > 0. \quad (3.3)$$

Un spectre gaussien est représentatif de nombreuses situations expérimentales, et conduit à des calculs simples d'évolution de l'onde (la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne). L'onde (3.2) peut également s'écrire comme une onde porteuse de nombre d'onde k_0 et de pulsation $\omega_0 = \omega(k_0)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c., \quad (3.4)$$

où $A(x, t)$ est l'enveloppe du paquet d'ondes, définie par

$$A(x, t) = \int_0^{\infty} \hat{u}(k) e^{i(k-k_0)x - i(\omega - \omega_0)t} dk. \quad (3.5)$$

Cette enveloppe dépend de l'espace et du temps, ce qui la distingue de l'amplitude d'un mode de Fourier qui peut dépendre du temps mais est spatialement uniforme.

Enveloppe de l'onde à l'instant initial

Posant $v = \sigma(k - k_0 - ix/2\sigma^2)$, l'argument de l'exponentielle sous l'intégrale (3.5) s'écrit, à l'instant initial $t = 0$,

$$-\sigma^2(k - k_0)^2 + i(k - k_0)x = -v^2 - \frac{x^2}{4\sigma^2}. \quad (3.6)$$

On en déduit l'expression de l'enveloppe $A(x, t)$ à l'instant initial $t = 0$:

$$A(x, 0) = \frac{\hat{u}_0}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\hat{u}_0 \sqrt{\pi}}{2\sigma} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (3.7)$$

2. Considérons l'intégrale $I(x) = \int_{k_1}^{k_2} f(k) e^{ix\psi(k)} dk$. Lorsque, dans l'intervalle d'intégration, il existe un nombre k_0 tel que $\psi^{(p)}(k_0) \neq 0$ mais $\psi'(k_0) = \dots = \psi^{(p-1)}(k_0) = 0$, avec $f(k_0) \neq 0$, alors pour x grand (Bender & Orszag 1978, §6.5) :

$$I(x) \sim 2f(k_0) \exp(ix\psi(k_0) \pm i\pi/2p) \left(\frac{p!}{x|\psi^{(p)}(k_0)|} \right)^{1/p} \frac{\Gamma(1/p)}{p},$$

où on doit prendre le facteur $e^{i\pi/2p}$ si $\psi^{(p)}(k_0) > 0$, ou le facteur $e^{-i\pi/2p}$ si $\psi^{(p)}(k_0) < 0$. Le cas usuel correspond à $p = 2$ pour lequel $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

où on a utilisé le résultat classique

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

L'enveloppe d'un paquet d'ondes gaussien est donc une gaussienne d'autant plus large que le pic du spectre est étroit, on retrouve là un résultat classique de la transformée de Fourier (figure 3.1b) ; en particulier, à un spectre infiniment étroit (distribution de Dirac) correspond une onde sinusoïdale.

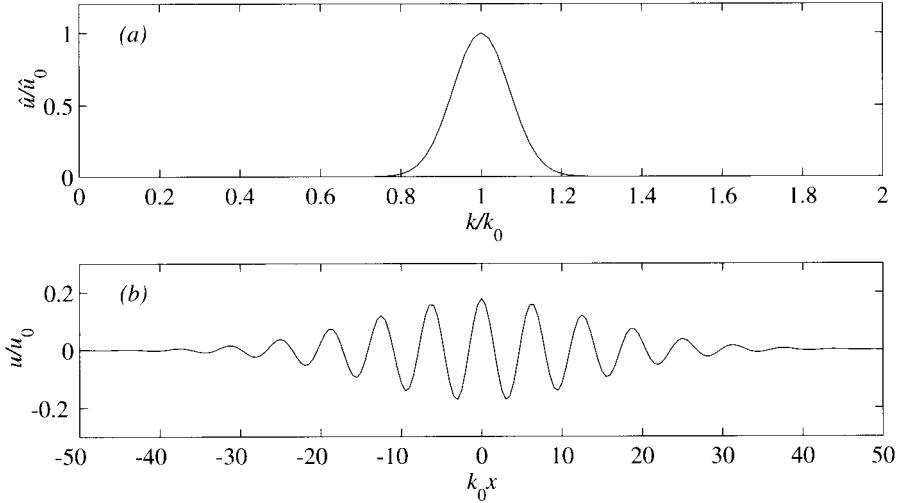


FIG. 3.1 - (a) Spectre gaussien de largeur $\sigma^{-1} = 0,1k_0$; (b) onde correspondante.

Propagation du paquet d'ondes

Pour un paquet d'ondes quasi monochromatique, *i.e.* à spectre étroit, on peut développer la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ en série de Taylor autour de k_0 et tronquer ce développement au premier ordre :

$$\omega - \omega_0 = c_g(k - k_0), \quad c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0), \quad (3.8)$$

où c_g est la *vitesse de groupe* du paquet d'ondes, qui représente la vitesse de propagation du nombre d'onde k_0 ou encore la vitesse de propagation de l'énergie du paquet (Lighthill 1978, §3.6). Par un calcul identique à celui qui a conduit à (3.7), avec $x - c_g t$ à la place de x , il vient

$$A(x, t) = \frac{\hat{u}_0 \sqrt{\pi}}{2\sigma} e^{-\frac{(x - c_g t)^2}{4\sigma^2}}. \quad (3.9)$$

Ainsi, à l'ordre dominant (3.8) du développement de Taylor de la relation de dispersion, l'enveloppe d'une onde quasi monochromatique se propage sans se déformer à la vitesse de groupe.

Dispersion du paquet d'ondes

On peut aller plus loin dans la description de l'évolution d'un paquet d'ondes en développant la relation de dispersion $\omega = \omega(k)$ au second ordre :

$$\omega - \omega_0 = c_g(k - k_0) + \frac{\omega''_0}{2}(k - k_0)^2, \quad (3.10a)$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0), \quad \omega''_0 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_0). \quad (3.10b)$$

Par un calcul identique à celui qui a conduit à (3.9), avec $\sigma^2 + i\omega''_0 t/2$ à la place de σ^2 , il vient

$$A(x, t) = \frac{\hat{u}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma^2 + \frac{1}{2}i\omega''_0 t}} \exp\left(-\frac{(x - c_g t)^2}{4(\sigma^2 + \frac{1}{2}i\omega''_0 t)}\right). \quad (3.11)$$

Cette expression de l'enveloppe (maintenant complexe) montre qu'aux temps courts, *i.e.* tels que $t \ll \sigma^2/\omega''_0$, le paquet se propage sans se disperser de façon significative (sans s'aplatir ni s'étaler), conformément au résultat (3.9) obtenu à l'ordre dominant. La dispersion se manifeste à partir d'un temps d'ordre σ^2/ω''_0 , pour lequel le paquet d'ondes a parcouru une distance d'ordre $\sigma^2 c_g / \omega''_0$. Alors, la largeur du paquet d'ondes croît linéairement au cours du temps, et son amplitude décroît comme $1/\sqrt{t}$, comme illustré sur la figure 3.2. L'énergie de l'onde, proportionnelle au produit du carré de l'amplitude par la largeur du paquet, reste donc constante, ce qui correspond au fait que tout phénomène dissipatif est ici ignoré. L'étalement du paquet correspond à la dispersion des composantes de Fourier du paquet d'ondes : les nombres d'onde dont la célérité est plus grande distancent les nombres d'onde plus lents (voir exercice).

Les résultats ci-dessus restent valides pour des spectres non gaussiens, pourvu que la largeur $\delta k \sim 1/\sigma$ du spectre soit faible, soit $\delta k/k_0 \ll 1$. En particulier, le temps caractéristique de la dispersion et la distance alors parcourue par le paquet d'ondes peuvent être retrouvés facilement en considérant la propagation de deux nombres d'onde voisins k_0 et $k_0 + \delta k$; en effet, la vitesse de groupe correspondant à la vitesse de propagation du nombre d'onde, la différence de vitesse de propagation de deux nombres d'onde voisins est $\delta c_g = \omega''_0(k_0)\delta k$, et le temps au bout duquel leur différence de marche est de l'ordre de la largeur $1/\delta k$ est donc $(1/\delta k)/\delta c_g = 1/\omega''_0\delta k^2$. Ce temps de dispersion est bien du même ordre que celui, $\sigma^2 c_g / \omega''_0$, d'un spectre gaussien. Ce type d'analyse des échelles caractéristiques est à la base des études non linéaires perturbatives mises en œuvre aux chapitres 9 et 10.

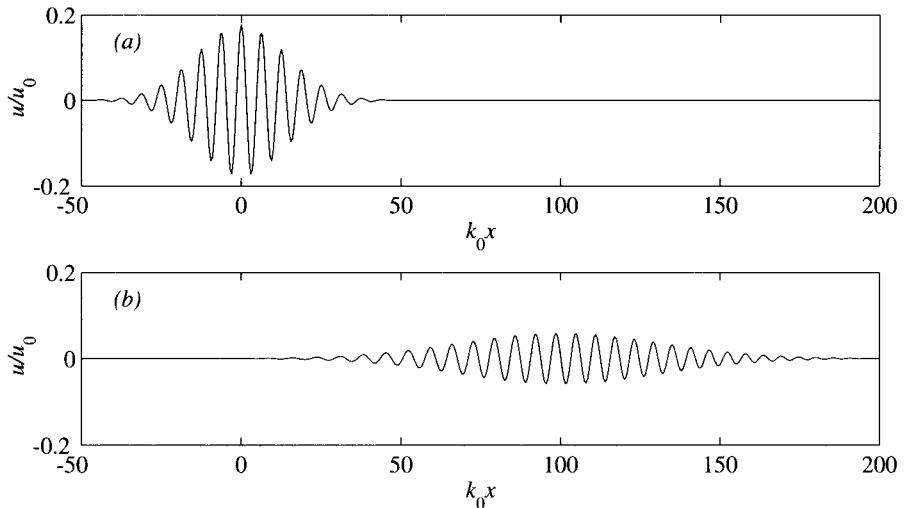


FIG. 3.2 – Onde correspondant à l'enveloppe (3.11), pour $\sigma^{-1}k_0 = 0,1$ et $\omega_0'' = 4c_g/k_0$: (a), instant initial $t = 0$; (b), $c_g t = 100/k_0$.

3.1.2 Stabilité au sens de Lyapunov, stabilité asymptotique

Il s'agit ici de préciser la notion de stabilité d'un écoulement, ou « état de base » $U_0(x, t)$ satisfaisant les équations gouvernant le problème. Cet état de base est dit *stable au sens de Lyapunov* si une petite perturbation de cet état de base reste petite au cours du temps, ou encore si l'état perturbé $U(x, t)$ reste voisin de l'état de base. Cette définition peut se formaliser comme suit.

Définition. Un état de base $U_0(x, t)$ est dit *stable au sens de Lyapunov* si, pour tout ϵ positif, il existe $\delta(\epsilon)$ tel que si $\|U(x, 0) - U_0(x, 0)\| \leq \delta$, alors pour tout $t \geq 0$, $\|U(x, t) - U_0(x, t)\| \leq \epsilon$, la norme $\|\dots\|$ dans l'espace physique E étant définie par

$$\|U(x, t) - U_0(x, t)\| = \max |U(x, t) - U_0(x, t)|, x \in E. \quad (3.12)$$

Si, de plus, un système stable au sens de Lyapunov retourne à son état de base, il est dit *asymptotiquement stable*, comme défini ci-dessous.

Définition. Un état de base $U_0(x, t)$ stable au sens de Lyapunov est dit *asymptotiquement stable* s'il existe δ tel que si $\|U(x, 0) - U_0(x, 0)\| \leq \delta$, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(x, t) - U_0(x, t)\| = 0. \quad (3.13)$$

Prenons l'exemple le plus simple d'un oscillateur harmonique : non amorti, cet oscillateur est stable au sens de Lyapunov, mais il n'est pas asymptotiquement stable ; amorti, il est asymptotiquement stable. Mais en dehors d'exemples élémentaires comme l'oscillateur harmonique, il n'est pas possible de déterminer la stabilité d'un état de base particulier à partir d'une vérification directe des définitions ci-dessus ! Des critères de stabilité plus faciles à vérifier doivent être dégagés, c'est le but de ce chapitre. La première étape consiste à étudier la stabilité linéaire, c'est-à-dire l'évolution d'une perturbation selon les équations linéarisées autour de l'état de base. La procédure de linéarisation permet de conclure à la stabilité ou à l'instabilité, pourvu que la valeur des paramètres ne corresponde pas à une bifurcation, comme discuté au chapitre 1. À strictement parler, les résultats d'une étude de stabilité linéaire ne peuvent concerner que des perturbations d'amplitude infiniment petite, pour que les termes non linéaires négligés soient bien des infiniment petits d'ordre supérieur. En pratique, les prédictions de stabilité linéaire s'avèrent valides pour des perturbations d'amplitude relative de l'ordre de 1 % à 10 % en général. Ainsi, un état de base linéairement stable est stable au sens de Lyapunov.

Une troisième définition de stabilité *globale*, qui s'avère utile, est relative au cas où l'écoulement retourne à son état de base quelle que soit l'amplitude de la perturbation, *i.e.* $\delta = \infty$ dans la première définition.

Définition. Un état de base $U_0(x, t)$ est globalement stable s'il est asymptotiquement stable avec $\delta = \infty$. En d'autres termes, le bassin d'attraction de l'écoulement de base coïncide alors avec l'espace des phases tout entier.

3.1.3 Stabilité et instabilité linéaires

Les notions introduites dans ce chapitre seront illustrées à partir de l'équation de Ginzburg-Landau à coefficients réels :

$$\partial_t u + V \partial_x u = Ru + \partial_{xx} u - |u|^2 u, \quad (3.14)$$

où $u(x, t)$ est un champ scalaire complexe, et R et V sont deux paramètres. Cette équation modélise schématiquement le comportement de nombreux systèmes physiques (Cross & Hohenberg 1993). Il nous suffit ici de remarquer que le membre de gauche a la structure d'une dérivée particulière, impliquant une vitesse d'advection V , et que le membre de droite comporte un terme linéaire faisant intervenir le paramètre de contrôle R , un terme diffusif et un terme non linéaire. Cette équation admet une solution de base $u_0 = 0$, invariante par translation suivant x et t , comme l'est l'équation (3.14).

Linéarisant l'équation (3.14) autour de l'état de base $u_0 = 0$ (ce qui revient ici simplement à négliger le terme non linéaire $|u|^2 u$), on obtient une équation d'évolution de la perturbation qui s'écrit formellement

$$D(-i\partial_x, i\partial_t)u(x, t) = 0, \quad \text{avec} \quad D = \partial_t + V\partial_x - R - \partial_{xx}. \quad (3.15)$$

Le facteur i dans les arguments de D a été introduit par commodité, pour pouvoir identifier formellement l'opérateur $D(-i\partial_x, i\partial_t)$ à la relation de dispersion $D(k, \omega) = 0$; en effet, pour un mode propre $\exp[i(kx - \omega t)]$, une dérivation par rapport à x (resp. t) dans l'espace physique revient à une multiplication par ik (resp. $-i\omega$) dans l'espace de Fourier. Notons que la relation de dispersion s'écrit souvent simplement $\omega = \omega(k)$, car dans les équations du problème, les dérivations par rapport au temps sont en général du premier ordre; par contre, la relation de dispersion présente en général plusieurs branches $k = k(\omega)$.

Si l'état de base est perturbé par une fonction de forçage prescrite $S(x, t)$, la perturbation évolue selon l'équation

$$D(-i\partial_x, i\partial_t)u(x, t) = S(x, t). \quad (3.16)$$

Trois types de forçages élémentaires s'avèrent particulièrement importants, qui correspondent à

$$S(x, t) = F(x)\delta(t), \quad (3.17a)$$

$$S(x, t) = \delta(x)\delta(t), \quad (3.17b)$$

$$S(x, t) = \delta(x)H(t)e^{-i\omega t}, \quad (3.17c)$$

où δ et H sont les fonctions de Dirac et de Heaviside, respectivement. Le premier forçage correspond à un forçage distribué dans l'espace appliqué à l'instant $t = 0$; le problème consiste alors à résoudre un problème aux valeurs initiales. Le second forçage correspond à une impulsion localisée en $x = 0$ et $t = 0$; la « réponse impulsionale » solution du problème est la fonction de Green $G(x, t)$ associée à l'opérateur linéaire D . Le troisième forçage correspond à un forçage périodique initié à $t = 0$, localisé en $x = 0$. Ce dernier forçage est fréquemment mis en œuvre expérimentalement, par exemple en faisant vibrer une petite lame en un point d'un écoulement; des exemples en sont donnés aux chapitres 5 et 6. Dans les conditions expérimentales usuelles, le forçage peut être modélisé par une superposition des deux forçages élémentaires (3.17b) et (3.17c), ou (3.17a) et (3.17c), le forçage initial (3.17a) ou (3.17b) correspondant à la mise en route de l'expérience.

La définition de la stabilité linéaire est fondée sur la réponse à une perturbation impulsionale (3.17b); cette perturbation peut donner lieu à trois types de comportements, illustrés sur la figure 3.3. Au cours du temps, la perturbation peut être advectée et décroître vers zéro (figure 3.3a). La fonction de Green satisfait alors à

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0, \quad \text{le long de tout rayon } x/t = \text{cte.} \quad (3.18)$$

L'état de base $u_0 = 0$ est alors dit *linéairement stable*. Sinon, il est dit *linéairement instable*, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty, \quad \text{le long d'un rayon } x/t = \text{cte au moins.} \quad (3.19)$$

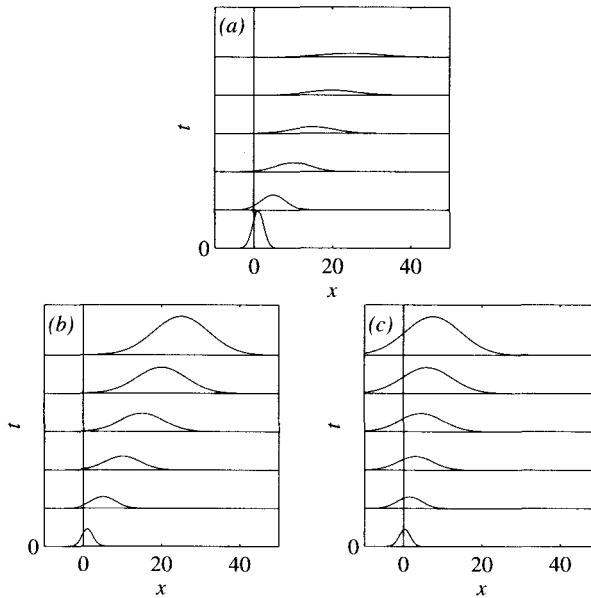


FIG. 3.3 – Évolution dans le plan (x, t) d'une perturbation localisée au voisinage de $x = 0$ à l'instant $t = 0$. État de base (a) stable ; (b) instable convectif ; (c) instable absolu. Ces dessins correspondent aux solutions de l'équation (3.14) linéarisée, dont la réponse impulsionale est $G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t} \exp(Rt - (x - Vt)^2/4t)$: (a), $V = 1$, $R = -0,03$; (b), $V = 1$, $R = 0,1$; (c), $V = 0,3$, $R = 0,1$.

Dans ce dernier cas, on distingue deux types d'instabilités. Le premier, dit *convectif*, correspond à une perturbation qui, bien qu'amplifiée, est advectée et s'éloigne du point où elle a été initiée (figure 3.3b), de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = 0, \quad \text{le long du rayon } x/t = 0. \quad (3.20)$$

L'autre type d'instabilité, dit *absolu* (figure 3.3c), correspond à la croissance sur place de l'instabilité, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x, t) = \infty, \quad \text{le long du rayon } x/t = 0. \quad (3.21)$$

La distinction entre instabilités convective et absolue, introduite en hydrodynamique par Huerre & Monkewitz (1985), a conduit à la notion de mode global d'instabilité (Huerre & Monkewitz 1990), voir aussi l'ouvrage de Schmid & Henningson (2001) et la revue récente de Chomaz (2005).

Notons que la distinction convectif-absolu n'a de sens que si le référentiel dans lequel est formulé le problème a quelque chose de particulier, qui le distingue des référentiels en translation uniforme par rapport à lui. Ce référentiel peut être celui d'un obstacle placé dans l'écoulement, ou celui des parois qui

bornent l'écoulement, ou celui d'une source de perturbation tel qu'un vibreur. En d'autres termes, la distinction entre instabilités convective et absolue n'a de sens que si l'invariance galiléenne du problème est brisée par les conditions aux limites (invariance par la transformation $x \rightarrow x + Ut$, $V \rightarrow V + U$). Il existe un autre cas où la distinction convectif-absolu n'est pas pertinente, c'est le cas où l'écoulement est bouclé sur lui-même, comme l'écoulement de Couette entre deux cylindres, ou l'écoulement entre deux sphères (type de problème rencontré en astrophysique). Dès qu'une perturbation est instable au sens convectif, elle repasse périodiquement au même point, et s'installe donc comme le fait une instabilité absolue dans un écoulement ouvert.

Nous devons maintenant trouver un critère simple permettant de savoir (i) si un état de base est linéairement stable ou instable, et (ii) dans le cas instable, s'il s'agit d'une instabilité convective ou absolue.

3.2 Critère de stabilité linéaire

Le critère de stabilité utilisé au chapitre précédent est que le taux de croissance de tout mode normal « temporel », *i.e.* de nombre d'onde k réel, soit négatif. Nous justifions ici ce critère, en montrant qu'il s'agit d'un critère nécessaire et suffisant de stabilité linéaire, au sens défini dans la section précédente.

3.2.1 Évolution spatio-temporelle d'une perturbation générale

Nous voulons ici résoudre le problème aux valeurs initiales de l'évolution d'une perturbation écrite sous la forme générale d'une intégrale de Fourier :

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{F_k} \int_{L_\omega} \hat{u}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega dk, \quad (3.22)$$

où F_k et L_ω sont les chemins d'intégration dans les plans complexes (k_r, k_i) et (ω_r, ω_i), respectivement (Huerre & Rossi 1998, §3). Ces chemins doivent être choisis de façon à assurer la convergence des intégrales, et doivent vérifier le principe de causalité. Selon ce principe, un effet ne peut être antérieur à sa cause, et la réponse doit donc satisfaire $u(x, t) = 0$ pour tout $t < 0$, pour un forçage initié à l'instant initial $t = 0$. On montre qu'il suffit pour cela de prendre l'axe réel pour F_k et la droite $i\gamma$ pour L_ω , où γ est une borne supérieure des taux de croissance $\omega_{ji}(k)$ des modes temporels (figure 3.4). L'indice j repère ici les différentes branches de modes temporels (par exemple, l'instabilité de Rayleigh-Taylor présente deux branches de modes temporels, *cf.* chapitre 2).

Le problème (3.16) peut alors être résolu dans l'espace de Fourier :

$$D(k, \omega) \hat{u}(k, \omega) = \hat{S}(k, \omega),$$

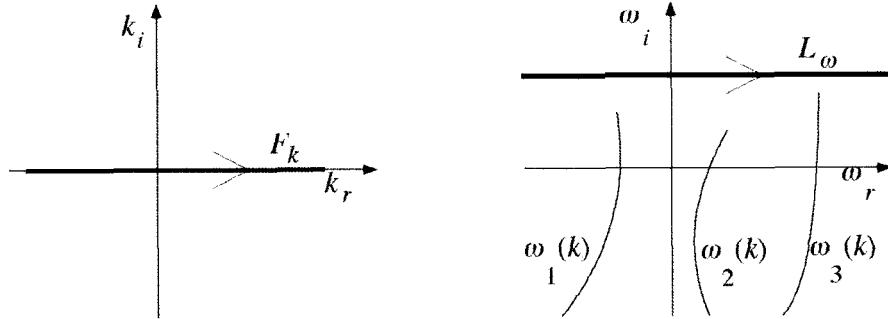


FIG. 3.4 - Chemins d'intégration F_k et L_ω dans les plans (k_r, k_i) et (ω_r, ω_i) assurant la convergence de l'intégrale (3.22) ainsi que le principe de causalité. $\omega_j(k)$ sont les branches temporelles.

d'où

$$\hat{u}(k, \omega) = \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)}.$$

L'insertion de ce résultat dans (3.22) résout formellement le problème dans l'espace physique :

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{F_k} \int_{L_\omega} \frac{\hat{S}(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{i(kx - \omega t)} d\omega dk. \quad (3.23)$$

L'intégration ci-dessus est dominée par les pôles de l'intégrant, c'est-à-dire les zéros de $D(k, \omega)$. Le chemin d'intégration F_k étant l'axe réel, ces zéros correspondent aux modes temporels $\omega_j(k)$. Si les pôles sont simples, le théorème des résidus³ permet d'écrire la solution sous la forme

$$u(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \Sigma_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{S}(k, \omega_j(k))}{\partial_\omega D(k, \omega_j(k))} e^{i(kx - \omega_j(k)t)} dk. \quad (3.24)$$

Ainsi, la réponse à un forçage $S(x, t)$ se présente finalement comme une somme de modes normaux temporels. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité

3. Rappels : une fonction $f(z)$ de la variable complexe z est holomorphe dans un domaine D si elle est uniforme (une seule détermination) et dérivable en tout point de D . Un pôle a est un point où $f(z)$, uniforme, n'est ni bornée ni holomorphe, mais où $\frac{1}{f(z)}$ est holomorphe (exemple $\frac{1}{z-a}$). Le résidu associé à un pôle a est le coefficient A_{-1} du terme $\frac{1}{z-a}$ du développement de $f(z)$ en puissances négatives ou positives de $(z - a)$ (série de Laurent). Soit L un contour d'intégration dans le plan complexe, d'une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur de L , sauf en n pôles de résidus $A_1^{(j)}$, $j = 1, n$. Alors (théorème des résidus) :

$$\int_L f(z) dz = 2i\pi \sum_j A_1^{(j)}.$$

(Le théorème reste valide si $1/f(z)$ n'est pas holomorphe aux points a_j , i.e. pour des points essentiels.)

lité est donc que les taux de croissance, parties imaginaires des $\omega_j(k)$, soient négatifs pour tout j et tout nombre d'onde k . En conclusion, il y a donc identité entre le critère de stabilité défini en début du présent chapitre, fondé sur la réponse à une perturbation localisée, et le critère utilisé au chapitre précédent, fondé sur les modes temporels uniquement.

3.2.2 Illustration

Pour l'équation de Ginzburg-Landau (3.14), la stabilité linéaire de l'état de base $u_0 = 0$ est déterminée en recherchant des solutions particulières sous la forme de modes normaux :

$$u(x, t) = \hat{u} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.25)$$

Insérant cette solution dans (3.14) linéarisée, il vient la relation de dispersion

$$i(\omega - kV) + R - k^2 = 0. \quad (3.26)$$

Considérons l'évolution au cours du temps d'un mode temporel (k réel). La pulsation complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est donnée par les branches temporelles

$$\omega_i = R - k^2, \quad c = \omega_r/k = V. \quad (3.27)$$

Pour $R < 0$, $\omega_i(k)$ est négatif pour tout k , et l'état de base est donc stable ; pour $R > 0$, l'état de base est instable vis-à-vis des perturbations de nombre d'onde plus petit que \sqrt{R} (figure 3.5). La courbe de stabilité marginale ($\omega_i = 0$) dans le plan (k, R) est la parabole $R = k^2$.

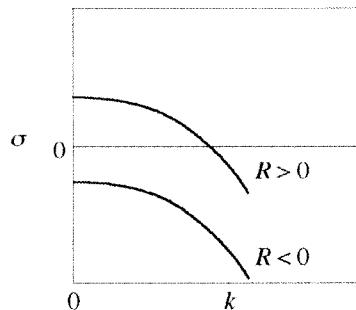


FIG. 3.5 – Taux de croissance temporel (3.27) d'un mode temporel pour l'équation de Ginzburg-Landau.

3.3 Instabilités convective et absolue

3.3.1 Critère d'instabilité absolue

Pour un paquet d'ondes centré sur un nombre d'onde k_0 se propageant sans s'amortir ni s'amplifier (k et ω réels), l'enveloppe du paquet se propage, comme rappelé ci-dessus, avec la vitesse de groupe réelle

$$c_g(k_0) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0). \quad (3.28)$$

Considérons maintenant ce qui se passe au voisinage du seuil d'une instabilité (avec k et ω complexes), pour une valeur du paramètre de bifurcation R voisine de la valeur critique R_c (Huerre & Rossi 1998, §3). Au seuil $R = R_c$, la courbe du taux de croissance $\omega_i(k_r)$ des modes normaux temporels est tangente à l'axe k_r au nombre d'onde critique k_c réel, et donc $\partial \omega_i / \partial k_r$ est nécessairement nul. La vitesse de groupe d'un paquet d'ondes centré sur le nombre d'onde critique k_c ,

$$c_g(k_c) = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_c, R_c) = \frac{\partial \omega_r}{\partial k_r} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_i}, \quad (3.29)$$

est bien réelle⁴.

Au-dessus du seuil, s'il existe un nombre d'onde k_0 dont la vitesse de groupe $c_g(k_0)$ est nulle, et dont le taux de croissance temporel, partie imaginaire de $\omega_0 = \omega(k_0)$, est positif, alors le paquet croît sur place (figure 3.3c). Ce résultat s'obtient en calculant la réponse impulsionale $G(x, t)$ le long du rayon $x/t = 0$, donnée par (3.24) avec $\hat{S}(k, \omega) = 1$ sous l'intégrale. Le calcul de l'intégrale se fait par une méthode qui généralise la méthode de la phase stationnaire au cas où l'argument de l'exponentielle n'est pas imaginaire pur, mais comporte une partie réelle (Bender & Orszag 1978, §6.6). La réponse asymptotique aux temps longs est finalement donnée par

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega''(k_0)t}} \frac{e^{i\pi/4}}{\partial_\omega D(k_0, \omega_0)} e^{i(k_0x - \omega_0t)} dk, \quad (3.30)$$

où k_0 et ω_0 sont définis par

$$\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0, \quad \omega_0 = \omega(k_0). \quad (3.31)$$

4. Pour qu'une fonction $Z = X + iY$ de la variable complexe $z = x + iy$ soit dérivable au point z_0 , il faut et il suffit que $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ soient dérivables en (x_0, y_0) et qu'en ce point (conditions de Cauchy),

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

La dérivée Z' est alors donnée par

$$Re(Z') = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad Im(Z') = -\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Il s'ensuit que le critère d'instabilité est bien que la partie imaginaire de ω_0 doit être positive.

On peut déduire de la discussion ci-dessus une caractéristique essentielle des instabilités convective et absolue. Une instabilité convective amplifie toute perturbation instable, et l'advepte vers l'aval. Considérant les perturbations comme un « bruit », un système instable convectif se comporte donc comme un amplificateur de bruit. Par contre, un système instable absolu répond sélectivement à un forçage : sa réponse est dominée par le mode de vitesse de groupe nulle, qui croît sur place, les autres modes étant « balayés » par l'écoulement. Le mode dominant étant sélectionné par la relation de dispersion, qui est intrinsèque au système, un système instable absolu se comporte comme un oscillateur avec sa fréquence propre.

3.3.2 Branches spatiales d'une instabilité convective

Considérons la situation représentée sur figure 3.3b, d'une perturbation de pulsation réelle donnée, advectée par l'écoulement. On veut déterminer le taux de croissance spatial de cette perturbation. Cette étude n'a de sens que dans le cas d'une instabilité convective, puisque dans le cas d'une instabilité absolue, le champ des perturbations est dominé par le mode de vitesse de groupe nulle, qui croît sur place. Ce taux de croissance spatial s'obtient à partir de la relation de dispersion $D(k, \omega) = 0$, en recherchant les branches spatiales, c'est-à-dire le(s) nombre(s) d'onde complexe(s) $k_r + ik_i$ correspondant à une pulsation réelle ω . Le taux de croissance spatial est alors $-k_i$ et la célérité de l'onde ω/k_r .

3.3.3 Illustrations

À titre d'exemple simple, considérons l'équation de Ginzburg-Landau dont la relation de dispersion est (3.26). La vitesse de groupe (complexe) d'un nombre d'onde k est donc

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = V - 2ik, \quad (3.32)$$

qui s'annule pour le nombre d'onde $k_0 = V/2i$. Insérant ce nombre d'onde dans la relation de dispersion (3.26), on trouve la pulsation correspondante, $\omega_0 = i(R - V^2/4)$. On en déduit que pour $0 < R < V^2/4$, l'état de base $u_0 = 0$ est instable convectif (figure 3.3b), et que pour $R > V^2/4$, il est instable absolu (figure 3.3c).

Lorsque l'instabilité est convective, soit $R < V^2/4$, les deux branches spatiales (ou modes spatiaux) s'obtiennent à partir de (3.26)

$$k_{\pm}(\omega) = \frac{1}{2} \left(-iV \pm \sqrt{4(R + i\omega) - V^2} \right), \quad (3.33)$$

dont on déduit aisément le taux de croissance spatial $-k_{\pm,i}$. Insistons sur le fait que la détermination des branches spatiales ne peut se faire que lorsqu'on s'est assuré que l'instabilité est bien convective.

Donnons très brièvement quelques illustrations hydrodynamiques, avant une étude plus détaillée aux chapitres suivants. La couche de mélange entre deux écoulements co-courants et parallèles, de vitesses différentes, est un exemple typique d'écoulement instable convectif; l'écoulement de Poiseuille entre plaques planes ou en tube, ainsi que la couche limite sur une plaque plane, sont deux autres exemples importants. Dans ces écoulements, toute perturbation forcée à l'amont s'amplifie vers l'aval; l'instabilité n'a pas de dynamique propre. Par contre, un sillage à l'aval d'un obstacle solide est instable absolu au-delà d'un nombre de Reynolds de quelques dizaines ($Re_c = U_\infty d/\nu = 48,5$ pour un cylindre de diamètre d dans un écoulement de vitesse non perturbée U_∞): à ce nombre de Reynolds critique, cet écoulement bifurque d'un état stationnaire à un état oscillant, caractérisé par l'apparition d'une allée de tourbillons de Karman (Huerre & Rossi 1998, §6; Williamson 1996). La fréquence f de l'oscillation correspond à une valeur bien définie du nombre de Strouhal fd/U_∞ , très peu sensible aux perturbations de l'écoulement (St = 0,19 pour le cylindre). En termes de systèmes dynamiques, l'apparition de cette oscillation correspond à une bifurcation de Hopf.

3.3.4 Relation de Gaster

La relation de Gaster (1962) est une relation qui permet de relier, au voisinage de la stabilité marginale, le taux de croissance temporel au taux de croissance spatial. Considérons un mode normal marginal (k_c, ω_c), tel que $\omega_{ci} = 0$ et $k_{ci} = 0$. Développant la relation de dispersion $\omega(k)$ en série de Taylor au voisinage de la stabilité marginale, il vient au premier ordre

$$\omega - \omega_c = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_c, R)(k - k_c),$$

d'où, en prenant la partie imaginaire,

$$\omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k_c, R)(k_r - k_c) + \frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k_c, R)k_i. \quad (3.34)$$

Pour un mode temporel, k_i est nul et la relation ci-dessus donne le taux de croissance temporel $\omega_i^{(T)}$

$$\omega_i^{(T)} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k_c, R)(k_r - k_c).$$

Pour un mode spatial, ω_i est nul et la relation (3.34) donne le taux de croissance spatial $-k_i^{(S)}$

$$0 = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k_c, R)(k_r - k_c) + \frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k_c, R)k_i^{(S)}.$$

Par soustraction des deux équations ci-dessus, et avec $c_g = \partial\omega_r/\partial k_r$, on déduit

$$\omega_i^{(T)} = -c_g k_i^{(S)}. \quad (3.35)$$

La relation de Gaster ci-dessus montre donc que, dans la limite des taux de croissance faibles, les taux de croissance temporel $\omega_i^{(T)}$ et spatial $k_i^{(S)}$ sont reliés par la vitesse de groupe. Autrement dit, pour un paquet d'ondes advecté spatialement et observé dans le référentiel de la vitesse de groupe, on mesure le taux de croissance temporel. La figure 3.6 illustre la validité de la relation de Gaster pour une couche limite de Blasius sur une plaque plane (*cf.* chapitre 5). Cette figure compare le taux de croissance spatial calculé, au taux de croissance spatial déduit de la relation de Gaster à partir d'un calcul de stabilité temporelle, en fonction du nombre de Reynolds Re_{δ_1} basé sur l'épaisseur de déplacement de la couche limite δ_1 . On remarquera que les courbes coïncident exactement pour $k_i = 0$, correspondant à la stabilité marginale, et restent très voisines même assez loin de la stabilité marginale.

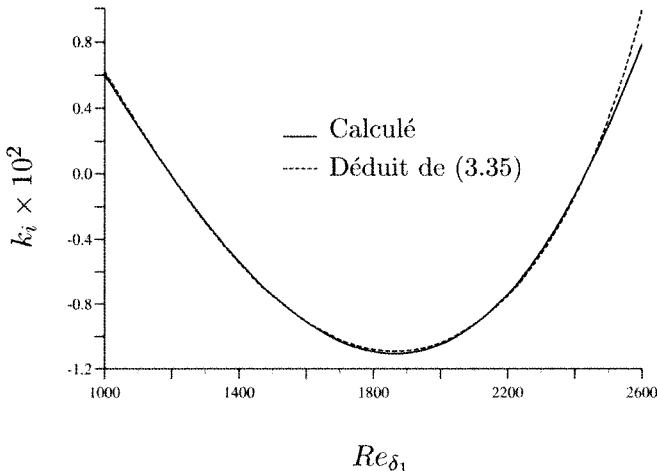


FIG. 3.6 – Taux de croissance spatial (m^{-1}) du mode de fréquence $\omega\nu/U_\infty^2 = 0,4 \times 10^{-4}$ dans une couche limite, en fonction du nombre de Reynolds Re_{δ_1} . Comparaison du k_i calculé à celui déduit de la relation de Gaster (3.35) (calcul G. Casalis, ONERA).

3.4 Exercices

3.4.1 Dispersion d'un paquet d'ondes

Montrer qu'un paquet d'onde $u(x, t)$ de spectre gaussien

$$\hat{u}(k) = \hat{u}_0 e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}, \quad k > 0,$$

est donné aux temps longs ($\Omega t \gg 1$ avec $\Omega = \omega_0''/2\sigma^2$) par

$$u(x, t) \sim \frac{\hat{u}_0 \sqrt{\pi}}{2\sigma} \frac{1}{\sqrt{\Omega t}} e^{-\frac{(x - c_g t)^2}{(2\sigma\Omega t)^2}} \cos(k_0 x - \omega_0 t + \phi(x, t)),$$

où la phase $\phi(x, t)$ est définie par

$$\phi(x, t) = -\theta/2 + \frac{(x - c_g t)^2}{4\sigma^2 \Omega t}, \quad \tan \theta = \Omega t.$$

En déduire que le nombre d'onde local, égal au gradient de la phase, varie spatialement selon

$$\partial_x \phi(x, t) = \frac{x - c_g t}{\omega_0'' t}.$$

Interpréter cette variation. Pour des ondes de gravité en eau profonde, à quelle distance du maximum de l'amplitude trouve-t-on les nombres d'onde $k_0 - \delta k$ et $k_0 + \delta k$, pour $\delta k = 0,1k_0$?

3.4.2 Branches spatiales d'une instabilité convective

Déterminer le taux de croissance spatial (3.33) des perturbations de la solution $u(x, t) = 0$ de l'équation de Ginzburg-Landau (3.14), lorsque l'instabilité est convective ($R < V^2/4$).

Chapitre 4

Instabilité non visqueuse des écoulements parallèles

4.1 Introduction

Un exemple typique d'instabilité d'un écoulement parallèle est révélé dans une expérience réalisée par Osborne Reynolds (1883) et reprise par Thorpe (1969). Un tube horizontal est rempli d'une couche d'eau surmontant une couche de saumure (eau salée) colorée (figure 4.1). Le tube est subitement incliné de quelques degrés, mettant les fluides en mouvement : la saumure descend et l'eau monte, réalisant un écoulement cisaillé présentant un point d'inflexion au voisinage de l'interface (figure 4.2). Une instabilité d'allure sinusoïdale se développe à l'interface des deux fluides en quelques secondes, puis croît et forme des rouleaux réguliers s'enroulant en spirale. Cette expérience illustre l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. L'origine de cette instabilité est due à l'inertie des fluides ; la viscosité n'y joue qu'un rôle mineur, en atténuant la croissance de l'instabilité par diffusion de la quantité de mouvement.



FIG. 4.1 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz à l'interface cisaillée entre deux liquides dans un tube de section rectangulaire. Cliché S.A. Thorpe, 1971 (Van Dyke 1982).

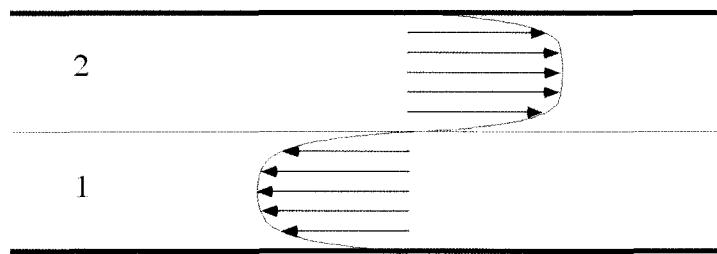


FIG. 4.2 – Allure du profil de vitesse dans l'expérience du tube incliné.

Une autre manifestation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, à une échelle beaucoup plus grande, est illustrée sur la figure 4.3. De l'air descendant de la montagne s'écoule sur une couche d'air inférieure au repos. Les deux couches ayant des vitesses, humidités et températures différentes, une fine couche de nuages formée à l'interface permet de visualiser des rouleaux, tout à fait analogues à ceux de la figure 4.1 et caractéristiques de cette instabilité. La figure 4.4 en donne un autre exemple, dans une « couche de mélange » verticale ascendante, entre un écoulement d'eau à gauche, et un écoulement d'eau et de bulles d'air à droite.



FIG. 4.3 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz entre deux couches d'air sur une échelle géophysique. Cliché P.E. Branstine 1954, près de Denver, Colorado (Drazin & Reid 2004).

La mise en contact de deux couches fluides animées de vitesses parallèles différentes, comme dans les exemples ci-dessus, est une situation privilégiée de manifestation de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Une autre situation du même genre est celle des jets, dont la figure 4.5 offre un exemple. Un jet laminaire de dioxyde de carbone débouche dans de l'air. Le jet, laminaire à

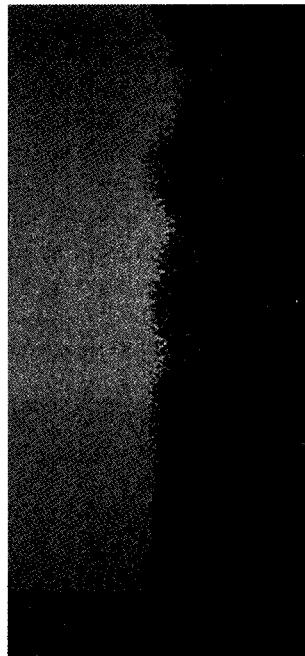


FIG. 4.4 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une couche de mélange ascendante entre un écoulement d'eau (à gauche) et un écoulement eau-air à bulles (à droite). Largeur du canal 0,3 m, profondeur 0,15 m. Cliché V. Roig & A. Larue de Tournemine, 2001, IMFT.

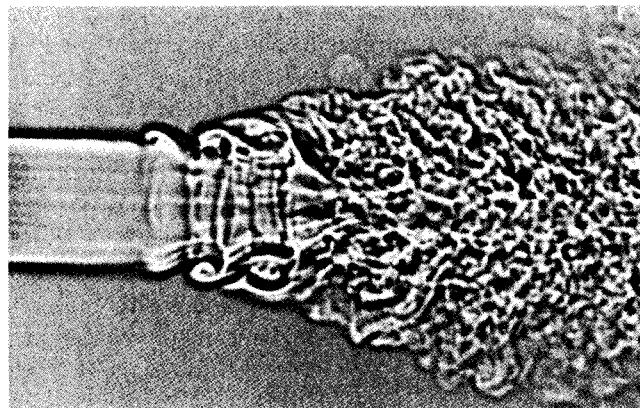


FIG. 4.5 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'un jet de dioxyde de carbone de 6 mm de diamètre débouchant dans de l'air à la vitesse de 40 m/s ($Re = 30\,000$). Cliché F. Landis & A.H. Shapiro (Van Dyke 1982).

la sortie de la buse, est visualisé par ombroscopie. L'instabilité, convective, se développe spatialement à partir de la sortie du jet, devient apparente à une distance de l'ordre d'un diamètre, et se développe sous la forme de rouleaux annulaires. Ces rouleaux se déstabilisent à leur tour sur une distance de l'ordre de deux longueurs d'onde. Cette deuxième instabilité, dite secondaire, conduit à un mélange intense, turbulent, entre le jet et l'air environnant.

Avec les couches de mélange et les jets, les sillages à grand nombre de Reynolds sont un troisième type d'écoulement sujet à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (figure 4.6). La structure du sillage est à peu près indépendante du nombre de Reynolds à partir de $Re \approx 100$, ce qui indique que cette structure est essentiellement gouvernée par des effets inertIELS et non par la viscosité.

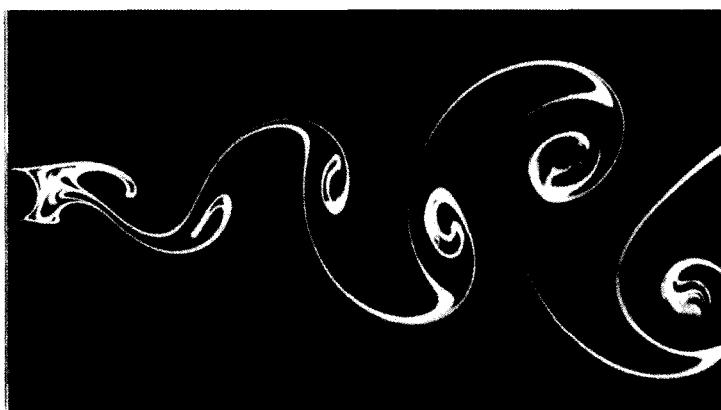


FIG. 4.6 – Allée de tourbillons de Karman dans le sillage d'un cylindre à $Re = 140$. L'eau s'écoule à la vitesse de 1,4 cm/s, le diamètre du cylindre est 1 cm. Les lignes d'émission sont obtenues par précipitation électrolytique de particules colloïdales, visualisées par un plan de lumière. Cliché S. Taneda 1956 (Van Dyke 1982).

On donne dans ce chapitre les premiers éléments d'analyse des instabilités inertielles d'écoulements cisaillés libres, loin d'une paroi ou d'une interface avec un autre fluide : couches de mélange, jets, ou sillages à grand nombre de Reynolds. Ce chapitre présente ensuite un autre type d'instabilité inertIELLE, due à la force centrifuge. Dans ces situations, la viscosité, qui ne fait qu'atténuer l'instabilité par diffusion, a un effet d'autant plus faible que le nombre de Reynolds est élevé.

4.2 Résultats généraux

4.2.1 Équations linéarisées des petites perturbations

Ignorant les effets visqueux devant les effets inertIELS, choisissons comme unités de longueur, de vitesse et de pression les échelles caractéristiques L , V

et ρV^2 de l'écoulement. Les équations d'incompressibilité et de conservation de la quantité de mouvement (équations d'Euler) s'écrivent alors

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{U} = -\operatorname{grad} P. \quad (4.1b)$$

Ces équations admettent la famille de solutions de base

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \bar{U}(y) \mathbf{e}_x, \quad \bar{P}(\mathbf{x}, t) = \bar{P}, \quad (4.2)$$

correspondant à un écoulement parallèle dans la direction x orientée par le vecteur unitaire \mathbf{e}_x , et invariant dans la direction transverse z . Considérons l'écoulement perturbé $\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$, $\bar{P} + p$ de cet écoulement de base ; les équations linéarisées des perturbations s'écrivent

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (4.3a)$$

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_x) \mathbf{u} + v \partial_y \bar{U} \mathbf{e}_x = -\operatorname{grad} p. \quad (4.3b)$$

Le problème étant invariant par translation du temps et de l'espace suivant les directions x et z , la solution peut être recherchée sous la forme de modes normaux de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z$ et de pulsation ω . Pour la perturbation longitudinale de vitesse, un mode normal s'écrit

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \hat{u}(y) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c., \quad (4.4)$$

avec des expressions semblables pour v , w et p . Reportant ces expressions dans (4.3), on en déduit le système d'équations différentielles homogène vérifié par les amplitudes $\hat{u}(y)$ et $\hat{p}(y)$:

$$ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + ik_z \hat{w} = 0, \quad (4.5a)$$

$$i(k_x \bar{U} - \omega) \hat{u} + \partial_y \bar{U} \hat{v} = -ik_x \hat{p}, \quad (4.5b)$$

$$i(k_x \bar{U} - \omega) \hat{v} = -\partial_y \hat{p}, \quad (4.5c)$$

$$i(k_x \bar{U} - \omega) \hat{w} = -ik_z \hat{p}. \quad (4.5d)$$

Aux équations (4.5) doivent être associées des conditions de décroissance des perturbations pour $y \rightarrow \pm\infty$,

$$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad (4.6)$$

ou d'imperméabilité de parois situées en $y = y_1$ et $y = y_2$,

$$\hat{v}(y_1) = 0, \quad \hat{v}(y_2) = 0. \quad (4.7)$$

Le système (4.5)-(4.6) ou (4.5)-(4.7) peut s'écrire formellement

$$L\phi = \omega M\phi,$$

où $\phi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})$ et L et M sont des opérateurs différentiels linéaires. On reconnaît là, pour un vecteur d'onde donné, un problème aux valeurs propres généralisé, qui n'admet de solution ϕ non nulle que si l'opérateur $L - \omega M$ est non inversible, *i.e.* si la pulsation ω est valeur propre. Cette condition peut s'écrire formellement

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (4.8)$$

qui est la relation de dispersion des perturbations d'amplitude infinitésimale. L'explicitation de cette relation de dispersion, pour un écoulement de base spécifié, constitue l'essentiel d'une étude de stabilité linéaire. La suite du chapitre est consacrée à la mise en évidence de quelques résultats généraux concernant les écoulements non visqueux cisaillés.

4.2.2 Théorème de Squire

Un changement de variable et un théorème dû à Squire (1933) permettent de réduire le problème tridimensionnel (4.5)-(4.6) ou (4.5)-(4.7) à un problème bidimensionnel équivalent. La transformation de Squire consiste à introduire les grandeurs

$$\tilde{k}^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad (4.9a)$$

$$\tilde{\omega} = (\tilde{k}/k_x) \omega, \quad (4.9b)$$

$$\tilde{k}\tilde{u} = k_x\hat{u} + k_z\hat{w}, \quad (4.9c)$$

$$\tilde{v} = \hat{v}, \quad (4.9d)$$

$$\tilde{p} = (\tilde{k}/k_x) \hat{p}. \quad (4.9e)$$

Le système (4.5) s'écrit alors

$$i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y \tilde{v} = 0, \quad (4.10a)$$

$$i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{u} + \partial_y \overline{U} \tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p}, \quad (4.10b)$$

$$i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{v} = -\partial_y \tilde{p}, \quad (4.10c)$$

où $\tilde{c} = c = \omega/k_x$ est la vitesse de phase de la perturbation dans la direction x , avec les conditions aux limites

$$\tilde{v}(y) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad \text{ou} \quad \tilde{v}(y_1) = \tilde{v}(y_2) = 0. \quad (4.11)$$

Le système d'équations (4.10)-(4.11) obtenu est formellement identique au système original (4.5)-(4.6) ou (4.5)-(4.7) avec $\tilde{w} = k_z = 0$; autrement dit, le système obtenu après transformation de Squire est identique à un système correspondant à des perturbations bidimensionnelles. Ce système de perturbations bidimensionnelles n'admet de solution non nulle que si la relation de dispersion suivante est satisfaite :

$$\tilde{D}(\tilde{k}, \tilde{\omega}) = 0. \quad (4.12)$$

Si cette relation est connue, *i.e.* si on a pu résoudre le problème de stabilité vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles, la relation de dispersion (4.8) des perturbations tridimensionnelles peut être obtenue sans calcul supplémentaire à partir de la transformation de Squire :

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{D} \left(\sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_x} \omega \right) = 0. \quad (4.13)$$

D'où le théorème de Squire :

Théorème. À tout mode (\mathbf{k}, ω) tridimensionnel instable de taux de croissance temporel ω_i , peut être associé un mode $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ bidimensionnel plus instable ($\tilde{\omega}_i > \omega_i$), de taux de croissance temporel $\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{k_x^2 + k_z^2} / k_x$.

Ainsi, lorsque le problème est de déterminer une condition d'instabilité, il suffit de ne considérer que les perturbations bidimensionnelles.

4.2.3 Équation de Rayleigh des perturbations bidimensionnelles

Compte tenu du théorème de Squire, nous considérons désormais des perturbations bidimensionnelles. Introduisons la fonction de courant ψ de la perturbation de vitesse, définie par $u = \partial_y \psi$ et $v = -\partial_y \psi$. Éliminant la pression par différentiation croisée des équations d'Euler, il vient

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_x) \Delta \psi - \partial_{yy} \bar{U} \partial_x \psi = 0. \quad (4.14)$$

(On peut remarquer que cette équation est simplement l'équation de transport de la vorticité $\boldsymbol{\omega} = -\Delta \psi \mathbf{e}_z$ en l'absence de diffusion.) Recherchant la solution sous la forme de modes normaux

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \hat{\psi}(y) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.,$$

de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$ et de pulsation ω , il vient *l'équation de Rayleigh*

$$(\bar{U} - c)(\partial_{yy} \hat{\psi} - k^2 \hat{\psi}) - \partial_{yy} \bar{U} \hat{\psi} = 0, \quad (4.15)$$

associée aux conditions aux limites

$$\hat{\psi} \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad y \rightarrow \pm\infty, \quad \text{ou} \quad \hat{\psi}(y_1) = \hat{\psi}(y_2) = 0. \quad (4.16)$$

Compte tenu des résultats énoncés au chapitre précédent, il suffit, pour déterminer la stabilité d'un écoulement, de considérer les modes de nombre d'onde réel. Pour un tel mode, si $\hat{\psi}$ est fonction propre associée à la valeur propre c , alors, considérant l'équation complexe conjuguée de l'équation de Rayleigh, il apparaît que $\hat{\psi}^*$ est aussi fonction propre associée à la valeur propre c^* . Les valeurs propres associées à l'équation de Rayleigh doivent donc

être réelles, ou complexes conjuguées. Si les valeurs propres sont réelles pour tout nombre d'onde, les perturbations sont des ondes se propageant sans être amplifiées : l'écoulement est stable. S'il existe un nombre d'onde pour lequel les deux valeurs propres sont complexes conjuguées, l'un de ces modes est amorti et l'autre est amplifié : l'écoulement est instable.

Un résultat utile pour la suite est que, si l'écoulement est stable vis-à-vis d'un mode normal ($c_i = 0$), alors les perturbations u et v correspondantes sont en quadrature de phase. En effet, l'équation est alors à coefficients réels, et les parties réelle et imaginaire de $\hat{\psi}$ vérifient la même équation linéaire : elles sont donc proportionnelles et leur rapport ne dépend donc pas de y . La phase ϕ de $\hat{\psi}(y) = A(y)e^{i\phi(y)}$ ne dépend donc pas de y , et les perturbations u et v s'écrivent

$$u = A'(y) \cos(kx - \omega t + \phi), \quad v = kA(y) \sin(kx - \omega t + \phi),$$

ce qui démontre leur quadrature.

Couche critique

Une complication peut survenir dans la résolution de l'équation de Rayleigh s'il existe dans l'écoulement une couche, d'ordonnée $y = y_c$, où la célérité c d'un mode propre est égale à la vitesse $\bar{U}(y_c)$ du fluide : le coefficient du terme différentiel d'ordre le plus élevé dans l'équation de Rayleigh (4.15) s'annule. La fonction propre présente alors une singularité en $y = y_c$ (elle n'est pas dérivable, au moins) ; une telle couche est dite « couche critique ». La célérité $c = \bar{U}(y_c)$ étant réelle, la stabilité d'un tel mode est nécessairement neutre.

De façon générale, on peut remarquer que le facteur $\bar{U}(y) - c$ peut s'annuler pour une valeur *complexe* de la variable y , la valeur propre associée n'étant alors plus réelle. Une telle situation, qui peut sembler sans conséquence physique puisque la variable d'espace y est réelle, peut en fait avoir une incidence importante sur la structure des fonctions propres. Pour une discussion plus approfondie, voir en particulier les ouvrages de Lin (1955), Bender & Orszag (1978, §3.1–3.3), Drazin & Reid (2004, §22), Huerre & Rossi (1998) ou Schmid & Henningson (2001, §2.2).

Spectre continu

S'il existe, pour un nombre d'onde donné, un mode associé à une couche critique en $y = y_c$ au voisinage de laquelle la vitesse $\bar{U}(y)$ est continue, on peut penser qu'il doit exister d'autres modes propres neutres dont la célérité est $c = \bar{U}(y)$ dans un intervalle autour de $y = y_c$: le spectre de valeurs propres associées à ces modes est alors *continu*. L'écoulement de Couette discuté ci-dessous offre une illustration simple de ce type de spectre. Notons que la continuité dont il s'agit ici est relative à un ensemble de modes *de même nombre d'onde* ; cette continuité est différente de celle d'un spectre de Fourier, relative, elle, aux nombres d'onde (ou aux fréquences).

L'existence d'une couche critique n'est pas nécessaire à l'existence d'un spectre continu ; on rencontre également un tel spectre pour les écoulements non bornés dans la direction transverse, typiquement l'écoulement de couche limite au-dessus d'une paroi (Mack 1976).

Stabilité de l'écoulement de Couette

Considérons l'écoulement de Couette non visqueux $\bar{U} = U_0(y/h + 1)$ entre deux plans $y = -h$ et $y = +h$ (figure 4.7a). La dérivée seconde $\partial_{yy}\bar{U}$ dans l'équation de Rayleigh étant nulle, celle-ci admet, pour $\bar{U} - c$ non nul, la solution générale

$$\hat{\psi}(y) = A \sinh(ky + \phi),$$

où A et ϕ sont deux constantes d'intégration. La prise en compte des conditions d'imperméabilité des parois $\hat{\psi}(-h) = \hat{\psi}(+h) = 0$ entraîne alors $A = 0$: il n'existerait aucun mode propre satisfaisant les conditions aux limites ! En réalité, il existe bien des modes propres, mais toujours associés à une couche critique. Ces modes peuvent être trouvés en résolvant l'équation de Rayleigh de chaque côté de la couche critique puis en raccordant les deux parties de la solution. La solution satisfaisant les conditions aux parois est en effet

$$\hat{\psi}_-(y) = A_- \sinh k(y + h) \quad \text{pour } y < y_c, \quad (4.17a)$$

$$\hat{\psi}_+(y) = A_+ \sinh k(y - h) \quad \text{pour } y > y_c. \quad (4.17b)$$

La continuité du fluide à travers la couche critique implique la continuité de la vitesse normale $v = -\partial_x \psi$, d'où $\hat{\psi}_-(y_c) = \hat{\psi}_+(y_c)$, soit

$$A_- \sinh k(y_c + h) = A_+ \sinh k(y_c - h).$$

Cette équation détermine complètement la fonction propre (à une constante multiplicative près, comme toujours, car le problème est linéaire et homogène). La figure 4.7b représente une telle fonction propre : continue en $y = y_c$, mais non dérivable. Physiquement, cette discontinuité de la pente correspond à une discontinuité de la vitesse longitudinale $u = \partial_y \psi$, tout à fait admissible pour un écoulement non visqueux.

Ainsi, pour l'écoulement de Couette non visqueux, tout mode normal de nombre d'onde k et célérité c comprise entre $\bar{U}(-h) = 0$ et $\bar{U}(+h) = 2U_0$ est mode propre. La relation de dispersion peut donc s'écrire

$$k\bar{U}(-h) < \omega < k\bar{U}(+h).$$

Autrement dit, pour tout nombre d'onde k , le spectre des valeurs propres $\omega(k)$ est *continu*. On peut conclure que le spectre discret de l'écoulement de Couette non visqueux est vide, mais qu'il existe un spectre continu associé à des modes neutres. Cet écoulement est donc linéairement stable (Case 1960). La prise en compte d'effets visqueux, comme montré au chapitre suivant, ne modifie pas cette conclusion : l'écoulement de Couette est linéairement stable quel que soit le nombre de Reynolds (Romanov 1973).

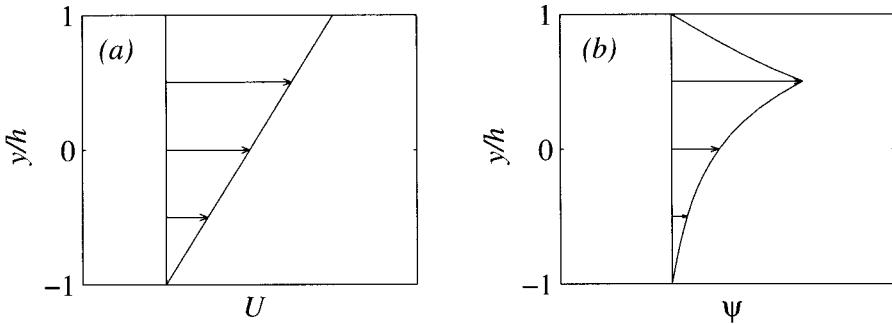


FIG. 4.7 – (a) Écoulement de Couette entre deux parois en $y = \pm h$; (b) fonction propre $\hat{\psi}(y)$ telle que $\omega/k = \bar{U}(h/2)$.

4.2.4 Théorème du point d'inflexion de Rayleigh

Le théorème de Rayleigh (1880) est un résultat très simple et de grande portée :

Théorème de Rayleigh. L'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse de l'écoulement de base est une condition nécessaire (mais non suffisante) d'instabilité.

Démontrons ce théorème. Compte tenu des résultats énoncés au chapitre précédent, il suffit, pour déterminer la stabilité d'un écoulement donné, d'étudier sa stabilité temporelle ; c'est-à-dire qu'il suffit de considérer les modes de nombre d'onde réel et de pulsation complexe. Supposons l'écoulement instable : alors $c_i \neq 0$ et $\bar{U} - c \neq 0$ pour y réel. Divisons l'équation de Rayleigh (4.15) par $(\bar{U} - c)$, multiplions-la par $\hat{\psi}^*$, et intégrons entre les parois en y_1 et y_2 . Après une intégration par parties tenant compte des conditions $\hat{\psi}(y_1) = \hat{\psi}(y_2) = 0$, la partie imaginaire du résultat s'écrit

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial_{yy} \bar{U}}{|\bar{U} - c|^2} |\hat{\psi}|^2 dy = 0. \quad (4.18)$$

Puisque $c_i \neq 0$ par hypothèse, l'intégrale doit être nulle, et $\partial_{yy} \bar{U}$ doit donc changer de signe : le profil de vitesse doit présenter un point d'inflexion. D'où le théorème de Rayleigh.

Ainsi, des trois profils de vitesse de la figure 4.8, le théorème de Rayleigh permet de dire que le profil (a) est stable car ce profil ne présente pas de point d'inflexion ; mais il ne permet pas de prédire la stabilité des profils (b) et (c). Une illustration du fait que la présence d'un point d'inflexion est une condition seulement nécessaire mais non suffisante d'instabilité est donnée par l'écoulement $\bar{U} = \sin y$ entre deux parois en y_1 et y_2 ; comme montré par Tollmien, cet écoulement est stable pour $y_2 - y_1 < \pi$ même s'il existe un point d'inflexion dans l'intervalle (Drazin & Reid 2004, §22 ; Drazin 2002, §8.2).

Le théorème de Rayleigh permet de conclure que deux écoulements fondamentaux, l'écoulement de Poiseuille plan et la couche limite sur une plaque plane, qui ne présentent pas de point d'inflexion, sont linéairement stables si les effets visqueux sur les perturbations sont ignorés. Or l'expérience montre que ces écoulements sont instables, ce qui laisse penser que la viscosité joue un rôle important dans l'instabilité de ces écoulements : cette question fait l'objet essentiel du chapitre suivant.

Le critère de Rayleigh a été précisé par le théorème de Fjørtoft (1950), voir *e.g.* Huerre & Rossi (1998) ou Schmid & Henningson (2001). Ce théorème indique en particulier que, pour un profil de vitesse monotone, une condition nécessaire d'instabilité (mais toujours pas suffisante) est que le point d'inflexion corresponde à un maximum de vorticité. Ainsi, sur la figure 4.8, les profils (a) et (b) sont stables, seul le profil (c) est susceptible d'être instable.

Un autre résultat général est le théorème du demi-cercle de Howard (1961), selon lequel les valeurs propres c sont situées, dans le plan complexe (c_r, c_i) , à l'intérieur du cercle de centre $(U_{\min} + U_{\max})/2$ et de rayon $(U_{\max} - U_{\min})/2$ (Bayly *et al.* 1988, §2.1 ; Schmid & Hennigson 2001, §2.2).

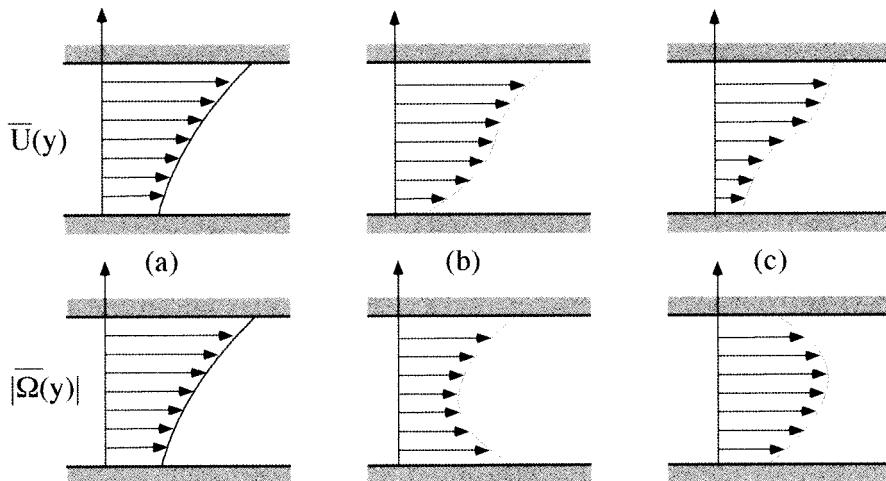


FIG. 4.8 – En haut : profils de vitesse ; en bas : profils de vorticité correspondants. Selon le théorème de Rayleigh, le profil (a) est stable. Selon le théorème de Fjørtoft, les profils (a) et (b) sont stables.

4.2.5 Conditions de saut entre deux couches de vorticité uniforme

Une simplification importante du problème de stabilité d'un écoulement parallèle survient lorsque la courbure du profil de vitesse est nulle (vorticité

uniforme) : l'équation de Rayleigh est alors à coefficients constants. D'où l'idée de remplacer, en première approche, un profil quelconque par un profil linéaire par morceaux. Les fonctions propres des perturbations sont alors des exponentielles à l'intérieur de chaque couche, qu'il s'agit simplement de raccorder sur la discontinuité par des conditions de continuité de la vitesse normale et de la contrainte normale.

Soit donc un écoulement linéaire par morceaux présentant une discontinuité en $y = y_0$ de la vitesse $\bar{U}(y)$ ou de son gradient $\partial_y \bar{U}(y)$. Soit $y = y_0 + \eta(x, t)$ la position perturbée de cette discontinuité, et \mathbf{n} la normale. À travers cette interface, la vitesse normale du fluide doit être continue et égale à la vitesse normale $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ de l'interface. Notant les vitesses et pressions de part et d'autre avec un indice « - » et « + », cette continuité s'écrit

$$(\mathbf{U}_+ \cdot \mathbf{n})(y_0 + \eta) = (\mathbf{U}_- \cdot \mathbf{n})(y_0 + \eta) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.19)$$

Ramenant ces grandeurs sur l'interface non perturbée par un développement en série de Taylor, les composantes U_{\pm} et V_{\pm} s'écrivent, en ne conservant que les infiniment petits du premier ordre,

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\pm}(y_0 + \eta) &= \bar{U}_{\pm}(y_0) + \eta \partial_y \bar{U}_{\pm}(y_0) + \partial_y \psi_{\pm}(y_0), \\ \bar{V}_{\pm}(y_0 + \eta) &= -\partial_x \psi_{\pm}(y_0). \end{aligned}$$

D'autre part, la normale linéarisée est $\mathbf{n} = (-\partial_x \eta, 1)$, et la vitesse normale de l'interface linéarisée est $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = -\partial_t \eta$ (chapitre 2). La continuité de la vitesse normale (4.19) s'écrit donc, ramenée en y_0 ,

$$-\bar{U}_+ \partial_x \eta - \partial_x \psi_+ = -\bar{U}_- \partial_x \eta - \partial_x \psi_- = -\partial_t \eta.$$

Introduisant les modes normaux de la forme $\eta = \frac{1}{2} \hat{\eta} e^{ik(x-ct)} + c.c.$, ces relations deviennent

$$\hat{\psi}_{\pm} = -(\bar{U}_{\pm} - c)\hat{\eta}.$$

Éliminant $\hat{\eta}$ entre ces deux équations, la continuité de la vitesse normale s'écrit finalement

$$\Delta \left(\frac{\hat{\psi}}{\bar{U} - c} \right) = 0, \quad (4.21)$$

où $\Delta[X] = X_+(y_0) - X_-(y_0)$ représente le saut de X à travers la discontinuité.

La continuité de la contrainte normale se réduit à la continuité de la pression, qui s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta[P(y_0 + \eta)] \\ &= \Delta[\bar{P}(y_0) + \eta \partial_y \bar{P}(y_0) + p(y_0) + \mathcal{O}(\eta^2)] \\ &= \Delta[p(y_0) + \mathcal{O}(\eta^2)], \end{aligned}$$

où la dernière égalité correspond au fait que la distribution transversale de pression de base, $\bar{P}(y)$, étant uniforme ou hydrostatique, le saut de \bar{P} et de ses

dérivées est donc nul. Compte tenu de l'équation d'Euler (4.3) longitudinale, cette continuité s'écrit finalement

$$\Delta[(\bar{U} - c)\partial_y \hat{\psi} - \partial_y \bar{U} \hat{\psi}] = 0. \quad (4.22)$$

Les conditions de continuité (4.21) et (4.22), avec les conditions de décroissance à l'infini ou d'imperméabilité de parois solides, permettent de déterminer complètement les fonctions propres d'un écoulement linéaire par morceaux.

4.3 Instabilité d'une couche de mélange

On considère ici l'instabilité d'un écoulement fondamental dont des illustrations ont été données en début de chapitre, celui d'une couche de mélange. Ce problème a été étudié théoriquement par Helmholtz (1868) puis par Kelvin (1871), avec l'idée d'expliquer en particulier la formation par le vent de vagues sur l'océan. La modélisation faite par Kelvin et Helmholtz s'est avérée trop sommaire pour bien rendre compte des vagues de vent (Benjamin 1959), mais l'instabilité découverte s'est imposée comme une instabilité générique des écoulements cisaillés à grand nombre de Reynolds.

4.3.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une feuille de vorticité

L'écoulement le plus simple permettant de mettre en évidence l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est celui de deux fluides de vitesses uniformes U_1 pour $y < 0$ et U_2 pour $y > 0$ (figure 4.9). L'interface est donc le lieu d'un saut de vitesse. Nous considérons ici le cas de deux fluides de même masse volumique ρ , sans tension interfaciale. Le cas plus général incluant l'effet de la flottabilité et de la tension de surface, proposé en exercice, est simplement la superposition du cas étudié ici et de l'instabilité de Rayleigh-Taylor étudiée au chapitre 2.

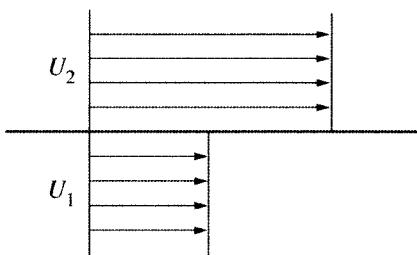


FIG. 4.9 – Écoulement de deux couches superposées de vitesse uniforme.

La solution de l'équation de Rayleigh (4.15) s'écrit

$$\hat{\psi}_j = A_j e^{-ky} + B_j e^{ky}, \quad j = 1, 2.$$

La prise en compte des conditions de décroissance des perturbations à l'infini conduit à $A_1 = 0$ et $B_2 = 0$ (pour k positif). Remarquons tout de suite que la fonction propre décroît donc exponentiellement de part et d'autre de l'interface ; physiquement, cela signifie que les perturbations induites par une vague de nombre d'onde k pénètrent sur une profondeur d'ordre k^{-1} . La prise en compte des conditions de saut à l'interface (4.21) et (4.22) conduit au système algébrique homogène

$$\begin{aligned}(U_1 - c)A_2 - (U_2 - c)B_1 &= 0, \\ (U_2 - c)A_2 + (U_1 - c)B_1 &= 0,\end{aligned}$$

qui n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul, soit

$$(U_1 - c)^2 + (U_2 - c)^2 = 0. \quad (4.23)$$

Cette relation de dispersion montre qu'il existe deux modes correspondant à deux valeurs propres complexes conjuguées

$$c = \frac{\omega}{k} = U_m \pm i\Delta U, \quad (4.24)$$

où on a introduit la vitesse moyenne $U_m = (U_1 + U_2)/2$ et la demi-différence des vitesses $\Delta U = (U_1 - U_2)/2$. Du point de vue de la stabilité temporelle d'une perturbation de nombre d'onde réel, la célérité c_r et le taux de croissance temporel $\omega_i = kc_i$ de ces modes sont

$$c_r = U_m, \quad \omega_i = \pm k\Delta U. \quad (4.25)$$

Ainsi, les valeurs propres sont toujours complexes conjuguées ; l'écoulement est donc instable pour toute différence de vitesse, aussi petite soit-elle, et vis-à-vis de toute perturbation, quel que soit son nombre d'onde k , avec un taux de croissance d'autant plus élevé que k est grand. Par ailleurs, les ondes se propagent toutes à la même célérité, égale à la vitesse moyenne U_m .

La dernière conclusion d'un taux de croissance non borné pour les grands nombres d'onde (petites longueurs d'onde), peu physique, est liée au fait que tout effet de diffusion visqueuse a été ignoré. En effet, les effets inertIELS dominent bien les effets visqueux pour les nombres d'onde tels que $\rho k \Delta U^2 \gg \mu k^2 \Delta U$, *i.e.* $k \ll \Delta U/\nu$, mais ne peuvent pas être ignorés pour $k \gtrsim \Delta U/\nu$. L'échelle $\Delta U/\nu$ apparaît donc comme un nombre d'onde de coupure au-delà duquel l'analyse précédente n'est plus valide. Un modèle plus réaliste, évitant la divergence du taux de croissance des grands nombres d'onde tout en restant dans un cadre non visqueux, est discuté plus loin.

Le mécanisme de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut être expliqué comme un « effet Bernoulli » (figure 4.10). Considérons l'écoulement dans un repère en translation à la vitesse moyenne, dans lequel les vitesses des fluides sont $U_1 = -\Delta U$ et $U_2 = \Delta U$ et la célérité des perturbations nulle d'après (4.25). Au-dessus d'une perturbation $\eta > 0$ de la couche cisaillée, le fluide est

accéléré du fait que sa section de passage est diminuée ; cette perturbation affectant une profondeur de l'ordre de k^{-1} de part et d'autre de l'interface, l'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse est tel $\eta\Delta U \sim u/k$ du fait de l'incompressibilité du fluide. Cette survitesse au-dessus d'une crête entraîne une perturbation de pression d'après le théorème de Bernoulli, d'ordre $p \sim -\rho\Delta U u$. On en déduit le taux de croissance

$$\sigma = \frac{1}{u} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho u} \frac{\partial p}{\partial x} \sim -\frac{k p}{\rho u} \sim k \Delta U.$$

Cette prédiction est bien en accord avec le calcul précédent. Remarquons que ce résultat peut aussi être obtenu d'un point de vue strictement dimensionnel : les seules échelles du problème étant la vitesse ΔU et le nombre d'onde k , la seule échelle de temps est $1/k\Delta U$ si bien que le taux de croissance doit varier comme $k\Delta U$. Une autre interprétation du mécanisme de l'instabilité, en termes de vorticité, est donnée par Batchelor (1967).

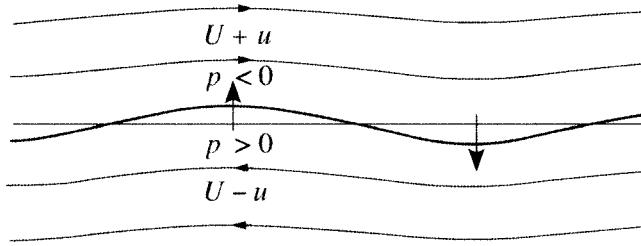


FIG. 4.10 – Mécanisme de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, observée dans un repère se déplaçant à la vitesse moyenne des fluides.

Remarquons pour terminer que les modes propres

$$\psi_j = \frac{1}{2} (A_j e^{-ky} + B_j e^{ky}) e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad j = 1, 2,$$

correspondent à des perturbations irrotationnelles ; en effet, leur vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = -\Delta\psi \mathbf{e}_z,$$

est nulle. Qu'advient-il donc d'une perturbation rotationnelle ? En l'absence de diffusion par la viscosité, le champ de vorticité associé à une telle perturbation est transporté selon l'équation de Helmholtz linéarisée (Batchelor 1967, §5.2)

$$(\partial_t + \bar{U}\partial_x)\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0},$$

dont la solution est $\boldsymbol{\omega}(x, y, t) = \boldsymbol{\omega}(x - \bar{U}t, y)$. Ainsi, la vorticité est simplement advectée par l'écoulement de base : la composante rotationnelle de la perturbation est neutre. Ce résultat reste vrai pour un écoulement de base linéaire par morceaux, où la vorticité est uniforme dans chaque couche. Notons que le caractère neutre des perturbations de vorticité a déjà été rencontré lors de l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor où l'état de base correspond au fluide au repos (chapitre 2).

William Thomson, Lord Kelvin (1824–1907)

Né à Belfast, Irlande, élevé par son père mathématicien dans un strict mode de vie presbytérien. Obtient à 15 ans la médaille d'or de l'Université de Glasgow pour un *Essay on the Figure of the Earth*. Entre 1838 et 1841, encouragé par ses professeurs, découvre et lit les œuvres des Français Lagrange, Laplace, Legendre, Fresnel et Fourier. Entre à l'Université de Cambridge en 1841, et publie son premier article *Fourier's expansions of functions in trigonometrical series*. S'installe à Paris en 1845, et travaille dans le laboratoire de physique de Henri-Victor Regnault au Collège de France. À la demande de Liouville, s'attache à unifier les idées de Faraday, Coulomb et Poisson sur la nature de l'électricité. Élu en 1846 professeur de Philosophie Naturelle (physique) à l'Université de Glasgow. Échanges épistolaires soutenus avec G.G. Stokes : plusieurs centaines de lettres. Ses études de thermodynamique le conduisent à proposer une échelle de température absolue en 1848. Observe en 1852 « l'effet Joule-Thomson » de refroidissement d'un gaz lors d'une détente. Comprend par Joule la nature dynamique de la « chaleur », comme mouvement des molécules ; et s'inspire de cette idée pour développer une théorie dynamique de l'électricité et du magnétisme (1856), à laquelle James Clerk Maxwell devra beaucoup dans l'élaboration de sa propre théorie. La seconde partie de sa carrière est marquée toutefois par des prises de position malheureuses, contre l'existence des atomes, contre la théorie de l'évolution de Darwin, contre la radioactivité de Rutherford. Entreprend avec Peter Guthrie Tait un *Treatise on Natural Philosophy*, ambitieux projet de présentation unifiée de la Physique ; les deux seuls volumes publiés, de cinématique et de dynamique, resteront une référence pour plusieurs générations. Dans les années 1850, se joint à un groupe d'industriels sur un projet de câble télégraphique sous-marin transatlantique. Ses idées, liées en particulier à son invention du galvanomètre à miroir, se révèlent meilleures que celles de son concurrent Whitehouse ; retire de ses brevets et de ses activités de conseil une grande célébrité et une fortune personnelle importante. Reçoit de la reine Victoria le titre de Chevalier en 1866, élevé au rang de *Baron Kelvin of Largs* en 1892. Élu à la *Royal Society* en 1851, qu'il préside de 1890 à 1895 ; aussi président de la *Royal Society of Edinburgh* durant plus de 20 ans, jusqu'à sa mort. Thomson a publié plus de 600 articles. Inhumé à l'abbaye de Westminster à Londres.



Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894)

Né à Potsdam en Allemagne, dans une famille modeste. Malgré son goût pour la physique, entreprend des études universitaires de médecine à Berlin afin de pouvoir bénéficier d'une bourse. Étudie les mathématiques et la philosophie en autodidacte. Auteur d'un premier mémoire en 1841 sur l'activité musculaire, où il soutient que la physiologie doit être fondée non sur des « forces vitales », mais plutôt sur les principes de la physique et de la chimie, et montre que la notion de force vitale impliquerait l'existence du mouvement perpétuel.

Publie en 1847 *Über die Erhaltung der Kraft*, article fondant le principe de conservation de l'énergie à partir des travaux de Sadi Carnot, Clapeyron, Mayer et Joule, entre autres. Comprend que là où de l'énergie semble s'être perdue, elle s'est en réalité convertie en énergie cinétique ou potentielle à l'échelle atomique (l'existence des atomes est encore loin d'être acceptée). L'argumentation s'appuie sur des principes physiques, mais aussi sur des convictions philosophiques, attitude caractéristique de Helmholtz. Ces convictions, puisées chez Kant, sont fondées sur une exigence générale d'intelligibilité de la nature et le postulat d'une invariance fondamentale sous-jacente aux transformations naturelles. Cette publication lui permet d'être relevé de ses fonctions de médecin militaire et d'accepter une chaire de physiologie à Königsberg. À l'occasion d'une visite en Angleterre en 1853, se lie d'amitié avec William Thomson (Lord Kelvin). En 1855, quitte Königsberg pour une Chaire d'Anatomie et de Physiologie à Bonn, puis, en 1858, s'établit à Heidelberg. Publie en 1858 dans le *Journal de Crelle* « la splendide découverte des lois dynamiques du mouvement tourbillonnaire » d'un fluide parfait (Lord Kelvin), où il établit les fameux théorèmes et définit la vorticité. Ses travaux expérimentaux et théoriques d'optique et d'acoustique fondent la physiologie des fonctions sensorielles, et lui valent rapidement une réputation internationale. Publie en 1856 et 1866 les deux volumes du *Handbuch der physiologischen Optik*, où il développe en particulier une théorie de la vision en couleur. En 1862, publie une étude majeure sur la théorie musicale et la perception du son, où il promeut l'usage des toutes nouvelles séries de Fourier. À partir de 1866, s'écarte de la physiologie pour se rapprocher de la physique et des mathématiques. Recherches sur la géométrie non euclidienne, sur les fondements de la géométrie et le rôle que peut y jouer l'expérience, en liaison avec une critique de la philosophie de Kant. En 1871, est nommé à la Chaire de Physique à Berlin, et prend la direction d'un nouvel institut. Contributions importantes à l'électrodynamique, à la découverte de l'électron, aux piles électrochimiques et doubles couches électriques. Maître de H. Hertz. Tente de

donner un fondement mécanique à la thermodynamique, essaie de dériver les équations de Maxwell du principe de moindre action. Son activité et sa personnalité auront dominé la science allemande et européenne du XIX^e siècle. Esprit universel qui, dans la tradition de Leibniz, aura embrassé toutes les sciences, ainsi que la philosophie et les arts.

4.3.2 Cas d'une épaisseur de vorticité non nulle

Une discontinuité de vitesse ne pouvant se maintenir du fait de la diffusion par la viscosité, un modèle plus réaliste d'écoulement de base doit prendre en compte une couche cisaillée reliant de façon continue les deux écoulements uniformes. Un modèle simple résolu analytiquement par Rayleigh (1880) est le profil linéaire par morceaux représenté sur la figure 4.11 :

$$\bar{U} = U_1, \quad y < -\delta, \quad (4.26a)$$

$$\bar{U} = U_m + \Delta U y / \delta, \quad -\delta < y < \delta, \quad (4.26b)$$

$$\bar{U} = U_2, \quad \delta < y, \quad (4.26c)$$

où δ est la demi-épaisseur de la couche cisaillée. Cette épaisseur croît en réalité au cours du temps, mais nous considérons que cette croissance est lente devant la croissance de l'instabilité, c'est-à-dire que δ peut être considéré constant, hypothèse à discuter *a posteriori*.

Relation de dispersion

L'équation de Rayleigh (4.15) et la condition de décroissance des perturbations à l'infini donne la forme générale des perturbations

$$\hat{\psi}_1 = B_1 e^{ky}, \quad y < -\delta, \quad (4.27a)$$

$$\hat{\psi}_0 = A_0 e^{-ky} + B_0 e^{ky}, \quad -\delta < y < \delta, \quad (4.27b)$$

$$\hat{\psi}_2 = A_2 e^{-ky}, \quad \delta < y. \quad (4.27c)$$

L'écriture des relations de saut (4.21) et (4.22) pour les deux interfaces conduit à un système algébrique homogène pour les quatre constantes d'intégration, qui n'admet de solution non nulle que si son déterminant est nul, ce qui donne la relation de dispersion

$$4(k\delta)^2(c - U_m)^2 - \Delta U^2((2k\delta - 1)^2 - e^{-4k\delta}) = 0. \quad (4.28)$$

Le cas d'un écoulement borné par deux parois a également été résolu par Rayleigh (Drazin & Reid 2004, §23.2).

Stabilité temporelle

Considérons un mode temporel de nombre d'onde k réel. Pour $(2k\delta - 1)^2 > e^{-4k\delta}$, soit $k\delta > k_c\delta = 0,6392$, la relation de dispersion possède deux racines c_{\pm} réelles, et la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuee, elle est neutre. Pour $k\delta < k_c\delta$, les valeurs propres c_{\pm} sont complexes conjuguées, l'un des modes propres est atténué et l'autre est amplifié. L'écoulement est donc instable vis-à-vis des perturbations de grande longueur d'onde. La figure 4.11 donne la célérité $c_{\pm r}$ et le taux de croissance temporel $\omega_{\pm i} = kc_{\pm i}$ en fonction du nombre d'onde. Le taux de croissance maximal vaut

$$\omega_{i,\max} \approx 0,2 \Delta U / \delta,$$

et correspond à $k_{\max}\delta \approx 0,4$. Pour $k\delta \ll 1$, *i.e.* des perturbations de longueur d'onde grande devant l'épaisseur de vorticité, on retrouve comme on pouvait l'attendre le taux de croissance dimensionnel $\omega_{\pm i} = \pm k\Delta U$ pour une feuille de vorticité d'épaisseur nulle.

Un meilleur modèle d'écoulement de base, plus régulier que l'écoulement linéaire par morceaux, est l'écoulement en tangente hyperbolique

$$\bar{U} = U_m + \Delta U \tanh(y/\delta). \quad (4.29)$$

La résolution numérique de l'équation de Rayleigh conduit à une courbe de stabilité très voisine de celle de la figure 4.11 (Michalke 1964). Le nombre d'onde de coupure est $k_{\text{off}}\delta = 1$, et le taux de croissance temporel maximal, $\omega_{i,\max}\delta/U_{\infty} \approx 0,2$, correspond à $k_{\max}\delta \approx 0,44$, valeurs très proches de celles d'un écoulement linéaire par morceaux.

Finalement, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz se manifeste par la croissance des perturbations de longueur d'onde grande devant l'épaisseur δ , sur un temps advectif d'ordre $\delta/\Delta U$. Ce résultat se retrouve plus généralement pour tout écoulement cisaillé à grand nombre de Reynolds dont le profil de vitesse présente un point d'inflexion, jets ou sillages en particulier.

Stabilité spatiale et transition convectif-absolu

Une étude de stabilité spatiale n'ayant de sens que si l'instabilité est convective et non absolue, la première étape consiste à déterminer la condition d'instabilité convective (*cf.* chapitre 3). La transition convectif-absolu correspond à l'annulation de la vitesse de groupe pour un nombre d'onde k_0 qu'il s'agit de déterminer. Différentiant la relation de dispersion, et posant $\partial\omega/\partial k = 0$, il vient

$$\frac{\omega_0\delta}{U_m} = k_0\delta - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta U}{U_m} \right)^2 (2k_0\delta - 1 + e^{-4k_0\delta}). \quad (4.30)$$

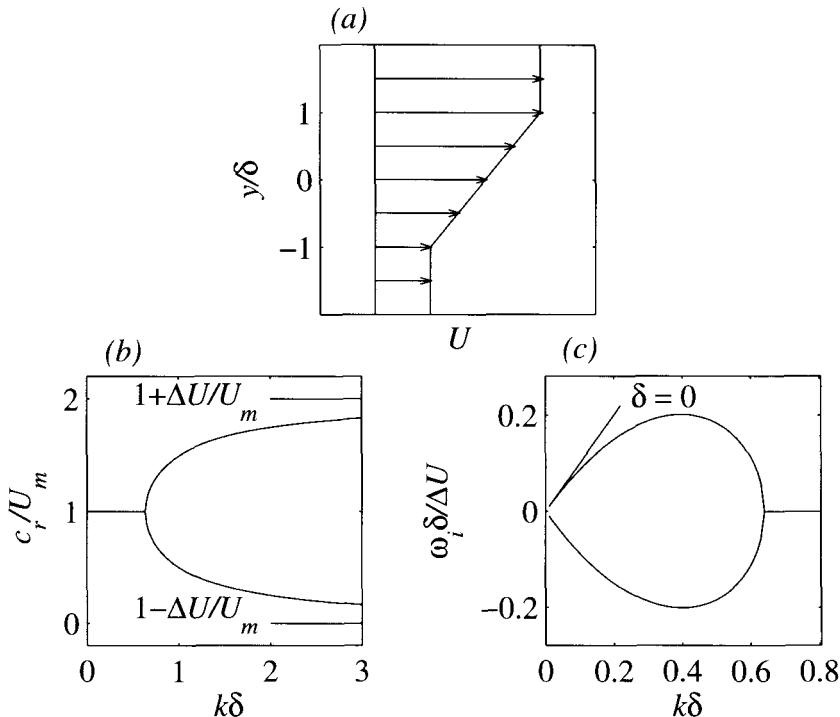


FIG. 4.11 – (a) Couche de mélange d'épaisseur 2δ ; (b) célérité et (c) taux de croissance des deux modes propres.

Substituant cette expression dans la relation de dispersion (4.28), il vient que k_0 est solution de l'équation

$$(2k_0\delta - 1 + e^{-4k_0\delta})^2 \left(\frac{\Delta U}{U_m} \right)^2 - ((2k_0\delta - 1)^2 - e^{-4k_0\delta}) = 0. \quad (4.31)$$

La résolution numérique de cette équation permet de déterminer le nombre d'onde complexe $k_0\Delta U/U_m$ dont la vitesse de groupe est nulle, et d'en déduire la fréquence complexe $\omega_0\Delta U/U_m$ correspondante. Il apparaît que le taux de croissance absolu ω_{0i} est négatif pour $|\Delta U/U_m| < 1$, et devient positif pour $|\Delta U/U_m| > 1$ (Huerre & Rossi 1998). Pour $|\Delta U/U_m| < 1$, c'est-à-dire lorsque les deux fluides sont co-courants, l'instabilité est donc convective, et la couche de mélange se comporte comme un amplificateur de bruit. Pour $|\Delta U/U_m| > 1$, c'est-à-dire lorsque les deux fluides s'écoulent en sens contraire, l'instabilité est absolue, et la couche de mélange se comporte comme un oscillateur de taux de croissance ω_{0i} .

4.3.3 Effets de la viscosité

La viscosité épaisse la couche de vorticité et donc modifie l'écoulement de base, d'une part, et affecte l'instabilité d'autre part. Considérons tout d'abord le premier problème, du point de vue de la stabilité temporelle ; l'épaisseur de vorticité δ , considérée constante jusqu'à présent, croît en réalité sur une échelle de temps δ^2/ν , alors que le temps caractéristique de l'instabilité est $\delta/\Delta U$. L'hypothèse d'écoulement de base stationnaire, valide si le temps caractéristique de l'instabilité est court devant le temps de variation de l'écoulement de base, implique donc $\delta/\Delta U \ll \delta^2/\nu$, c'est-à-dire que le nombre de Reynolds $Re = \Delta U \delta/\nu$ doit être grand devant l'unité. Du point de vue spatial, la couche de vorticité, dont l'épaisseur peut être très faible à l'endroit où les deux couches sont mises en contact, s'épaissit vers l'aval ; l'écoulement n'est donc plus strictement parallèle. À grand nombre de Reynolds, l'épaississement n'est significatif qu'au-delà d'une distance L grande devant la longueur d'onde λ des perturbations les plus amplifiées, elle-même d'ordre δ . Cette séparation des échelles fait que l'écoulement n'est que faiblement non parallèle ; le problème peut alors être étudié dans le cadre d'une méthode de perturbation de type WKB, où le petit paramètre est $\epsilon = \delta/L$ (Huerre & Rossi 1998, §5.2). La viscosité n'étant prise en compte qu'à travers l'étalement de l'écoulement de base, l'analyse de stabilité reste non visqueuse. Pour un écoulement de base en tangente hyperbolique, il vient une bonne prédiction du développement spatial de l'amplitude des perturbations.

Pour ce qui est de l'instabilité proprement dite, le résultat de la diffusion visqueuse est de diminuer le taux de croissance ainsi que le nombre d'onde de coupure k_c (figure 4.12), avec $k_c \delta \sim Re/4\sqrt{2}$ pour $Re \rightarrow 0$ (Betchov & Szewczyk 1963). L'instabilité reste fondamentalement une instabilité inertielle de grande longueur d'onde, la viscosité correspondant à une perturbation *régulière* (contrairement aux situations étudiées au chapitre 5, où cette perturbation sera *singulière* du fait de la présence d'une paroi). Une analyse de la compétition entre la croissance de l'instabilité et l'étalement par la viscosité conduit pour le taux de croissance à l'estimation

$$\omega_{i,\max} \frac{\delta}{\Delta U} \approx \sqrt{\frac{0,2}{1 + a/0,2Re}}, \quad (4.32)$$

où a est une constante voisine de l'unité (Villermaux 1998). Cette prédiction simple est en assez bon accord avec les calculs, analytiques et numériques, de Betchov & Szewczyk.

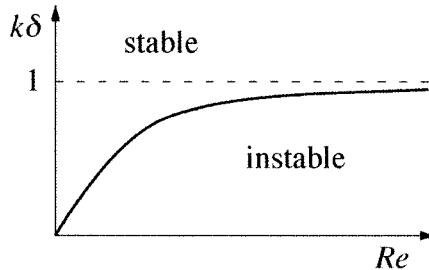


FIG. 4.12 – Allure de la courbe de stabilité marginale pour la couche de mélange en tangente hyperbolique dans le plan $Re - k\delta$.

4.4 Instabilité centrifuge de Couette-Taylor

4.4.1 Introduction

L’écoulement azimuthal entre deux cylindres coaxiaux (figure 4.13a) est instable lorsque la vitesse du cylindre intérieur excède une valeur critique. Cette instabilité centrifuge, dite de Couette-Taylor, est fondamentale pour au moins deux raisons. La première réside dans le fait que cette instabilité est *générique*, c’est-à-dire qu’elle est susceptible de se manifester dans tout écoulement dévié par une paroi créant un gradient de pression normal aux lignes de courant. Citons en particulier l’écoulement de couche limite sur une paroi concave, qui conduit à l’apparition de *tourbillons de Görtler* alignés dans la direction de l’écoulement, et l’écoulement de Poiseuille dans une conduite ou un canal courbe, qui conduit à des *tourbillons de Dean* très semblables (Floryan 1991). La deuxième raison de l’importance de l’instabilité de Couette-Taylor est qu’au-delà de la première bifurcation qui conduit aux célèbres rouleaux de Taylor (figure 4.13b), une succession de bifurcations très riche engendre des écoulements de plus en plus complexes, pour finalement conduire à la turbulence. Cette « route vers le chaos », qui présente de nombreux points communs avec celle de la convection thermique de Rayleigh-Bénard, a fait l’objet à partir des années 1970 d’une multitude de travaux, expérimentaux, numériques et théoriques ; ces travaux ont permis des avancées importantes dans la compréhension de la dynamique non linéaire des écoulements.

L’instabilité de Couette-Taylor est discutée en détail dans de nombreux ouvrages, en particulier dans Chandrasekhar (1961) et Drazin & Reid (2004), et pour les aspects non linéaires dans les ouvrages plus spécialisés de Chossat & Iooss (1994) et Koschmieder (1993). Nous nous limitons ici aux éléments essentiels du problème en insistant sur les mécanismes physiques, lorsque les effets visqueux sont d’abord ignorés, puis pris en compte.

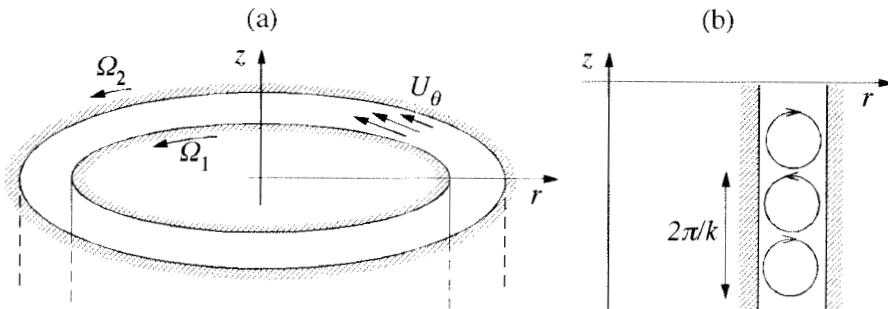


FIG. 4.13 – Écoulement de Couette-Taylor : (a) géométrie et profil de vitesse azimuthale ; (b) vue en coupe des rouleaux contrarotatifs issus de la bifurcation primaire.

4.4.2 Maurice Couette (1890) et Geoffrey Taylor (1923)

Considérons l'écoulement azimuthal $V(r)$ d'un fluide dans l'espace annulaire entre deux cylindres coaxiaux de rayons r_1 et r_2 animés de vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2 (figure 4.13a). La courbure de la trajectoire d'une particule fluide correspond à une accélération centripète, $-V(r)^2/r$, créée par une force de pression radiale $-\partial_r P$ par unité de masse :

$$-\frac{V(r)^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r}. \quad (4.33)$$

Cette égalité indique que la pression doit nécessairement augmenter vers l'extérieur, selon une loi qui dépend du profil de vitesse $V(r)$. Pour un écoulement non visqueux, la conservation de la quantité de mouvement dans la direction azimuthale, ou, ce qui revient au même ici, la condition de moment cinétique constant pour un cylindre fluide de rayon dr , est satisfaite pour tout profil $V(r)$. Pour un écoulement visqueux, cette condition impose que le cisaillement azimuthal $\tau(r)$ doit être tel que le couple par unité de longueur, $2\pi r^2 \tau(r)$, ne dépende pas du rayon ; cette condition sélectionne le profil de vitesse unique (Guyon, Hulin & Petit 2001, §4.5 ; Tritton 1988, §9.3)

$$U_\theta = Ar + B/r, \quad (4.34)$$

où les constantes A et B sont imposées par les conditions d'adhérence sur les cylindres :

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{r_1^{-2} - r_2^{-2}}.$$

Les premières expériences sur ce type d'écoulement sont dues à Maurice Couette (1890), dans la perspective de déterminer la viscosité du fluide ; le montage de Couette autorisait la rotation du cylindre *extérieur* seulement, le couple étant mesuré sur le cylindre intérieur. Ces expériences montrent

que, sur une large gamme de vitesse Ω_2 , le couple varie bien linéairement avec cette vitesse, en accord avec la prédition de profil de vitesse (4.34). Ces expériences montrent aussi qu'au-delà d'une certaine vitesse Ω_2 difficile à définir précisément, le couple augmente fortement, observation que Couette a justement attribué à une instabilité de l'écoulement purement azimutal (4.34) et à l'apparition d'un mouvement turbulent.

Ces expériences ont été reprises par Geoffrey I. Taylor (1923) avec un dispositif qui lui permettait de faire aussi tourner le cylindre *intérieur*; la grande longueur des cylindres, 90 cm, soit une centaine de fois l'espace annulaire $r_2 - r_1$, permettait de s'affranchir autant que possible des effets de bord aux extrémités de l'écoulement. L'observation majeure de Taylor est que si le cylindre intérieur tourne seul, une instabilité se manifeste au-delà d'une certaine vitesse Ω_1 par l'apparition d'un nouvel écoulement, non pas turbulent mais stationnaire et très structuré spatialement; cette structure spatiale est constituée de rouleaux toriques contrarotatifs, périodique dans la direction axiale, de nombre d'onde k tel que $2\pi/k \approx 2(r_2 - r_1)$ (figures 4.13b et 4.14 gauche). Cette instabilité survenant par accroissement de Ω_1 s'observe aussi si Ω_2 est non nul. La figure 4.15 montre le seuil de l'instabilité dans le plan des nombres de Reynolds construits sur la vitesse des cylindres et sur leur espacement :

$$Re_1 = \frac{\Omega_1 r_1 (r_2 - r_1)}{\nu}, \quad Re_2 = \frac{\Omega_2 r_2 (r_2 - r_1)}{\nu}. \quad (4.35)$$

Notons que le problème fait intervenir un troisième paramètre sans dimension, le rapport des rayons ou l'espacement sans dimension

$$R = \frac{r_2 - r_1}{r_1}, \quad (4.36)$$

égal à 0,14 sur la figure 4.15. Les ronds blancs correspondent à la stabilité marginale de l'écoulement azimutal, obtenu par un calcul de stabilité linéaire, et les points noirs correspondent à l'apparition des rouleaux. Ces résultats, commentés plus en détail plus loin, marquaient une étape majeure du développement de l'hydrodynamique, réalisant pour la première fois un accord excellent entre observations et analyse de stabilité.

Taylor a aussi montré qu'au-delà d'une deuxième vitesse critique, la structure des rouleaux se déstabilise et se complique : les rouleaux s'enroulent en hélice, ou, comme montré sur la figure 4.14 à droite, présentent des ondulations, ou des modulations d'amplitude, se propageant dans la direction de l'écoulement. Le périmètre est occupé par un nombre entier m de longueurs d'onde, l'écoulement demeurant toujours stationnaire dans un repère tournant avec ces ondulations. Comme noté par Taylor, la structure observée ne dépend pas seulement de la valeur des paramètres, mais du chemin suivi pour atteindre ces valeurs ; en d'autres termes, l'écoulement correspondant à jeu de paramètres donné n'est pas unique mais dépend de l'histoire de cet écoulement. Dans les

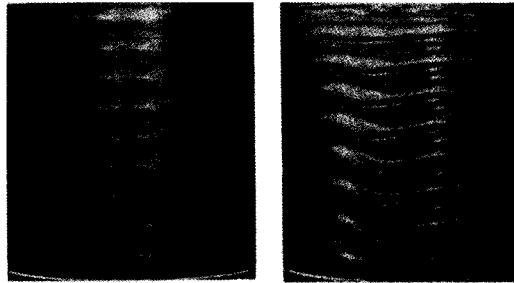


FIG. 4.14 – Rouleaux annulaires de Taylor. (a) $Ta/Ta_c = 1,1$; (b) $Ta/Ta_c = 6,0$, rouleaux ondulants apparus suite à une instabilité secondaire ($\lambda = 2\pi R/4$). (Fenstermacher, Swinney & Gollub 1979).

termes de la théorie des systèmes dynamiques, la première bifurcation est une bifurcation fourche supercritique qui brise l'invariance par translation suivant l'axe z des cylindres, et la seconde brise l'invariance par rotation ; la multiplicité des écoulements observés pour un jeu de paramètres donné indique la métastabilité de ces écoulements, les conditions initiales conduisant à chacun de ces attracteurs correspondant à un bassin d'attraction d'étendue finie.

La question de la stabilité de l'écoulement *non visqueux* peut se poser en termes très simples : si la distribution de pression, $P(r)$, est telle qu'une particule fluide perturbée de sa trajectoire circulaire d'équilibre est soumise à une force de rappel, alors l'écoulement azimuthal est stable ; sinon, il est instable. Pour un écoulement visqueux, cette condition d'instabilité reste nécessaire, mais elle n'est pas suffisante : l'instabilité requiert que la force déstabilisante soit supérieure à la force de freinage visqueux. Il s'agit ci-dessous de préciser ces critères d'instabilité.

4.4.3 Critère d'instabilité pour un écoulement non visqueux

L'instabilité de l'écoulement de Couette résultant d'un mécanisme inertiel, un critère d'instabilité peut être obtenu en ignorant dans un premier temps les effets visqueux. Suivant Kármán (1934), considérons un anneau fluide de rayon r et de vitesse V , dont le moment cinétique par unité de masse est $J = rV$ et la circulation $2\pi J$. Le gradient de pression centripète exercé sur cet anneau est donc d'après (4.33) égal à $V^2/r = J^2/r^3$. Une déformation de cet anneau en un anneau de rayon $r + dr$ doit conserver sa circulation $2\pi J$ d'après le théorème de Kelvin (Batchelor 1967, §5.3), *i.e.* doit conserver son moment cinétique J . Le gradient de pression juste nécessaire pour maintenir l'anneau dans sa nouvelle position est donc $J(r)^2/(r + dr)^3$. Si le gradient de pression effectivement présent, $J(r + dr)^2/(r + dr)^3$, est supérieur à $J(r)^2/(r + dr)^3$, l'anneau est soumis à une force de rappel vers sa position initiale ; sinon, ce

gradient tend à amplifier la déformation. On peut en déduire qu'une condition nécessaire et suffisante d'instabilité vis-à-vis de perturbations *axisymétriques* est $J(r + dr)^2 < J(r)^2$. Cette condition d'instabilité est donc une condition de décroissance du carré du moment cinétique :

$$\frac{dJ^2}{dr} < 0, \quad J = rV. \quad (4.37)$$

En d'autres termes, l'écoulement est instable si la croissance radiale de la pression est trop lente, si bien que $r^3 \partial_r P(r)$ décroît. Le critère (4.37) a été obtenu originellement par Rayleigh (1916b) par un raisonnement différent¹. Ce critère a été confirmé par un calcul de stabilité complet à partir des équations linéarisées du mouvement perturbé, et étendu à des perturbations non axisymétriques proportionnelles à $e^{i(kz+m\theta-\omega t)}$: les perturbations non axisymétriques ($m \neq 0$) sont plus stables que les perturbations axisymétriques ($m = 0$), lesquelles sont instables si et seulement si le critère de Rayleigh est satisfait ; la détermination de ce critère pour des perturbations axisymétriques est proposée dans l'exercice 4.5.4.

Pour l'écoulement de Couette (4.34), le critère d'instabilité de Rayleigh (4.37) devient

$$\frac{d}{dr}(Ar^2 + B)^2 = 4Ar^2 U_\theta < 0,$$

soit

$$\Omega_2 r_2^2 < \Omega_1 r_1^2. \quad (4.38)$$

L'écoulement de Couette non visqueux est donc stable vis-à-vis de perturbations axisymétriques si la circulation du cylindre extérieur, $2\pi\Omega_2 r_2^2$, est inférieure à celle du cylindre intérieur, $2\pi\Omega_1 r_1^2$.

Comme pointé par Rayleigh, l'instabilité « centrifuge » décrite ci-dessus est très semblable à l'instabilité de Rayleigh-Bénard d'un fluide dans un gradient de température : tout écart au gradient radial de pression (4.33) joue ici un rôle analogue à la force de flottabilité ; plus précisément, la condition d'instabilité (4.37) de décroissance du moment cinétique vers l'extérieur est analogue à la condition de décroissance de la température vers le haut.

4.4.4 Effet de la viscosité – Nombre de Taylor

Selon le critère de Rayleigh, la moindre rotation Ω_1 du cylindre intérieur avec le cylindre extérieur fixe ($\Omega_2 = 0$) devrait entraîner l'apparition d'une instabilité. En réalité, l'apparition de cette instabilité est retardée par la diffusion visqueuse, et ne se manifeste qu'au-delà d'une vitesse critique non nulle. La figure 4.15 montre la courbe de stabilité marginale obtenue par

1. Le raisonnement de Rayleigh consiste à évaluer la variation d'énergie cinétique lors de la permutation de deux anneaux de fluide conservant leur moment cinétique (théorème de Kelvin) ; le critère de stabilité invoqué – l'écoulement est stable si la permutation conduit à une augmentation de l'énergie cinétique – est plus subtil que celui de Kármán.

Taylor (1923), dans le plan des vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 normalisées par $\nu/r_1(r_2 - r_1)$. Cette courbe est une interpolation entre des points expérimentaux et des points issus d'un calcul de stabilité détaillé ci-dessous ; on peut voir que l'accord entre l'expérience et le calcul est excellent, et que le critère de Rayleigh, qui ignore l'effet stabilisant de la viscosité, donne le bon comportement asymptotique pour des vitesses grandes et de même signe, conditions pour lesquelles les effets visqueux sont effectivement petits devant les effets inertIELS.

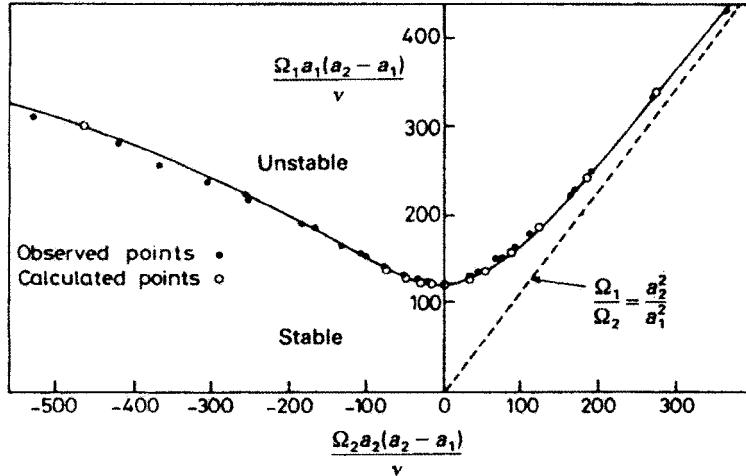


FIG. 4.15 - Stabilité marginale de l'écoulement de Couette dans le plan des nombres de Reynolds, points observés et calculés par Taylor (1923) pour des rayons de cylindres $a_1 = 3,55$ cm et $a_2 = 4,035$ cm ; le trait tireté correspond au critère non visqueux de Rayleigh (1916b). D'après Tritton (1988, fig. 17.11).

Pour comprendre comment s'introduit le nombre de Taylor qui contrôle l'instabilité, et comment ce nombre est lié au nombre de Rayleigh, considérons une perturbation axisymétrique (correspondant aux rouleaux observés). Pour une telle perturbation, les équations linéarisées des perturbations de vitesses radiale et azimutale, u_r et u_θ , s'écrivent (Drazin & Reid 2004, §17 ; Chandrasekhar 1961, chap. 7)

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \Delta_* u_r + \frac{2\bar{U}_\theta u_\theta}{r}, \quad (4.39a)$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \Delta_* u_\theta - (D_* \bar{U}_\theta) u_r, \quad (4.39b)$$

où les opérateurs étoilés sont définis par

$$D_* = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}, \quad \Delta_* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dans chacune de ces équations, les premiers termes du membre de droite correspondent au freinage visqueux, et le dernier est un terme d'inertie. Dans la première équation, le terme d'inertie provient de la rotation du vecteur \mathbf{e}_θ lorsqu'on suit une particule fluide ; dans la seconde, le terme d'inertie est la somme de l'advection par u_r du gradient radial $\partial_r \bar{U}_\theta$ de l'écoulement de base, et du terme $u_r \bar{U}_\theta / r$ provenant de la rotation du vecteur \mathbf{e}_r ².

Ces deux équations sont tout à fait semblables aux équations (2.49) du problème de Rayleigh-Bénard (chapitre 2) : la vitesse radiale u_r créée par la force d'inertie radiale correspond à la vitesse verticale v créée par la force de flottabilité, et la vitesse azimutale u_θ correspond à l'écart de température δT . Pour rendre plus claire l'analogie des deux problèmes, distinguons artificiellement une viscosité radiale ν_r et une viscosité azimutale ν_θ , et analysons le cas $\nu_r/\nu_\theta \gg 1$ de la même façon que le problème de Rayleigh-Bénard à nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ grand. Pour une particule fluide écartée de sa position d'équilibre, l'équilibre radial relaxe alors beaucoup plus vite que l'équilibre azimutal. Supposons de plus, comme Taylor, que seul le cylindre intérieur tourne ($\Omega_2 = 0$, $Re_2 = 0$) et que l'espacement $r_2 - r_1$ entre les cylindres est petit devant r_1 ($R \ll 1$). Avec les estimations suivantes des forces visqueuse et inertielle,

$$F_{visc, r} \sim -\frac{\nu_r}{(r_2 - r_1)^2} u_r, \quad F_{iner, r} \sim 2\Omega_1 u_r,$$

2. Il est tentant, mais inexact, de vouloir identifier les deux termes d'inertie à des forces d' entraînement et de Coriolis dans un repère tournant à la vitesse angulaire \bar{U}_θ/r . De ce (mauvais) point de vue, la vitesse $u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$ représenterait une vitesse relative, et la décomposition de l'accélération absolue $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$ d'une particule fluide s'écrirait

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{du_r}{dt} - \frac{\bar{U}_\theta^2}{r} - 2\frac{\bar{U}_\theta u_\theta}{r}, \\ a_\theta &= \frac{du_\theta}{dt} + 2\frac{\bar{U}_\theta u_r}{r}, \end{aligned}$$

où les dérivées (lagrangiennes) sont les composantes de l'accélération relative, \bar{U}_θ^2/r est l'accélération d' entraînement, et les derniers termes sont les composantes de l'accélération de Coriolis. Suivant l'autre (bon) point de vue, l'accélération s'écrit

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta) = \frac{dU_r}{dt} \mathbf{e}_r + U_r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dU_\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + U_\theta \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}.$$

Décomposant la vitesse en somme d'un écoulement de base $\bar{U}_\theta \mathbf{e}_\theta$ et de perturbations $u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$, il vient

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{du_r}{dt} - \frac{(\bar{U}_\theta + u_\theta)^2}{r}, \\ a_\theta &= \frac{du_\theta}{dt} + \frac{\bar{U}_\theta u_r}{r}, \end{aligned}$$

où les derniers termes proviennent de la dérivation des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ . On voit que ces expressions sont différentes des précédentes, car \bar{U}_θ , u_θ et u_r ne représentent pas la même chose (mais l'opérateur d/dt est bien le même car le taux de variation d'un scalaire est indépendant du référentiel). La linéarisation de ces équations, avec $d/dt = \partial_t + \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} = \partial_t + U_r \partial_r + (U_\theta/r) \partial_\theta + U_z \partial_z$ conduit à (4.39).

l'équilibre radial (4.39a) s'écrit alors

$$u_r \sim 2 \frac{\Omega_1(r_2 - r_1)^2}{\nu_r} u_\theta. \quad (4.42)$$

Cette relation peut s'interpréter en disant que vitesse radiale est « esclave » de la vitesse azimutale. Estimant de la même façon les forces azimutales

$$F_{visc,\theta} \sim -\frac{\nu_\theta}{(r_2 - r_1)^2} u_\theta, \quad F_{iner,\theta} \sim \frac{\Omega_1 r_1}{r_2 - r_1} u_r,$$

l'équation (4.39b) peut s'écrire

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} \sim \frac{\nu_\theta}{(r_2 - r_1)^2} \left(\frac{Ta}{Ta_c} - 1 \right) u_\theta, \quad (4.43)$$

où on a introduit le *nombre de Taylor* (définition provisoire compte tenu de la distinction $\nu_r \neq \nu_\theta$)

$$Ta = \frac{\Omega_1^2 r_1 (r_2 - r_1)^3}{\nu_r \nu_\theta},$$

et où Ta_c est un nombre d'ordre unité. L'équation (4.43) montre que pour $Ta < Ta_c$, la force d'inertie azimutale est dominée par la force visqueuse, et la perturbation régresse ; pour $Ta > Ta_c$, cette force d'inertie est suffisamment forte pour que l'écart de vitesse azimutale se maintienne ; la perturbation croît exponentiellement avec un taux de croissance

$$\sigma \sim \frac{\nu_\theta}{(r_2 - r_1)^2} \frac{Ta - Ta_c}{Ta_c}, \quad (4.44)$$

proportionnel à l'écart au seuil $Ta - Ta_c$ et dont l'échelle est $\nu_\theta / (r_2 - r_1)^2$.

De la même façon que la stabilité marginale du problème de Rayleigh-Taylor est définie par le seul nombre de Rayleigh, indépendamment du nombre de Prandtl, on peut considérer que les conclusions de l'analyse ci-dessus restent valides dans le seul cas physique $\nu_r = \nu_\theta$. Le nombre de Taylor gouvernant l'apparition de l'instabilité s'écrit alors

$$Ta = \frac{\Omega_1^2 r_1 (r_2 - r_1)^3}{\nu^2} = Re_1^2 R. \quad (4.45)$$

Les résultats du calcul de stabilité complet, incluant en plus des équations (4.39) la conservation de la quantité de mouvement axiale, la condition d'incompressibilité et les conditions d'adhérence sur les cylindres, confortent cette analyse ; ils montrent en particulier que l'écoulement est bien stable lorsque le critère non visqueux de Rayleigh est satisfait (croissance de $r\bar{U}_\theta(r)$), et que le nombre de Taylor critique vaut $Ta_c = 1696$. Pour Ω_2 non nul, un nombre de Taylor T un peu différent de (4.45) se présente,

$$T = \frac{4(-A)\Omega_1(r_2 - r_1)^4}{\nu^2} = 4Ta \frac{1 - \Omega_2/\Omega_1(r_2/r_1)^2}{r_2/r_1 + 1}, \quad (4.46)$$

qui se réduit à $2Ta$ pour $\Omega_2 = 0$ et $r_2 - r_1 \ll r_1$. Dans la limite de vitesses de rotation presqu'égales et toujours avec $r_2 - r_1 \ll r_1$, le problème de Couette-Taylor se réduit exactement à celui de Rayleigh-Bénard, et conduit à des valeurs critiques identiques du paramètre de contrôle et du nombre d'onde : $T_c = 1708$ et $k_c(r_2 - r_1) = 3,12$.

4.5 Exercices

4.5.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz avec gravité et capillarité

On considère deux couches fluides superposées de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 séparées par une interface plane de tension interfaciale γ , dans le champ de gravité \mathbf{g} . Ces couches sont animées de vitesses uniformes $-U$ et U .

- Montrer que la relation de dispersion (4.23) devient

$$\rho_1(U + c)^2 + \rho_2(U - c)^2 - ((\rho_1 - \rho_2)g/k + \gamma k) = 0. \quad (4.47)$$

- En choisissant comme échelles la longueur capillaire $l_c = \sqrt{\gamma/g(\rho_1 - \rho_2)}$ et la vitesse V_c telle que $V_c^2 = \frac{1}{2}gl_c(\rho_1/\rho_2 - \rho_2/\rho_1)$, en déduire que la condition d'instabilité s'écrit

$$\frac{U^2}{V_c^2} > \frac{1}{kl_c} + kl_c. \quad (4.48)$$

- Tracer la courbe de stabilité marginale dans le plan $(kl_c, (U/V_c)^2)$, ainsi que les courbes de stabilité marginale dans les limites $g = 0$ et $\gamma = 0$, et déterminer le point critique.
- Montrer qu'il existe un nombre d'onde k dont la célérité est égale à celle de son harmonique $2k$, et que ces deux nombres d'onde deviennent instables pour la même vitesse U .

4.5.2 Effet de parois sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Montrer que pour un écoulement entre deux parois situées en $y = -h_1$ et $y = h_2$, la relation de dispersion (4.47) devient (Milne-Thompson 1968)

$$\rho_1(U_1 - c)^2 \coth kh_1 + \rho_2(U_2 - c)^2 \coth kh_2 - ((\rho_1 - \rho_2)g/k + \gamma k) = 0. \quad (4.49)$$

4.5.3 Ondes internes dans un écoulement cisaillé stratifié en densité

On considère un écoulement cisaillé $U(y)$ d'un fluide non visqueux, avec un profil de masse volumique $\rho(y)$ stable ($\rho'(y) < 0$, y vertical ascendant). On montre que les petites perturbations bidimensionnelles sont gouvernées par une « équation de Rayleigh généralisée » :

$$\hat{v}'' + \frac{\rho'}{\rho} \hat{v}' + \left(\frac{N^2}{(c-U)^2} + \frac{U''}{c-U} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{U'}{c-U} - k^2 \right) \hat{v} = 0, \quad (4.50)$$

où \hat{v} est l'amplitude de la composante transversale $v = \hat{v}(y)e^{i(kx-\omega t)}$ de la perturbation de vitesse, $c = \omega/k$, et N est la fréquence de Brunt-Väisälä. Cette fréquence, définie par :

$$N^2 = -g \frac{\rho'}{\rho}, \quad (4.51)$$

représente la fréquence angulaire des oscillations verticales d'une particule fluide, écartée de sa position d'équilibre et rappelée par la force d'Archimède.

1. Montrer que

- dans le cas d'une densité uniforme, l'équation (4.50) se ramène à l'équation de Rayleigh (4.15) ;
- lorsque le gradient de densité est petit devant le gradient des vitesses, l'équation ci-dessus se réduit à l'équation suivante, dite de Taylor-Goldstein

$$\hat{v}'' + \left(\frac{N^2}{(c-U)^2} + \frac{U''}{c-U} - k^2 \right) \hat{v} = 0. \quad (4.52)$$

2. L'écoulement est borné par deux plans rigides en $y = \pm L$, et la perturbation de vitesse doit donc vérifier $\hat{v}(\pm L) = 0$. Effectuer le changement de fonction $\hat{v} = (U-c)^n q$, où n est un paramètre libre, et réécrire l'équation (4.52) avec la fonction q . Appliquer la méthode de démonstration du théorème de Rayleigh pour montrer que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (U-c)^{2n} (|q'|^2 + k^2 |q|^2) dy = \\ \int_{-L}^L ((N^2 + n(n-1)U'^2)(U-c)^{2n-2} + (n-1)U''(U-c)^{2n-1}) |q|^2 dy. \end{aligned} \quad (4.53)$$

3. Poser $c = c_r + c_i$ et montrer, par un choix approprié de n , que l'écoulement est stable si

$$U'^2 < 4N^2 \quad (4.54)$$

dans l'intervalle $-L \leq y \leq L$. Commenter ce résultat compte tenu des hypothèses.

4. Par un autre choix de n , montrer que si l'écoulement est instable, la célérité c de tout mode instable est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de U dans l'intervalle $-L \leq y \leq L$. Solution : Acheson (1990).
5. Dans le cas d'un fluide immobile ($U(y) = 0$) et de perturbations de longueur d'onde petite devant l'échelle $(\rho'/\rho)^{-1}$ des variations de densité, montrer que l'on obtient explicitement la relation de dispersion des ondes internes

$$\omega^2 = N^2 \frac{k^2}{k^2 + l^2}, \quad (4.55)$$

où l est la composante transversale du vecteur d'onde $\mathbf{k} = (k, l)$ (Acheson 1990, §3.8 ; Tritton 1988, §15).

4.5.4 Instabilité de l'écoulement non visqueux de Couette-Taylor

On établit le critère d'instabilité de Rayleigh d'un écoulement azimuthal non visqueux entre deux cylindres de rayons r_1 et r_2 , et d'axe z . Les équations d'Euler et d'incompressibilité en coordonnées cylindriques (r, θ, z) s'écrivent

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) U_r - \frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (4.56a)$$

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) U_\theta + \frac{U_\theta U_r}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad (4.56b)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) U_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (4.56c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (4.56d)$$

avec $\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} = U_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial}{\partial z}$.

1. Établir le système d'équations linéarisées des petites perturbations de l'écoulement de base $\mathbf{U} = U_\theta(r) \mathbf{e}_\theta$, où \mathbf{e}_θ est un vecteur unitaire azimuthal.
2. On considère des perturbations de la forme $u_r = \hat{u}_r(r) e^{ikz+st}$. Commenter la nature de ces perturbations, et par élimination, montrer que la stabilité est gouvernée par l'équation

$$(r \hat{u}'_r)' - \left(\frac{k^2}{s^2 r^3} (r^2 U_\theta^2)' + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) r \hat{u}_r = 0. \quad (4.57)$$

3. En suivant la procédure de démonstration du théorème du point d'infexion de Rayleigh (multiplication de l'équation ci-dessus par \hat{u}_r^* , complexe conjugué de \hat{u}_r , et intégration par parties entre r_1 et r_2), montrer que l'écoulement est
 - stable si $(r^2 U_\theta^2)' > 0$ dans l'intervalle $r_1 \leq r \leq r_2$,
 - instable si $(r^2 U_\theta^2)' < 0$ dans l'intervalle $r_1 \leq r \leq r_2$.

(On peut montrer mieux : l'écoulement est instable s'il existe une partie de l'intervalle $r_1 \leq r \leq r_2$ dans laquelle $(r^2 U_\theta^2)'$ est négatif (Drazin & Reid 2004, §15).)

4.5.5 Instabilité d'un film visqueux

On considère un film liquide visqueux déposé sur une paroi plane ($U_1 = 0$, effets inertIELS négligeables), surmonté par l'écoulement inertiel d'un autre fluide de vitesse uniforme U_2 (effets visqueux négligeables), comme schématisé sur la figure 4.16. Pour une discussion de la pertinence de cette situation, voir Benjamin (1959). On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- le taux de croissance et la célérité des perturbations sont suffisamment faibles pour que l'écoulement perturbé puisse être considéré comme stationnaire (condition aux limites quasi statique). Le temps n'intervient que dans la condition d'imperméabilité de l'interface $\eta(x, t)$ (condition cinématique), qui

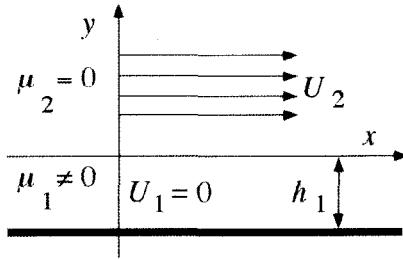


FIG. 4.16 – Film visqueux cisaillé par un écoulement non visqueux.

permet de déterminer le taux de croissance. Un mode normal s'écrit donc par exemple $u_1 = \hat{u}_1 e^{ikx} + c.c.$, sauf pour l'interface pour lequel il s'écrit $\eta = \hat{\eta} e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$;

- les perturbations dans le fluide non visqueux sont irrotationnelles ;
- les perturbations dans le film sont régies par les équations de la lubrification

$$0 = -\partial_x p_1 + \mu_1 \partial_{yy} u_1, \quad 0 = -\partial_y p_1; \quad (4.58)$$

la tension interfaciale et la gravité sont négligés, sauf dans la dernière question.

1. Déterminer la perturbation ϕ_2 du potentiel des vitesses et la perturbation p_2 de la pression dans le fluide supérieur, à une constante multiplicative A près.
2. Déterminer l'écoulement u_1 dans le film en fonction de p_1 (on remarquera que la contrainte tangentielle $\mu_1 \partial_y u_1$ doit s'annuler à l'interface, et on linéarisera cette condition en $y = 0$). Déterminer ensuite, à partir de la condition d'incompressibilité, la vitesse v_1 dans le film, toujours en fonction de p_1 .
3. Écrire les conditions linéarisées de raccordement à l'interface des vitesses normales et des contraintes normales (on montrera que ces contraintes normales se réduisent aux pressions). En déduire le champ des vitesses et des pressions (à une constante près car on résout un problème linéaire).
4. Écrire la condition cinématique à l'interface (cette équation est la seule qui fasse intervenir le temps). En déduire la relation de dispersion

$$\omega\tau = \frac{1}{9}\alpha^3(\alpha^2 R + 3i), \quad (4.59)$$

où $\alpha = kh_1$, $R = \rho_2 U_2 h_1 / \mu_1$, et où $\tau = \mu_1 / \rho_1 U_2^2$ apparaît comme le temps caractéristique de l'instabilité. Tracer l'allure de la célérité et du taux de croissance en fonction de α . Commenter.

5. Inclure dans l'analyse l'effet de la gravité g et de la tension interfaciale γ (le champ de pression de base correspondant est $\bar{P}_1 = P_0 - \rho_1 gy$, $\bar{P}_2 = P_0 - \rho_2 gy$, où P_0 est la pression à l'interface). On pourra s'inspirer de l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Tracer l'allure de la célérité et du taux de croissance en fonction de α . Commenter.

Chapitre 5

Instabilité visqueuse des écoulements parallèles

5.1 Introduction

Le mécanisme d'instabilité non visqueux mis en évidence au chapitre précédent est lié à la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse. C'est ce mécanisme qui est à l'œuvre dans les écoulements parallèles ou quasi parallèles cisaillés à grand nombre de Reynolds et loin de parois, comme par exemples les couches de mélange, les jets et les sillages. L'ordre de grandeur du taux de croissance est U/δ , où δ est l'épaisseur de la couche de vorticité et U la différence de vitesse de part et d'autre de cette couche. La viscosité n'y joue qu'un rôle diffusif qui atténue le taux de croissance. La proximité d'une paroi dans un écoulement cisaillé modifie profondément les choses. L'observation montre en effet que l'écoulement de Poiseuille est instable au-delà d'un certain nombre de Reynolds ; de même, une couche limite sur une plaque devient instable à partir d'une certaine distance du bord d'attaque. Or, ces deux écoulements ne présentent pas de point d'inflexion, et sont donc stables selon le théorème de Rayleigh. L'investigation des effets de la viscosité est donc nécessaire pour tenter de rendre compte des instabilités observées. Il apparaîtra dans ce chapitre que la viscosité a deux effets : un effet dissipatif stabilisant, comme attendu, mais aussi un effet déstabilisant, lié à un couplage entre l'inertie et la condition d'adhérence à la paroi ; le mécanisme physique de cet effet déstabilisant échappe malheureusement à une explication simple. Le taux de croissance est en général beaucoup plus faible que celui d'une instabilité non visqueuse.

Après une brève présentation de deux situations typiques d'instabilité visqueuse, ce chapitre se poursuit par la démonstration de quelques résultats généraux (§5.2), puis revient plus en détail sur les deux situations typiques : celle de l'écoulement de Poiseuille (§5.3) et celle de la couche limite sur une paroi plane (§5.4).

5.1.1 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube

La célèbre expérience d'Osborne Reynolds (1883) sur l'instabilité de l'écoulement laminaire en tube, représentée sur la figure 5.1, peut être considérée comme l'expérience « fondatrice » de l'étude des instabilités hydrodynamiques. L'installation est essentiellement constituée d'un tube de verre immergé dans un bassin, dont l'une des extrémités (à gauche sur la figure) est ouverte sur le bassin, l'autre extrémité étant initialement fermée par une vanne (en bas à droite). L'ouverture de cette vanne commande la vidange du bassin à travers le tube. On notera l'embouchure en trompette du tube, destinée à accélérer progressivement le fluide sans décollement de la paroi. Un colorant peut être injecté à l'entrée du tube, au voisinage de son axe, à partir d'un réservoir (en haut à gauche) afin de visualiser la structure de l'écoulement.

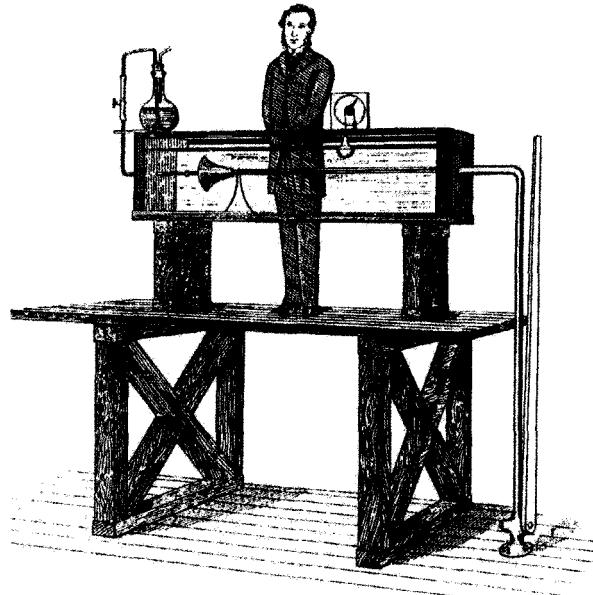


FIG. 5.1 – Osborne Reynolds en 1883 derrière son expérience à Manchester.

Les observations de Reynolds sont illustrées sur la figure 5.2. Cette figure montre l'évolution du filet coloré injecté à l'entrée, pour trois vitesses croissant de haut en bas. Sur la première photographie, le filet coloré reste rectiligne sans diffusion appréciable : l'écoulement est laminaire, et reste laminaire s'il est soumis à de petites perturbations. Sur la seconde photographie, le filet coloré ondule, témoignant de la présence de tourbillons : l'écoulement laminaire est devenu instable ; le filet demeure néanmoins bien net. Sur la dernière photographie, l'agitation tourbillonnaire mélange le fluide et détruit le filet coloré, le colorant envahit le tube : l'écoulement est turbulent. Reynolds a reproduit



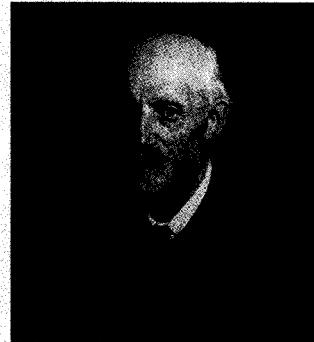
FIG. 5.2 – Expérience de Reynolds répétée un siècle plus tard avec l'installation originale conservée à l'Université de Manchester. Vitesses croissantes de haut en bas. Cliché Johannesen & Lowe (Van Dyke 1982).

cette séquence de nombreuses fois, en faisant varier la vitesse moyenne U de l'écoulement, le diamètre d du tube et la viscosité ν du fluide. De l'analyse de ces résultats, Reynolds a compris que l'instabilité survient pour une valeur critique d'un rapport d'échelles sans dimension, le nombre Ud/ν .

Par cette analyse, Reynolds introduisait en hydrodynamique le premier « nombre sans dimension », devenu le fameux *nombre de Reynolds*, et ouvrait ainsi la voie à l'analyse des phénomènes en termes d'échelles caractéristiques. Il avait toutefois bien compris que, sous la simplicité apparente du critère d'instabilité, se cachent de nombreuses et profondes questions, dont certaines ne sont toujours pas vraiment résolues (Kerswell 2005). Tout d'abord, cette instabilité échappe à une interprétation physique simple, contrairement, par exemple, à l'instabilité centrifuge de Couette-Taylor ou à l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ; une analyse de stabilité linéaire révèle même que l'écoulement en tube devrait être stable pour tout nombre de Reynolds, aussi grand soit-il ! Ensuite, l'expérience, plusieurs fois reprise depuis, révèle que la valeur critique n'est pas « universelle », mais dépend de l'intensité et de la nature des fluctuations de vitesse présentes à l'amont de l'écoulement, ou induites par la rugosité du tube, ou par les vibrations de l'installation : sans prendre de précaution particulière, la valeur critique est voisine de 2 000 ; Reynolds rapporte pour certaines de ses expériences la valeur 13 000, qui correspond à des fluctuations résiduelles extrêmement faibles ; des valeurs plus élevées encore ont été obtenues depuis. Enfin, cette instabilité est la première étape de la transition à la turbulence, problème toujours mal compris aujourd'hui encore.

Osborne Reynolds (1842–1912)

Né à Belfast, Irlande. Père prêtre anglican, directeur d'école et passionné de mécanique. Après ses études secondaires, Osborne Reynolds est engagé dans une entreprise de mécanique en 1861. Puis étudie les mathématiques à l'Université de Cambridge, avec Rayleigh. En 1867, travaille à nouveau dans l'industrie, comme ingénieur en génie civil. En 1868, est nommé professeur à *Owens College* (qui deviendra l'Université de Manchester), sur une toute nouvelle chaire de Sciences pour l'ingénieur (*engineering*), la seconde en Angleterre. Occupera ce poste jusqu'à sa retraite en 1905. Premiers travaux sur le magnétisme et l'électricité, du Soleil et des comètes en particulier ; après 1873, se concentre sur l'hydraulique et l'hydrodynamique. Nommé *Fellow of the Royal Society* en 1877. Inaugure un cours de Mathématiques appliquées de haut niveau destiné à des ingénieurs. Son article de 1883, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels*, introduit le fameux nombre sans dimension appelé depuis « nombre de Reynolds », et fonde la théorie de la stabilité hydrodynamique. Formule la théorie de la lubrification en 1886. Sa santé physique et mentale décline à partir de 1900.



5.1.2 Instabilité d'une couche limite

Une configuration voisine de l'écoulement en tube ou entre deux parois est celle de l'écoulement au voisinage d'une seule paroi, situation typiquement rencontrée dans les écoulements ouverts, sur les véhicules de transport par exemple. Considérons la situation la plus simple d'une paroi plane placée avec une incidence nulle dans un écoulement de vitesse uniforme U_∞ (figure 5.3). À partir du bord d'attaque, une couche limite se développe, résultat d'une compétition entre la diffusion verticale de la vorticité produite à la paroi, et l'advection de cette vorticité par l'écoulement. En conséquence, l'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite croît comme la racine carrée de la distance au bord d'attaque (Guyon, Hulin & Petit 2001, chap. 9). À partir d'une certaine distance, cette couche limite devient instable : elle se met à osciller, et l'amplitude des oscillations augmente vers l'aval (figure 5.4). Après Prandtl (1921) qui le premier développa l'idée d'un mécanisme d'instabilité visqueux, ces oscillations ont été prédictes par Tollmien (1929) et Schlichting (1933), et sont appelées depuis *ondes de Tollmien-Schlichting* ; la première mise en évidence expérimentale est due à Schubauer & Skramstadt (1947). Plus loin vers

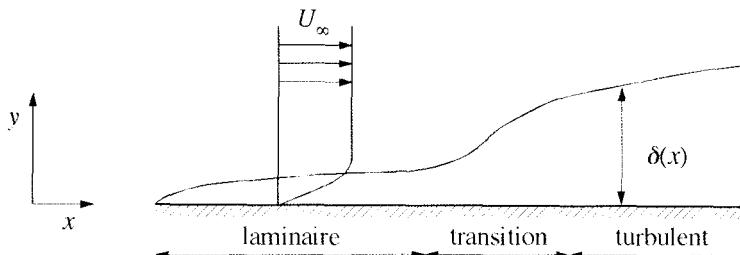


FIG. 5.3 – Développement d'une couche limite sur une paroi plane d'incidence nulle.

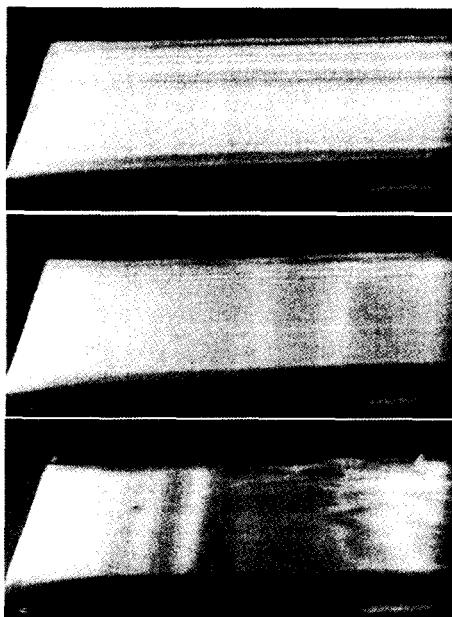


FIG. 5.4 – Visualisation des lignes de courant sur une couche limite. De haut en bas, pour trois vitesses croissantes : (a) l'instabilité n'est pas visible, elle se développe en aval du champ de la photo ; (b) les ondes de Tollmien-Schlichting sont clairement visibles ; (c) les ondes se développent plus près du bord d'attaque, puis deviennent elles-mêmes instables, présentant des motifs caractéristiques en « pics-vallées » (Werlé 1980).

l'aval, la couche limite devient turbulente. Le frottement turbulent étant bien supérieur au frottement laminaire, la traînée est d'autant plus faible que l'instabilité se développe plus en aval du bord d'attaque. Compte tenu des enjeux industriels et écologiques de la réduction de traînée (en termes de réduction de la consommation d'énergie et de l'émission de gaz de combustion), on voit l'intérêt de bien comprendre cette instabilité, en vue de son contrôle.

Plus la vitesse de l'écoulement est élevée, plus l'instabilité se manifeste près du bord d'attaque. Le paramètre qui contrôle l'apparition de l'instabilité est le nombre de Reynolds Re_δ construit avec l'épaisseur $\delta(x)$ de la couche limite comme échelle de longueur

$$Re_\delta(x) = \frac{U_\infty \delta(x)}{\nu}$$

Choisissons plus précisément pour $\delta(x)$ l'épaisseur de déplacement des lignes de courant de l'écoulement potentiel extérieur à la couche limite, soit $\delta = 1,73\sqrt{\nu x / U_\infty}$ pour la couche limite de Blasius, l'instabilité survient pour $Re_{\delta,c} = 520$ (soit $Re_x = U_\infty x / \nu \approx 90\,000$). Comme pour l'écoulement de Poiseuille, le mécanisme physique de cette instabilité ne se laisse pas appréhender par une analyse dimensionnelle simple.

5.2 Résultats généraux

Cette section est consacrée à la mise en évidence de quelques résultats généraux concernant la stabilité des écoulements parallèles visqueux présentés précédemment.

5.2.1 Équations linéarisées des perturbations

Choisissons comme unités de longueur et de vitesse deux échelles caractéristiques L et V , et comme unité de pression ρV^2 , et définissant le nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$, les équations d'incompressibilité et de Navier-Stokes s'écrivent

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{U} = -\mathbf{grad} P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}. \quad (5.2)$$

Soit $\bar{U}(y)\mathbf{e}_x$, \bar{P} , une solution parallèle stationnaire de ces équations, définissant l'écoulement de base. Par exemple, pour l'écoulement de Poiseuille plan, l'écoulement de base est $\bar{U}(y) = 1 - y^2$ en prenant comme échelle de longueur la demi-distance des parois et comme échelle de vitesse la vitesse maximale ; pour la couche limite sur une plaque plane, l'écoulement de base $\bar{U}(y)$ est typiquement la solution de Blasius des équations de la couche limite (dans ce cas, il s'agit seulement d'une solution approchée des équations de Navier-Stokes, ce point sera discuté plus loin).

Considérons l'écoulement perturbé $\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$, $\bar{P} + p$, et linéarisons les équations des perturbations. Il vient

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.3)$$

$$(\partial_t + \bar{U}\partial_x) \mathbf{u} + v\partial_y \bar{U} \mathbf{e}_x = -\mathbf{grad} p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \quad (5.4)$$

Ces équations étant invariantes par translation suivant x , z et t (mais pas suivant y), elles admettent comme solution les modes normaux en $e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}$ de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z$ et de pulsation ω , comme au chapitre précédent. Ces équations se réduisent alors à un système d'équations différentielles homogènes vérifié par les amplitudes $\hat{\mathbf{u}}(y)$ et $\hat{p}(y)$:

$$ik_x \hat{u} + \partial_y \hat{v} + ik_z \hat{w} = 0, \quad (5.5a)$$

$$ik_x(\bar{U} - c)\hat{u} + \partial_y \bar{U}\hat{v} = -ik_x \hat{p} + \frac{1}{Re}(\partial_{yy} - k_x^2 - k_z^2)\hat{u}, \quad (5.5b)$$

$$ik_x(\bar{U} - c)\hat{v} = -\partial_y \hat{p} + \frac{1}{Re}(\partial_{yy} - k_x^2 - k_z^2)\hat{v}, \quad (5.5c)$$

$$ik_x(\bar{U} - c)\hat{w} = -ik_z \hat{p} + \frac{1}{Re}(\partial_{yy} - k_x^2 - k_z^2)\hat{w}, \quad (5.5d)$$

où $c = \omega/k_x$ est la vitesse de phase de la perturbation dans la direction x . Associé aux conditions de décroissance des perturbations pour $y \rightarrow \pm\infty$, ou d'adhérence aux parois situées en $y = y_1$ et $y = y_2$, le système (5.5) constitue un problème aux valeurs propres généralisé qui n'admet de solution non nulle que si la pulsation ω et le vecteur d'onde \mathbf{k} vérifient la relation de dispersion

$$D(\mathbf{k}, \omega, Re) = 0. \quad (5.6)$$

5.2.2 Théorème de Squire

Comme pour les écoulements non visqueux au chapitre précédent, un changement de variable et un théorème dû à Squire (1933) permettent de réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel équivalent. La transformation de Squire consiste à introduire le changement de variable défini au chapitre précédent :

$$\tilde{k}^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad (5.7a)$$

$$\tilde{\omega} = (\tilde{k}/k_x) \omega, \quad (5.7b)$$

$$\tilde{k}\tilde{u} = k_x \hat{u} + k_z \hat{w}, \quad (5.7c)$$

$$\tilde{v} = \hat{v}, \quad (5.7d)$$

$$\tilde{p} = (\tilde{k}/k_x) \hat{p}, \quad (5.7e)$$

ainsi que

$$\tilde{k}\tilde{R}e = k_x Re. \quad (5.8)$$

Le système de quatre équations (5.5) se ramène alors au système de trois équations suivantes, avec $\tilde{c} = \tilde{\omega}/\tilde{k} = \omega/k_x = c$,

$$i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y \tilde{v} = 0, \quad (5.9a)$$

$$i\tilde{k}(\bar{U} - \tilde{c})\tilde{u} + \partial_y \bar{U}\tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p} + \frac{1}{Re}(\partial_{yy} - \tilde{k}^2)\tilde{u}, \quad (5.9b)$$

$$i\tilde{k}(\bar{U} - \tilde{c})\tilde{v} = -\partial_y \tilde{p} + \frac{1}{Re}(\partial_{yy} - \tilde{k}^2)\tilde{v}. \quad (5.9c)$$

À ce système doivent être associées des conditions aux limites, conditions de décroissance à l'infini $\tilde{u}, \tilde{v} \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow \pm\infty$, ou conditions d'adhérence sur une paroi solide $\tilde{u}(y_1) = \tilde{v}(y_1) = 0$, $\tilde{u}(y_2) = \tilde{v}(y_2) = 0$. Ce système de perturbations bidimensionnelles n'admet de solution non nulle que si la relation de dispersion suivante est satisfaite :

$$\tilde{D}(\tilde{k}, \tilde{\omega}, \tilde{Re}) = 0. \quad (5.10)$$

Si cette relation est connue, la relation de dispersion tridimensionnelle peut être obtenue sans calcul supplémentaire à partir de la transformation de Squire :

$$D(\mathbf{k}, \omega; Re) = \tilde{D}\left(\sqrt{k_x^2 + k_z^2}, \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_x} \omega; \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} Re\right) = 0. \quad (5.11)$$

De cette relation on déduit le théorème de Squire.

Théorème. À tout mode oblique (\mathbf{k}, ω) instable de taux de croissance temporel ω_i pour le nombre de Reynolds Re , peut être associé un mode bidimensionnel $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ de taux de croissance temporel $\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{k_x^2 + k_z^2}/k_x$ supérieur à ω_i , donc plus instable, pour le nombre de Reynolds $\tilde{Re} = Re k_x / \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ inférieur à Re .

Corollaire. S'il existe un nombre de Reynolds Re_c au-dessus duquel un écoulement est instable, alors le mode normal qui déstabilise l'écoulement pour $Re = Re_c$ est bidimensionnel. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un mode bidimensionnel instable pour $Re < Re_c$, ce qui est en contradiction avec la définition de Re_c .

Si le problème est de déterminer une condition d'instabilité, ce théorème nous autorise donc à ne considérer que les perturbations bidimensionnelles. Par contre, pour un nombre de Reynolds supercritique ($Re > Re_c$), la perturbation la plus instable peut être oblique. Ceci est illustré sur la figure 5.5, qui montre le taux de croissance d'une perturbation de la couche limite de Blasius en fonction de l'angle entre le vecteur d'onde \mathbf{k} de la perturbation et la direction de l'écoulement de base. Pour le nombre de Reynolds $Re_\delta = 1\,500$ supérieur au nombre critique $Re_{\delta,c} = 520$, il apparaît que la perturbation la plus instable n'est pas bidimensionnelle (angle nul), mais correspond à un angle voisin de 50° .

Le théorème de Squire a été démontré ci-dessus pour des parois rigides. Il a été généralisé au cas de deux ou plusieurs couches fluides séparées par une interface déformable, où doivent être satisfaites des conditions de continuité des vitesses et des contraintes (Hesla, Pranckh & Preziosi 1986).

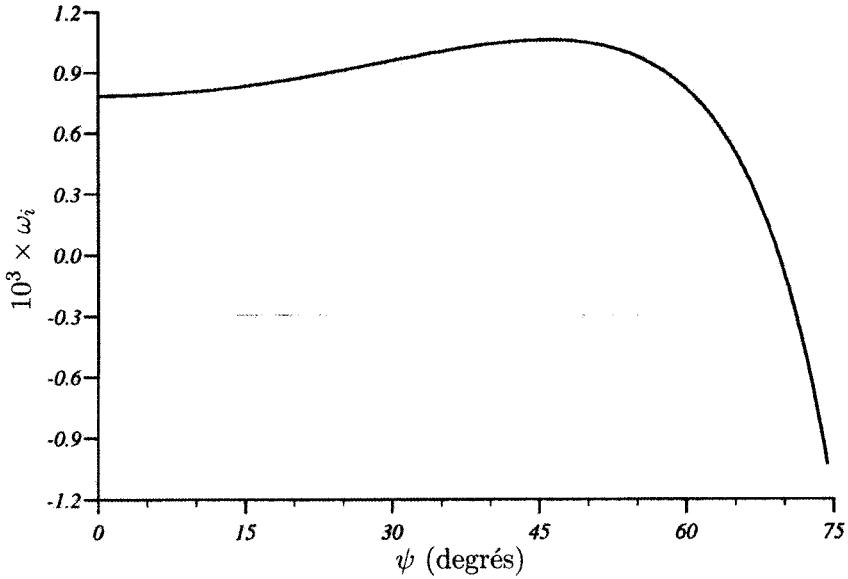


FIG. 5.5 – Taux de croissance temporel (s^{-1}) de l'instabilité d'une couche limite, en fonction de l'angle ψ de la perturbation avec la direction de l'écoulement de base. $Re_{\delta i} = 1\ 500$, $\omega\nu/U_\infty^2 = 0,3 \times 10^{-4}$ (calcul G. Casalis, ONERA).

5.2.3 Équation d'Orr-Sommerfeld

Compte tenu du théorème de Squire, nous considérons désormais des perturbations bidimensionnelles, et introduisons donc la fonction de courant ψ de la perturbation de vitesse, définie par $u = \partial_y \psi$ et $v = -\partial_x \psi$. Éliminant la pression par différentiation croisée des équations (5.4) (ce qui revient à considérer l'équation de transport de la perturbation de vorticité $\omega = -\Delta \psi \mathbf{e}_z$), il vient

$$(\partial_t + \bar{U} \partial_x) \Delta \psi - \partial_{yy} \bar{U} \partial_x \psi = \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi. \quad (5.12)$$

Recherchant la solution sous la forme de modes normaux

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \hat{\psi}(y) e^{i(kx - \omega t)} + c.c.,$$

de nombre d'onde k , de pulsation ω et de célérité $c = \omega/k$, il vient l'équation d'Orr-Sommerfeld (Orr 1907; Sommerfeld 1908)

$$(\bar{U} - c)(\partial_{yy} - k^2)\hat{\psi} - \partial_{yy} \bar{U} \hat{\psi} = \frac{1}{ikRe} (\partial_{yy} - k^2)^2 \hat{\psi}. \quad (5.13)$$

Cette équation ne diffère de l'équation de Rayleigh (*cf.* chapitre 4) que par le membre de droite issu des contraintes de viscosité, qui élève l'ordre de

l'équation de deux à quatre (le nombre de conditions aux limites augmentant de même).

Les conditions aux limites associées sont l'adhérence aux parois en $y = y_1$ et $y = y_2$,

$$\partial_y \hat{\psi}(y_1) = \hat{\psi}(y_1) = 0, \quad (5.14a)$$

$$\partial_y \hat{\psi}(y_2) = \hat{\psi}(y_2) = 0, \quad (5.14b)$$

ou, dans le cas d'une couche limite sur une paroi en $y = 0$, des conditions d'adhérence à la paroi et de décroissance au loin,

$$\partial_y \hat{\psi} = \hat{\psi} = 0 \quad \text{en } y = 0, \quad (5.15a)$$

$$\partial_y \hat{\psi}, \hat{\psi} \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow \infty, \quad (5.15b)$$

ou encore des conditions de continuité des vitesses et des contraintes sur une interface déformable (auquel cas la célérité intervient aussi dans les conditions aux limites, *cf.* chapitre 6).

Écrivant l'équation d'Orr-Sommerfeld sous la forme

$$L_A \hat{\psi} = c L_B \hat{\psi},$$

où les opérateurs différentiels L_A et L_B sont définis par

$$L_A = (\partial_{yy} - k^2)^2 - ikRe(\bar{U}(\partial_{yy} - k^2) - \partial_{yy}\bar{U}),$$

$$L_B = -ikRe(\partial_{yy} - k^2),$$

le problème se présente comme un problème aux valeurs propres généralisé, qui n'admet de solution non triviale que si la célérité c satisfait une relation de dispersion.

Dans le cadre d'une étude de stabilité temporelle, le problème est résolu en imposant k réel, la célérité complexe étant alors calculée ; dans le cadre d'une étude de stabilité spatiale, on impose une pulsation réelle $\omega = ck$, et on calcule le nombre d'onde. La célérité n'intervenant que de façon linéaire (sauf éventuellement dans les conditions aux limites sur une interface déformable) alors que le nombre d'onde intervient à la puissance quatre, l'étude temporelle est bien plus simple que l'étude spatiale, et c'est elle qui est mise en œuvre en général lorsqu'on recherche les conditions de stabilité marginale.

L'équation d'Orr-Sommerfeld (5.13) est une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, à coefficients non constants. On n'en connaît de solution exacte que dans quelques cas très particuliers, notamment lorsque $\partial_{yy}\bar{U} = 0$ (écoulement linéaire par morceaux), la solution s'exprimant alors sous la forme d'intégrales de fonctions d'Airy. Pour un nombre d'onde et un nombre de Reynolds finis, le coefficient du terme d'ordre le plus élevé, $(ikRe)^{-1}$, ne s'annuller pas, et le problème de dégénérescence de l'équation de Rayleigh posé par l'existence d'une couche critique ne se pose plus ici. Cependant, lorsque l'instabilité survient à grand nombre de Reynolds, ce qui est le cas de l'écoulement

de Poiseuille par exemple, la résolution demeure difficile : le terme visqueux au membre de droite est semble-t-il petit ; mais ce terme peut en réalité être du même ordre que les termes inertIELS dans des régions où la fonction propre ou ses dérivées présentent des gradients élevés. Ceci se produit en particulier au voisinage d'une paroi ou d'une couche critique, où l'épaisseur des régions affectées par la viscosité est d'ordre $(kh Re)^{-1/2}$ et $(kh Re)^{-1/3}$, respectivement. Des trésors d'imagination et d'ingéniosité mathématique ont été développés, en particulier par Heisenberg (1924), Tollmien (1929), Schlichting (1933) et Lin (1955), pour trouver des solutions approchées par des développements asymptotiques, ou au moins pour déterminer une courbe de stabilité marginale approchée dans le plan (k, Re) (voir Drazin & Reid 2004, chaps. 4 & 5). À petit nombre de Reynolds ou à petit nombre d'onde, les développements asymptotiques sont en général réguliers ; un exemple de résolution en est donné au chapitre 6 pour un film liquide s'écoulant sur un plan incliné.

L'équation d'Orr-Sommerfeld peut aujourd'hui être facilement résolue numériquement, même si les méthodes asymptotiques conservent un grand intérêt, notamment pour la compréhension plus profonde à laquelle elles permettent d'accéder. Les méthodes numériques les plus fréquemment utilisées sont la méthode des différences finies et les méthodes spectrales (Canuto *et al.* 1988 ; Schmid & Henningson 2001, Annexe A). La première consiste à intégrer spatialement l'équation en partant d'une frontière et à corriger le « tir » de façon itérative pour satisfaire les conditions aux limites sur l'autre frontière. Cette méthode est facile à mettre en œuvre, mais peu stable. La seconde méthode consiste à projeter l'amplitude $\hat{\psi}$ de la fonction propre sur une base de fonctions $\phi_k(y)$ appropriées :

$$\hat{\psi}(y) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(y), \quad (5.17)$$

et à rechercher les coefficients a_k répondant au problème. Les fonctions $\phi_k(y)$ étant choisies telles que leurs dérivées s'expriment comme des combinaisons linéaires des fonctions elles-mêmes (comme les fonctions trigonométriques), l'équation d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites peuvent alors être transformées en un problème algébrique linéaire (matriciel). Les polynômes de Chebyshev $T_k(y)$ forment une base très appropriée¹, car les points de collocation sont rapprochés au voisinage des parois ou des interfaces, où les gradients des fonctions propres sont en général élevés (Orszag 1971). Les méthodes pseudo-spectrales, dont il existe plusieurs variantes, ont l'avantage d'être très précises et de donner tout le spectre des valeurs propres (à la discrétisation près), ainsi que les fonctions propres associées.

1. Les polynômes de Chebyshev, définis par $T_n(y) = \cos(n \cos^{-1}(y))$, forment une base sur l'intervalle $[-1, 1]$, intervalle sur lequel peut être ramené un domaine d'intégration plus général $[y_1, y_2]$ ou $[0, \infty]$ par un changement de variable. Ces polynômes sont liés par la relation de récurrence $T_0 = 1, T_1 = y, T_{n+1} = 2yT_n - T_{n-1}$. D'autres relations de récurrence permettent d'exprimer la dérivée d'un polynôme en fonction d'autres polynômes, ce qui permet de ramener un système différentiel à un système algébrique.

5.2.4 Mécanisme de l'instabilité visqueuse

Comme annoncé dans l'introduction, le mécanisme de l'instabilité d'un écoulement cisailé au voisinage d'une paroi, ou d'une interface déformable, ne peut pas être décrit simplement. Ce mécanisme peut toutefois être éclairé en considérant l'équation d'évolution de l'énergie cinétique de la perturbation, $e_c = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$ par unité de masse. Multipliant scalairement l'équation de Navier-Stokes par la perturbation de vitesse, et après quelques manipulations prenant en compte $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, on obtient

$$(\partial_t + \bar{U}\partial_x)e_c + \operatorname{div}((p + e_c)\mathbf{u}) = -\partial_y\bar{U}(\bar{U} + u)v + \frac{1}{Re}(\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (5.18)$$

où $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}(\mathbf{u})$ est la perturbation de vorticité. Considérons une perturbation spatialement périodique, de longueur d'onde $2\pi/k_x$ et $2\pi/k_z$ suivant les directions x et z . Définissant alors la moyenne spatiale d'une grandeur $q(x, y, z, t)$ par

$$\langle q \rangle(y, t) = \frac{k_x}{2\pi} \frac{k_z}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_x} \int_0^{2\pi/k_z} q(x, y, z, t) dx dz, \quad (5.19)$$

et considérant $\langle \partial_x q \rangle = \langle \partial_z q \rangle = 0$ et $\langle v \rangle = 0$, l'équation (5.18) moyennée s'écrit

$$\partial_t \langle e_c \rangle + \partial_y (\langle pv \rangle + \langle e_c v \rangle) = \partial_y \bar{U} \tau_{xy} + \frac{1}{Re} \partial_y \langle \omega_x w - \omega_z u \rangle - \frac{1}{Re} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle, \quad (5.20)$$

où $\tau_{xy} = -\langle uv \rangle$ est une contrainte de Reynolds (Tritton 1988, §19.3). Intégrant cette équation entre deux parois y_1 et y_2 et prenant en compte les conditions d'adhérence, il vient finalement l'équation exacte (*i.e.* non linéarisée)

$$\frac{d}{dt} \int_{y_1}^{y_2} \langle e_c \rangle dy = \int_{y_1}^{y_2} \partial_y \bar{U} \tau_{xy} dy - \frac{1}{Re} \int_{y_1}^{y_2} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle dy. \quad (5.21)$$

Cette équation est une version particulière de l'équation de Reynolds-Orr (Lin 1955 ; Drazin & Reid 2004, §53). Le membre de gauche représente le taux de croissance de l'énergie cinétique moyenne de la perturbation : s'il est négatif, alors l'écoulement de base est stable, sinon il est instable. Le deuxième terme du membre de droite correspond à la dissipation par la viscosité, il est toujours positif, et fait toujours décroître la perturbation. Donc seul le premier terme, appelé terme de « production » d'énergie cinétique, peut être à l'origine d'une croissance de la perturbation s'il peut dominer le terme dissipatif ; cette « production » correspond à de l'énergie pompée à l'écoulement de base.

On peut également obtenir une équation de l'énergie cinétique d'un mode propre à partir des équations linéarisées ; on obtient alors une équation *identique* à (5.21), car la contribution du terme advectif non linéaire est en fait nulle après l'intégration. Considérons donc l'équation (5.21) pour des modes propres de la forme

$$u = \frac{1}{2} \hat{u}(y) e^{i(kx - \omega t)} + c.c., \quad \hat{u}(y) = |\hat{u}(y)| e^{i\phi_u(y)}.$$

La contrainte de Reynolds intervenant dans le terme de production d'énergie cinétique s'écrit alors

$$\tau_{xy}(y) = -\frac{1}{2}|\hat{u}||\hat{v}|\cos(\phi_u - \phi_v)e^{2\omega_i t}. \quad (5.22)$$

On remarque que n'intervient dans cette expression que la différence des phases de u et v ; seule cette différence est physiquement pertinente, les phases elles-mêmes étant liées au choix arbitraire d'une origine (fixée par exemple par une condition de normalisation des fonctions propres).

Omettons provisoirement la dissipation visqueuse. Un profil de vitesse sans point d'inflexion étant stable d'après le théorème de Rayleigh, les modes propres sont nécessairement neutres (car si c est valeur propre, alors c^* est aussi valeur propre), et le taux de variation de l'énergie cinétique est nul. Par ailleurs, pour une perturbation neutre d'un écoulement non visqueux, les composantes u et v de la vitesse sont en quadrature de phase (§4.2.3), et la contrainte de Reynolds (5.22) est donc nulle. Le terme de production d'énergie cinétique est donc nul, et l'équation (5.21) est trivialement satisfaite.

Considérons maintenant l'effet de la viscosité. La figure 5.6 montre le profil de la contrainte de Reynolds $\tau_{xy}(y)$ du mode propre instable de l'écoulement de Poiseuille plan; cette contrainte étant antisymétrique ($\tau_{xy}(-y) = -\tau_{xy}(y)$), elle est représentée dans un demi-plan seulement. Elle est de même signe que le gradient $\partial_y \bar{U}$, et le terme de production d'énergie cinétique est donc bien positif. On peut voir que cette contrainte de Reynolds est nulle dans le plan de symétrie ($y/h = 0$), reste très faible jusqu'à $y/h \approx 0,8$, présente un pic marqué pour $y/h \approx 0,9$ et s'annule à la paroi. Sa valeur élevée au voisinage de la paroi correspond à une destruction de la quadrature de u et v , qu'on peut mettre en relation avec la condition d'adhérence (voir également plus loin les figures 5.8 et 5.10). On peut aussi remarquer que le maximum est situé au voisinage de la couche critique, où la célérité du mode propre est égale à la vitesse $\bar{U}(y_c)$ de l'écoulement.

Ainsi, à faible nombre de Reynolds, la production d'énergie cinétique est inférieure à la dissipation, et l'écoulement est stable; mais à grand nombre de Reynolds, la dissipation devient négligeable (mesurée avec les échelles caractéristiques de l'écoulement), et la production l'emporte: l'écoulement est instable. La diffusion visqueuse a donc deux effets: un effet stabilisant à travers le terme de dissipation, et un effet déstabilisant lié à la condition d'adhérence qui distord la quadrature entre u et v . Une telle situation peut aussi se produire au voisinage d'une interface déformable. La discussion ci-dessus n'explique pas vraiment l'instabilité, mais éclaire tout de même le rôle crucial joué par la paroi.

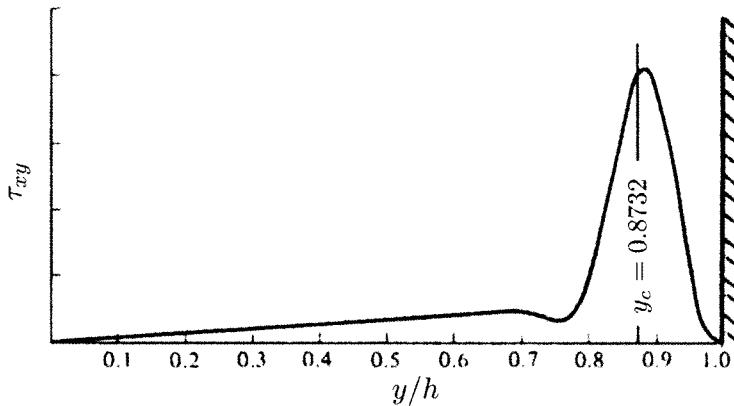


FIG. 5.6 – Distribution transversale de la contrainte de Reynolds τ_{xy} (5.22) pour l'écoulement de Poiseuille plan (l'échelle verticale, liée à une condition de normalisation, est arbitraire). $Re = 10^4$, $kh = 1$ où h est la demi-distance des parois, $c = 0,24 + 0,0037i$. D'après Stuart (1963).

5.3 Écoulement de Poiseuille plan

5.3.1 Stabilité marginale, modes propres

L'écoulement de Poiseuille entre deux plans est typique des écoulements instables au-delà d'un nombre de Reynolds critique, lorsque, pour de petites perturbations, la production d'énergie cinétique liée aux contraintes de Reynolds excède la dissipation visqueuse. Le paramètre de contrôle est le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{Uh}{\nu}, \quad (5.23)$$

où U est la vitesse au centre du canal, h sa demi-hauteur et ν la viscosité cinématique. La figure 5.7 montre la courbe de stabilité marginale obtenue à partir de la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld. L'écoulement devient instable pour $Re_c = 5\ 772$ vis-à-vis de la perturbation de nombre d'onde $k_c h = 1,02$. Juste au-dessus du seuil, la courbe est parabolique et la largeur de la bande de nombres instables croît comme $\sqrt{Re - Re_c}$. À grand nombre de Reynolds, la bande instable se déporte vers zéro (grandes longueurs d'onde) et sa largeur diminue. On montre que la branche inférieure est telle que $Re \sim (kh)^{-7}$, et que les deux régions affectées par la viscosité, au voisinage de la paroi et de la couche critique, sont disjointes. La branche supérieure est telle que $Re \sim (kh)^{-11}$ et ces deux régions se recouvrent (Drazin & Reid 2004). Le taux de croissance n'est jamais très élevé : il est maximum pour $Re = 48\ 000$, et ce maximum est tel que la perturbation s'amplifie d'un facteur 10 pendant

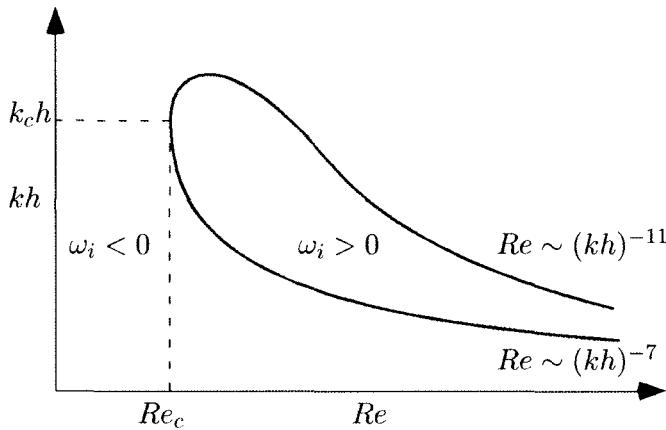


FIG. 5.7 – Allure de la courbe de stabilité marginale dans le plan $Re-kh$ pour l'écoulement de Poiseuille plan.

le temps $300 h/U$; pendant ce temps-là, une particule fluide au centre du canal a parcouru une distance égale à 150 hauteurs de canal.

Pour un nombre d'onde donné, il n'existe qu'un seul mode instable, correspondant à une vitesse longitudinale impaire, *i.e.* antisymétrique par rapport à l'axe $y = 0$ ($u(-y) = -u(y)$), et une vitesse transversale paire *i.e.* symétrique ($v(-y) = v(y)$). La figure 5.8 montre l'amplitude $\hat{\psi}(y)$ de la fonction de courant du mode instable pour $Re = 10^4$ (cette fonction propre, normalisée à l'unité au centre du canal, est paire comme v). On notera que la partie imaginaire est beaucoup plus faible que la partie réelle (voir la différence des échelles). La vitesse transversale $|\hat{v}| = |-ik\hat{\psi}|$ est donc maximale au centre du canal, tandis que la vitesse longitudinale $|\hat{u}| = |\partial_y \hat{\psi}|$ est nulle au centre et maximale au voisinage des parois. Le calcul numérique révèle l'existence, pour un même couple (kh, Re) , d'autres modes propres tous stables et de célérité positive, les valeurs propres, discrètes, se disposant le long de branches bien définies dans le plan (c_r, c_i) (Orszag 1971 ; Drazin & Reid 2004, §31.3 ; Schmid & Henningson 2001, §3). En particulier, les modes présentant la parité opposée à celle du mode instable sont très fortement amortis. Au-delà du nombre de Reynolds critique, l'instabilité reste convective sur une large gamme de nombres de Reynolds (Huerre & Rossi 1998, §8).

5.3.2 Étude expérimentale pour de petites perturbations

L'instabilité a été étudiée expérimentalement en détail par Nishioka, Iida & Ichikawa (1975). L'installation, décrite sur la figure 5.9, réalise un écoulement d'air dans un canal de section rectangulaire de hauteur $2h = 1,46$ cm,

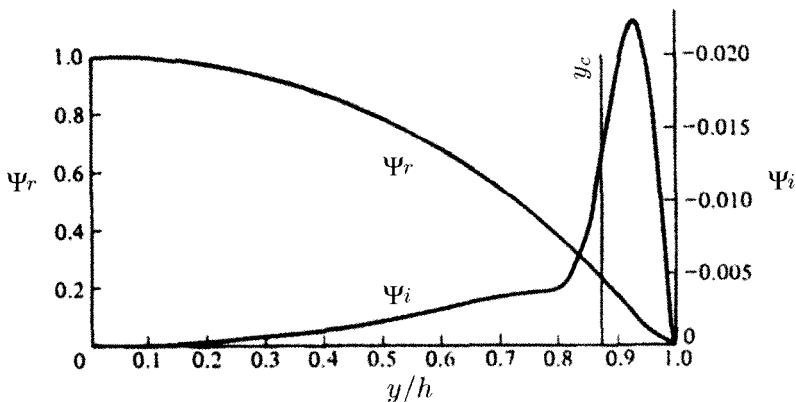


FIG. 5.8 – Fonction propre instable (normalisée à l'unité au centre du canal) de l'écoulement de Poiseuille plan, correspondant à la valeur propre $c = 0,23 + 0,0037i$ pour $Re = 10^4$, $kh = 1$. D'après un calcul numérique de Thomas (1953) repris dans Drazin & Reid (2004).

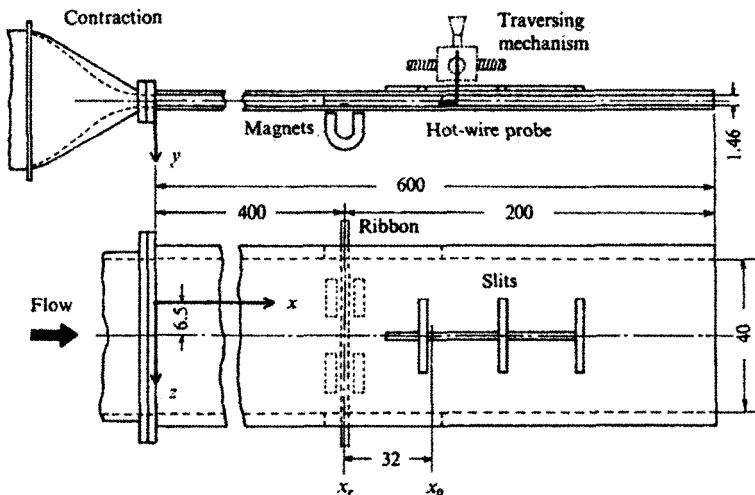


FIG. 5.9 – Installation expérimentale réalisant un écoulement de Poiseuille plan (Nishioka *et al.* 1975). Les dimensions sont en centimètres.

débouchant dans l'atmosphère. L'injection d'air, très soignée, permet d'atteindre un taux de turbulence résiduelle extrêmement faible, inférieur à 0,05 %; ce taux est si bas que sans excitation artificielle, l'instabilité n'est détectée qu'au-dessus de $Re \approx 8\,000$, valeur bien supérieure à la prédiction $Re_c = 5\,772$. Un rapport largeur/hauteur élevé, égal à 27,4, permet d'assurer un écoulement bidimensionnel dans la partie centrale du canal. Une

perturbation de fréquence f contrôlée est générée par la vibration d'un ruban métallique tendu transversalement dans le canal; cette vibration est excitée par un courant alternatif dans le ruban placé dans le champ magnétique d'un aimant. La perturbation générée par le ruban est advectée vers l'aval par l'écoulement, sous la forme d'une onde de Tollmien-Schlichting qui s'amortit ou s'amplifie selon le nombre de Reynolds. Les autres modes, naturellement présents dans le « bruit » résiduel, ont une amplitude trop faible pour pouvoir être détectés, même s'ils sont instables. Un fil chaud monté sur un chariot permet de mesurer l'amplitude de la perturbation en différents points du canal.

La figure 5.10 montre la variation de la phase et de l'amplitude de la perturbation de vitesse longitudinale u' pour différentes conditions. Ces variations correspondent bien aux modes propres calculés théoriquement (pairs pour $\hat{\psi}$,

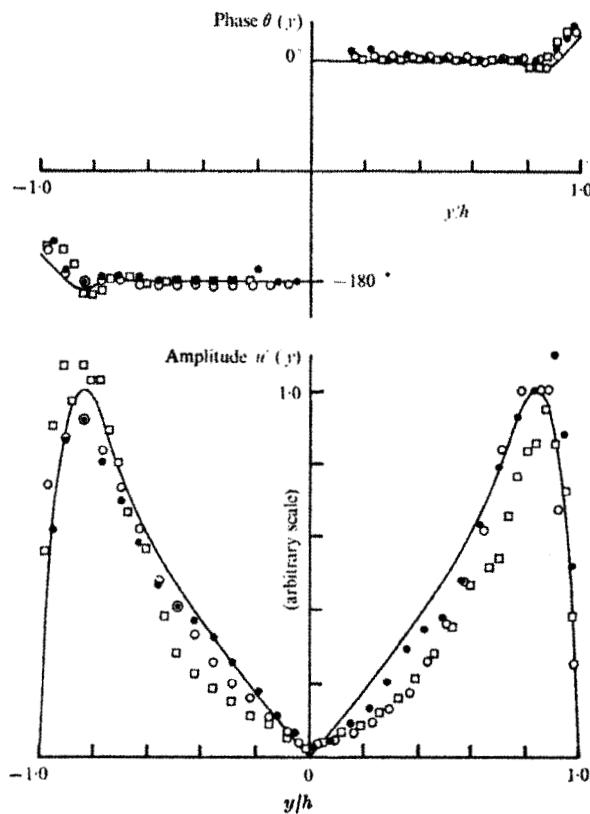


FIG. 5.10 – Amplitude et phase de la perturbation de vitesse longitudinale : (●) $Re = 3\ 000, \omega = 2\pi f U/h = 0,36$; (○) $Re = 4\ 000, \omega = 0,27$; (□) $Re = 6\ 000, \omega = 0,32$. (—) Mode propre calculé pour $Re = 4\ 000, \omega = 0,27$ (Nishioka *et al.* 1975).

impairs pour \hat{u}). On note le saut de phase de 180° au centre du canal qui correspond à un changement de signe de u . Pour les gammes de fréquence et de nombres de Reynolds explorées, $f = 40\text{--}100\text{ Hz}$ et $Re = 3\,000\text{--}8\,000$, la longueur d'onde est comprise entre 3 et 6 cm, et leur célérité est comprise entre 0,2 et $0,3U$.

La figure 5.11 présente l'évolution vers l'aval de l'amplitude des perturbations, pour différents nombres de Reynolds et différentes fréquences ; l'échelle verticale est logarithmique de façon à ce qu'une dépendance exponentielle, caractéristique du caractère linéaire du phénomène attendu, se traduise par une droite. Cette dépendance exponentielle apparaît clairement sur une vingtaine de centimètres, que le mode soit amorti (pente négative), presque neutre (pente presque nulle) ou amplifié (pente positive). Au-delà de cette région de croissance exponentielle, l'amplitude de la perturbation, de l'ordre de $0,025\,U$, tend à saturer ; en fait, en aval du domaine de mesure, cette amplitude croît catastrophiquement, et l'écoulement devient turbulent. Cette évolution est liée au caractère sous-critique de l'instabilité, démontré par Stewartson & Stuart (1971) dans le cadre d'une analyse faiblement non linéaire ; les effets non linéaires dominants ne saturent pas l'instabilité, comme dans la convection de Rayleigh-Bénard ou l'écoulement de Couette-Taylor, mais amplifient encore l'instabilité ; nous y reviendrons au chapitre 10.

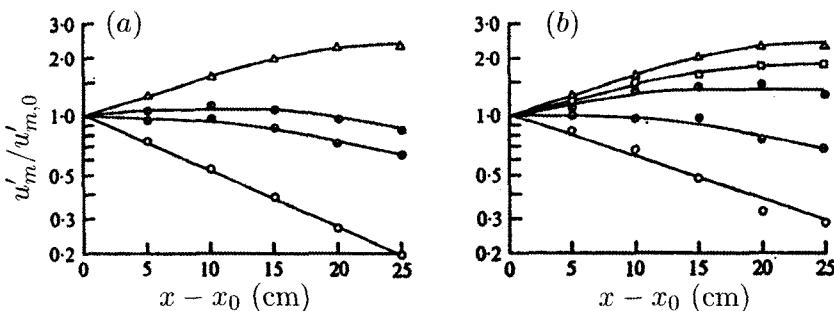


FIG. 5.11 – Évolution vers l'aval de l'amplitude des perturbations. (a) : $f = 72\text{ Hz}$ et $Re = 4\,000, 5\,300, 6\,400, 7\,000$; (b) : $Re = 7\,000$ et $f = 50, 60, 72, 82$ et 92 Hz . $x_0 - x_r = 32\text{ cm}$ (Nishioka *et al.* 1975).

La figure 5.12 montre le taux de croissance spatial déduit de ces mesures, en fonction de la fréquence d'excitation, pour différents nombres de Reynolds au-dessous et au-dessus du seuil. Ces valeurs mesurées sont en bon accord avec des valeurs calculées antérieurement, et représentées par le trait continu. Enfin, la figure 5.13 présente un diagramme des points de mesure stables et instables dans le plan $Re - kh$. On peut voir que la courbe séparant ces points coïncide bien avec la courbe de stabilité marginale calculée.

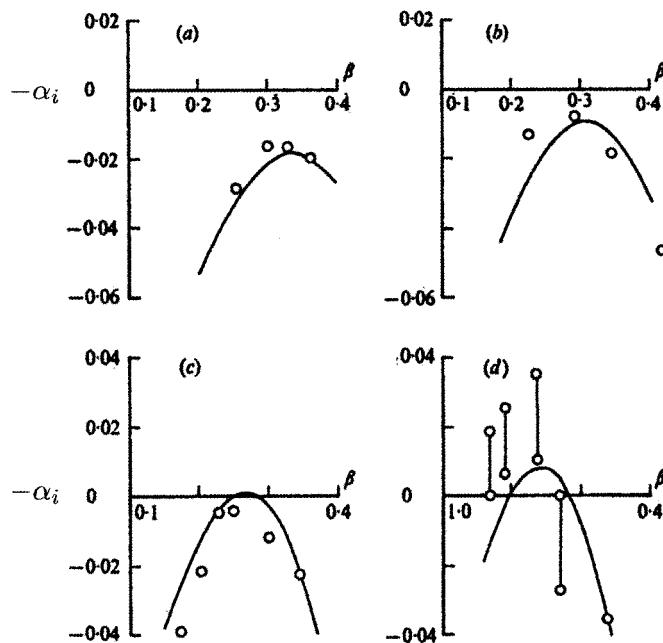


FIG. 5.12 – Taux de croissance spatial $-\alpha_i = -k_i h$ fonction de la fréquence $\beta = 2\pi f U/h$. (○) mesures, (—) calcul (Itoh, 1974). (a) $Re = 3\,000$, (b) $Re = 4\,000$, (c) $Re = 5\,700$ (calcul : $Re = 6\,000$), (d) $Re = 7\,000$ (calcul : $Re = 8\,000$) (Nishioka et al. 1975).

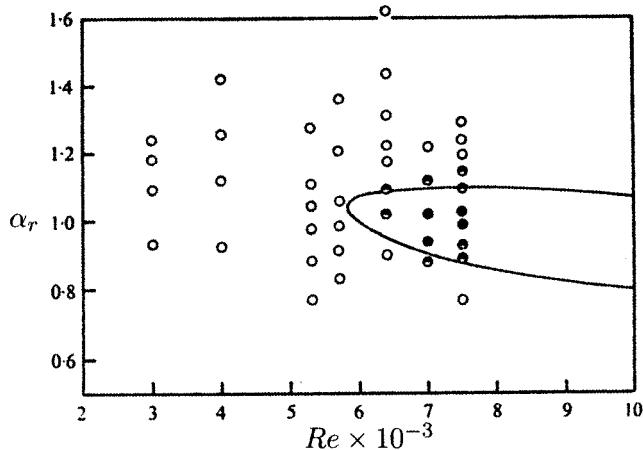


FIG. 5.13 – Carte dans le plan $Re - \alpha_r$ (où $\alpha_r = k_r h$) des points de mesure stables (○), presque neutres (symboles demi-remplis), et instables (●), et courbe de stabilité marginale calculée (Nishioka et al. 1975).

5.3.3 Croissance transitoire

Les observations de Nishioka *et al.* (1975) décrites ci-dessus correspondent à des perturbations à l'entrée du canal bien contrôlées et d'amplitude très petite, typiquement de l'ordre de 1 % de la vitesse au centre du canal. Dans les situations usuelles où ces perturbations ne sont pas contrôlées, leur amplitude est en général bien supérieure, et la structure observée n'est pas celle du mode de Tollmien-Schlichting le plus amplifié et se manifeste en-dessous du nombre de Reynolds critique 5 772. L'explication aujourd'hui avancée est que cette structure est issue d'un phénomène de croissance transitoire de perturbations asymptotiquement stables. Ce phénomène, introduit en hydrodynamique à la fin des années 1970 (Ellingsen & Palm 1975 ; Landahl 1980), est discuté en détail dans l'ouvrage de Schmid & Henningson (2001), nous en donnons simplement ici un très bref aperçu.

Le phénomène de croissance transitoire a été introduit au chapitre 1 à partir d'un système dynamique simple à deux degrés de liberté : au voisinage d'un point fixe *stable* où les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux, « l'énergie » du système, au sens d'une norme appropriée, peut pour certaines conditions initiales croître de façon algébrique avant que la décroissance exponentielle se manifeste. Cette croissance transitoire, mesurée par un « gain » défini par l'énergie maximale atteinte rapportée à l'énergie initiale, est d'autant plus marquée que l'angle entre les vecteurs propres est petit. Il s'avère que l'opérateur correspondant à l'équation d'Orr-Sommerfeld possède une propriété semblable, de non-normalité des fonctions propres. Dès lors se pose la question de la nature de la perturbation dont le gain est le plus élevé ; cette perturbation dite « optimale » en théorie du contrôle peut être obtenue par une technique d'optimisation (il en existe plusieurs). Pour l'écoulement de Poiseuille plan, il a été montré que cette perturbation optimale est *tridimensionnelle*, c'est-à-dire qu'elle possède une structure dans la direction transverse z . La structure spatiale de cette perturbation est essentiellement localisée au voisinage de la paroi sous la forme de rouleaux alignés dans la direction de l'écoulement, comme représenté sur la gauche de la figure 5.14. La longueur d'onde transverse $2\pi/k_z$ est de l'ordre de l'épaisseur de la couche visqueuse, *i.e.* de l'ordre de $h Re^{-1/2}$, et la longueur d'onde longitudinale $2\pi/k_x$ est infinie. Ces caractéristiques sont symétriques de celles de l'onde de Tollmien-Schlichting la plus amplifiée, pour laquelle $2\pi/k_x$ est fini et $2\pi/k_z$ infini ; ainsi, la perturbation optimale, bien qu'elle puisse se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de modes propres (tridimensionnels), diffère fortement du mode propre le plus amplifié. L'effet temporel, ou spatial (l'instabilité est convective), d'une telle perturbation se comprend bien : le fluide entre deux rouleaux adjacents, ainsi que sa quantité de mouvement longitudinal, sont advectés vers la paroi ou loin de la paroi selon le sens de rotation. Il en résulte, à une distance donnée de la paroi, une modulation transverse de la vitesse longitudinale dans la direction z , comme représenté sur la droite de la figure 5.14 (le maximum de cette modulation est situé un peu au-dessus du plan représenté sur la figure).

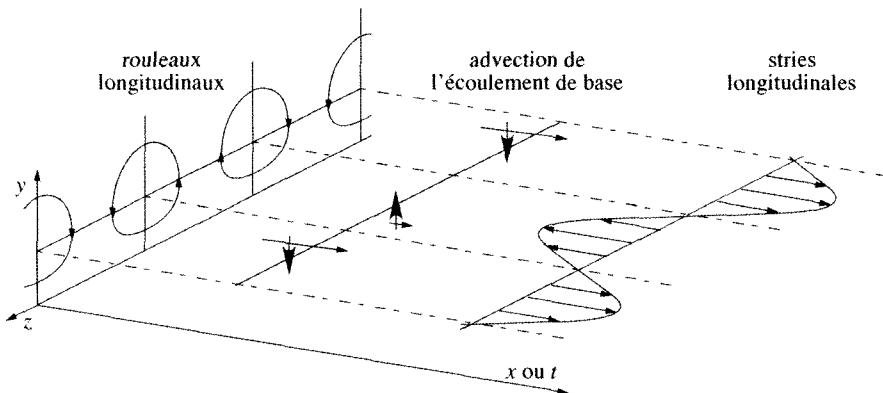


FIG. 5.14 -- À gauche, structure en rouleaux longitudinaux de la perturbation optimale ; à droite, stade évolué de cette perturbation du fait de l'effet de « *lift up* » : stries de modulation transverse de la vitesse longitudinale.

La somme de l'écoulement de base et de la perturbation présente donc des « stries » longitudinales au voisinage de la paroi, de vitesse alternativement grande et petite. L'intensité des rouleaux décroît par diffusion visqueuse au cours du temps (ou vers l'aval), et celle des stries aussi car l'écoulement reste linéairement stable ; mais la durée de vie des stries est bien supérieure à celle des rouleaux. Cette structure en stries longitudinales correspond bien aux observations.

Notons en passant que, d'après le théorème de Squire, toute perturbation tridimensionnelle doit décroître en-dessous du seuil de l'instabilité des perturbations bidimensionnelles, au sens de la stabilité *asymptotique* ; le résultat qu'une perturbation tridimensionnelle croisse de façon *transitoire* plus qu'une perturbation bidimensionnelle ne contredit pas ce théorème.

5.4 Écoulement de Poiseuille en tube

L'écoulement de Poiseuille en conduite circulaire est linéairement stable quel que soit le nombre de Reynolds. Ce résultat surprenant, acquis progressivement entre les années 1920 et le développement du calcul numérique dans les années 1960, semble en contradiction avec les observations de Reynolds décrites au début de ce chapitre, qui montrent une déstabilisation pour des nombres de Reynolds voisins de 2 000. Ce paradoxe n'est toujours pas totalement éclairci (Kerswell 2005), mais plusieurs phénomènes aujourd'hui identifiés pourraient le lever : (i) le phénomène d'advection normale à la paroi de la quantité de mouvement longitudinale par des rouleaux longitudinaux, comme pour l'écoulement plan ; (ii) des effets non linéaires correspondant à une bifurcation sous-critique, amplifiant les perturbations lorsqu'elles ont atteint une

amplitude suffisante. La transition à la turbulence de l'écoulement de Couette plan, lui aussi linéairement stable pour tout nombre de Reynolds, pourrait relever des mêmes idées. Nous reviendrons au chapitre 10 sur ces problèmes.

5.5 Couche limite sur une plaque plane

5.5.1 Mise en évidence expérimentale

L'instabilité de la couche limite laminaire est une instabilité convective très semblable à celle de l'écoulement de Poiseuille quant à son mécanisme. Elle en diffère cependant par le fait qu'elle se développe sur un écoulement non homogène (non invariant par translation) dans la direction de l'écoulement. Le développement spatial de l'instabilité est illustré sur la figure 5.15, qui présente l'enregistrement temporel à différentes distances du bord d'attaque d'une onde de Tollmien-Schlichting forcée, pour une vitesse amont $U_\infty = 36,6$ m/s (Schubauer & Skramstadt 1947). Le taux de turbulence résiduel de l'écoulement incident, inférieur à 0,05 %, est extrêmement faible comme dans les expériences de Nishioka *et al.* (1975) sur l'écoulement de Poiseuille plan. Cette onde est générée à l'amont par la vibration d'un ruban dont la fréquence f est telle que le nombre sans dimension $F = \frac{\omega\nu}{U_\infty^2}$, $\omega = 2\pi f$, (5.24) est de l'ordre de 10^{-4} . La fluctuation de vitesse est mesurée par anémométrie à fil chaud. On remarquera que l'onde est à peu près linéaire (sinusoïdale) sur les trois premières traces, à une modulation de grande longueur d'onde près, et qu'elle devient ensuite rapidement désordonnée, à cause d'effets non linéaires conduisant à la turbulence. La longueur d'onde est de l'ordre de $10^4 \nu/U_\infty$, *i.e.* de l'ordre du centimètre. On limitera ici la discussion au cas où le gradient de pression est nul, renvoyant à l'ouvrage de Schmid & Hennigson (2001) pour des situations plus générales.

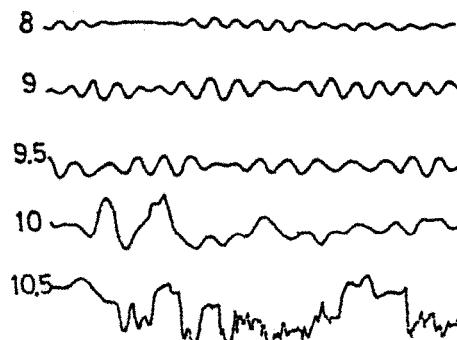


FIG. 5.15 – Fluctuations de vitesse d'une onde de Tollmien-Schlichting dans une couche limite, mesurées à différentes positions (en pieds) en aval du bord d'attaque (Schubauer & Skramstadt 1947).

5.5.2 Analyse locale

L'étude théorique de l'instabilité de la couche limite est compliquée par le fait que la couche limite s'épaississant vers l'aval, l'écoulement n'est pas strictement parallèle, en particulier près du bord d'attaque où le nombre de Reynolds n'est pas très grand (§5.1.2). Ce problème peut être contourné en considérant que le gradient suivant x de l'écoulement de base est suffisamment petit devant le nombre d'onde de la perturbation, et que les caractéristiques de cette perturbation (amplitude, nombre d'onde, taux de croissance) s'adaptent très rapidement aux nouvelles conditions qu'elle rencontre au fil de son advection vers l'aval. Cette hypothèse de relaxation rapide ou de « perturbation pleinement développée » autorise une analyse de stabilité locale, où les gradients suivant x de l'écoulement de base sont considérés nuls. Le problème se ramène alors à l'équation d'Orr-Sommerfeld pour le profil de vitesse parallèle $U(x, y)$, où la coordonnée x est considérée comme un paramètre. Le taux de croissance ainsi calculé, ainsi que la longueur d'onde et les fonctions propres, sont alors des fonctions de x .

La non-homogénéité du profil de vitesse de base suivant la direction de l'écoulement se retrouve dans l'évolution spatiale de l'amplitude d'un mode propre de fréquence donnée (excitée par la vibration d'un ruban par exemple). Avec l'hypothèse de « perturbation pleinement développée », cette amplitude est donnée par intégration du taux de croissance local, $-k_i(x)$, à partir d'une amplitude a_0 à l'abscisse x_0 :

$$a(x) = a_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x k_i(\xi) d\xi\right). \quad (5.24)$$

Du fait que le taux de croissance local $-k_i(x)$ n'est pas spatialement uniforme, cette amplitude ne varie pas exponentiellement vers l'aval.

5.5.3 Modes propres, stabilité marginale, effets non parallèles

La figure 5.16 représente le profil de vitesse de l'écoulement de base, mesuré et calculé (profil de couche limite de Blasius), ainsi qu'un mode propre de la perturbation de vitesse u , mesures et calcul de stabilité selon l'analyse locale. Ce mode particulier a pu être isolé par la vibration d'un ruban proche de la paroi dans un écoulement très peu bruité (sans quoi, l'instabilité étant convective, toutes les perturbations instables sont amplifiées, et la mesure devient difficile à interpréter). On peut constater que l'accord est excellent. La figure 5.17 compare la fonction propre issue du calcul de stabilité avec le résultat une simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes (Fasel & Konzelmann 1990). La concordance est encore remarquable. La simulation directe étant affranchie des hypothèses de l'analyse locale, on voit que les effets non parallèles sont très faibles sur les fonctions propres.

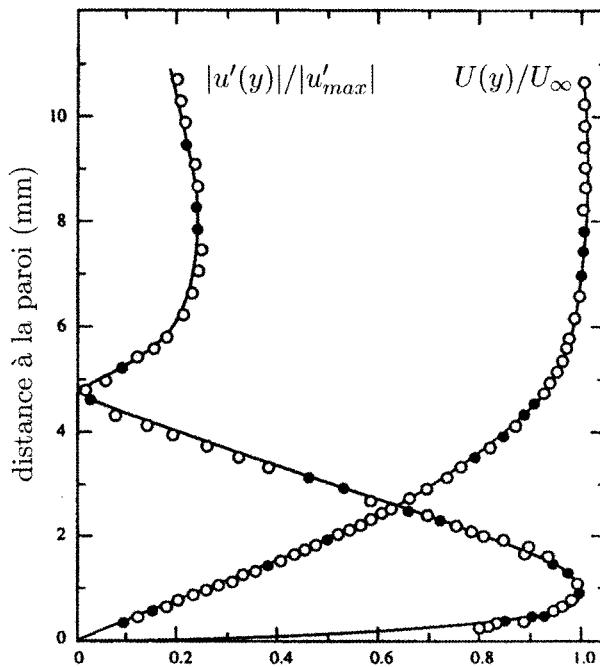


FIG. 5.16 – Écoulement de base et fonction propre $u'(y) = |\hat{u}(y)|$ de la couche limite de Blasius. Comparaison du calcul (lignes continues) et de mesures (points). D'après Reynolds & Saric 1986 (Reed, Saric & Arnal 1996).

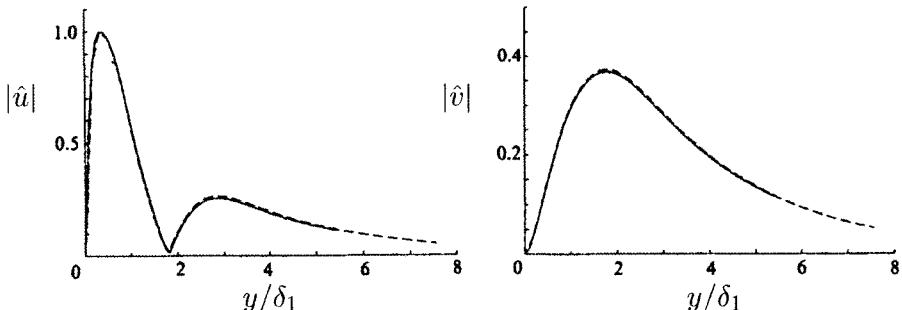


FIG. 5.17 – Fonctions propres de la couche limite de Blasius. (- - -) : théorie parallèle, (—) simulation numérique directe (Fasel & Konzelmann 1990). $Re_\delta = 1\ 000$, $F = 140 \times 10^{-6}$.

La figure 5.18 montre l'évolution spatiale de l'amplitude d'une perturbation de fréquence imposée à l'amont, évolutions calculées de trois façons : par l'analyse locale (5.24), par une théorie non parallèle (Gaster 1974), et par

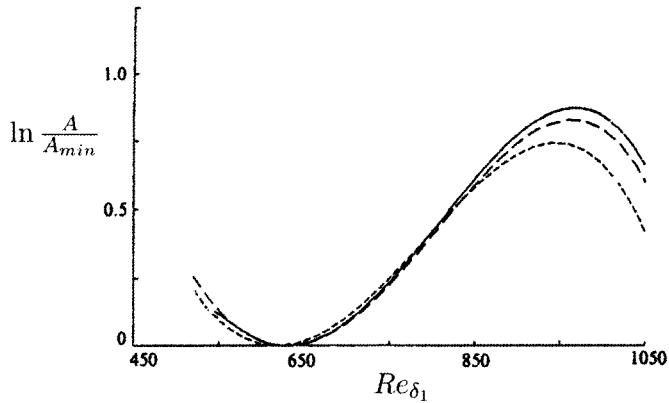


FIG. 5.18 – Variations du maximum de l'amplitude $|\hat{u}(y)|$ avec le nombre de Reynolds $Re_\delta \sim x^{1/2}$, calculées de trois façons : (- - -) théorie parallèle (5.24), (- -) théorie non parallèle de Gaster (1974), (—) simulation numérique directe (Fasel & Konzelmann 1990). $F = 140 \times 10^{-6}$.

simulation numérique directe (Fasel & Konzelmann 1990). La figure montre que cette amplitude commence par diminuer, puis augmente, puis diminue à nouveau. La couche limite est donc d'abord stable, puis instable, puis à nouveau stable. Les mesures montrent une évolution semblable (Ross *et al.* 1970) si, bien entendu, les effets non linéaires ou tridimensionnels ne sont pas dominants lorsque la perturbation atteint son maximum.

Du calcul de l'évolution spatiale d'une perturbation pour différentes fréquences, on peut déduire la courbe de stabilité marginale. Cette courbe (trait plein) est présentée sur la figure 5.19 dans le plan $Re_\delta - F$.

$$F = \frac{\omega\nu}{U_\infty^2}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (5.25)$$

Notons que la première courbe de stabilité marginale est due à Tollmien (1929), bien avant les premières mesures de Schubauer & Skramstadt (1947) ; la résolution de Tollmien approchait le profil de vitesse de base par deux droites raccordées par un arc de parabole (Drazin & Reid 2004, §31.5). Pour le profil de vitesses de Blasius, le nombre de Reynolds critique calculé numériquement (Jordinson, 1970) coïncide bien avec les observations, $Re_{\delta,c} = 520$ (§5.1). La forme en « demi-banane » rend compte de la restabilisation d'un paquet d'ondes de fréquence donnée : un paquet d'ondes peut être représenté dans le plan $Re_\delta - F$ par un point se déplaçant vers la droite sur une droite horizontale ; ce paquet est d'abord stable jusqu'à ce qu'il atteigne la branche gauche (dite I) de la courbe marginale, puis instable jusqu'à ce qu'il atteigne la branche droite (dite II), puis à nouveau stable.

La figure 5.19 compare les prédictions de la théorie parallèle et d'une théorie non parallèle (Gaster 1974) avec les simulations numériques directes de Fasel et Konzelmann (1990). La figure 5.20 compare ces théories avec les mesures de Ross *et al.* (1970). Ces figures montrent que la théorie parallèle donne de bons résultats pour $Re_\delta > 600$, mais que des effets non parallèles significatifs se manifestent pour $Re_\delta < 600$. Les effets non parallèles apparaissent finalement peu importants pour les ondes bidimensionnelles. Cette conclusion n'est plus vérifiée lorsque le gradient de pression n'est pas nul (incidence non nulle, surface courbe), ou lorsque le bord d'attaque du profil n'est pas perpendiculaire à l'écoulement (ailes en flèche). Dans ce dernier cas, les ondes obliques sont très amplifiées, le vecteur d'onde pouvant faire un angle proche de 90° avec l'écoulement. Pour ces ondes obliques, les effets non parallèles peuvent être importants (Arnal 1994 ; Reed *et al.* 1996).

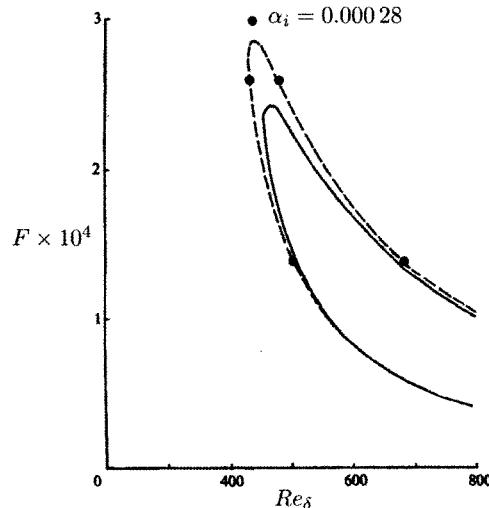


FIG. 5.19 – Stabilité marginale de la couche limite sur une plaque plane. (—), théorie parallèle ; (---), théorie non parallèle de Gaster (1974) ; (●), simulations numériques directes de Fasel & Konzelmann (1990).

5.5.4 Croissance transitoire

Comme pour l'écoulement de Poiseuille, certaines perturbations de la couche limite peuvent croître de façon transitoire pour des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à la valeur critique correspondant à la stabilité marginale d'un mode normal. Cette croissance entraîne l'apparition de stries longitudinales au voisinage de la paroi, dont l'intensité est maximale pour une perturbation optimale qui a la même structure en rouleaux longitudinaux que pour l'écoulement de Poiseuille. La figure 5.21 représente, à gauche,

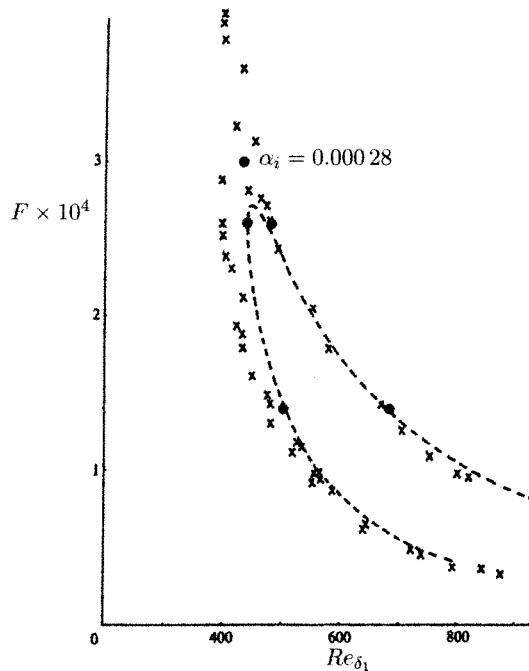


FIG. 5.20 – Stabilité marginale de la couche limite sur une plaque plane. (—), théorie non parallèle ; (x) mesures ; (●), simulations de Fasel & Konzelmann (1990).

l'amplitude des vitesses v et w correspondant à la perturbation optimale (Luchini 2000) ; la fréquence de cette perturbation est nulle ($\omega = 0$) et son nombre d'onde transversal est $k_z\delta = 0,45$; le nombre d'onde longitudinal k_x n'est pas défini ici car le calcul prend en compte le développement spatial de l'écoulement dans la direction x , par intégration des équations de la couche limite, paraboliques en x . La figure 5.21 représente à droite le profil de la perturbation longitudinale de vitesse, u , correspondant aux stries issues de la perturbation optimale, de même périodicité suivant z que v et w bien entendu.

L'amplitude des stries est supérieure d'un facteur d'ordre \sqrt{Re} à celle des tourbillons initiaux (notons que, s'agissant toujours d'un problème *linéaire*, l'amplitude des perturbations n'est définie qu'à une constante près). Ces stries peuvent donc être suffisamment intenses pour modifier significativement l'écoulement de base, et inhiber finalement la croissance des ondes de Tollmien-Schlichting. Par rapport au cas de l'écoulement de Poiseuille, les ondes de Tollmien-Schlichting sont cependant plus faciles à observer sur une couche limite sans gradient de pression (voir la figure 5.4), car leur taux de croissance est plus élevé. La raison tient au fait qu'un gradient de pression (négatif) est en général stabilisant (il « creuse » le profil de l'écoulement et l'éloigne d'un point d'inflexion).

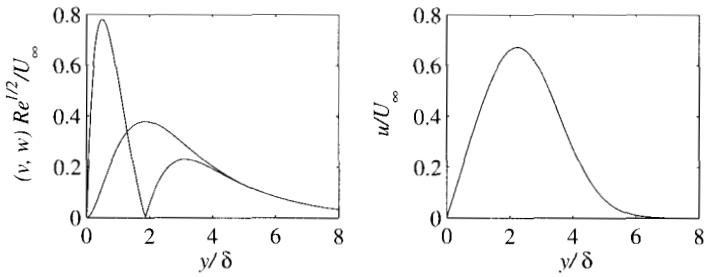


FIG. 5.21 – À gauche, profils de l'amplitude normalisée de v et w correspondant à la perturbation optimale (v est maximale et w nulle au niveau de l'axe des rouleaux $y/\delta \approx 2$) ; à droite, profil de l'amplitude de u . D'après Luchini (2000).

Notons pour conclure qu'en-dessous du nombre de Reynolds critique et toujours dans le cadre du problème linéarisé autour de l'écoulement de base, la perturbation optimale est dissipée, et les stries également, pour la couche limite sur une paroi *plane* comme pour l'écoulement de Poiseuille. Sur une paroi *concave*, la situation est différente car les tourbillons longitudinaux sont entretenus par l'instabilité centrifuge (Luchini & Bottaro 1998, Bottaro & Luchini 1999). Cette situation correspond aux tourbillons de Görtler ou de Dean évoqués à propos de l'instabilité de Couette-Taylor au chapitre précédent.

Chapitre 6

Instabilités à faible nombre de Reynolds

6.1 Introduction

Lorsqu'un écoulement visqueux présente une interface déformable, des effets inertIELS faibles peuvent être à l'origine d'une instabilité, qui se manifeste par l'apparition d'ondes de surface. Les principaux types sont illustrés sur la figure 6.1 : écoulements de films liquides tombant sur un plan incliné, écoulements induits par un gradient de pression, ou écoulements cisaillés.

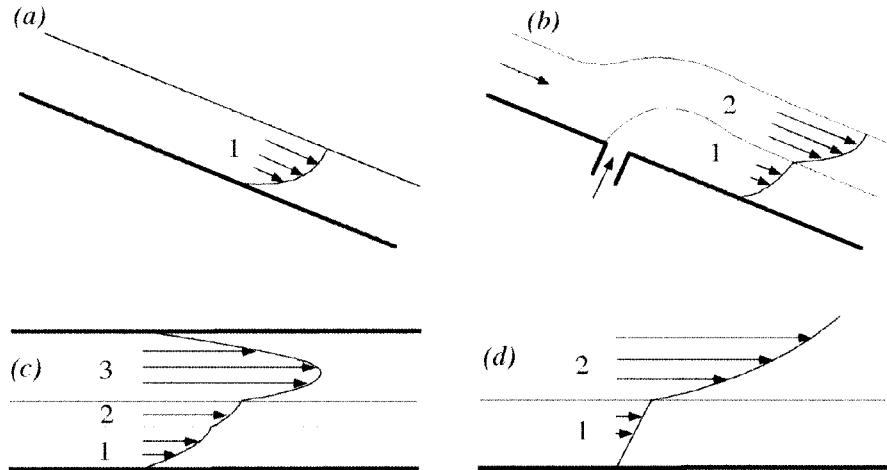


FIG. 6.1 – Écoulements de films sujets à une instabilité à faible nombre de Reynolds.
(a) film liquide tombant sur un plan incliné ; (b) écoulement multicouches s'écoulant par gravité ; (c) écoulement à trois couches mû par un gradient de pression ; (d) film liquide cisaillé par un gaz.

Les écoulements de films tombants, constitués d'une seule couche (figure 6.1a) ou de plusieurs couches (figure 6.1b), se rencontrent dans les procédés d'enduction de surfaces : peintures et vernis, encrage dans l'imprimerie, dépôt de couches minces sur les bandes magnétiques et les films photographiques, etc. Les écoulements mus par un gradient de pression (figure 6.1c) se rencontrent dans les procédés de mise en forme par extrusion des polymères, en géométrie plane (entre plaques) ou annulaire (en tube). Dans ces situations, une qualité essentielle des films liquides est l'uniformité de leur épaisseur, et les instabilités doivent être absolument évitées. Le troisième type d'écoulements, celui des écoulements cisaillés, correspond typiquement à un film liquide cisillé par un gaz (figure 6.1d), situation rencontrée dans les réacteurs chimiques ou les échangeurs thermiques ; les instabilités sont alors plutôt recherchées car elles favorisent le développement de la turbulence qui augmente les transferts thermiques et massiques.

La figure 6.2 offre une illustration d'une instabilité observée dans l'industrie pétrolière lorsqu'on doit transporter des huiles très visqueuses, dont la viscosité est de l'ordre d'un million de fois celle de l'eau ; une solution consiste à injecter de l'eau dans la conduite : cette eau migre à la paroi où elle forme un film lubrifiant, diminuant ainsi considérablement les pertes de charge (Joseph *et al.* 1997). L'écoulement annulaire est en général instable ; selon les débits d'eau et d'huile, l'interface adopte des formes variées comme le montre la figure 6.2. Dans ces problèmes de transport pétrolier, on doit éviter une rupture du film d'eau, mais la présence de vagues est tolérée.

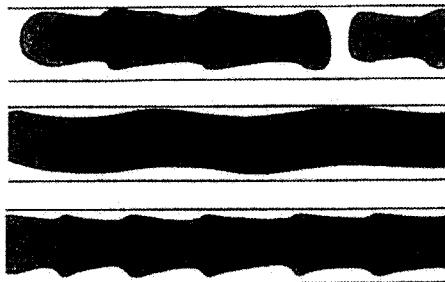


FIG. 6.2 – Trois types de structuration d'un écoulement en conduite d'huile très visqueuse lubrifiée par un film d'eau (Joseph *et al.* 1997).

La figure 6.3 offre une autre illustration d'instabilité d'un film cisaillé : dans un tube préalablement rempli d'un premier fluide, on injecte un second fluide destiné à chasser le premier (situation rencontrée en particulier dans le forage de puits de pétrole) ; ce second fluide laisse en général sur la paroi un film du premier fluide ; l'interface cylindrique entre les deux fluides de viscosité différente est instable, d'où le développement spatial de renflements axisymétriques qu'on peut observer sur la photographie (onde dite « variqueuse » par opposition à « sinueuse »). Les deux fluides étant miscibles et de même densité,



FIG. 6.3 – Instabilité survenant lors de l'injection d'eau (fluide le plus sombre au centre) et d'un fluide plus visqueux de même densité; le rayon du tube est d'un centimètre. Cliché M. d'Olce, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin & L. Talon, FAST, Orsay (2006).

ni la tension de surface ni la gravité n'interviennent, et l'inertie des fluides est faible (nombre de Reynolds de l'ordre de la dizaine).

D'autres mécanismes que l'inertie peuvent aussi induire des instabilités se manifestant par des irrégularités des interfaces. Dans les procédés de coextrusion de polymères par exemple, l'instabilité peut provenir de la différence des élasticités de deux couches adjacentes (Hinch, Harris & Rallison 1992), ou de la relaxation trop rapide des contraintes en sortie de filière d'extrusion (Denn 2001). Cette dernière instabilité est à l'origine d'un état de surface caractéristique en « peau de requin » constitué d'écaillles de quelques millimètres de longueur, comme illustré sur la figure 6.4.

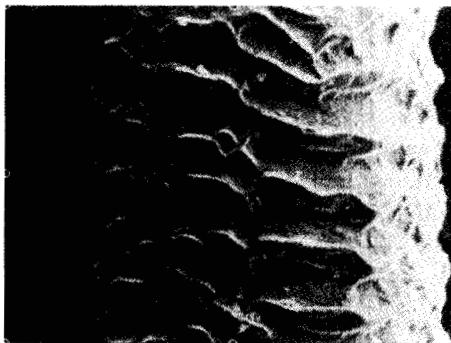


FIG. 6.4 – État de surface en « peau de requin » sur du polyéthylène extrudé (Denn 2001).

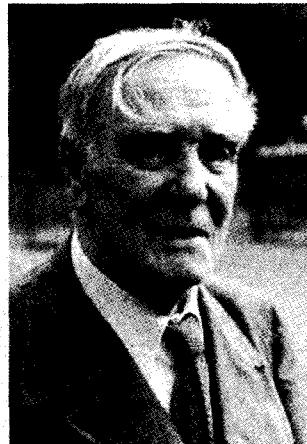
Deux types d'instabilités inertielles sont étudiés dans ce chapitre : l'instabilité d'un film tombant sur un plan incliné (§6.2), et l'instabilité d'un film cisaillé par un autre fluide (§6.3). Dans les deux cas, il s'agit d'écoulements parallèles dont la stabilité est gouvernée par une ou deux équations d'Orr-Sommerfeld, associées à des conditions aux limites sur une interface déformable. Du fait que ces instabilités surviennent à petit nombre de Reynolds, des développements asymptotiques réguliers permettent de déterminer la relation de dispersion analytiquement.

6.2 Films tombant sur un plan incliné

Les premières études expérimentales et théoriques de l'hydrodynamique des films tombant sur une paroi verticale sont dues à P.L. Kapitza (1948, 1949). Les vagues observées ont été reconnues comme le résultat d'une instabilité de grande longueur d'onde à petit nombre de Reynolds par T.B. Benjamin (1957) puis C.S. Yih (1963). De nombreuses études ont suivi, mettant en évidence en particulier des ondes de Tollmien-Schlichting pour des nombres de Reynolds de l'ordre du millier (Floryan, Davis & Kelly 1987). Les phénomènes non linéaires associés à l'advection et à l'interface déformable ont été tout d'abord analysés par Benney (1966) et Skhadov (1967) ; ils conduisent à la formation d'ondes solitaires de grande amplitude (Chang 1994), discutées au chapitre 10.

Pyotr Leonidovich Kapitza (1894–1984)

Né près de Saint-Pétersbourg, diplômé de l'Institut Polytechnique de Petrograd en 1919. Après la mort de sa femme et de deux enfants victimes de la grippe espagnole, s'installe en 1921 à Cambridge (Angleterre) au Laboratoire Cavendish où il passe sa thèse sous la direction d'Ernest Rutherford. Développe des techniques pour obtenir des champs magnétiques intenses. Élu *Fellow of the Royal Society* en 1929. Grâce à la donation d'un mécène, la Royal Society crée pour lui le *Royal Society Mond Laboratory*, dans lequel il invente et met au point un procédé de liquéfaction de l'hélium en grande quantité, afin d'étudier la physique des basses températures. Acquiert une notoriété mondiale. En 1934, au cours d'un de ses séjours réguliers en URSS, il est empêché de rentrer à Cambridge sur ordre de Staline ; contraint de demeurer désormais en URSS, il obtient néanmoins des conditions de travail exceptionnelles. Aidé par Rutherford, il fonde et dirige l'Institut pour les problèmes physiques de l'Académie des Sciences de Moscou. Découvre la superfluidité de l'hélium II en 1937 ; invente un procédé de liquéfaction de l'air à basse pression par turbodépresseur, toujours utilisé. Élu à l'Académie des Sciences de Moscou en 1939. Durant la guerre, organise et dirige un Département de l'Industrie de l'Oxygène rattaché au gouvernement. En 1945, refuse de travailler sur le développement d'armes nucléaires sous Béria ; il est démis de ses fonctions et assigné à résidence dans sa maison de campagne. Là, il travaillera sur l'électronique haute puissance jusqu'à la mort de Staline.



et l'arrestation de Béria en 1953. Retourne à la direction de son Institut en 1955 et continue ses recherches sur l'électronique haute puissance et les plasmas. Figure morale courageuse et habile, P.L. Kapitza a sorti des prisons de Staline de nombreux collègues, dont Lev Landau qui avait été arrêté par le NKVD au prétexte d'espionnage ; il a défendu plus tard, mais plus timidement, Andrei Sakharov (A. Sakharov, *Mémoires*, 1990, Seuil). Homme public, a pris position sur de nombreux sujets tels que l'économie, l'écologie ou l'organisation de la science. Prix Nobel de Physique en 1978 pour ses travaux sur la physique des basses températures.

6.2.1 Écoulement de base et échelles caractéristiques

Considérons un film liquide incompressible d'épaisseur h , de viscosité μ , de densité ρ , et de tension interfaciale γ avec le gaz ambiant, tombant sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale (figure 6.5). La pression P_0 du gaz au-dessus du film est supposée uniforme.

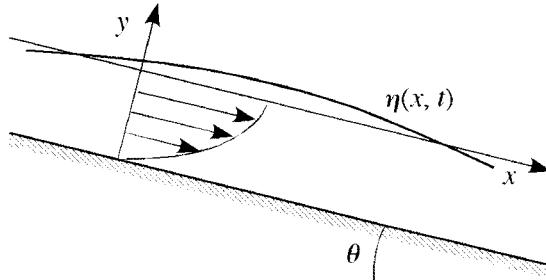


FIG. 6.5 – Film tombant sur un plan incliné, et profil des vitesses parabolique pour une interface plane.

Les équations de Navier-Stokes, associées aux conditions aux limites (adhérence à la paroi inférieure et pression P_0 à la surface libre), admettent une solution indépendante du temps, correspondant à une interface plane et un profil de vitesse parabolique :

$$\bar{\eta} = 0, \quad (6.1a)$$

$$\bar{U}(y) = U_0(1 - y^2/h^2), \quad (6.1b)$$

$$\bar{V}(y) = 0, \quad (6.1c)$$

$$\bar{P}(y) - P_0 = -\rho gy \cos \theta, \quad (6.1d)$$

où la vitesse U_0 de l'interface est définie par

$$U_0 = \frac{\rho gh^2 \sin \theta}{2\mu}. \quad (6.2)$$

Cette solution met en évidence les échelles naturelles du problème : l'épaisseur h du film, la masse ρ de l'unité de volume du fluide et la vitesse U_0 du fluide à l'interface.

L'importance de l'inertie par rapport à la viscosité, la gravité et la tension de surface est mesurée respectivement par les nombres de Reynolds, de Froude et de Weber définis par¹

$$Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu}, \quad Fr = \frac{U_0^2}{gh \cos \theta} = \frac{Re \tan \theta}{2}, \quad We = \frac{\rho U_0^2 h}{\gamma}. \quad (6.3)$$

Remarquons que le nombre de Froude est défini avec la composante $g \cos \theta$ de la gravité, normale à l'écoulement. À titre d'ordre de grandeur, pour $\theta = 30^\circ$, un film d'eau de 0,1 mm d'épaisseur s'écoule avec une vitesse $U_0 = 5$ cm/s, et les trois nombres ci-dessus valent $Re = 5$, $Fr = 1,4$ et $We = 0,003$. Pour un film d'huile dix fois plus visqueux, ces valeurs deviennent $U_0 = 0,5$ cm/s, $Re = 0,05$, $Fr = 0,014$ et $We = 0,00008$.

6.2.2 Formulation du problème de stabilité

Équations de conservation et conditions aux limites

Le théorème de Squire, selon lequel l'instabilité survient au seuil vis-à-vis d'une perturbation bidimensionnelle (chapitre 5), reste valide pour un écoulement présentant une interface (Hesla, Pranckh & Preziosi 1986). Il suffit donc, pour trouver un critère d'instabilité, de considérer le problème plan défini par deux équations de Navier-Stokes dans les directions longitudinale et transversale, x et y , et par des conditions aux limites à la paroi et à l'interface gaz-liquide. Détaillons les conditions aux limites. Les conditions à la paroi sont les conditions classiques d'adhérence :

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \text{en } y = -h. \quad (6.4)$$

Les conditions à l'interface sont de deux types : une condition « dynamique » sur les contraintes, et une condition « cinématique » qui traduit l'imperméabilité de l'interface. Ces conditions, présentées en détail au chapitre 2 à propos de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, font intervenir les vecteurs unitaires normal et tangent à l'interface définis par

$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial_x \eta, 1)}{\sqrt{1 + \partial_x \eta^2}}, \quad \mathbf{t} = \frac{(1, \partial_x \eta)}{\sqrt{1 + \partial_x \eta^2}}, \quad (6.5)$$

où $\eta(x, t)$ est la position de l'interface. La condition cinématique est que la vitesse normale $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$ du fluide à l'interface doit être égale à la vitesse normale de l'interface $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \partial_t \eta / \sqrt{1 + \partial_x \eta^2}$, soit

$$U(-\partial_x \eta) + V = \partial_t \eta \quad \text{en } y = \eta. \quad (6.6)$$

1. Plutôt que le nombre de Weber, on pourrait introduire le nombre capillaire $Ca = \mu U_0 / \gamma = We/Re$.

La condition dynamique est que la contrainte tangentielle est continue, et que la contrainte normale subit un saut dû à la tension interfaciale. La contrainte dans le fluide étant $\Sigma \mathbf{n}$ où Σ est le tenseur des contraintes, et l'action de l'air se réduisant à une contrainte $-P_0 \mathbf{n}$ purement normale, la condition dynamique s'écrit

$$\mathbf{t} \cdot (\Sigma \mathbf{n}) = 0 \quad \text{en } y = \eta, \quad (6.7a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\Sigma \mathbf{n}) - \mathbf{n} \cdot (-P_0 \mathbf{n}) = \frac{\gamma}{R} \quad \text{en } y = \eta, \quad (6.7b)$$

où $R^{-1} = -\text{divn} = \partial_{xx}\eta/(1 + \partial_x\eta^2)^{3/2}$ est la courbure de l'interface. Pour un fluide newtonien, les deux équations ci-dessus deviennent

$$\frac{-2\mu\partial_x\eta}{1 + \partial_x\eta^2}(\partial_x U - \partial_y V) + \mu \frac{1 - \partial_x\eta^2}{1 + \partial_x\eta^2}(\partial_y U + \partial_x V) = 0 \quad \text{en } y = \eta, \quad (6.8a)$$

$$-P + \frac{2\mu}{1 + \partial_x\eta^2}(\partial_x\eta^2\partial_x U + \partial_y V - \partial_x\eta(\partial_y U + \partial_x V)) + P_0 = \frac{\gamma}{R} \quad \text{en } y = \eta. \quad (6.8b)$$

On peut vérifier que l'écoulement de base (6.1) est bien solution des équations de Navier-Stokes et des conditions aux limites (6.4), (6.7) et (6.8).

Écoulement perturbé, linéarisation et modes normaux

Choisissons comme échelle de longueur l'épaisseur h et comme échelle de temps h/U_0 , et introduisons la fonction de courant ψ des perturbations par²

$$U = \bar{U} + \partial_y \psi, \quad V = \bar{V} - \partial_x \psi. \quad (6.9)$$

Éliminant la pression des équations de Navier-Stokes par dérivation croisée, et considérant les perturbations sous la forme de modes normaux

$$\psi(x, y, t) = \hat{\psi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \eta(x, t) = \hat{\eta}e^{i\alpha(x-ct)}, \quad \alpha = kh, \quad (6.10)$$

les équations de Navier-Stokes conduisent à l'équation d'Orr-Sommerfeld (chapitre 5)

$$(D^2 - \alpha^2)^2 \hat{\psi} = i\alpha Re ((\bar{U} - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 \bar{U}) \hat{\psi} \quad (6.11)$$

où D est l'opérateur de dérivation d/dy .

Les conditions (6.4) d'adhérence à la paroi deviennent

$$D\hat{\psi}(-1) = 0, \quad (6.12a)$$

$$\hat{\psi}(-1) = 0. \quad (6.12b)$$

2. C'est ainsi que le problème a été résolu par Yih (1963), on peut bien sûr choisir de conserver les vitesses et la pression (Smith 1990).

La condition cinématique à l'interface (6.6) s'écrit, linéarisée en $y = 0$,

$$\hat{\psi}(0) - (c - 1)\hat{\eta} = 0. \quad (6.13)$$

La condition dynamique (6.8b) à l'interface fait intervenir la pression, qui peut être éliminée en deux étapes : (i) en dérivant (6.8b) le long de l'interface ($\partial P/\partial s = \mathbf{grad}P.\mathbf{t}$ où s est l'abscisse curviligne sur l'interface), puis (ii) en remplaçant les gradients $\partial_x P$ et $\partial_y P$ à l'aide des équations de Navier-Stokes. Les conditions (6.8) deviennent ainsi, linéarisées en $y = 0$,

$$D^2\hat{\psi}(0) + \alpha^2\hat{\psi}(0) + \hat{\eta}D^2\bar{U}(0) = 0, \quad (6.14a)$$

$$-D^3\hat{\psi}(0) + (3\alpha^2 - i\alpha Re(c - 1)) D\hat{\psi}(0) + i\alpha Re \left(\frac{1}{Fr} + \frac{\alpha^2}{We} \right) \hat{\eta} = 0. \quad (6.14b)$$

6.2.3 Instabilité interfaciale de grande longueur d'onde

Associée aux conditions aux limites (6.12), (6.13) et (6.14), l'équation d'Orr-Sommerfeld (6.11) se présente comme un problème aux valeurs propres généralisé, où la célérité c est la valeur propre. On étudie ici la stabilité temporelle de l'écoulement de base vis-à-vis d'une perturbation de nombre d'onde α réel fixé, et de célérité c complexe et inconnue. La partie réelle c_r correspond à la célérité de l'onde (avec U_0 comme unité), et $\sigma = \alpha c_i$ est son taux de croissance (avec U_0/h comme unité).

Résolution asymptotique

L'expérience montre que, sur un film d'épaisseur millimétrique, l'instabilité se manifeste par la croissance d'ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre de quelques centimètres, ce qui correspond à un nombre d'onde adimensionnel $\alpha = kh \approx 0,1$. D'autre part, le nombre de Reynolds est typiquement inférieur à dix, si bien que les effets inertIELS, d'ordre αRe d'après l'équation d'Orr-Sommerfeld (6.11), sont petits. Enfin, le nombre de Weber est typiquement petit devant l'unité. On considère donc les situations où sont vérifiées les conditions suivantes :

$$\alpha \ll 1, \quad Re = \mathcal{O}(1), \quad We/\alpha^2 = \mathcal{O}(1). \quad (6.15)$$

Pour ces perturbations de grande longueur d'onde, le nombre d'onde α peut être considéré comme un petit paramètre, et la forme des équations suggère de rechercher la célérité c et l'amplitude $\hat{\psi}$ de la fonction propre sous la forme de séries de puissances de ce petit paramètre α :

$$\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}^{(0)}(y) + \alpha\hat{\psi}^{(1)}(y) + \dots, \quad (6.16a)$$

$$c = c^{(0)} + \alpha c^{(1)} + \dots \quad (6.16b)$$

La perturbation interfaciale $\hat{\eta}$ est considérée comme une constante de normalisation des fonctions propres, et n'est pas développée en série (on résout un problème linéaire, dont la solution ne peut être déterminée qu'à une constante près).

À l'ordre zéro, l'équation d'Orr-Sommerfeld s'écrit

$$D^4\hat{\psi}^{(0)}(y) = 0, \quad (6.17)$$

avec les conditions aux limites à la paroi ($y = -1$) et à l'interface ($y = 0$)

$$\hat{\psi}^{(0)}(-1) = 0, \quad (6.18a)$$

$$D\hat{\psi}^{(0)}(-1) = 0, \quad (6.18b)$$

$$D^3\hat{\psi}^{(0)}(0) = 0, \quad (6.18c)$$

$$D^2\hat{\psi}^{(0)}(0) - 2\frac{\hat{\psi}^{(0)}(0)}{c^{(0)} - 1} = 0, \quad (6.18d)$$

où on a utilisé les relations $D^2\bar{U}(0) = -2$ et $U_0 = 1$. La solution de ce problème de Stokes (purement visqueux) s'écrit

$$\hat{\psi}^{(0)}(y) = \hat{\eta}(y + 1)^2, \quad c^{(0)} = 2, \quad (6.19)$$

où $\hat{\eta}$ est l'amplitude de la déformation de l'interface, indéterminée. La valeur propre $c^{(0)}$ est réelle : le taux de croissance est nul, il n'y a donc pas d'instabilité à l'ordre considéré ; les ondes se propagent à la même célérité dimensionnelle $2U_0$ quel que soit leur nombre d'onde, sans dispersion. D'autre part, le rapport des amplitudes $\hat{\eta}$ et $\hat{\psi}^{(0)}$ étant réel, l'interface η et la fonction de courant ψ sont en phase ; les perturbations de vitesse $u = \partial_y\psi$ et $v = -\partial_x\psi$ sont donc respectivement en phase et en quadrature avec l'interface, comme illustré plus loin sur la figure 6.7b. Finalement, à l'ordre zéro, l'écoulement ne présente pas d'instabilité vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde.

À l'ordre un, l'équation d'Orr-Sommerfeld s'écrit

$$D^4\hat{\psi}^{(1)}(y) = iRe \left((\bar{U} - c^{(0)})D^2 - D^2\bar{U} \right) \hat{\psi}^{(0)}.$$

Cette équation se présente comme une équation différentielle non homogène, dont la partie homogène est identique à celle de l'ordre précédent ; le membre de droite est une fonction connue de $\hat{\psi}^{(0)}(y)$ et de ses dérivées (termes inertIELS), et se comporte comme un forçage lié à l'inertie du fluide. Les conditions aux limites, que nous n'explicitons pas, se présentent de la même façon. La résolution de ce problème donne la correction $c^{(1)}$ de la valeur propre :

$$c^{(1)} = iRe \frac{8}{15} \left(1 - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{Fr} + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right). \quad (6.20)$$

Cette correction, purement imaginaire, ne contribue pas à la célérité de l'onde mais affecte seulement son taux de croissance, qui à l'ordre considéré est donc

$$\sigma = \alpha c_i = \alpha^2 c^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha^4). \quad (6.21)$$

Finalement, les ondes longues se propagent avec une célérité égale à deux fois la vitesse U_0 de l'interface, et ne sont pas dispersives ; la vitesse de groupe, égale à la célérité à l'ordre considéré, est donc strictement positive, ce qui implique que l'instabilité ne peut être que convective³. L'écoulement est instable vis-à-vis des perturbations de grande longueur d'onde lorsque l'effet déstabilisant de l'inertie l'emporte sur l'effet stabilisant de la gravité. L'allure du taux de croissance $\sigma(k)$ est présentée sur la figure 6.6a. La condition de stabilité marginale $\sigma = \alpha^2 c_i = 0$ définit un nombre de Froude critique Fr_c ou un nombre de Reynolds critique Re_c , donnés par

$$Fr_c = \frac{5}{8}, \quad Re_c = \frac{5}{4 \tan \theta}. \quad (6.22)$$

Pour $Fr < Fr_c$ (ou $Re < Re_c$), l'écoulement du film plan est linéairement stable. Au-delà, il est instable vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde, avec $\sigma \sim \alpha^2 Re$; les perturbations de plus courte longueur d'onde sont stabilisées par le terme en $-\alpha^4 Re/We$, qui représente l'effet de la tension interfaciale ; les perturbations de nombre d'onde $\alpha = 0$ sont neutres. La figure 6.6b donne le diagramme de stabilité, où la courbe de stabilité marginale délimite les domaines stables et instables. La largeur de la bande instable tend vers zéro au seuil, et donc la longueur d'onde la plus amplifiée diverge ; l'observation de cette divergence est bien entendu limitée par la dimension longitudinale finie de l'écoulement. L'instabilité mise ici en évidence, d'une bande de nombres d'onde incluant le nombre d'onde nul, est appelée *instabilité de grande longueur d'onde*.

Pour ce qui est des ondes courtes, l'étude de Yih (1963) révèle par un développement asymptotique pour $\alpha \gg 1$ que ces ondes sont stables du fait de la tension de surface, comme attendu.

Résolution numérique

Le problème défini par les équations (6.11)-(6.14) peut être résolu numériquement, en s'affranchissant de la restriction des ondes longues. Les polynômes de Chebyshev $T_j(y) = \cos(n \cos^{-1}(y))$, dont l'intérêt a été mentionné au chapitre 5, forment une base appropriée sur laquelle rechercher l'amplitude de la

3. Poursuivant les calculs à l'ordre deux, on trouve pour la correction $c^{(2)}$ de la valeur propre (Benney 1966) :

$$c^{(2)} = -2 - \frac{32}{63} Re^2 \left(1 - \frac{5}{8} \left(\frac{1}{Fr} + \frac{\alpha^2}{We} \right) \right).$$

Cette correction, réelle, introduit une correction d'ordre α^2 à la célérité des ondes, qui apparaissent là faiblement dispersives.

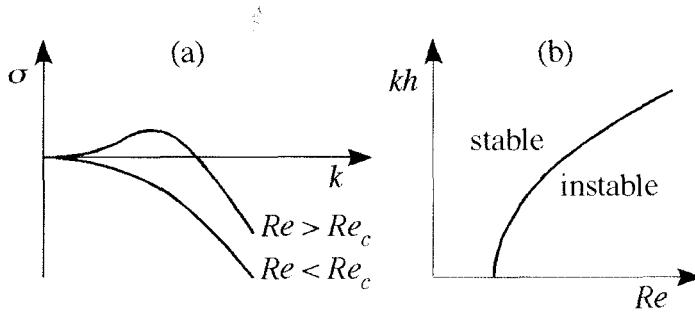


FIG. 6.6 – (a) Allure du taux de croissance $\sigma(k)$ pour $Re < Re_c$ et $Re > Re_c$; (b) diagramme de stabilité.

fonction propre inconnue, sous la forme

$$\hat{\psi}(y) = \sum_{j=0}^n a_j T_j(y). \quad (6.23)$$

Une relation de récurrence permettant d'exprimer la dérivée d'un polynôme en fonction d'autres polynômes, l'équation d'Orr-Sommerfeld et les conditions aux limites peuvent alors être transformées en un problème algébrique où les inconnues sont les coefficients a_j . Le nombre de polynômes nécessaire dépend du nombre de Reynolds et du nombre d'onde α , et de la précision demandée ; il est typiquement de quelques dizaines.

La résolution numérique confirme qu'à petit nombre de Reynolds, la seule instabilité est une instabilité de grande longueur d'onde (les ondes telles que $\alpha \sim 1$ sont stables), et permet de préciser le domaine de validité de la résolution asymptotique. Le tableau 6.1 compare des résultats obtenus par le calcul asymptotique aux résultats numériques correspondants, pour $\alpha = 10^{-2}$ et trois nombres de Reynolds, avec et sans tension interfaciale. Jusqu'à $Re = 1$, les différences sont inférieures à 0,1 % ; des différences significatives apparaissent pour $Re > 1$, d'abord sur le taux de croissance puis sur la célérité ; ces différences sont importantes pour $Re = 100$, qui correspond à $\alpha Re = 1$. On peut donc retenir que la résolution asymptotique donne d'excellents résultats quantitatifs jusqu'à $\alpha Re \approx 0,1$, avec l'avantage sur la résolution numérique de fournir explicitement la relation de dispersion.

Résolution à partir des équations de Saint-Venant

Dans la perspective de diminuer la complexité du problème et de décrire l'évolution non linéaire des films tombants (ou des films cisaillés étudiés dans la section suivante), il est intéressant de considérer un système d'équations intégrées dans l'épaisseur. La procédure d'obtention de ces *équations de Saint-Venant* est décrite en annexe. L'étude de stabilité menée sur ces équations

TAB. 6.1 – Comparaison des célérités et taux de croissance asymptotiques (Yih 1963 ; Benney 1966) et des résultats numériques correspondant (obtenus par l'auteur avec seize polynômes de Chebyshev). $\theta = 60^\circ$, $\alpha = 0,01$.

	$\alpha^2/We = 0$			$\alpha^2/We = 1$	
	$Re = 0,01$	$Re = 1$	$Re = 100$	$Re = 0,01$	$Re = 1$
c_r numérique	1,999 800	1,9997 86	1,77	1,999 804	1,999 818
c_r asymptotique	1,999 800	1,999 786	1,50	1,999 804	1,999 818
$\alpha c_i/\alpha^2$ numérique	-0,379 500	0,148 20	29,7	-0,364 853	-0,185 036
$\alpha c_i/\alpha^2$ asymptotique	-0,379 567	0,148 43	53	-0,364 900	-0,184 900

restitue bien les deux effets majeurs en compétition : la gravité stabilisante et l'inertie déstabilisante. Cependant, cette analyse ne restitue pas le bon nombre de Reynolds critique. Diverses tentatives ont permis d'améliorer la situation, et d'obtenir une description intéressante de la dynamique non linéaire, voir en particulier Ruyer-Quil & Manneville (2000).

6.2.4 Mécanisme de l'instabilité interfaciale

Le mécanisme physique de l'instabilité de grande longueur d'onde peut être compris assez simplement comme suit (Smith 1990). Sur l'interface déformée, l'écoulement de base présente un gradient $\bar{U}'(\eta) = \bar{U}''\eta$, comme représenté sur la figure 6.7a, avec $\bar{U}'' = -2U_0/h^2$. Ce gradient non nul ne satisfait pas la condition de cisaillement nul, d'où la naissance d'une perturbation de vitesse $u(x, y, t)$ qui doit être telle que $u''(0)(y = 0) = -\bar{U}''\eta$. Pour des effets inertIELS petits, cette perturbation correspond à un écoulement cisaillé qui diffuse vers la paroi, où la condition d'adhérence donne le profil de vitesse

$$u^{(0)} = -\bar{U}''(y + h)\hat{\eta}\cos(kx - \omega t). \quad (6.24)$$

La vitesse transversale correspondante s'obtient à partir de la condition d'incompressibilité $\partial_x u + \partial_y v = 0$, d'où

$$v^{(0)} = \bar{U}'' \int_{-h}^y (y + h) dy k\hat{\eta} \sin(kx - \omega t). \quad (6.25)$$

Ces champs de vitesse, représentés sur la figure 6.7b, correspondent bien à la fonction de courant (6.19). Le champ de vitesse $\bar{U} + u^{(0)}$ impose une translation de l'interface à la vitesse c ; en effet, considérons le volume de fluide rentrant pendant un temps dt dans le volume de contrôle défini sur la figure 6.7c; ce volume est, par unité de largeur, la somme de trois contributions : (i) le volume entrant $\hat{\eta}U_0 dt$ lié à l'écoulement de base, (ii) le volume entrant lié aux perturbations de vitesse,

$$dt \int_{-h}^0 u^{(0)}(y, 0, 0) dy = -\frac{1}{2} \bar{U}'' h^2 \hat{\eta} dt = \hat{\eta} U_0 dt,$$

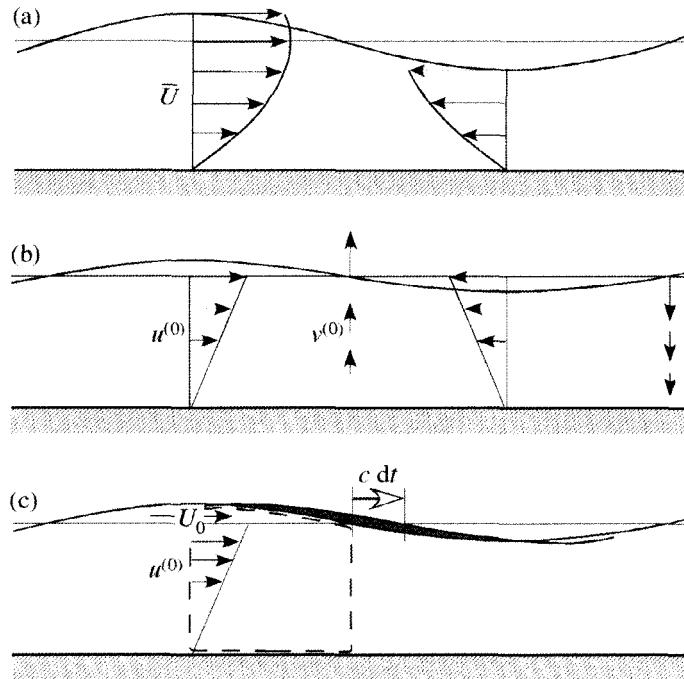


FIG. 6.7 – (a) Écoulement de base ; (b) perturbations de vitesse à l'ordre zéro ; (c) volume de contrôle mettant en évidence la célérité c .

et (iii) le volume sortant $\hat{\eta}cdt$ lié à la translation de l'interface ; l'incompressibilité imposant que le volume net entrant doit être nul, on en déduit que la vitesse de translation de l'onde doit bien être égale à deux fois la vitesse U_0 de l'interface.

La mise en évidence de l'instabilité implique le calcul de la correction inertie à l'écoulement de Stokes (6.24–6.25). Ce calcul peut être conduit en poursuivant comme ci-dessus, nous cherchons seulement ici le résultat sur des arguments dimensionnels. Afin de considérer un problème stationnaire, on se place dans un repère lié à l'onde de célérité $c = 2U_0$, le profil de vitesse de base ayant alors l'allure montrée sur la figure 6.8a. Deux phénomènes se disputent à l'ordre un : la gravité, stabilisante, et l'inertie du fluide, déstabilisante. Considérons la gravité (figure 6.8b) : sous une crête, la pression p^+ est plus élevée que la pression p^- sous un creux, par un effet hydrostatique ; cette différence de pression engendre un écoulement de Poiseuille dont la vitesse $u^{(1g)}$ est telle que

$$\mu \frac{u^{(1g)}}{h^2} \sim k(p^+ - p^-) \sim \rho g \cos \theta k \hat{\eta}. \quad (6.26)$$

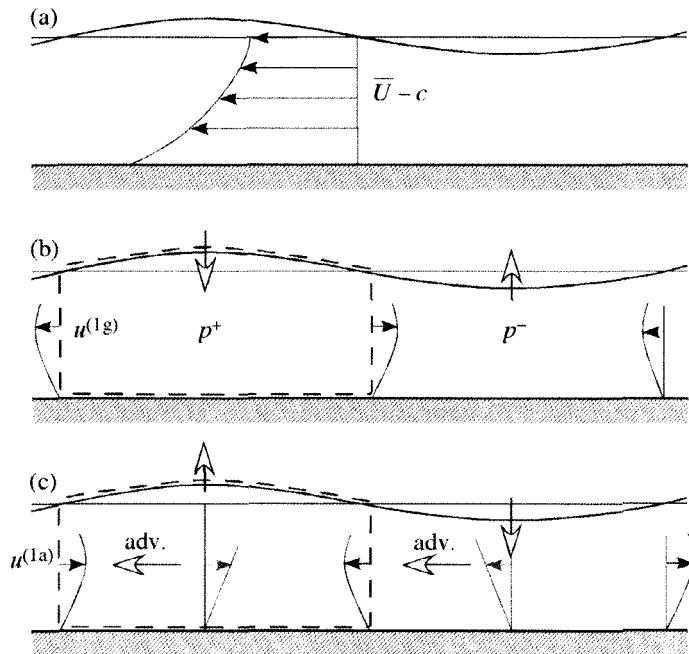


FIG. 6.8 – (a) Écoulement de base dans le repère lié à l'onde de célérité $2U_0$; (b) perturbations de vitesse liées au gradient de pression hydrostatique stabilisant ; (c) perturbations de vitesse liées à l'advection déstabilisante.

(Noter que les corrections de l'écoulement (6.25-6.26) ne font pas intervenir ici le facteur α comme dans le calcul asymptotique de la section précédente). Cet écoulement d'ordre $k\eta U_0$ draine le fluide des crêtes vers les creux, et tend à ramener l'interface plane ; notons que cet effet disparaît pour un film vertical. Le second phénomène, lié à l'inertie, est la somme de deux contributions : l'advection des perturbations $u^{(0)}$ par l'écoulement de base $\bar{U} - c$, et l'advection des gradients transversaux \bar{U}' par les perturbations $v^{(0)}$. La première de ces deux contributions, représentée sur la figure 6.8c, crée un écoulement $u^{(1a)}$ en quadrature avec l'interface, tel que

$$\mu \frac{u^{(1a)}}{h^2} \sim \rho U_0 k u^{(0)} \sim \rho \frac{U_0^2}{h} k \hat{\eta}. \quad (6.27)$$

L'autre contribution de l'advection s'exprime de la même façon car $\rho U_0 k u^{(0)} \sim \rho v^{(0)} \bar{U}'$ du fait de l'incompressibilité. L'écoulement inertiel est dirigé des creux vers les crêtes, et tend donc à amplifier la perturbation. Chacun des deux écoulements, gravitaire et inertiel, engendre une vitesse verticale $v^{(1)} \sim k h u^{(1)}$ en phase avec l'interface, et contribue au taux de croissance σ par un terme

de la forme

$$\sigma \sim \frac{v^{(1)}}{\eta} \sim kh \frac{u^{(1)}}{\eta} \sim (kh)^2. \quad (6.28)$$

Lorsque l'écoulement inertiel (6.27) est petit devant l'écoulement gravitaire (6.26), c'est-à-dire si

$$\rho \frac{U_0^2}{h} k\hat{\eta} \ll \rho g \cos \theta k\hat{\eta}, \quad (6.29)$$

l'écoulement stabilisant dû à la gravité domine, et le film plan est stable. Dans l'autre cas, il est instable. La condition de stabilité marginale correspond à l'équilibre des deux phénomènes, c'est-à-dire à $Fr \sim 1$: on retrouve bien, au facteur numérique 5/8 près, le critère (6.22) issu du calcul exact.

6.2.5 Étude expérimentale

De nombreuses études expérimentales de stabilité des films tombants ont été menées depuis Kapitza (1948, 1949). La première étude quantitative confrontant des résultats expérimentaux à la théorie de Yih (1963) est celle de Liu, Paul & Gollub (1993). Nous présentons ici la partie de ce travail concernant la stabilité linéaire : taux de croissance et célérité des ondes, et courbe de stabilité marginale. Cette étude met en œuvre, entre autres, la relation de Gaster entre taux de croissance spatial et temporel (chapitre 3).

Dispositif expérimental

L'installation expérimentale, schématisée sur la figure 6.9, consiste essentiellement en un plan incliné, de 2 mètres de longueur et de 0,5 mètre de largeur, sur lequel s'écoule un film d'eau et de glycérine. De petites perturbations de pression, d'amplitude et de fréquence contrôlées, peuvent être imposées à l'écoulement à l'amont du plan incliné.

La pente locale de l'interface est mesurée en deux points par réfraction d'un faisceau laser traversant le film ; la résolution sur la mesure de la pente est 5×10^{-5} , ce qui correspond à une amplitude de $0,4 \mu\text{m}$ pour une vague sinusoïdale de 5 cm de longueur d'onde. Une caméra permet de visualiser l'ensemble du champ de vagues : l'écoulement est éclairé uniformément par une source de lumière ultraviolette ; cette lumière rend fluorescente de la fluorescéine ajoutée en très petite quantité au fluide ; l'intensité lumineuse émise par le film est proportionnelle à son épaisseur $h(x, y, t)$, et la mesure de cette intensité à partir d'une caméra et d'un traitement d'images permet d'accéder à la position de l'interface. Les variations relatives d'épaisseur du film ainsi mesurables sont de l'ordre de 1 %.

La figure 6.10 montre des images de champs de vagues obtenues par fluorescence, et les profils des ondes correspondants. La figure 6.10a présente une onde périodique de fréquence 5 Hz dont l'amplitude semble constante (onde « saturée »), tandis que la figure 6.10b présente un train d'ondes plus espacées et de plus basse fréquence, dites « solitaires », avec des oscillations

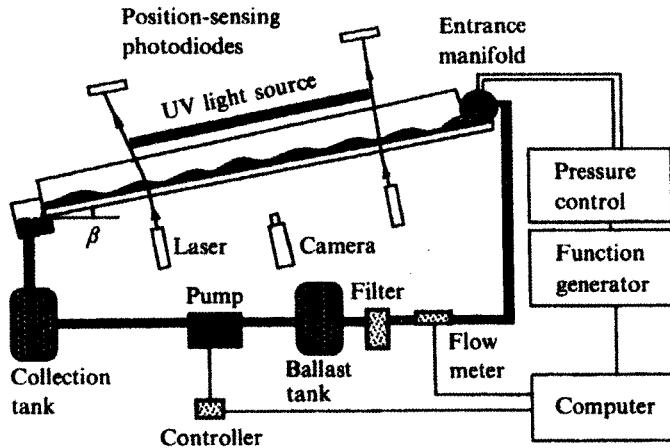


FIG. 6.9 – Schéma de l'installation expérimentale de Liu *et al.* (1993), montrant en particulier le réservoir de ballast destiné à réduire les fluctuations de pression, le principe du forçage périodique de l'écoulement à l'entrée du plan incliné, et la métrologie : deux mesures optiques locales de la pente de l'interface et visualisation du champ de vagues par fluorescence.

secondaires devant le front du pic principal. Ces deux premières figures correspondent à des ondes forcées de fréquence et d'amplitude initiales imposées. La figure 6.10c montre une onde naturelle (non forcée), caractérisée par son allure non périodique.

Mesure du nombre de Reynolds critique

La difficulté de la mesure du nombre de Reynolds critique Re_c provient du fait que le premier nombre d'onde instable est $k = 0$. La détermination de Re_c passe donc par la détermination de la courbe de stabilité marginale pour $k \neq 0$ puis son extrapolation vers $k = 0$. La méthode de détermination de cette courbe est la suivante. L'inclinaison et le nombre de Reynolds étant fixés, on compare la puissance du signal de pente, obtenue par intégration du spectre autour de la fréquence de forçage, pour différentes fréquences d'excitation (figure 6.11). Pour des fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_c , l'onde s'amplifie spatialement et le signal donné par la sonde aval (\square) est plus important que le signal amont (\circ). Pour des fréquences supérieures à cette fréquence de coupure, l'onde s'amortit. Cette fréquence de coupure, déterminée par l'intersection des deux courbes de puissance de l'onde, correspond donc à une onde ni amplifiée ni amortie, *i.e.* à une onde marginalement stable. La précision de cette mesure est de l'ordre de 0,2 Hz.

La procédure de détermination de la fréquence de coupure f_c est réitérée pour plusieurs nombres de Reynolds au voisinage du seuil de l'instabilité.

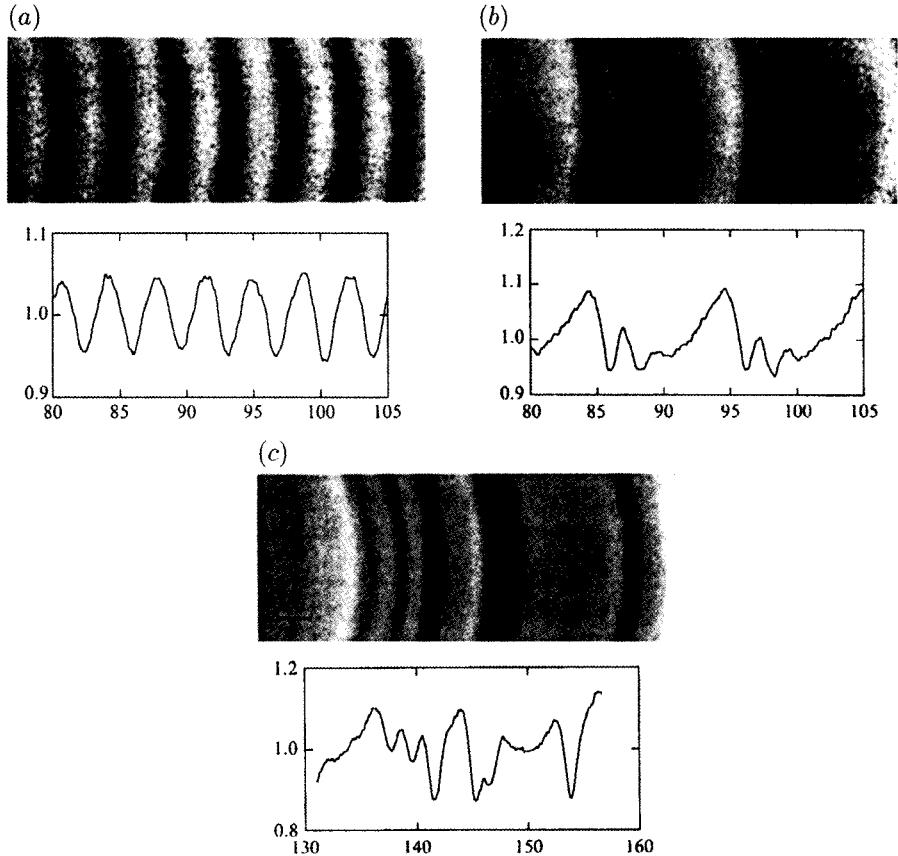


FIG. 6.10 – Images de vagues obtenues par fluorescence, et profils d'épaisseur $h(x)$ correspondants, normalisés par l'épaisseur moyenne h_0 . Le film s'écoule de la gauche vers la droite sur un plan d'inclinaison $\theta = 4,6^\circ$. (a) Vagues presque sinusoïdales forcées à 5,5 Hz, $Re = 25$. (b) Vagues non linéaires forcées à 2 Hz, $Re = 25$. (c) Vagues naturelles non forcées loin en aval, $Re = 57$ (Liu *et al.* 1993).

La fréquence f étant reliée linéairement au nombre d'onde k pour des ondes non dispersives ($f = \omega/2\pi = kc/2\pi \approx kU_0/\pi$), et compte tenu de l'expression (6.21) du taux de croissance temporel, on attend au voisinage du seuil de l'instabilité une relation du type

$$f_c \sim \sqrt{Re - Re_c}. \quad (6.30)$$

La recherche de la parabole approchant au plus près les mesures $f_c(Re)$ détermine donc Re_c (figure 6.12). On remarquera que la courbure de la parabole n'est pas bien prédite par la solution asymptotique; cette courbure ne prend en effet en compte que l'effet de la tension de surface, supposé tel que

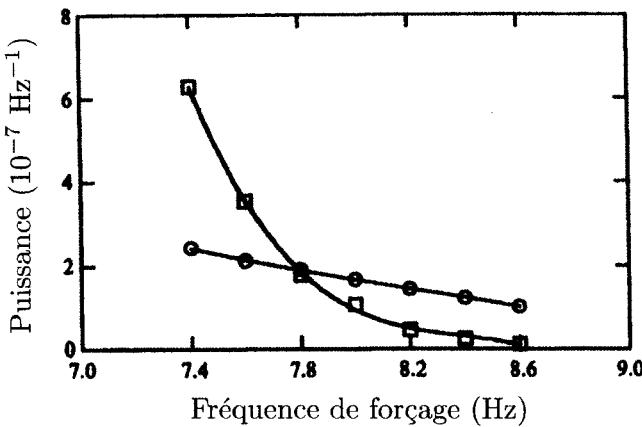


FIG. 6.11 – Détermination de la fréquence de coupure f_c à partir de la puissance du signal de pente comme fonction de la fréquence de forçage, aux deux abscisses $x = 43 \text{ cm}$ (\circ) et $x = 134 \text{ cm}$ (\square), pour $\theta = 5,6^\circ$ et $Re = 20,7$ (Liu *et al.* 1993).

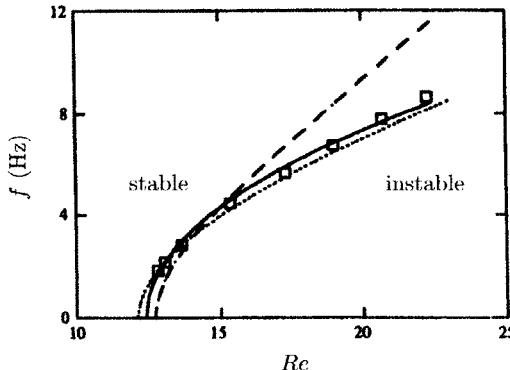


FIG. 6.12 – Courbes de stabilité marginale pour $\theta = 5,6^\circ$. (—), lissage (6.30) des points expérimentaux donnant $Re_c = 12,4 \pm 0,1$; (---), solution asymptotique (6.21) donnant $Re_c = 12,7$; (...), solution approchée de Anshus & Goren (1966) (Liu *et al.* 1993).

$(kh)^2/We = \mathcal{O}(1)$; un calcul plus complet devrait prendre en compte tous les effets d'ordre $(kh)^4$.

Le nombre de Reynolds critique étant obtenu pour une inclinaison particulière, l'ensemble de la procédure peut être recommandé pour d'autres inclinaisons. La figure 6.13 compare les résultats expérimentaux au critère de stabilité marginale donné par l'analyse asymptotique, $Re_c = 5/(4 \tan \theta)$. L'écart entre résultats expérimentaux et théoriques est de l'ordre de 10 %, ce qui correspond à la précision globale des mesures compte tenu de la complexité de la procédure expérimentale. Cet accord est donc tout à fait satisfaisant.

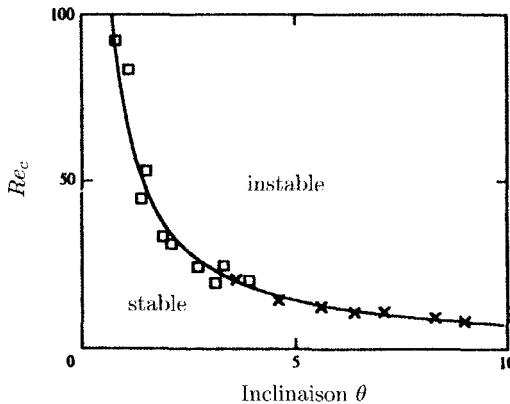


FIG. 6.13 – Nombre de Reynolds critique Re_c fonction de l'inclinaison θ . Résultats obtenus pour de l'eau (\square) et pour une solution eau-glycérine (\times). La courbe correspond au résultat asymptotique (6.22) (Liu *et al.* 1993).

Taux de croissance spatial et vitesse de phase

Le taux de croissance spatial peut être déterminé à partir de la visualisation, à un instant donné, du champ de vagues issu d'une perturbation sinusoïdale à l'amont de l'écoulement. Cette visualisation donne un profil d'épaisseur qui, moyenné sur plusieurs réalisations pour diminuer le bruit, peut être approché par une sinusoïde d'amplitude exponentiellement croissante. On détermine ainsi le taux de croissance spatial et le nombre d'onde. Connaissant la fréquence ω et le nombre d'onde k , on en déduit la célérité $c = \omega/k$. Le taux de croissance temporel peut alors être déterminé par la relation de Gaster (chapitre 3), la vitesse de groupe étant ici $c_g \approx 2U_0$.

La figure 6.14 présente le taux de croissance et la célérité des ondes ainsi déterminés pour un écoulement typique. Ces résultats sont comparés à la solution asymptotique ondes longues et à la solution approchée de Anshus & Goren (1966). Il s'avère que la solution ondes longues donne de bons résultats tant que $kh \lesssim 0,03$, soit $kh Re \lesssim 0,7$. Par contre, la solution approchée de Anshus & Goren est en bon accord avec l'expérience, tant pour le taux de croissance que pour la célérité ; en particulier, le nombre d'onde dont le taux de croissance est maximum est bien prédit. L'écart entre les célérités mesurées et calculées, de l'ordre de 3 à 5 %, pourrait être dû à des effets d'amplitude finie (*i.e.* à des effets non linéaires).

Caractère convectif de l'instabilité

L'analyse de stabilité linéaire de Yih (1963) montre que les perturbations de longueur d'onde grande devant l'épaisseur du film sont faiblement dispersives et se propagent vers l'aval avec une célérité égale à deux fois la vitesse de

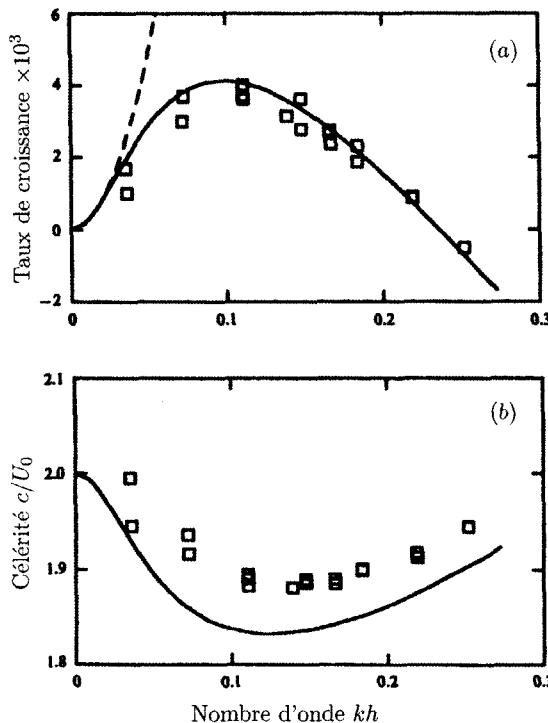


FIG. 6.14 – (a) Taux de croissance spatial et (b) célérité en fonction du nombre d'onde. $\theta = 4,6^\circ$, $Re = 23$, $We = 0,19$. (□), observations ; (—), Anshus & Goren (1966) ; (---), ondes longues, (Liu *et al.* 1993).

l'interface U_0 . Un « paquet d'ondes » est donc emporté par l'écoulement avec une vitesse de groupe sensiblement égale à $2U_0$. Ainsi, aucune perturbation ne peut remonter l'écoulement ni se maintenir à une distance donnée de l'entrée, ce qui correspond à une instabilité convective (voir chapitre 3).

Ce caractère convectif de l'instabilité est étudié expérimentalement en suivant la réponse à une perturbation impulsionale générée à l'amont. La figure 6.15 montre qu'une telle perturbation se propage et s'amplifie vers l'aval en s'étalant. À une distance donnée de l'entrée de l'écoulement, le film retourne à son état initial non perturbé après le passage du paquet d'ondes. Le caractère convectif de l'instabilité se trouve ainsi confirmé.

6.2.6 Instabilité à faible pente du mode de paroi

À faible pente θ , le nombre de Reynolds critique $Re_c = 5/4 \tan \theta$ du mode interfacial devient très grand. Une autre instabilité se manifeste alors, associée à des fonctions propres présentant un maximum au voisinage de la paroi, et

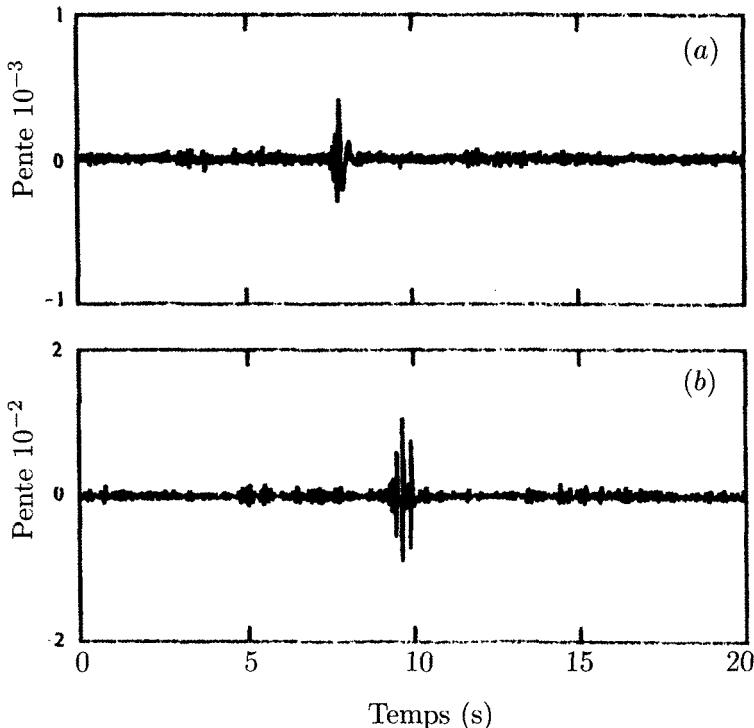


FIG. 6.15 · Une perturbation générée à l'entrée est observée (a) à $x = 44$ cm et (b) à $x = 97$ cm ($\theta = 2,5^\circ$, $Re = 150$). La perturbation s'amplifie en étant convectée vers l'aval par l'écoulement. Noter que les échelles verticales sont différentes (Liu *et al.* 1993).

non plus au voisinage de l'interface comme précédemment. Ce *mode de paroi* mis en évidence par Floryan, Davis & Kelly (1987) correspond à des ondes de Tollmien-Schlichting s'amplifiant selon un mécanisme identique à celui de l'instabilité d'une couche limite ou de l'écoulement de Poiseuille discutée au chapitre 5.

6.3 Films liquides cisailés

6.3.1 Introduction

Parmi les situations physiques citées en introduction de ce chapitre, plusieurs font intervenir deux ou plusieurs couches fluides superposées, entraînées par un gradient de pression (écoulement de Poiseuille) ou par un cisaillement (écoulement de Couette). L'analyse de la stabilité de ce type d'écoulement conduit à une équation d'Orr-Sommerfeld pour chaque couche, couplées par

quatre conditions de raccordement des vitesses et des contraintes aux interfaces. Une bonne introduction au problème d'un film liquide cisaillé par un écoulement d'air (turbulent) est l'article de synthèse de Hanratty (1983). Dans le cas plus simple de l'écoulement *visqueux* de deux liquides, la stabilité vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde, *i.e.* $kh \ll 1$, a été résolue par Yih (1967). De nombreuses études ont suivi, analysant la stabilité des ondes courtes (Hooper & Boyd 1983; Hinch 1984), les ondes de Tollmien-Schlichting (Hooper & Boyd 1987), ou analysant numériquement les situations hors d'atteinte des développements asymptotiques, typiquement $kh \sim 1$ et $Re \geq 1$ (Renardy 1985). L'étude des écoulements annulaires, initiée par Hickox (1971), a fait l'objet d'une synthèse par Joseph *et al.* (1997).

L'analyse de Yih (1967) révèle un critère simple d'instabilité vis-à-vis des ondes longues : il suffit que la couche la plus fine soit la plus visqueuse. Nous cherchons ici à décrire le mécanisme de cette instabilité par un raisonnement dimensionnel (Charru & Hinch 2000). Considérons donc un film d'épaisseur h_1 suffisamment mince devant une épaisseur caractéristique h_2 de l'autre fluide, pour que l'écoulement au voisinage du film puisse être considéré comme un écoulement cisaillé plan, comme représenté sur la figure 6.16a. Dans le cas d'un écoulement de Couette où une paroi solide impose une vitesse U_0 au fluide 2 d'épaisseur h_2 , l'écoulement non perturbé est exactement donné par

$$\bar{U}_1 = U_i \frac{y}{h_1}, \quad \bar{U}_2 = U_i + (U_0 - U_i) \frac{y - h_1}{h_2}, \quad (6.31)$$

où la vitesse U_i de l'interface est définie par la continuité de la contrainte tangentielle τ_i à l'interface :

$$\tau_i = \mu_1 \frac{U_i}{h_1} = \mu_2 \frac{U_0 - U_i}{h_2}. \quad (6.32)$$

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, plan ou cylindrique, mû par un gradient de pression $-G$, l'expression du champ des vitesses est un peu plus compliquée, mais pour un film mince, les expressions (6.31) et (6.32) restent une bonne approximation au voisinage de l'interface, à des termes correctifs près d'ordre h_1/h_2 . Pour un écoulement annulaire en tube de rayon R par exemple, définissant h_2 comme le rayon de l'écoulement central, soit $h_2 = R - h_1$, la vitesse U_0 correspond alors au double de la vitesse sur l'axe, soit $U_0 = 2Gh_2^2/4\mu_2$, et le cisaillement interfacial est $\tau_i = GR/2$ (toujours à des termes correctifs près d'ordre h_1/h_2).

Ainsi, pour un écoulement de Couette ou de Poiseuille, les vitesses U_2 dans le fluide 2 sont d'ordre U_0 , alors que dans le film, les vitesses U_1 sont d'ordre $U_i \sim (\mu_2 h_1 / \mu_1 h_2) U_0$, *i.e.* plus petites d'un facteur h_1/h_2 .

6.3.2 Mécanisme de l'instabilité des ondes longues

Considérons une perturbation $\eta = \eta_0 \cos kx$ de l'interface (figure 6.16b). Pour des ondes longues, les gradients longitudinaux, d'ordre k , sont petits

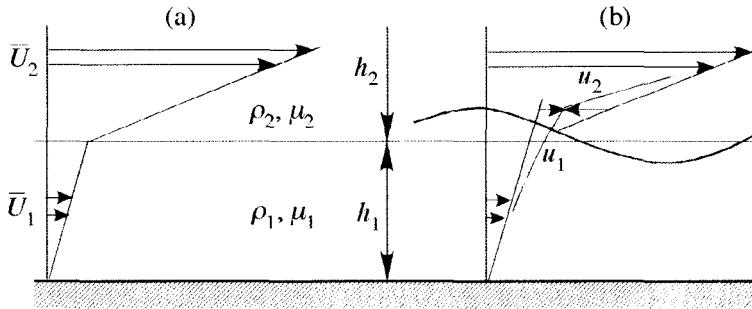


FIG. 6.16 – Écoulement au voisinage d'un film mince cisaiillé dans le cas $\mu_2 < \mu_1$; (a) écoulement de base ; (b) mécanisme initiateur de l'instabilité : une déformation de l'interface impose, pour satisfaire la continuité de la vitesse, une accélération du film au voisinage d'une crête, et un freinage du fluide 2.

devant les gradients transverses eux-mêmes d'ordre $1/h_1$ et $1/h_2$; l'incompressibilité $\text{div} \mathbf{u} = 0$ implique alors que les amplitudes des perturbations de vitesse transversales sont petites devant les amplitudes longitudinales :

$$v_1 \sim kh_1 u_1 \ll u_1, \quad v_2 \sim kh_2 u_2 \ll u_2. \quad (6.33)$$

Évaluons les effets inertIELS par rapport aux effets visqueux pour la perturbation. Pour une particule de fluide 2, la force d'inertie est d'ordre $\rho_2 U_2 (k u_2)$ et les forces visqueuses d'ordre $\mu_2 u_2 / h_2^2$, par unité de volume ; le rapport de ces deux forces définit le « nombre de Reynolds effectif »

$$Re_{2,\text{eff}} = kh_2 Re_2 \quad \text{où} \quad Re_2 = \frac{\rho_2 U_0 h_2}{\mu_2}. \quad (6.34)$$

Pour le film, l'estimation des effets inertIELS et visqueux conduit de même au nombre de Reynolds effectif

$$Re_{1,\text{eff}} = kh_1 Re_1 \quad \text{où} \quad Re_1 = \frac{\rho_1 U_i h_1}{\mu_1}. \quad (6.35)$$

Avec l'estimation $U_i/U_0 \sim \mu_2 h_1 / \mu_1 h_2$ faite plus haut, il vient, pour des masses volumiques et viscosités du même ordre de grandeur :

$$Re_{1,\text{eff}} \sim \frac{h_1^3}{h_2^3} Re_{2,\text{eff}} \ll Re_{2,\text{eff}}. \quad (6.36)$$

Ainsi, les effets inertIELS dans le film sont très petits devant ceux dans le fluide 2.

Considérons le cas où les effets inertIELS dans le fluide 2 (et donc *a fortiori* dans le film) sont petits. À l'ordre dominant, l'écoulement perturbé est un écoulement purement visqueux (écoulement de Stokes), qu'on peut estimer

comme suit. La continuité de la vitesse longitudinale à l'interface impose, linéarisée en $y = 0$,

$$\bar{U}_1 + \eta \bar{U}'_1 + u_1^{(0)} = \bar{U}_2 + \eta \bar{U}'_2 + u_2^{(0)},$$

qui, compte tenu de la continuité de la vitesse du cisaillement pour l'écoulement de base ($\bar{U}_1 = \bar{U}_2$ et $\mu_1 \bar{U}'_1 = \mu_2 \bar{U}'_2$), conduit à

$$u_2^{(0)} - u_1^{(0)} \sim U_i \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \frac{\eta}{h_1}. \quad (6.37)$$

La continuité du cisaillement à l'interface impose d'autre part, compte tenu de $v \ll u$,

$$\mu_1 (\bar{U}'_1 + \partial_y u_1^{(0)}) = \mu_2 (\bar{U}'_2 + \partial_y u_2^{(0)}),$$

d'où

$$\frac{\mu_1 u_1^{(0)}}{h_1} \sim -\frac{\mu_2 u_2^{(0)}}{h_2}. \quad (6.38)$$

Le signe « $-$ » provient du fait que les perturbations sont nécessairement de signe contraire ; par exemple si $\mu_2 < \mu_1$, situation correspondant à la figure 6.16, le film est accéléré ($u_1^{(0)} > 0$) et le fluide 2 freiné ($u_2^{(0)} < 0$). On déduit de (6.37) et (6.38) les vitesses des perturbations

$$u_1^{(0)} \sim \frac{\eta}{h_2} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} U_i, \quad u_2^{(0)} \sim -\frac{\mu_1 h_2}{\mu_2 h_1} u_1^{(0)}. \quad (6.39)$$

Dans le cadre de l'approximation d'écoulement de Stokes, ces perturbations de vitesse, représentées sur la figure 6.17a, sont donc en phase avec la déformation η de l'interface. On déduit de la condition cinématique $\partial_t \eta = v_1^{(0)} - U_i \partial_x \eta$ à l'interface que ces perturbations se propagent, sans croître ni décroître, avec la célérité

$$c \sim U_i. \quad (6.40)$$

La mise en évidence de l'instabilité nécessite, comme pour le film tombant étudié dans la section précédente, d'évaluer la correction inertie à l'écoulement de Stokes (6.34). Les effets inertiel dans le film étant négligeables d'après (6.36), seule l'inertie du fluide 2 doit être prise en compte. Raisonnons sur les perturbations ω_2 de la vorticité, dont l'équation de transport ne fait pas intervenir la pression, et s'écrit en deux dimensions

$$\rho_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mu_2 \Delta \omega_2. \quad (6.41)$$

Pour des perturbations de grande longueur d'onde ($kh_2 \ll 1$), cette équation se réduit à l'ordre dominant à $\Delta \omega_2^{(0)} = 0$ correspondant à l'écoulement de

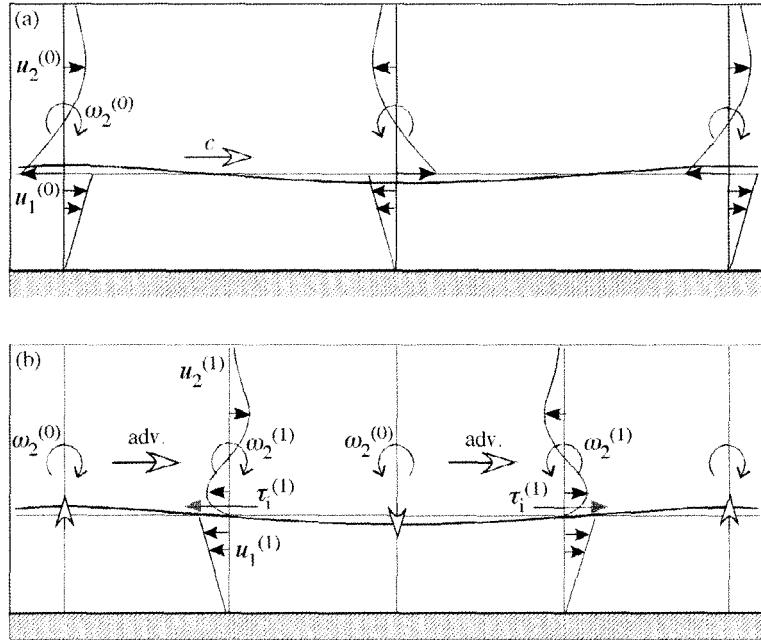


FIG. 6.17 – Perturbations de vitesse longitudinale induites par une déformation sinusoïdale $\eta(x)$ du lit et vorticité associée ; (a) écoulement de Stokes en phase avec $\eta(x)$; (b) correction inertielle en quadrature.

Stokes estimé ci-dessus et représenté sur la figure 6.17a. À l'ordre suivant, la correction inertielle $\omega_2^{(1)}$ est donnée dimensionnellement par

$$\mu_2 \frac{\omega_2^{(1)}}{h_2^2} \sim \rho_2 k U_0 \omega_2^{(0)},$$

soit $\omega_2^{(1)} \sim kh_2 Re_2 \omega_2^{(0)}$. Cette correction due à l'advection est en quadrature avec $\omega_2^{(0)}$, comme illustré sur la figure 6.17b (on peut se convaincre de ce retard de phase de $\pi/2$ en considérant l'équation de l'amplitude complexe $\hat{\omega}_2^{(1)}$ d'un mode normal, où intervient un facteur ik issu de la dérivation par rapport à x dans le terme advectif). La vorticité $\omega_2^{(1)}$ engendre un écoulement longitudinal d'ordre $u_2^{(1)} \sim \omega_2^{(1)} h_2$, qui doit se raccorder sur l'interface à l'écoulement dans le film, c'est-à-dire que $u_2^{(1)}$ doit s'annuler sur l'interface ; la correction $u_2^{(1)}$ doit alors avoir l'allure représentée sur la figure 6.17b. Cette correction engendre un cisaillement $\tau_i^{(1)} \sim \mu_2 \omega_2^{(1)}$ du film, lequel répond par un écoulement tel que $\mu_1 u_1^{(1)} / h_1 \sim \tau_i^{(1)}$. Enchaînant les estimations ci-dessus, il vient donc

$$u_1^{(1)} \sim kh_2 Re_2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \frac{\eta}{h_2} U_i, \quad \text{avec} \quad U_i \sim \frac{\mu_2 h_1}{\mu_1 h_2} U_0. \quad (6.42)$$

Pour $\mu_2 < \mu_1$, cet écoulement est dirigé des creux vers les crêtes, et amplifie donc la perturbation initiale. On déduit le taux de croissance de $\sigma \sim v_1^{(1)}/\eta \sim kh_1 u_1^{(1)}\eta$, soit

$$\sigma \sim (kh_1)^2 Re_2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1} \frac{U_0}{h_2}. \quad (6.43)$$

Ainsi, il apparaît que si le film est moins visqueux que le fluide 2, le taux de croissance est négatif et l'écoulement est donc stable ; dans le cas contraire, l'écoulement est instable.

6.3.3 Ondes « moins longues »

L'analyse dimensionnelle ci-dessus est valide tant que les gradients transversaux dans le fluide 2 sont d'ordre $1/h_2$, hypothèse toujours vraie pour des ondes suffisamment longues, mais qui peut tomber en défaut pour des ondes « moins longues ». Ondes « moins longues » signifie ondes pour lesquelles la profondeur de pénétration δ des perturbations de vorticité, régies par (6.41), devient plus petite que l'échelle transversale h_2 . L'échelle transversale pertinente n'est alors plus h_2 mais δ . Cette profondeur δ s'obtient en écrivant que les effets inertIELS et visqueux y sont du même ordre de grandeur⁴ :

$$\rho_2 k U_0 \omega_2 \sim \mu_2 \frac{\omega_2}{\delta^2}, \quad (6.44)$$

où $U_0 \sim (\tau_i/\mu_2)\delta$ est la vitesse à la distance δ de l'interface. On en déduit

$$\delta = \left(\frac{k \mu_2^2}{\rho_2 \tau_i} \right)^{1/3}. \quad (6.45)$$

Retenant l'analyse de l'écoulement perturbé avec δ comme échelle caractéristique transversale, il vient que le taux de croissance varie non plus comme $(kh_1)^2$ mais comme $(kh_1)^{4/3}$; cependant le préfacteur est toujours proportionnel à la différence $(\mu_1 - \mu_2)$: un film mince cisaillé par un fluide moins visqueux est toujours instable.

Terminons par une comparaison des instabilités d'un film tombant et d'un film cisaillé. Les deux analyses mettent en évidence un mécanisme d'initiation d'une part, et un mécanisme d'amplification d'autre part. Pour le film tombant, le mécanisme d'initiation réside dans la continuité du *cisaillement* à l'interface ; pour le film, le mécanisme d'initiation réside dans la continuité de la *vitesse* ; ces mécanismes d'initiation imposent le développement de perturbations purement visqueuses. Dans les deux cas, c'est ensuite l'advection qui est responsable de l'amplification des perturbations, de façon directe pour le film tombant, et de façon plus détournée pour le film cisaillé *via* la contrainte $\tau_i^{(1)}$.

4. Au-delà de δ , les perturbations tendent vers zéro dans une couche irrotationnelle d'épaisseur k^{-1} ; cette couche potentielle correspond au « pont supérieur » de la théorie du triple pont (ou triple couche) (Cousteix & Mauss 2006).

6.4 Exercices

6.4.1 Inclinaison critique d'un film tombant

- Établir les relations (6.1) qui définissent l'écoulement de base. Déterminer l'épaisseur d'un film d'eau ($\mu = 10^{-3}$ Pa s) sur un plan incliné de 10° et large de 1 m, pour un débit de 1 l/min. Que devient cette épaisseur pour un film d'huile huit fois plus visqueux ? Comment varie cette épaisseur lorsque l'inclinaison augmente ?
- Déterminer l'inclinaison critique au-delà de laquelle un film d'eau devient instable, pour un débit d'un litre par minute et par mètre de largeur.

6.4.2 Conditions aux limites sur une interface libre

- Retrouver l'expression de la condition cinématique (6.6) à partir du principe de conservation de la masse dans un volume de contrôle d'épaisseur dx , et limité par la paroi inférieure et par l'interface.
- Établir les conditions aux limites linéarisées (6.13-6.14). On commencera par établir les deux conditions (6.8) sur les contraintes à l'interface, qu'on linéarisera ensuite. On veillera en particulier à bien linéariser la pression à l'interface :

$$P(\eta) = \bar{P}(\eta) + p(\eta) = \bar{P}(0) + \eta \partial_y \bar{P}(0) + p(0) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

6.4.3 Résolution pour les ondes longues

- Établir le système d'équations de Stokes (6.17-6.18) à partir des équations (6.11-6.13). Résoudre ce système, et en déduire la solution (6.19).
- Calculer la correction inertielle et en déduire le taux de croissance $\sigma = \alpha c_i$ où c_i est donné par (6.20).

Chapitre 7

Avalanches, rides et dunes

7.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction à la stabilité des écoulements granulaires, à travers l'étude de trois phénomènes : les ondes à la surface des avalanches, et les rides et les dunes formées par un écoulement cisaillant un lit de grains. Ces phénomènes suscitent de nombreuses questions quant à leur formation et leur évolution, et demeurent mal compris. Les résultats présentés dans ce chapitre sont donc sans doute provisoires pour beaucoup d'entre eux, contrairement aux résultats présentés dans les chapitres précédents qui sont bien établis pour la plupart.

Les avalanches, les rides et les dunes confrontent l'activité humaine à de redoutables problèmes. Pour ce qui est des phénomènes naturels, les avalanches de neige ou de boue sont connues pour leur caractère destructeur ; le déplacement d'une dune éolienne peut obstruer une route ou mettre en péril des habitations ou des installations industrielles ; les dunes sub-aquatiques, augmentant le frottement de l'écoulement d'une rivière, élèvent le niveau de l'eau et contribuent aux inondations, ou peuvent perturber la navigation dans les mers peu profondes, la mer du Nord par exemple. Dans l'industrie, de nombreux matériaux sont transportés sous forme granulaire, en particulier les matériaux de construction (ciments, sables, graviers), le charbon, ainsi que de nombreux matériaux des industries agro-alimentaire et pharmaceutique. Dans des conduites qui les transportent, ces grains sont susceptibles de former des bouchons qui augmentent le gradient de pression, et peuvent même obstruer la conduite et occasionner de sérieux dommages aux installations.

Dans les situations évoquées ci-dessus, le comportement du milieu granulaire ne se laisse pas appréhender facilement : il peut résister aux déformations comme un solide, dans un talus par exemple, ou s'écouler comme un fluide, dans une avalanche ou un sablier (Duran 1997). Il n'existe pas aujourd'hui de modèle simple général de ces milieux, c'est-à-dire de loi de comportement liant contraintes et déformations, comme il existe les modèles continus du solide

élastique et du fluide newtonien. Une première raison réside dans un problème d'échelle : à l'échelle des phénomènes observés – métrique pour fixer les idées –, la dimension des grains, millimétrique, n'est pas très petite (contrairement aux molécules d'un fluide) si bien que les fluctuations statistiques restent importantes. Une deuxième raison est que l'interaction entre grains est bien plus complexe qu'entre molécules : (i) cette interaction est dissipative, et (ii) la forme et la rugosité des grains, ainsi que la géométrie des empilements, font intervenir des comportements à seuil, fortement non linéaires. On peut donc s'attendre à ce que la modélisation d'un milieu granulaire comme un milieu continu ne rende pas bien compte de la réalité. On doit à Coulomb, à la fin du XVIII^e siècle, une première modélisation, *i.e.* une relation entre contrainte normale et tangentielle à travers un coefficient de frottement « effectif ». Il est assez remarquable que ces lois d'origine empirique non seulement aient résisté jusqu'à présent, mais soient restées à peu près le seul élément de modélisation. La physique des milieux granulaires fait aujourd'hui l'objet de recherches très actives, à la fois numériques, expérimentales et théoriques ; en dépit des difficultés mentionnées ci-dessus, et même si la perspective d'une théorie générale reste éloignée, de nets progrès ont été réalisés.

Du point de vue des instabilités, la nouveauté introduite dans ce chapitre tient à la prise en compte d'un milieu dont le comportement n'est pas gouverné par les équations de la mécanique des fluides. On verra que des lois rhéologiques simples, semi-empiriques, associées bien entendu aux principes de conservation, permettent de rendre compte des phénomènes de formation d'ondes à la surface des avalanches, et de formation de rides et de dunes. On verra aussi qu'au-delà de lois rhéologiques algébriques, l'introduction de phénomènes de relaxation permet d'enrichir la description et la prédition des phénomènes. Sur le plan conceptuel, deux difficultés surgissent : la forte non-linéarité du milieu induite par les phénomènes de seuil, et la dimension des grains qui n'est pas petite devant l'amplitude de rides par exemple ; ces difficultés peuvent rendre problématique la notion de linéarisation et limiter la pertinence des études de stabilité ; cette question reste ouverte, mais la confrontation des prédictions avec les observations invite néanmoins à un certain optimisme.

La section suivante (§7.2) est consacrée aux ondes à la surface des avalanches. La troisième section est dédiée à la modélisation du transport granulaire sur un lit cisaillé par un écoulement. Après une brève présentation des rides et dunes éoliennes et aquatiques (§7.4), on discute la formation de rides aquatiques en écoulement continu (§7.5), en écoulement oscillant (§7.6), et enfin la formation de dunes aquatiques (§7.7).

7.2 Avalanches

Lorsque la pente d'un tas granulaire excède une valeur critique voisine de 30°, le milieu granulaire se met brusquement en mouvement en surface.

Ce phénomène d’avalanche peut aussi survenir suite à une modification physique du milieu, de sa cohésion par exemple (avalanches de neige) ou de son degré de saturation en eau (glissements de terrain). Les phénomènes gouvernant le déclenchement d’une avalanche, et la dynamique de l’écoulement qui s’ensuit, demeurent mal connus (GDR MiDi 2004).

Lorsque l’avalanche s’écoule sur un substrat rigide, peu ou pas érodable, un phénomène assez général a été observé : l’apparition d’ondes de surface d’amplitude comparable à l’épaisseur. Ces ondes, dont la figure 7.1 donne une illustration, ont une longueur grande devant l’épaisseur de la couche en mouvement, et un profil triangulaire. Elles ressemblent beaucoup aux ondes qui se développent à la surface d’un film liquide sur un plan incliné, qui résultent d’une instabilité inertie comme montré au chapitre précédent. Cette section présente une étude d’ondes granulaires réalisée par Forterre & Pouliquen (2003) : étude expérimentale inspirée de celle de Liu, Paul & Gollub (1993) pour les films liquides, et étude de stabilité fondée sur les équations de Saint-Venant.



FIG. 7.1 – Ondes de surface sur un écoulement de sable (diamètre des grains $d = 0,8$ mm,倾き $\alpha = 34^\circ$, épaisseur $h = 4,6$ mm, largeur de l’écoulement $W = 70$ cm (Forterre & Pouliquen 2003).

7.2.1 Dynamique d’un écoulement granulaire dense

Considérons un écoulement granulaire sur un fond rugueux fixé, c’est-à-dire non érodable, d’inclinaison α par rapport à l’horizontale. Lorsque l’échelle de variation de l’écoulement suivant la direction longitudinale x est grande

devant l'épaisseur du film, l'intégration des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement suivant l'épaisseur de la couche conduit aux équations de Saint-Venant. Ces équations, qui gouvernent l'évolution de la vitesse moyenne U et de l'épaisseur h , sont établies dans l'annexe A. Pour un fond plan, et en ignorant par souci de simplicité l'effet du profil vertical de vitesse sur le flux advectif de quantité de mouvement ($c_{U^2} = 1$ dans l'équation (A.7)), ces équations s'écrivent

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \quad (7.1a)$$

$$\rho h \partial_t U + \rho h U \partial_x U = -\rho gh \cos \alpha \partial_x h - \tau + \rho gh \sin \alpha. \quad (7.1b)$$

ρ est la masse volumique de l'écoulement dense, considérée uniforme, et τ est la contrainte de frottement exercée par le fond. La modélisation de cette contrainte est, comme toujours avec les équations de Saint-Venant, une étape délicate, qui gouverne l'essentiel des propriétés de stabilité. Guidés par les lois de Coulomb du frottement sec entre deux solides, on écrit la contrainte τ comme proportionnelle à la contrainte normale hydrostatique :

$$\tau = \mu_f(U, h)\rho gh \cos \alpha. \quad (7.2)$$

Le coefficient de frottement μ_f défini par cette relation dépend *a priori* de la vitesse U et de l'épaisseur h . La relation $\mu_f = \mu_f(U, h)$, à déterminer, doit être considérée comme une « loi de comportement » ou « équation d'état » du milieu granulaire, définissant sa rhéologie. Notons qu'une approche plus satisfaisante devrait faire dépendre le coefficient de frottement non des grandeurs dimensionnelles U et h mais de paramètres sans dimension.

Les équations de Saint-Venant admettent une solution de base \bar{U} et \bar{h} , définie par les équations

$$\mu_f(\bar{U}, \bar{h}) = \tan \alpha, \quad Q = \bar{U} \bar{h}, \quad (7.3)$$

où Q est le débit par unité de largeur. Pour un milieu granulaire donné, la fonction μ_f peut être déterminée en mesurant, pour un débit et une inclinaison donnés, la vitesse et l'épaisseur (Pouliquen 1999). Notons que si le coefficient de frottement est considéré constant, alors l'équation $\mu_f(\bar{U}, \bar{h}) = \tan \alpha$ ci-dessus implique qu'il existe une seule inclinaison $\alpha = \tan^{-1} \mu_f$ correspondant à un écoulement stationnaire et uniforme. L'expérience montre qu'en réalité, un tel écoulement (dense, décrit par les équations ci-dessus) existe dans une gamme d'inclinaisons de quelques degrés autour de la valeur 30° , et considérer μ_f constant n'est donc pas satisfaisant.

La forme générale d'une loi de comportement $\mu_f = \mu_f(U, h)$ reste aujourd'hui l'objet de débats ; mentionnons simplement ici que Pouliquen (1999) a proposé de faire intervenir dans cette loi une échelle de longueur h_{stop} , qui est l'épaisseur résiduelle de la couche de grains lorsque l'alimentation est coupée en amont ; cette échelle, caractéristique du type de grains, est une fonction

décroissante de l'inclinaison α . Une forme assez générale de cette loi s'écrit alors sous la forme paramétrique

$$\frac{U}{\sqrt{gh}} = -c_2 + c_1 \frac{h}{h_{stop}(\alpha)}, \quad \mu_f(U, h) = \tan \alpha, \quad (7.4)$$

où c_1 et c_2 sont deux coefficients positifs, dont la valeur dépend du type de grains.

Notons que le cas d'une avalanche sur un fond *érodable*, dont un exemple typique est l'avalanche de sable à la surface d'une dune ou d'un simple tas, peut être traité par le même type d'équations de Saint-Venant, en introduisant un terme supplémentaire d'échange de grains entre le substrat immobile et la couche mobile (Aradian, Raphaël & de Gennes 2002).

7.2.2 Stabilité

La linéarisation des équations des perturbations de la solution de base, puis l'introduction des modes normaux en $e^{i(kx - \omega t)}$, donnent la relation de dispersion

$$(c/\bar{U} - 1)^2 + \frac{ia}{k\bar{h}Fr}(c/\bar{U} - 1) - \frac{1}{Fr} \left(1 - \frac{ib}{k\bar{h}}\right) = 0, \quad (7.5)$$

où $Fr = \bar{U}^2/g\bar{h} \cos \alpha$ est le nombre de Froude, et a et b sont deux coefficients définis par

$$a = \frac{\overline{\partial \mu_f}}{\partial U}, \quad b = \frac{\overline{\partial \mu_f}}{\partial h}.$$

Les expériences montrent que le coefficient a est positif et le coefficient b est négatif (le coefficient de frottement croît donc avec U et décroît avec h).

Pour un nombre d'onde k donné, la relation de dispersion du second degré en ω admet deux racines. Notons tout d'abord que, pour un coefficient de frottement constant, les coefficients a et b sont nuls, et il n'y pas d'instabilité : les perturbations se propagent simplement comme des ondes de gravité en eau peu profonde, avec la célérité

$$c = \bar{U} \pm \sqrt{g\bar{h} \cos \alpha}. \quad (7.6)$$

Pour a et b non nuls, le critère d'instabilité, $\omega_i > 0$ pour k réel, peut être obtenu en développant les racines pour $k\bar{h} \ll 1$ (dans le cadre des équations de Saint-Venant, on ne peut pas juger de la stabilité des ondes courtes pour lesquelles l'hypothèse de faibles gradients longitudinaux n'est pas satisfaite). Il vient¹

$$\sqrt{Fr} > \frac{a}{-b}. \quad (7.7)$$

1. La racine carrée d'un nombre complexe $z = z_r + iz_i = |z|e^{i\theta}$ est $\sqrt{|z|}e^{i\theta/2} \sim \sqrt{|z|}(1 + iz_i/2z_r)$ pour $|z_i| \ll |z_r|$.

Pour un milieu décrit par la loi de comportement (7.4), le rapport b/a se calcule explicitement :

$$\frac{-b}{a} = \frac{3}{2} + \frac{c_2}{\sqrt{Fr \cos \alpha}}. \quad (7.8)$$

Il existe donc un nombre de Froude critique Fr_c au-dessus duquel l'avalanche est instable ; en particulier $Fr_c = (2/3)^2$ pour $c_2 = 0$.

7.2.3 Expériences

L'écoulement est réalisé à partir d'un silo déversant les grains sur un plan incliné rugueux (figure 7.2). Un système acoustique, essentiellement constitué de trois haut-parleurs pulsant de l'air focalisé par une buse, permet de forcer à l'amont des perturbations d'épaisseur de la couche de grains de fréquence bien définie (mais comportant de nombreux harmoniques). Cette épaisseur est mesurée à l'aval à partir de l'atténuation d'une source de lumière, mesurée par deux photodiodes.

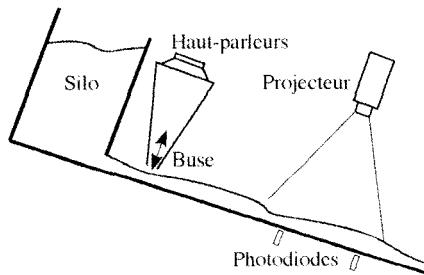


FIG. 7.2 – Schéma du dispositif expérimental de Forterre & Pouliquen (2003).

La démarche expérimentale est tout à fait semblable à celle mise en œuvre par Liu, Paul & Gollub (1993) pour l'étude d'un film liquide (chapitre 6). La mesure de l'évolution spatiale de l'épaisseur, pour une fréquence de forçage donnée, montre une croissance ou décroissance exponentielle de l'amplitude de la perturbation avec la distance, et permet de déterminer la célérité et le taux de croissance spatial. La célérité ne dépend pas de la fréquence, *i.e.* les ondes ne sont pas dispersives. La variation de la fréquence révèle une instabilité de grande longueur d'onde, avec une fréquence de coupure bien définie, comme montré sur la figure 7.3. La bande instable disparaît lorsque l'épaisseur est inférieure à une valeur critique. La variation de l'angle d'inclinaison permet de définir, dans le plan des paramètres α, h , la frontière entre un domaine stable et un domaine instable (figure 7.4). Cette frontière semble assez bien décrite par un nombre de Froude critique, égal à $\sqrt{Fr_c} = 0,57 \pm 0,05$ pour les billes de verre utilisées.

La valeur théorique du nombre de Froude critique obtenue à partir de (7.8) est $\sqrt{Fr_c} = 2/3$ avec $c_2 = 0$, valeur mesurée pour des billes de verre.

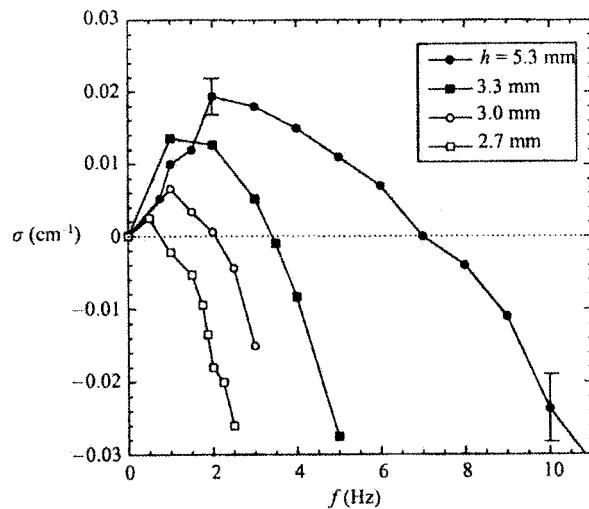


FIG. 7.3 – Taux de croissance spatial fonction de la fréquence de forçage pour une inclinaison $\alpha = 29^\circ$ et différentes épaisseurs de grains (billes de verre); le nombre Froude varie de 0,26 à 1,04 (Forterre & Pouliquen 2003).

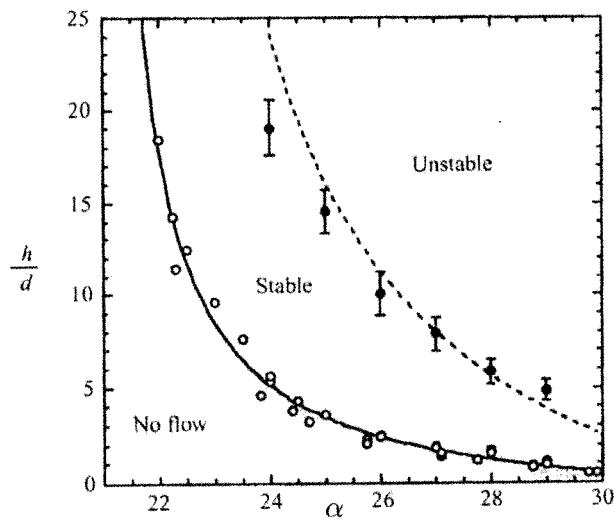
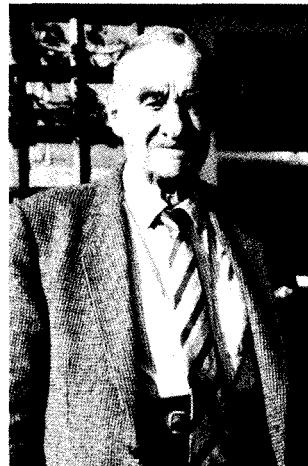


FIG. 7.4 – Diagramme de stabilité dans le plan des paramètres $(\alpha, h/d)$, pour des billes de verre de diamètre moyen $d = 0,5 \text{ mm}$; (\circ), h_{stop} ; (\bullet), stabilité marginale observée; (- - -), prédiction théorique (Forterre & Pouliquen 2003).

Cette prédition est proche de la valeur expérimentale, avec une surestimation de l'ordre de 20 %. La raison de cette surestimation réside pour une partie dans la mise en œuvre des équations de Saint-Venant², et pour une autre partie dans la modélisation du coefficient de frottement $\mu_f = \mu_f(U, h)$. Notons que si le modèle restitue un nombre de Froude critique, il ne rend pas compte de la stabilité vis-à-vis des perturbations de haute fréquence (grands nombres d'onde). Des progrès sont en cours, cherchant en particulier à lier la loi de comportement, pour le moment empirique, aux propriétés du milieu à l'échelle du grain (GDR MiDi 2004 ; Forterre 2006).

Brigadier Ralph Alger Bagnold (1896–1990)

Né à Stoke, Devonport, Angleterre. Carrière militaire dans les Transmissions, longs séjours en Égypte et en Libye en particulier. Aventurier d'une insatiable curiosité, acquiert une grande connaissance des déserts. Retraité de l'armée en 1935, Bagnold s'installe dans le laboratoire d'hydraulique de l'*Imperial College* de Londres pour mener des expériences de transport de sable par le vent, puis par l'eau. En 1941, publie son second livre, *The physics of blown sand and desert dunes*, qui aura une influence profonde sur le développement des études des milieux granulaires. Mobilisé en 1939, obtient carte blanche pour constituer une petite armée destinée à opérer dans le désert libyen derrière les lignes ennemis : le *Long Range Desert Group*. Opérations commandos et observation des mouvements de la German Afrika Corps, explorations sur un immense territoire largement inconnu, incursions au Tchad (où il aurait pu fraterniser avec un Français aussi peu conventionnel que lui, Théodore Monod). Après la guerre, retourne à l'*Imperial College*, séjour invité aux États-Unis à l'*U.S. Geological Survey*. Publie des travaux pionniers sur le transport de sédiments par les rivières et par les océans, et la physique des écoulements granulaires, travaux qui demeurent des références incontournables. Élu *Fellow of the Royal Society* en 1944, nombreuses distinctions. Publie son dernier article à 90 ans dans les *Proceedings of the Royal Society* de Londres. Une sélection de 14 publications a été éditée par l'*American Society of Civil Engineers* sous le titre *The Physics of Sediment Transport by Wind and Water* (1988).



2. L'étude des films liquides soulève un problème analogue : le seuil théorique obtenu à partir des équations de Saint-Venant n'est pas bon (Ruyer-Quil & Manneville 2000).

7.3 Transport de sédiments par un écoulement

On introduit dans cette section la modélisation classique du transport de sédiments par un écoulement (Raudkivi 1998), utilisée dans la section suivante pour l'étude de stabilité. On présente ensuite une modélisation plus récente faisant intervenir des phénomènes de relaxation.

7.3.1 Analyse dimensionnelle

Considérons un lit de grains de diamètre d et de densité ρ_p , surmonté d'un fluide de densité ρ et de viscosité μ . Le mouvement d'un grain à la surface d'un lit résulte d'un équilibre entre la force exercée par l'écoulement et la résistance opposée par le lit. La contrainte de cisaillement exercée par l'écoulement sur le lit étant τ , la force hydrodynamique sur un grain est d'ordre τd^2 . La force moyenne exercée par le lit sur le grain peut être décomposée en composantes normale et tangentielle; la composante normale équilibre le « poids apparent » $mg' = (\rho_p - \rho)g\pi d^3/6$, somme du poids et de la force d'Archimète; la composante tangentielle peut s'écrire $\mu_f mg'$ où μ_f est un coefficient de frottement « macroscopique » ou « effectif » prenant en compte les irrégularités géométriques du lit. Le *nombre de Shields* θ est une mesure de la force hydrodynamique exercée sur le grain rapportée à son poids apparent, soit

$$\theta = \frac{\tau}{(\rho_p - \rho)gd}. \quad (7.9)$$

La contrainte de référence $(\rho_p - \rho)gd$ vaut quelques pascals. L'expérience montre que la mise en mouvement d'un grain nécessite une contrainte minimale correspondant à un nombre de Shields θ_t . Ce nombre de Shields seuil, compris entre 0,05 et 0,2, dépend faiblement du nombre de Reynolds du grain

$$Re_p = \frac{\rho u d}{\mu}, \quad (7.10)$$

où u est une vitesse caractéristique du fluide à l'échelle du grain. Pour un écoulement visqueux, cette vitesse est γd où γ est le gradient vertical de vitesse au voisinage du lit³; pour un écoulement turbulent, c'est la vitesse de frottement $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ (Pope 2000). Le *diagramme de Shields* présenté sur la figure 7.5 donne le nombre de Shields seuil θ_t selon le nombre de Reynolds Re_p .

7.3.2 Vitesse des grains mobiles

Au-delà du seuil, quelques grains se mettent en mouvement à la surface du lit; puis, le cisaillement croissant, les grains mobiles forment une couche

3. La tension de surface notée précédemment γ n'intervient pas dans ce chapitre, il n'y a donc pas de risque de confusion.

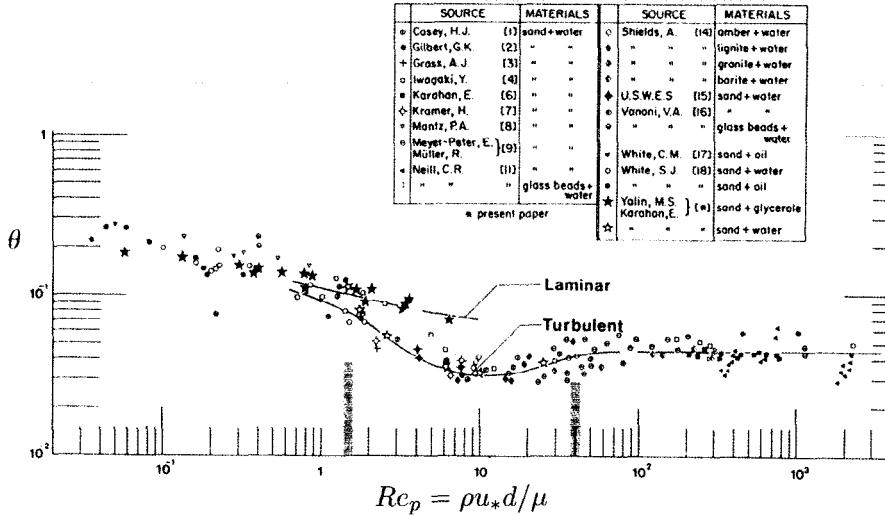


FIG. 7.5 - Diagramme de Shields de mise en mouvement d'un grain dans un écoulement cisaillé (Yalin 1985).

de « charriage » dont l'épaisseur, de l'ordre de quelques diamètres de grains, augmente avec le cisaillement. La vitesse moyenne U_p de ces grains peut être déterminée par un modèle classique dû à Bagnold (1973) ; ce modèle consiste à écrire l'équilibre du grain sous l'action d'une force de traînée exercée par le fluide et d'une force de frottement de Coulomb due à l'interaction avec le lit :

$$\frac{1}{2} C'_D \rho \frac{\pi d^2}{4} (u_{\text{eff}} - U_p)^2 - \mu_f mg' = 0,$$

où u_{eff} est une vitesse « effective » du fluide à la hauteur du grain mobile, C'_D un coefficient de traînée, et μ_f un coefficient de frottement effectif. Posant $u_{\text{eff}} = \alpha u_*$, où α est un coefficient numérique, il vient

$$\frac{U_p}{U_{\text{ref}}} = \alpha(\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_{\text{ref}}}), \quad U_{\text{ref}} = \sqrt{(\rho_p / \rho - 1)gd}, \quad \theta_{\text{ref}} = \frac{4\mu_f}{3\alpha^2 C'_D}, \quad (7.11)$$

où U_{ref} est une vitesse caractéristique de sédimentation et θ_{ref} un nombre de Shields de référence⁴. Les expériences de Fernandez Luque & Van Beek (1973) ont validé cette approche avec $\alpha = 10$ et $\theta_{\text{ref}} = 0,5 \theta_t$. Pour un écoulement visqueux, la force hydrodynamique varie linéairement avec la différence de vitesse $u_{\text{eff}} - U_p$, d'où une variation linéaire de la vitesse U_p avec le nombre de Shields (Charru, Larrieu, Dupont & Zenit 2007).

4. Notons que la relation (7.11) peut aussi s'écrire sous la forme $(U_p - U_{pt})/U_s = \alpha(\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_t})$ où U_{pt} est la vitesse minimale des grains au seuil.

7.3.3 Densité de grains mobiles

Soit N la densité surfacique de grains mobiles, c'est-à-dire le nombre de grains mobiles par unité de surface du lit. Cette densité peut être reliée au cisaillement par une relation établie par Bagnold (1956) :

$$N d^2 = c_n(\theta - \theta_t), \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{\mu_f \pi / 6}. \quad (7.12)$$

Le raisonnement de Bagnold est le suivant. Lorsque la contrainte exercée par le fluide sur le lit granulaire excède la contrainte seuil, les grains les plus exposés sont mis en mouvement. Les grains sous-jacents sont alors découverts et soumis à leur tour à la contrainte fluide. Se pose alors le problème du mécanisme limitant le « pelage » de couches de grains de plus en plus profondes, c'est-à-dire le mécanisme de saturation de la densité N . Le résultat de Bagnold repose sur les deux idées suivantes, illustrées sur la figure 7.6 :

- la contrainte τ exercée par l'écoulement est transmise au lit de grains fixes en partie par le fluide lui-même et en partie par les grains mobiles ;
- la saturation du flux correspond à la réduction, à la frontière entre la couche mobile et le lit fixe, de la contrainte exercée par le fluide à la contrainte seuil τ_t (« conjecture de Bagnold »).

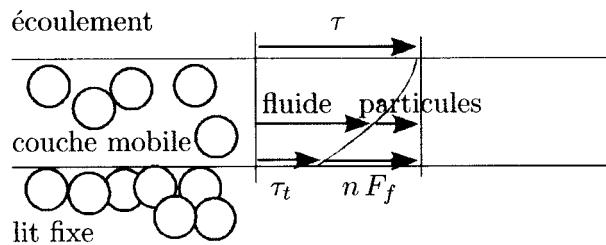


FIG. 7.6 · Schéma illustrant la conjecture de Bagnold selon laquelle la contrainte fluide est transmise aux particules dans la couche mobile, et se trouve réduite au seuil τ_t sur le lit fixe.

La force tangentielle d'interaction entre le lit et un grain étant écrite $\mu_f mg'$ comme précédemment, il vient, pour N grains par unité de surface, $\tau - \tau_t = N \mu_f mg'$. D'où la relation (7.12). Cette expression doit être valide tant en écoulement visqueux ($Re_p = \gamma d^2 / \nu \lesssim 9$, $\tau = \mu \gamma$) qu'en écoulement turbulent ($Re_p = u_* d / \nu \gtrsim 3$, $\tau = \rho u_*^2$). Notons qu'au voisinage du seuil de mise en mouvement des grains, seuls quelques grains à la surface du lit sont en mouvement, où ils occupent une petite fraction de cette surface ; l'idée que la contrainte fluide est réduite à la contrainte seuil sur le lit fixe est alors incertaine ; de façon plus générale, la conjecture de Bagnold procède d'une vision sans doute

trop « statique » d'une interface entre couche mobile et lit fixe, qui est en réalité le lieu d'un échange important de grains érodés et déposés. La relation linéaire entre la densité N et l'écart au seuil $\theta - \theta_t$ prédite par (7.12) a été validée par quelques rares observations expérimentales (Charru, Mouilleron & Eiff 2004).

Le coefficient μ_f peut être estimé à partir d'expériences réalisées par Bagnold (1954), de cisaillement d'une suspension de grains dans un écoulement de Couette entre deux cylindres, grains et fluide ayant même densité. Ces expériences ont permis de déterminer une relation entre les contraintes normale et tangentielle entre les grains, P et T , et de définir en particulier deux régimes asymptotiques « inertiel » et « macro-visqueux » :

$$\begin{aligned}\mu_f &= T/P = 0,32 \quad (\text{régime inertiel}) \\ \mu_f &= T/P = 0,75 \quad (\text{régime macro-visqueux}).\end{aligned}$$

7.3.4 Flux de grains

Ayant déterminé N et U_p , le flux Q de grains, *i.e.* le nombre de grains traversant une section transversale de l'écoulement par unité de temps est donné par $Q = N U_p$, soit

$$\frac{Q}{Q_{\text{ref}}} = \frac{\alpha}{\mu_f} (\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_{\text{ref}}}) (\theta - \theta_t), \quad Q_{\text{ref}} = \frac{U_{\text{ref}} d}{\pi d^3 / 6}. \quad (7.13)$$

Cette loi est assez bien vérifiée expérimentalement, et l'omission fréquente du terme θ_{ref} a peu d'incidence sur le résultat. D'autres lois empiriques donnant un résultat voisin ont été proposées, l'une des plus utilisées étant celle de Meyer-Peter & Muller (1948)⁵ :

$$\frac{Q}{Q_{\text{ref}}} = 8(\theta - \theta_t)^{3/2}, \quad \theta_t = 0,047. \quad (7.14)$$

Pour un écoulement visqueux, les lois linéaires pour la vitesse U_p et la densité N conduisent à $Q/Q_{\text{ref}} \sim \theta(\theta - \theta_t)$ lorsque l'épaisseur de la couche mobile n'excède pas un ou deux diamètres, c'est-à-dire pour $\theta \lesssim 3\theta_t$. Au-delà, un modèle de resuspension visqueuse dû à Leighton & Acrivos (1986) conduit à $Q/Q_{\text{ref}} \sim \theta^3$.

7.3.5 Effets de relaxation

On conçoit bien que si la vitesse de l'écoulement varie spatialement ou temporellement, le flux de grains peut ne pas s'adapter immédiatement à la nouvelle contrainte ; si les échelles de variation sont courtes ou rapides, des retards doivent se manifester. Le modèle d'érosion-déposition de particules

5. Notons que l'identification du coefficient 8 de cette loi avec α/μ_f dans (7.13) conduit à $\mu_f = 10/8$ pour $\alpha = 10$, valeur très élevée pour un coefficient de frottement.

introduit par Charru *et al.* (2004) tente de prendre en compte ce phénomène de relaxation. On considère ici le cas d'un écoulement visqueux, représentatif de situations rencontrées dans l'industrie pétrolière par exemple.

Soit $N(x, t)$ le nombre de particules mobiles par unité de surface, et $U_p(x, t)$ leur vitesse moyenne, le flux de particules étant alors $Q = N U_p$. Soit \dot{n}_e le taux d'érosion, c'est-à-dire le nombre de particules délogées du lit fixe par l'écoulement, par unité de temps et de surface. De même, soit \dot{n}_d le taux de déposition des particules s'arrêtant dans un interstice entre deux grains du lit fixe. La conservation du nombre de particules mobiles dans une tranche d'épaisseur dx , et de largeur unité, illustrée sur la figure 7.7, s'écrit

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \dot{n}_e - \dot{n}_d - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q = N U_p. \quad (7.15)$$

La résolution de cette équation pour la densité N requiert de modéliser les taux d'érosion et de déposition, \dot{n}_e and \dot{n}_d , ainsi que la vitesse U_p .

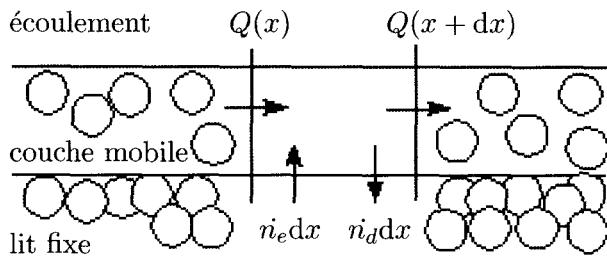


FIG. 7.7 - Schéma des flux de particules dans une bande de la couche mobile de longueur dx et de largeur unité.

Modélisation de \dot{n}_d , \dot{n}_e et U_p

La modélisation de \dot{n}_d est fondée sur l'observation que les particules ont un mouvement intermittent, où se succèdent des périodes de mouvement, de vitesse moyenne U_p et de durée caractéristique t_d , et des périodes de repos. Durant le temps t_d , toutes les particules s'arrêtent une fois en moyenne, et le taux de déposition peut donc s'écrire

$$\dot{n}_d = \frac{N}{t_d}. \quad (7.16)$$

La déposition est un phénomène contrôlé par la gravité, et le temps t_d peut être considéré comme proportionnel au temps de sédimentation d/U_s , où d est le diamètre de la particule et U_s la vitesse de sédimentation. Ainsi, t_d peut s'écrire

$$\frac{1}{t_d} = c_d \frac{U_s}{d}, \quad (7.17)$$

où c_d est un coefficient de déposition (par souci de simplicité, on confondra par la suite la vitesse de sédimentation avec la vitesse de Stokes $(p_p - p)gd^2/18\mu$).

Le taux d'érosion \dot{n}_e peut s'écrire

$$\dot{n}_e = \frac{1}{t_e d^2}, \quad (7.18)$$

où l'échelle de temps t_e est liée à la capacité de l'écoulement de déloger une particule sur l'aire caractéristique du lit d^2 . Pour un écoulement visqueux, cette échelle de temps ne peut être que l'inverse du gradient de vitesse γ au voisinage du lit, d'où

$$\frac{1}{t_e} = c_e(\gamma - \gamma_t),$$

où c_e est un coefficient d'érosion, et γ_t est le gradient de vitesse au seuil du mouvement. Introduisant les contraintes de cisaillement $\tau = \mu\gamma$ et $\tau_t = \mu\gamma_t$, ainsi qu'un cisaillement de référence τ_{ref} , l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{1}{t_e} = \frac{1}{t_d} \frac{\tau - \tau_t}{\tau_{\text{ref}}}, \quad \tau_{\text{ref}} = \frac{c_d}{c_e} \frac{\mu U_s}{d}. \quad (7.19)$$

Pour la vitesse moyenne U_p d'une particule, une modélisation simple consiste à l'écrire $U_p = c_u \gamma d$ où γd est une vitesse caractéristique du fluide près du lit, et c_u un coefficient numérique. Introduisant le cisaillement de référence τ_{ref} cette relation devient

$$U_p = U_s \frac{c_u c_d}{c_e} \frac{\tau}{\tau_{\text{ref}}}. \quad (7.20)$$

Les valeurs des coefficients numériques proposées par Charru *et al.* (2004) à partir d'observations expérimentales sont $c_d = 0,067$, $c_e = 0,0017$ et $c_u = 0,1$.

Solution stationnaire et uniforme

L'équation de conservation (7.15) admet une solution stationnaire et uniforme N correspondant à l'égalité des taux d'érosion et de déposition (7.16) et (7.18) :

$$Nd^2 = \frac{t_d}{t_e} = \frac{\tau - \tau_t}{\tau_{\text{ref}}}. \quad (7.21)$$

Compte tenu de l'expression (7.20) pour la vitesse des particules, il vient pour le débit de particules

$$Q = N U_p = \frac{U_s}{d^2} \frac{c_u c_d}{c_e} \frac{\tau(\tau - \tau_t)}{\tau_{\text{ref}}^2}. \quad (7.22)$$

Dans le cadre de l'étude de stabilité présentée à la section suivante, cette solution stationnaire et uniforme correspond à la solution de base pour un lit plan. Comme on va le voir, les effets de relaxation contenus dans l'équation d'érosion-déposition (7.15) affectent fortement la stabilité du lit.

7.4 Rides et dunes : première analyse dimensionnelle

7.4.1 Rides et dunes éoliennes

L'observation montre que, lorsque le vent souffle sur une étendue de sable, les grains transportés forment des rides régulières, d'une dizaine de centimètres de longueur (figure 7.8). Des reliefs de dimensions bien plus grandes, de quelques dizaines de mètres pour fixer les idées, et appelés dunes, sont également observés en bordure de mer ou dans les déserts. L'existence de ces structures peut s'interpréter comme le résultat d'une instabilité d'une étendue plane de grains, cisaillée par le vent. Les mécanismes de cette instabilité ne sont pas complètement élucidés, et sont sans doute différents pour les rides et pour les dunes. Pour les rides, le mécanisme de formation est lié aux sauts des grains de sable qui rebondissent sur le lit, sont accélérés par le vent, puis retombent. Ces mouvements dits de saltation augmentent le transfert de quantité de mouvement du vent vers le lit, c'est-à-dire augmentent le frottement. Un modèle simple proposé par Bagnold (1941) conduit à une longueur de rides

$$\lambda \sim u_* U_p / g, \quad (7.23)$$

où U_p est la vitesse d'impact des grains sur le lit, et u_* est la vitesse de frottement définie à partir du cisaillement $\tau = \rho u_*^2$ exercé par le fluide. Cette relation ne permet pas à elle seule la détermination de λ mais requiert une relation supplémentaire $U_p(u_*)$. Cette relation s'accorde en réalité assez mal aux observations, mais il n'existe pas aujourd'hui de modèle alternatif simple (Andreotti 2004).

En ce qui concerne les dunes éoliennes, le mécanisme de leur formation est de nature plutôt hydrodynamique : la variation du cisaillement sur la surface déformée du lit y joue un rôle crucial, en particulier le fait que le maximum de ce cisaillement ne coïncide pas avec le sommet des crêtes, mais est situé un peu en amont du fait de l'inertie de l'écoulement. Une échelle de longueur importante pour ces dunes éoliennes est la longueur l_{acc} d'accélération d'un grain dans l'écoulement. La force hydrodynamique agissant sur un grain étant de l'ordre de $\rho u^2 d^2$, cette longueur peut être définie par la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_p d^3 u \frac{u}{l_{\text{acc}}} = \rho u^2 d^2, \quad (7.24)$$

où ρ_p et ρ sont les densités des grains et du fluide, et d le diamètre des grains. La longueur caractéristique d'accélération est donc

$$l_{\text{acc}} = (\rho_p / \rho) d, \quad (7.25)$$

c'est-à-dire quelques milliers de diamètres de grain. Cette longueur joue un rôle important, en tant que longueur de relaxation, dans la sélection de la longueur d'onde (Andreotti, Claudin & Douady 2002 a, b).

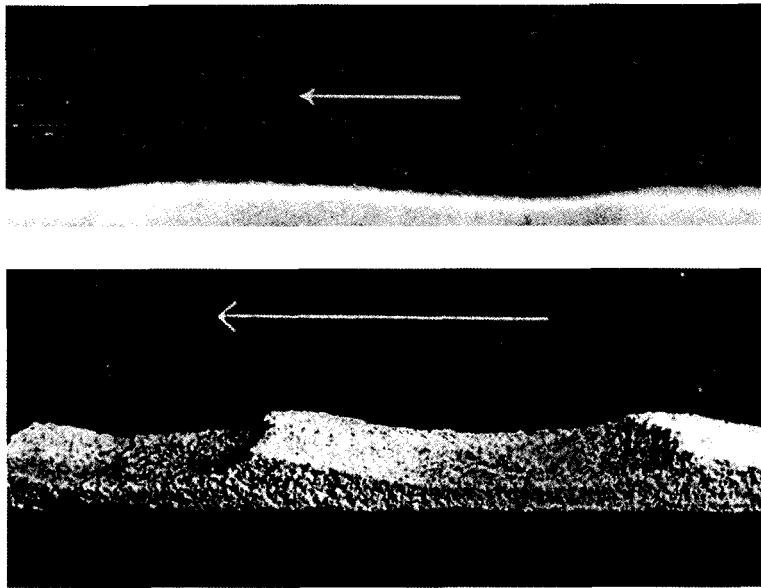


FIG. 7.8 Rides de sable formées par le vent, d'après Bagnold (1941). En haut : rides en cours de formation (on devine les trajectoires des grains en saltation) ; en bas : forme finale.

7.4.2 Rides et dunes aquatiques

Des structures semblables aux rides et dunes éoliennes sont observées sous l'eau : des rides de longueur centimétriques, et des dunes de dimension métrique, comme illustré sur les figures 7.9 et 7.10, respectivement. Cependant, ces rides et dunes aquatiques correspondent à des mécanismes de formation différents de leurs cousins éoliens. Les rides aquatiques correspondraient à une instabilité hydrodynamique de même nature que celle qui forme les dunes éoliennes. L'échelle de longueur de ces rides serait plutôt une longueur de déposition

$$l_d = \frac{U_p}{U_s} d, \quad (7.26)$$

où U_p est la vitesse moyenne des grains et U_s leur vitesse de sédimentation.

Les dunes sous-marines observées au fond des rivières ou des mers, correspondent au même mécanisme hydrodynamique, mais la hauteur h de fluide jouerait un rôle déterminant dans la sélection de la longueur d'onde, cette longueur vérifiant

$$kh \approx 1 \quad (7.27)$$

en première approximation. Une raison essentielle de la différence de nature des rides éoliennes et aquatiques réside dans le rapport ρ_p/ρ des masses volumiques : ce rapport est voisin de 2000 dans cas éolien, et de 2 dans le cas

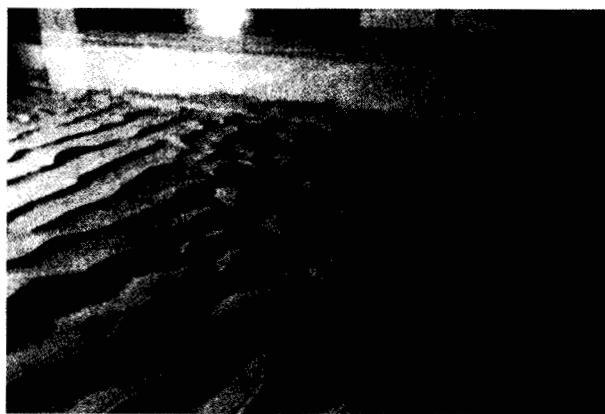


FIG. 7.9 – Rides de sable formées sur un lit cisaiillé par un écoulement d'eau faiblement incliné ($d = 0,12 \text{ mm}$, hauteur de l'écoulement = $17,5 \text{ cm}$, vitesse moyenne = 36 cm/s , vitesse de frottement = $3,3 \text{ cm/s}$), pente = $0,007$), d'après Raudkivi (1997).

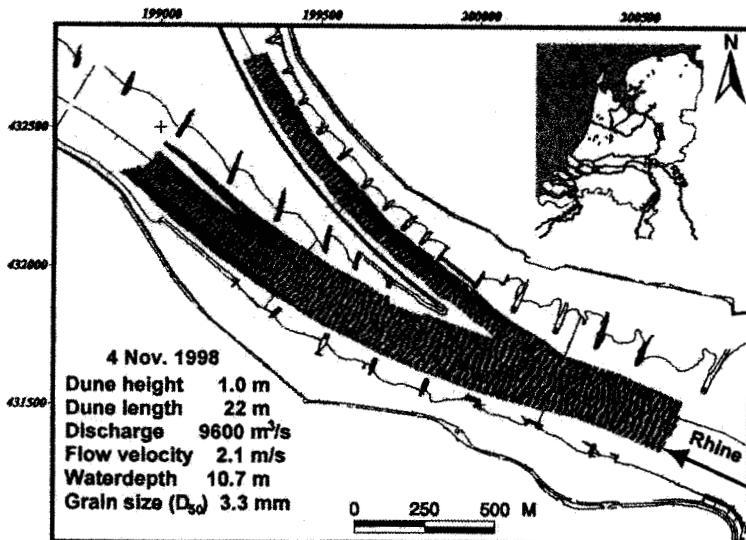


FIG. 7.10 – Champ de dunes sur le lit du Rhin, observées par échosondeur (ASCE 2002).

aquatique. Dans le premier cas, l'inertie de l'air joue donc un rôle négligeable, alors que dans le second l'inertie du liquide couple fortement les mouvements du fluide et des grains (sans que les effets visqueux soient négligeables pour autant), ce qui complique sérieusement l'analyse.

Les rides et dunes dont il est question ci-dessus sont des structures essentiellement bidimensionnelles ; des structures au caractère tridimensionnel marqué sont aussi observées, telles les dunes barkhanes en forme de croissant observées dans les régions des déserts, ou les dunes en étoile (Bagnold 1941). Pour terminer ce tour d'horizon, mentionnons les bancs de sable rencontrés dans les mers peu profondes comme la mer du Nord, dont la crête est alignée avec la direction de l'écoulement (Blondeaux 2001). Dans la suite du chapitre, on restreint l'analyse aux seules rides et dunes aquatiques.

7.5 Rides aquatiques sous un écoulement continu

7.5.1 Le modèle classique

Hypothèses majeures

Le modèle classique de formation des rides est essentiellement fondé sur deux hypothèses :

- Le flux Q de grains est en tout point et à tout instant en équilibre avec le cisaillement τ imposé par l'écoulement, et donné par la relation $Q = Q(\tau)$ établie pour un écoulement stationnaire sur un lit plan.
- Le temps caractéristique d'évolution du lit est grand devant les échelles de temps hydrodynamiques. En conséquence, le champ hydrodynamique au-dessus d'un lit perturbé sinusoïdalement, donné par $\eta = \eta_0 \cos kx$, peut être calculé comme si le lit était fixe (conditions aux limites quasi statiques), d'où le cisaillement τ sur le lit.

La question est donc de déterminer le cisaillement hydrodynamique sur un lit sinusoïdal. Une bonne introduction à ce problème d'un point de vue général est Benjamin (1959).

Écoulement au-dessus d'une ride

Pour un écoulement turbulent, le calcul du cisaillement exercé par l'écoulement sur le lit met en œuvre un modèle de turbulence (Richards 1980, Sumer & Bakioglu 1984). Nous considérerons dans cette section le cas plus simple d'un écoulement visqueux, où le profil de vitesse de l'écoulement de base reste à peu près linéaire jusqu'à une distance du lit plan de l'ordre de la longueur d'onde considérée ; ce profil peut alors s'écrire $\bar{\gamma}y$ où $\bar{\gamma}$ est le gradient vertical de vitesse. Compte tenu de la transformation de Squire pour les écoulements parallèles (chapitre 4), l'analyse de perturbations bidimensionnelles est suffisante pour déterminer un critère d'instabilité. Le calcul complet est donné dans Charru & Hinch (2000), nous présentons ici seulement l'analyse dimensionnelle et donnons le résultat final pour le cisaillement du lit.

Sur un fond sinusoïdal $\eta = \eta_0 \cos kx$, une échelle essentielle est la profondeur l_v de pénétration des perturbations de vorticité ω . Pour trouver cette échelle, considérons l'équilibre advection-diffusion verticale de la perturbation de vorticité,

$$\rho \bar{U} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}.$$

Dans la limite asymptotique pertinente pour les rides, où cette profondeur de pénétration est petite devant la longueur d'onde et devant la profondeur de l'écoulement, on peut écrire $\bar{U} \sim \bar{\gamma} l_v$, $\partial_x \sim k$ et $\partial_y \sim 1/l_v$. L'équilibre ci-dessus définit alors la longueur cherchée

$$l_v = \left(\frac{\mu}{\rho k \bar{\gamma}} \right)^{1/3}. \quad (7.28)$$

À la surface du lit déformé, la vitesse de l'écoulement doit être nulle, ce qui donne la perturbation de vitesse, $u = -\bar{U}(\eta) \sim \gamma \eta$, et la perturbation du cisaillement

$$\tau \sim \mu \frac{u}{l_v} \sim \bar{\tau} \frac{\eta}{l_v}.$$

Le calcul exact de la perturbation du cisaillement à partir des équations linéarisées donne un préfacteur numérique 1,06 et une avance de phase $\phi_\tau = \pi/6$, soit :

$$\tau = \tau_0 \cos(kx + \phi_\tau), \quad \tau_0 = 1,06 \bar{\tau} \frac{\eta_0}{l_v}, \quad \phi_\tau = \pi/6. \quad (7.29)$$

L'avance de phase ϕ_τ étant positive, le maximum du cisaillement est situé en amont de la crête de la ride.

Interprétation physique de l'avance de phase ϕ_τ

L'interprétation physique de l'instabilité décrite ci-dessus est identique à celle discutée au chapitre 6, de l'instabilité d'une couche mince de fluide visqueux cisaillée par un fluide moins visqueux. Nous en rappelons simplement ici les étapes en transposant au cas du lit de grains. En l'absence d'inertie du fluide, la déformation du lit crée une perturbation de vitesse $u^{(0)} \sim -\bar{\gamma} \eta$, afin de satisfaire la condition d'adhérence (figure 7.11a). Cette perturbation est en phase avec la déformation η du lit, ainsi que la perturbation de vorticité $\omega^{(0)} \sim u^{(0)}/l_v$ associée. La perturbation de cisaillement du lit est elle aussi en phase avec la déformation du lit, et induit un transport de grains qui déplace la ride sans l'amplifier. La correction induite par de faibles effets inertIELS correspond à l'advection de la perturbation de vorticité $\omega^{(0)}$ par l'écoulement de base. Cette advection crée une composante $\omega^{(1)} \sim Re_{\text{eff}} \omega^{(0)}$ en quadrature avec la déformation du lit, où $Re_{\text{eff}} = \bar{\gamma} l_v^2 / \nu$ est le nombre de Reynolds effectif. Le champ de vitesse $u^{(1)} \sim \omega^{(1)} l_v$, associé à $\omega^{(1)}$ doit s'annuler sur le lit, et correspond au profil en quadrature dessiné sur la figure 7.11b. Le cisaillement $\tau^{(1)} \sim \mu u^{(1)}/l_v$, associé à cette correction inertIELLE est donc dirigé des creux vers les crêtes, d'où l'instabilité.

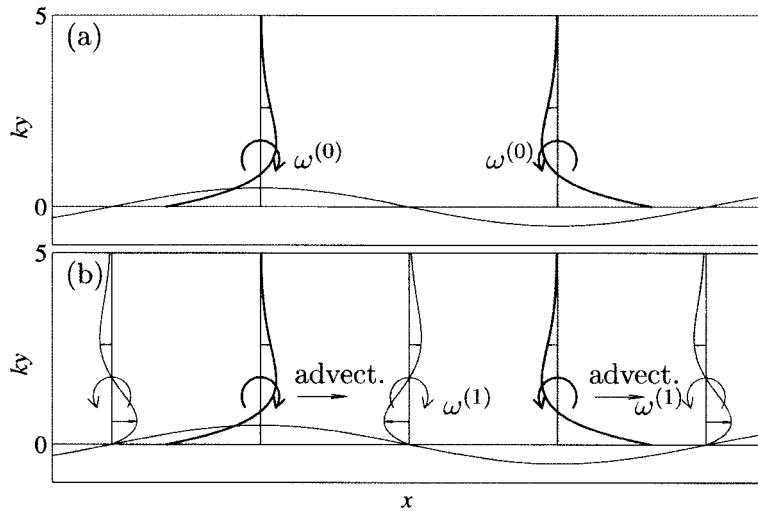


FIG. 7.11 – Perturbations de vitesse longitudinale induites par une déformation sinusoïdale $\eta(x)$ du lit et vorticité associée, pour un écoulement visqueux et $kl_v = 1$; (a) écoulement de Stokes en phase avec $\eta(x)$, (b) correction inertielle en quadrature.

Flux de grains et taux net de déposition

Pour une perturbation du cisaillement $\tau = \tau_0 \cos(k_x + \phi_\tau)$, la perturbation correspondante du flux de grains est

$$q = Q'(\bar{\tau}) \tau = Q'(\bar{\tau}) \tau_0 \cos(kx + \phi_\tau), \quad (7.30)$$

où $Q'(\bar{\tau})$ est la dérivée de Q par rapport à τ pour $\tau = \bar{\tau}$. Le maximum du flux de grains se trouve donc en amont des crêtes, comme celui du cisaillement, et avec le même déphasage.

Le taux net de déposition sur une tranche de longueur dx et de largeur unité étant $(Q(x) - Q(x + dx)) dx = -\partial_x Q dx$, la variation de hauteur du lit obéit à l'équation de conservation de la masse pour le lit fixe :

$$C \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\pi d^3}{6} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\pi d^3}{6} Q'(\bar{\tau}) \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (7.31)$$

où C est la compacité du lit, comprise entre 0,5 et 0,6.

Effet de la gravité

Le flux de particules sur une pente $\partial_x \eta$ est affecté par la composante de la gravité parallèle à la pente, qui tend à ramener les grains des crêtes vers les creux et joue un rôle stabilisant. Cette force, égale à $(\rho_p - \rho)g \partial_x \eta$ par unité de

volume, peut être prise en compte en modifiant la contrainte de cisaillement τ en une contrainte « effective » définie par

$$\tau_{\text{eff}} = \tau - c_g(\rho_p - \rho)gd \partial_x \eta \quad (7.32)$$

où c_g est un coefficient numérique. De façon équivalente, cet effet stabilisant peut être pris en compte par un seuil effectif de mise en mouvement

$$\tau_{t,\text{eff}} = \tau_t + c_g(\rho_p - \rho)gd \partial_x \eta = \tau_t (1 + (c_g/\theta_t) \partial_x \eta). \quad (7.33)$$

Le coefficient c_g joue un rôle déterminant dans la sélection de la longueur d'onde la plus amplifiée comme on va le voir, mais beaucoup d'incertitudes demeurent sur sa valeur précise ; on le choisit en général entre 0,1 et 0,4. Ce coefficient croît sans doute avec le degré d'agitation des grains dans la couche mobile, et donc avec le nombre de Shields.

La loi du flux de grains sur une pente, $Q = Q(\tau, \partial_x \eta)$, peut donc s'obtenir à partir de la loi $Q = Q(\tau)$ établie pour un lit horizontal, en substituant à τ la contrainte effective ci-dessus. Après linéarisation, il vient pour la perturbation du flux de grains

$$q = Q'(\bar{\tau}) (\tau - c_g(\rho_p - \rho)gd \partial_x \eta). \quad (7.34)$$

Célérité et taux de croissance

L'évolution quasi statique du lit, de la forme $\eta = \eta_0 e^{\sigma t} \cos(k(x - ct))$, est gouvernée par l'équation de conservation de la masse (7.31). Introduisant dans cette équation le flux de grains (7.34), il vient pour la célérité c et le taux de croissance σ

$$c = \frac{\pi d^3}{6C} Q'(\bar{\tau}) \frac{\tau_0 \cos \phi_\tau}{\eta_0}, \quad (7.35a)$$

$$\sigma = \frac{\pi d^3}{6C} Q'(\bar{\tau}) \left(\frac{k \tau_0 \sin \phi_\tau}{\eta_0} - c_g(\rho_p - \rho)gd k^2 \right). \quad (7.35b)$$

Ainsi, du fait que $Q'(\bar{\tau})$ et $\tau_0 \cos \phi_\tau$ sont positifs, la célérité des rides est positive, *i.e.* dans le sens de l'écoulement. L'expression du taux de croissance montre que d'une part les ondes longues sont instables pour $\tau_0 \sin \phi_\tau > 0$, et que d'autre part si $\tau_0 \sin \phi_\tau$ croît moins vite que k , les ondes courtes sont stabilisées par un effet diffusif de la gravité ($\sigma \sim -k^2$).

Pour un écoulement visqueux dans le régime de couche limite discuté ci-dessus, le cisaillement τ est explicitement donné par (7.29) ; le nombre d'onde de coupure k_{off} bornant la bande instable et le nombre d'onde le plus instable k_{max} sont alors donnés par

$$k_{\text{off}}d = \left(\frac{1,06 \sin \phi_\tau}{c_g} \right)^{3/2} (18 Re_s)^{1/2} \theta^2, \quad \phi_\tau = \pi/6, \quad (7.36a)$$

$$k_{\text{max}} = 0,54 k_{\text{off}}, \quad (7.36b)$$

où on a introduit le nombre de Reynolds de sédimentation

$$Re_s = \frac{\rho U_s d}{\mu},$$

construit sur la vitesse de Stokes $U_s = (\rho_p - \rho)gd^2/18\mu$. Notons que ni le nombre d'onde de coupure k_{off} ni le nombre d'onde le plus amplifié k_{max} ne dépendent de la loi de transport $Q = Q(\tau)$.

Les observations de longueur de rides, bien que dispersées comme discuté plus loin, ne s'accordent pas bien avec ce résultat. D'une part, la longueur d'onde la plus amplifiée prédicta, $2\pi/k_{\text{max}}$, est inférieure d'un ordre de grandeur aux longueurs de rides observées ; d'autre part, la préiction $k_{\text{max}}d \sim \theta^2$ ne correspond pas au fait que la longueur observée dépend peu du nombre de Shields. Nous discutons ci-dessous une amélioration fondée sur une modélisation plus élaborée de la dynamique des grains.

7.5.2 Phénomènes de relaxation

Un point faible du modèle ci-dessus réside dans une modélisation sommaire du transport de grains, par une loi semi-empirique $Q = Q(\tau)$ établie en écoulement stationnaire et uniforme. On présente ici une amélioration fondée sur le modèle d'érosion-déposition présenté dans la section précédente (Charru 2006).

Densité et flux de grains pour le lit perturbé

Considérons donc la solution stationnaire et uniforme du modèle d'érosion-déposition, donnée par les équations (7.21) et (7.22) pour la densité \bar{N} et le flux \bar{Q} . Sur un lit ondulé défini par $\eta = \eta_0 \cos kx$, la perturbation τ du cisaillement induit une perturbation u_p de la vitesse des particules, donnée par

$$u_p = U'_p(\bar{\tau}) \tau \quad \text{où} \quad U'_p(\bar{\tau}) = \frac{\partial U_p}{\partial \tau}(\bar{\tau}). \quad (7.37)$$

La perturbation n de la densité de particules mobiles est solution de l'équation de conservation (7.15), qui s'écrit, une fois linéarisée :

$$t_d d^2 \frac{\partial n}{\partial t} = -nd^2 + \frac{\tau}{\tau_{\text{ref}}} - t_d d^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \quad q = \bar{N} U'_p(\bar{\tau}) \tau + \bar{U} n. \quad (7.38)$$

Pour la consistence avec l'approximation quasi statique faite pour l'écoulement, la dérivée temporelle dans (7.38) doit être négligée⁶. Recherchant pour n une solution spatialement périodique de la forme

$$n = n_0 \cos(kx + \phi_\tau + \phi_n), \quad (7.39)$$

6. Une justification supplémentaire à cette omission est que le terme $\partial_t n$ est dominé par la propagation de la ride avec la célérité c , plus rapide que sa croissance, soit $\partial_t n \approx -c \partial_x n$; par ailleurs, la célérité c étant petite devant la vitesse U_p des particules, on déduit que $\partial_t n$ est négligeable devant le terme $\bar{U}_p \partial_x n$ apparaissant au membre de droite de (7.38).

la solution de l'équation (7.38) s'écrit

$$n_0 d^2 = \frac{\tau_0}{\tau_{\text{ref}}} \sqrt{\frac{1 + (kl_d)^2 A^2}{1 + (kl_d)^2}}, \quad (7.40\text{a})$$

$$\tan \phi_n = \frac{-kl_d(1 + A)}{1 - (kl_d)^2 A} \quad \text{avec} \quad -\pi < \phi_n < 0, \quad (7.40\text{b})$$

où l_d est la longueur de déposition et A une constante, définies par

$$l_d = \bar{U}_p t_d, \quad A = \frac{\bar{\tau} - \tau_t}{\bar{U}_p} U'_p(\bar{\tau}) = 1 - \frac{\theta_t}{\theta}. \quad (7.41)$$

La phase ϕ_n étant négative, le maximum de n est en aval de celui du cisaillement. On en déduit la perturbation du flux de particules :

$$q = \frac{\tau_0 Q'(\bar{\tau})}{\sqrt{1 + (kl_d)^2}} \cos(kx + \phi_\tau + \phi_q), \quad (7.42\text{a})$$

$$\tan \phi_q = -kl_d, \quad -\pi < \phi_q < 0. \quad (7.42\text{b})$$

La phase ϕ_q étant négative pour tous les nombres d'onde, le maximum du flux est en aval de celui du cisaillement comme celui de la densité n .

On en déduit le taux de déposition net $\dot{n}_d - \dot{n}_e = -\partial_x q$ qui gouverne la croissance des perturbations du lit. La figure 7.12a illustre le cas où la phase $\phi_\tau + \phi_q$ est négative, ce qui correspond à une érosion nette des crêtes et une déposition dans les creux, c'est-à-dire à un lit stable. Cette situation prévaut pour les grands nombres d'onde comme le montre la figure 7.12b. Le nombre d'onde de coupure k_{off} est tel que $\phi_\tau + \phi_q = 0$, soit

$$k_{\text{off}} l_d = \tan \phi_\tau. \quad (7.43)$$

Effet de la gravité

L'effet stabilisant de la gravité affecte deux termes dans l'équation (7.15) de conservation des particules : le seuil τ_t de mise en mouvement (qui intervient dans le temps caractéristique d'érosion t_e), et la vitesse U_p . On montre que la prise en compte de ces deux effets revient à considérer la perturbation de cisaillement effective τ_{eff} donnée par (7.32). Ainsi, les solutions (7.40) pour la densité n et (7.42) pour le flux de particules restent correctes, avec l'amplitude et la phase du cisaillement effectif (7.32) à la place de τ_0 et ϕ_τ .

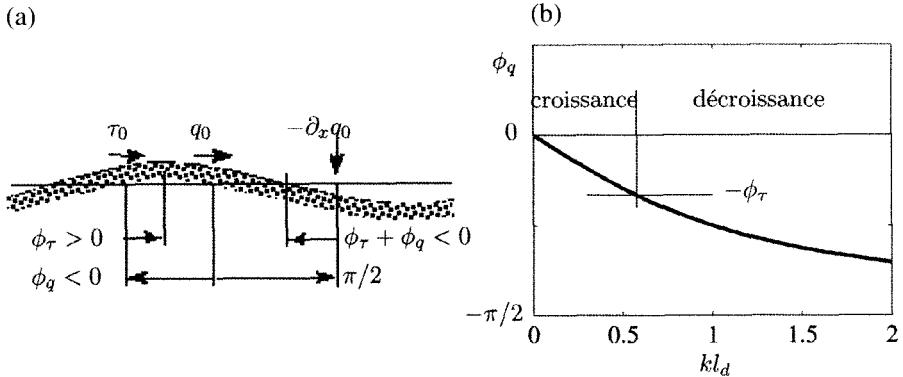


FIG. 7.12 – (a), pour une phase ϕ_τ positive, le taux de déposition net est stabilisant ($\phi_\tau + \phi_q < 0$) si le retard ($-\phi_q$) du flux de particules est suffisamment grand. (b), pour un cisaillement donné, les ondes longues s'amplifient alors que les ondes courtes s'atténuent.

Célérité et taux de croissance

La célérité et le taux de croissance des rides s'obtiennent à partir de l'équation (7.31) de conservation de la masse pour le lit, soit

$$c = \frac{\pi d^3}{6C} \frac{Q'(\bar{\tau})}{1 + (kl_d)^2} \frac{\tau_0}{\eta_0} (\cos \phi_\tau + kl_d \sin \phi_\tau), \quad (7.44a)$$

$$\sigma = \frac{\pi d^3}{6C} \frac{Q'(\bar{\tau})}{1 + (kl_d)^2} \left(\frac{k \tau_0}{\eta_0} (\sin \phi_\tau - kl_d \cos \phi_\tau) - c_g (\rho_p - \rho) g d k^2 \right). \quad (7.44b)$$

Ces résultats appellent les commentaires suivants :

- les expressions ci-dessus de la célérité et du taux de croissance sont valides pour tout écoulement, visqueux ou turbulent, tant que cet écoulement est en équilibre avec le lit (approximation de conditions aux limites quasi statiques) ;
- la loi de transport $Q = Q(\tau)$ n'affecte pas le caractère stable ou instable du lit, mais seulement la valeur de la célérité et du taux de croissance ;
- l'introduction du modèle d'érosion-déposition se manifeste par la longueur de déposition l_d (posant $l_d = 0$, on retrouve les expressions données à la section précédente) ;
- la longueur de déposition joue un rôle stabilisant qui s'additionne à celui de la gravité ($\tau_0 \cos \phi_\tau$ est positif tant en écoulement visqueux que turbulent (Abrams & Hanratty 1984)).

Explicitant le cisaillement (7.29) exercé sur le lit par un écoulement visqueux ainsi que la loi (7.22) de transport granulaire, le taux de croissance (7.44b) devient

$$\sigma = \sigma_{\text{ref}} \frac{2\theta - \theta_t}{1 + (kl_d)^2} \left((kl_d)^{4/3} \sin \pi/6 - \frac{B}{\theta^2} (kl_d)^2 - (kl_d)^{7/3} \cos \pi/6 \right), \quad (7.45)$$

où le taux de croissance de référence σ_{ref} et le facteur B sont définis par

$$t_d \sigma_{\text{ref}} = \frac{1,06 \times 3\pi}{C} \frac{c_e}{c_d} \left(\frac{c_d}{c_u} Re_s \right)^{1/3}, \quad (7.46a)$$

$$B = \frac{c_g \theta_t}{1,06 \times 18} \left(\frac{c_d}{c_u} \right)^{2/3} Re_s^{-1/3}, \quad (7.46b)$$

et où le nombre d'onde kl_d est lié à kd par

$$kl_d = 18 \frac{c_u}{c_d} \theta kd. \quad (7.47)$$

L'allure générale des courbes de taux de croissance $\sigma(k)$ est celle qui correspond à une instabilité de grande longueur d'onde : nombres d'onde instables au-dessous d'un nombre de coupure k_{off} , stables au-dessus, et existence d'un nombre d'onde le plus amplifié k_{max} entre $k = 0$ (neutre) et $k = k_{\text{off}}$.

La figure 7.13 montre les variations de $k_{\text{max}}d$ en fonction du nombre de Shields. Lorsque le mécanisme stabilisant dû à la gravité est seul pris en compte (érosion des crêtes ignorée), $k_{\text{max}}d$ varie comme θ^2 comme montré par les courbes en tireté pour deux valeurs du nombre de Reynolds de sé-dimentation, $Re_s = 0,1$ et 1 . À l'inverse, lorsque le mécanisme stabilisant d'érosion des crêtes est seul pris en compte (trait continu avec $Re_s = \infty$), $k_{\text{max}}d$ décroît avec θ de façon monotone. Lorsque les deux mécanismes sont pris en compte (traits continus correspondant à $Re_s = 0,1, 1$ et 10), $k_{\text{max}}d$ varie peu : décroissance monotone pour $Re_s \gtrsim 1$, et croissance puis décroissance pour $Re_s \lesssim 1$.

Finalement, il apparaît que le mécanisme d'érosion des crêtes abaisse significativement le nombre d'onde le plus amplifié. Au seuil $\theta = \theta_t$, cette diminution est de 30 % pour $Re_s = 0,1$ et atteint un facteur 2,5 pour $Re_s = 1$. L'effet de la gravité, important au voisinage du seuil, devient négligeable pour des nombres de Shields supérieurs à trois fois le seuil où $k_{\text{max}}d \approx 0,31$, soit $k_{\text{max}}d \sim 1/\theta$.

7.5.3 Discussion

Que valent les prédictions des modèles présentés ci-dessus face aux observations ? La comparaison la plus immédiate porte sur les longueurs d'onde les plus amplifiées, dont on attend qu'elles correspondent aux longueurs de rides

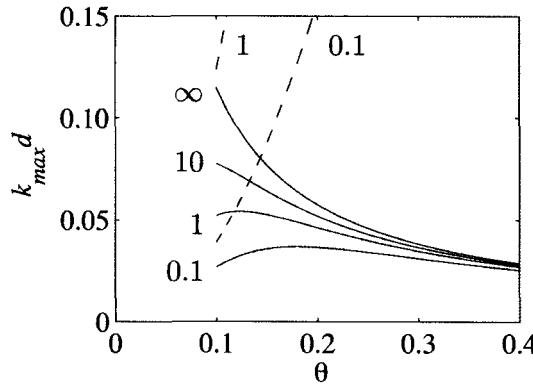


FIG. 7.13 – Nombre d’onde le plus amplifié $k_{\max}d$ en fonction du nombre de Shields correspondant au taux de croissance (7.45). Traits continus : $Re_s = 0,1, 1, 10$ et ∞ (le dernier cas correspondant à l’effet de la gravité ignoré). Tiretés : mécanisme d’erosion des crêtes ignoré, pour $Re_s = 0,1$ et 1 . Autres paramètres : $\theta_t = 0,1$, $c_u/c_d = 1,5$, $c_g = 0,17$.

mesurées. L’autre comparaison possible porte sur les taux de croissance et les célérités.

La mesure de longueurs de rides a fait l’objet de nombreuses études. Comme le montre la figure 7.14 qui présente des données collectées par Yalin (1985), la longueur d’onde varie avec au moins deux paramètres : le nombre de Reynolds à l’échelle de la particule, $Re_p = \rho u_* d / \mu$, et le nombre de Reynolds de sédimentation $Re_s = \rho U_s d / \mu$ (le nombre de Shields étant lié à ces deux nombres par $\theta = Re_p^2 / 18 Re_s$ en écoulement turbulent). Pour $Re_p \lesssim 3$, c’est-à-dire dans le régime visqueux, la longueur d’onde décroît, les points se regroupant à peu près autour de la droite $\lambda/d = 2200 Re_p^{-1}$; autrement dit la longueur d’onde varie comme la longueur visqueuse ν/u_* . Pour $Re_p \gtrsim 3$, la longueur d’onde croît, et dépend en plus de Re_s . Cependant, ces longueurs

TAB. 7.1 – Corrélations empiriques de longueurs de rides formées sous un écoulement continu, aux temps courts (λ_0), ou longs (λ_∞), ou indéterminé (λ).

Référence	λ/d	Remarques
(Yalin 1985)	$\lambda_\infty/d = 2200 Re_p^{-1}$	valide pour $Re_p = u_* d / \nu < 3$
(Yalin 1985)	$\lambda_\infty/d = \alpha f(\alpha Re_p)$	$f(\alpha Re_p)$ donnée par une courbe
	$\alpha = 3,38 \Xi^{-0,25}$	$\Xi = (\rho_p / \rho - 1) g d^3 / \nu^2$
(Coleman <i>et al.</i> 1996)	$\lambda_0/d = 316 Re_{pt}^{-0,2}$	$Re_{pt} = Re_p$ au seuil
(Raudkivi 1997)	$\lambda = 150 d^{0,5}$ (mm)	
(Coleman <i>et al.</i> 2000)	$\lambda = 175 d^{0,75}$ (mm)	

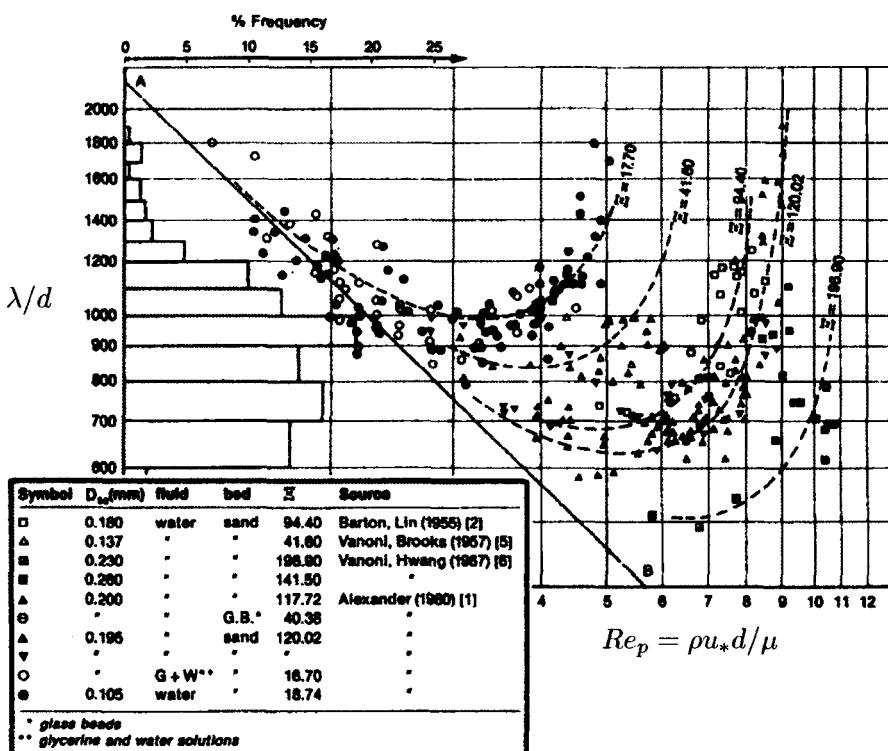


FIG. 7.14 – Longueurs mesurées de rides « mûres » formées sous écoulement continu, en fonction du nombre de Reynolds Re_p , pour différents nombres $\Xi = 18 Re_s$, où Re_s est le nombre de Reynolds de sédimentation construit sur la vitesse de Stokes (Yalin 1985).

sont assez dispersées, et la prise en considération d'autres mesures ne ferait qu'ajouter de la confusion. Le tableau 7.1 montre plusieurs corrélations établies à partir des observations, pour des lits de particules de verre ou de silice de diamètre 0,1 – 0,8 mm, dans de l'eau ou des mélanges d'eau et de glycérine. Ces corrélations sont assez différentes et prédisent des valeurs différent d'un facteur cinq ou plus ; cependant, une tendance générale est que la longueur d'onde augmente avec le diamètre des grains, et dépend peu du nombre de Shields.

Les raisons de la dispersion des mesures sont probablement multiples. Une première raison est que les rides à peine formées, sur une échelle de temps de quelques minutes pour fixer les idées, les rides de dimensions un peu différentes se rattrapent et fusionnent, ce qui conduit à une augmentation de la longueur moyenne comme illustré sur la figure 7.15. Or, ce phénomène intervient sur une échelle de temps comparable à celle de la croissance initiale, et les

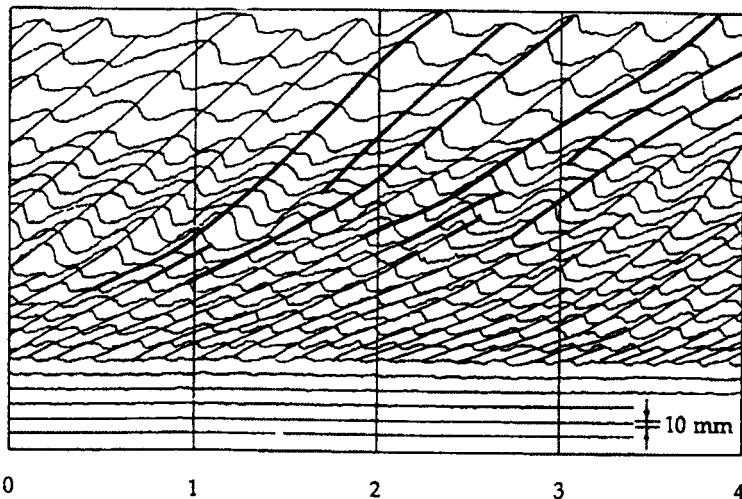


FIG. 7.15 – Profils d'un lit de sable sous un écoulement d'eau continu dirigé de gauche à droite, relevés entre l'instant initial $t = 0$ (trace inférieure) et l'instant $t = 420$ s (trace supérieure); échelle longitudinale : mètres, $d = 0,83$ mm, $u_* = 59$ mm/s, $U_s = 112$ mm/s (Coleman & Melville 1994).

observations disponibles ne précisent que rarement si les longueurs rapportées correspondent à une longueur initiale ou à une longueur de rides « mûres ». Les longueurs reportées sur la figure 7.14 seraient plutôt des longueurs de rides mûres. Une autre raison tient au fait que l'échelle de temps de croissance des rides n'est pas toujours grand devant le temps de développement de l'écoulement, si bien que les rides croissent sous un écoulement instationnaire ou spatialement non uniforme. Par ailleurs certains paramètres sont difficiles à maîtriser ou mal connus, comme la préparation du lit ou la polydispersité des grains. Cette situation n'est pas favorable à la validation des modèles.

Compte tenu des difficultés mentionnées ci-dessus, les mesures de Coleman & Eling (2001), pour des grains de sable dans un écoulement d'huile visqueux, semblent les plus fiables. La figure 7.16a compare ces mesures à la longueur d'onde la plus amplifiée $2\pi/k_{\max}$ déduite de (7.45) pour un écoulement visqueux. Il apparaît d'abord que, sans le mécanisme d'érosion des crêtes, la longueur d'onde est largement sous-estimée et la décroissance avec θ mauvaise. Incluant le mécanisme d'érosion, et ajustant deux paramètres à des valeurs proches des valeurs déterminées par ailleurs, $c_u/c_d = 0,9$ et $c_g = 0,11$, il s'avère que l'accord est très bon. À titre prospectif, la figure 7.16b compare d'autres mesures, pour des grains de sable dans un écoulement d'eau turbulent (Coleman & Melville 1996), aux mêmes prédictions théoriques. Un bon accord est obtenu avec $c_u/c_d = 2$ et $c_g = 0,86$; mais la valeur élevée du coefficient c_g est suspecte; pour être plus probante la comparaison devrait prendre en

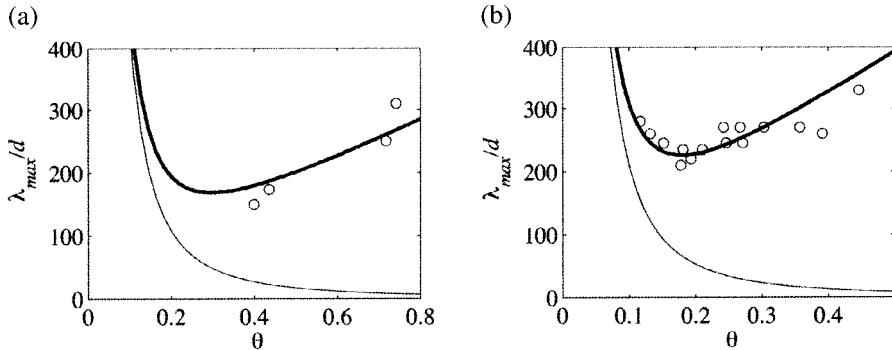


FIG. 7.16 – Comparaisons de longueurs de rides mesurées aux prédictions (7.45), sous écoulement continu. (a) (o), mesures de Coleman & Eling (2000) ($d = 0,30$ mm, $Re_s = 0,0034$, $\theta_t = 0,091$) ; trait gras : $2\pi/k_{max}$ pour les mêmes Re_s et θ_t , avec $c_u/c_d = 0,9$ et $c_g = 0,11$; trait fin : mécanisme d'érosion des crêtes ignoré. (b) (o), mesures de Coleman & Melville (1996) ($d = 0,20$ mm, $Re_s = 7,76$, $\theta_t = 0,051$) ; trait gras : $2\pi/k_{max}$ pour les mêmes Re_s et θ_t , avec $c_u/c_d = 2$ et $c_g = 0,86$; trait fin : mécanisme d'érosion des crêtes ignoré.

compte le cisaillement turbulent mesuré par Abrams & Hanratty (1984), ou calculé par exemple par Richards (1980) ou Sumer & Bakioglu (1984).

L'équation d'érosion-déposition comme équation de relaxation

La longueur de déposition l_d peut s'interpréter comme une longueur de relaxation, ce qui apparaît clairement en réécrivant l'équation de conservation (7.15) un peu différemment. Soit N_{sat} la densité surfacique de grains mobiles en équilibre avec le cisaillement local τ , c'est-à-dire la densité correspondant à un équilibre local entre déposition et érosion. Compte tenu des taux de déposition et d'érosion (7.16) et (7.18), cette densité « saturée » est $N_{sat}d^2 = (\tau - \tau_t)/\tau_{ref}$, qui peut encore s'écrire $t_d d^2 \dot{n}_e$. Ainsi, l'équation de conservation (7.15) peut s'écrire

$$t_d \frac{\partial N}{\partial t} = N_{sat}(\tau) - N - t_d \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad Q = N U_p.$$

Pour des particules d'inertie négligeable, la vitesse est toujours en équilibre avec le cisaillement du lit, soit $U_p = U_{p,sat}(\tau)$. Multipliant l'équation ci-dessus par U_p , introduisant le flux saturé $Q_{sat} = N_{sat}U_{p,sat}$ qui ne dépend que du cisaillement local, confondant $l_d = \bar{U}_p t_d$ avec $U_p t_d$, et supposant enfin l'écoulement stationnaire, il vient

$$0 = Q_{sat}(\tau) - Q - l_d \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (7.48)$$

Cette équation ne fait intervenir qu'une longueur, précisément l_d , qui apparaît bien comme une longueur de relaxation. La solution de cette équation pour un cisaillement périodique $\tau_0 \cos(kx + \phi_\tau)$ est bien sûr la même que celle de l'équation de conservation des particules, c'est-à-dire (7.42).

Une équation de relaxation formellement identique à (7.48) a été introduite dans les années 1990 pour rendre compte des caractéristiques des dunes éoliennes (voir Andreotti, Claudin & Douady (2002a,b) pour une synthèse), mais avec une signification physique différente pour l'échelle de longueur. Cette équation, introduite sur une base phénoménologique, rend bien compte d'une observation de Bagnold (1941) : lorsqu'un vent soufflant sur une surface rigide atteint un lit érodable, le flux de particules, nul au bord du lit érodable, croît sur une distance l_{acc} avant d'atteindre une valeur saturée Q_{sat} (figure 7.17). Dans le contexte éolien, cette longueur est liée à l'inertie des particules, et correspond à la longueur d'accélération (7.25) introduite plus haut ; plus précisément, l'observation montre $l_{acc} = c_l (\rho_p / \rho) d$ avec un coefficient c_l à peu près constant et voisin de quatre. Pour des grains de sable dans l'air, cette longueur est de quelques mètres, et fournit une explication de la taille minimale des dunes barkhanes.

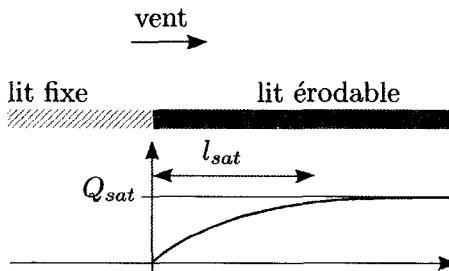


FIG. 7.17 – Illustration de la longueur de relaxation inertuelle l_{acc} du flux de particules.

L'équation de relaxation (7.48), avec l_{acc} comme échelle de longueur, a aussi été invoquée pour rendre compte de l'observation de barkhanes centimétriques observées sous l'eau (Hersen, Douady & Andreotti 2002), et de la croissance de rides sous écoulement d'eau laminaire (Valance & Langlois 2005). Avant de discuter cette idée, calculons la longueur d'onde la plus amplifiée correspondante, en ignorant l'effet de la gravité. Avec $k_{\max} l_{acc} = 0,31$ ($c_g = 0$) et $l_{acc} = 4(\rho_p / \rho) d$, il vient $\lambda_{\max} \approx 200 d$. Au vu de la figure 7.16, la prédiction semble bonne. Mais la prise en compte de l'effet de la gravité ($c_g \neq 0$) montre alors une décroissance de λ_{\max} avec θ , alors que les mesures montrent au contraire une légère augmentation. Plus fondamentalement, l'idée de mettre en jeu, pour la dynamique des particules, une longueur inertuelle qui ignore l'hydrodynamique locale, si elle est bien justifiée dans l'air, l'est beaucoup moins dans un liquide. En effet, dans un liquide, contrairement à un gaz,

les densités des particules et du fluide sont voisines, et les effets inertIELS y sont donc comparables ; de plus, à l'échelle des grains, les effets visqueux ne sont en général pas négligeables. Finalement, l'équation de relaxation (7.48) capture bien la dynamique de la couche de grains mobiles, à condition d'y faire intervenir la bonne longueur ; une longueur de déposition des grains apparaît plus pertinente qu'une longueur d'accélération, mais le débat sur la longueur des rides n'est pas clos. En particulier, la question de l'incidence des ondes de Tollmien-Schlichting sur la formation de rides reste ouverte.

7.6 Rides aquatiques sous un écoulement oscillant

7.6.1 Introduction

Le mouvement oscillant d'une masse liquide au-dessus d'un fond granulaire entraîne la formation de rides de grains, dont les crêtes sont alignées transversalement au mouvement oscillant. Les rides de sable qu'on peut observer sur une plage à marée basse en sont un exemple : ces rides ont été formées avant que la plage ne se découvre, par l'oscillation induite par les vagues de surface (figure 7.18). La distance entre deux rides, ou longueur d'onde, est de l'ordre de dix centimètres, et la hauteur est de l'ordre du centimètre. Des structures semblables ont également été observées sur le plateau continental sous des profondeurs d'eau de deux à trois cents mètres, avec une longueur d'onde métrique. Ces rides ont un effet important sur l'atténuation des vagues, atténuation essentiellement liée à la dissipation visqueuse dans la couche limite oscillante et dans les détachements tourbillonnaires sur leur crête. Ces rides ont aussi un impact important sur le transport granulaire associé aux courants de dérive moyenne près du fond, et donc sur la géomorphologie aux grandes échelles de temps (Nielsen 1992). Une observation remarquable est le tri granulométrique induit par la formation des rides : les grains les plus fins migrent sur les crêtes tandis que les plus gros restent dans les creux.

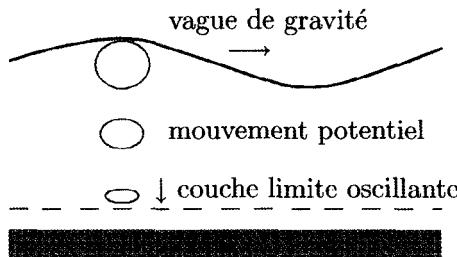


FIG. 7.18 – Trajectoires elliptiques des particules fluides sous une vague de gravité et couche limite oscillante sur le fond.

Les mouvements oscillants induits par les marées, dans les estuaires ou les mers peu profondes comme la Manche ou la mer du Nord, sont aussi à l'origine de structures sableuses (Blondeaux 2001). Mais du fait de leurs grandes dimensions, longueurs d'onde de plusieurs centaines de mètres et amplitudes de 5 à 10 m de l'ordre de la profondeur d'eau, ces structures se rangent plutôt dans la catégorie des dunes.

7.6.2 Observations

De de Candolle (1883) à Bagnold (1946)

La formation des rides, ainsi que le transport de sédiment et la dissipation associés, ont été étudiées dès le XIX^e siècle, en particulier par C. de Candolle et G. H. Darwin. En laboratoire, ces rides ont pu être reproduites en canal à houle, ou en faisant osciller la cuve contenant les grains, ou encore en faisant osciller le lit de grains dans un fluide au repos. Un bon exposé des premières observations est donné par Bouasse (1924) ; les références correspondantes peuvent être trouvées dans l'étude de Mrs Ayrton (1910).

Les observations de Bagnold (1946) marquent une avancée décisive sur trois problèmes : le seuil de mise en mouvement des grains, les caractéristiques des rides, et le frottement supplémentaire lié aux rides. Ces observations ont été réalisées dans une cuve d'eau au repos, le lit de grains étant animé d'un mouvement oscillant d'amplitude A et de pulsation ω , par un système bielle-manivelle. Cette situation est semblable à la situation naturelle d'un fluide oscillant au-dessus d'un lit fixe, tant que la force d'inertie sur les grains est petite devant les autres forces *horizontales*, d'ordre $\mu_f(\rho_p - \rho)gd^3$ où μ_f est typiquement voisin de 0,1. Cette condition s'écrit donc $\rho A\omega^2 \ll \mu_f(\rho_p - \rho)g$.

Bagnold distingue deux types de rides : les *rides à grains roulants* et les *rides à tourbillon*. Juste au-dessus du seuil de mise en mouvement, les grains sont animés d'un mouvement de va-et-vient initialement uniforme, puis tendent à se rassembler sur des lignes transversales parallèles, comme sur la première photo de la figure 7.19. La croissance de ces rides à grains roulants entraîne une diminution du cisaillement dans les creux, et donc une diminution du mouvement des grains. Lorsque la diminution du cisaillement dans les creux est telle que le mouvement des grains ne peut plus se maintenir, la croissance s'arrête. Un accroissement de l'amplitude du mouvement entraîne la mise en mouvement de nouveaux grains, et donc une augmentation de la hauteur des rides et un ajustement de leur longueur d'onde par coalescence de crêtes. Lorsque la vitesse d'oscillation excède environ deux fois la vitesse-seuil, un nouveau régime d'écoulement s'installe brusquement : les tourbillons qui se développent dans les creux, suite au décollement de l'écoulement au sommet des crêtes, sont suffisamment forts pour y arracher des grains et les entraîner sur les crêtes. Ce phénomène est initié sur la ride initialement la plus haute, puis se propage de part et d'autre comme montré sur la figure 7.19. L'amplitude de ces rides à tourbillon croît rapidement, et leur longueur s'ajuste

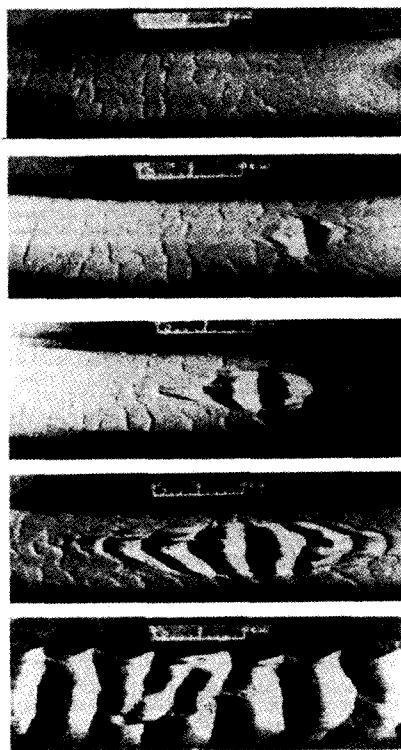


FIG. 7.19 - Du haut vers le bas : rides à grains roulants, et développement d'un train de rides à tourbillon à partir d'un site de nucléation (Bagnold 1946).

de sorte que le tourbillon occupe tout l'espace entre deux crêtes. Sur un lit étendu, plusieurs systèmes de rides à tourbillon peuvent se développer à partir de plusieurs sites de nucléation, et donner lieu à des motifs irréguliers dont la longueur moyenne est inférieure à la longueur « naturelle » d'un système seul. Les expériences sur différents grains (acier, quartz, charbon) montrent que la longueur naturelle varie comme la racine carrée du diamètre des grains, et semble insensible à leur densité. Ces rides à tourbillon peuvent aussi se développer sur un lit plan à partir de tout obstacle haut d'une trentaine de diamètres, un caillou par exemple. Notons qu'en termes de systèmes dynamiques, ce développement à partir d'une « perturbation d'amplitude suffisamment grande » peut s'interpréter comme correspondant à une bifurcation sous-critique. Parmi les autres observations de Bagnold, mentionnons l'apparition, à faible amplitude d'oscillation, de ponts de grains reliant deux crêtes adjacentes, donnant au motif de rides l'allure d'un « mur de briques » (*brick pattern*).

Études récentes

De nombreuses études ont approfondi et précisé les observations de Bagnold, dans des configurations expérimentales variées : canal à houle (Faraci & Foti 2001), écoulement de Couette visqueux oscillant (Mouilleron, Charru & Eiff 2001), lit de grains oscillant dans un fluide au repos dans des canaux rectilignes (Sleath 1976) ou annulaires (Scherer, Melo & Marder 1999, Stegner & Wesfreid 1999, Rousseaux, Stegner & Wesfreid 2004).

Le seuil d'apparition des rides semble proche ou confondu avec le seuil de mise en mouvement des grains, c'est-à-dire qu'il correspond à un nombre de Shields $\theta = \tau/(\rho_p - \rho)gd$ compris entre 0,05 et 0,1. Pour une oscillation du fluide d'amplitude A et de fréquence angulaire ω , l'épaisseur de la couche limite laminaire est $\delta_\omega = \sqrt{2\nu/\omega}$, millimétrique, et la vitesse juste au-dessus de cette couche est $U_0 = \omega A$. Le nombre de Reynolds de couche limite, défini par

$$Re_\delta = \frac{\rho U_0 \delta_\omega}{\mu}, \quad (7.49)$$

étant de l'ordre de quelques centaines, la couche limite est généralement considérée laminaire. La contrainte peut donc être évaluée par $\tau \sim \mu U/\delta_\omega$, et le seuil de mise en mouvement s'écrit (Bagnold 1946)

$$\frac{\nu^{1/2} \omega^{3/2} A}{(\rho_p/\rho - 1)gd} \approx 0,05.$$

Les expériences de Scherer *et al.* (1999) ont montré que la prédiction $A \sim \omega^{-3/2}$ est bien vérifiée, mais que la dépendance vis-à-vis du diamètre est $A \sim \sqrt{d}$ plutôt que $A \sim d$.

La longueur d'onde des rides à grains roulants a été étudiée en particulier par Sleath (1976), en lien avec une étude de stabilité linéaire. L'étude expérimentale a été menée au voisinage du seuil de mise en mouvement pour trois types de grains⁷. Les longueurs mesurées sont reportées sur la figure 7.20a. Il ressort que la longueur croît avec l'amplitude des oscillations et avec le diamètre des grains ; la dépendance avec la fréquence est faible, et non monotone.

Les mesures de Sleath ainsi que d'autres collectées par Blondeaux (1990) semblent se regrouper assez bien lorsque l'on porte sur un diagramme logarithmique λ/A en fonction de

$$F_d = \frac{\rho(\omega d)^2}{(\rho_p - \rho)gd}, \quad (7.50)$$

comme montré sur la figure 7.20b. Cependant, ce regroupement est douteux : il indiquerait que la longueur d'onde varie comme ω^2 , en contradiction avec l'observation rapportée ci-dessus d'une faible dépendance avec la fréquence (on

7. Le seuil correspond à $\theta_t \approx 0,05$ pour le gros sable ($d = 1,14$ mm), 0,08 pour les cylindres ($d = 3$ mm), et 0,2 pour le sable fin ($d = 0,40$ mm).

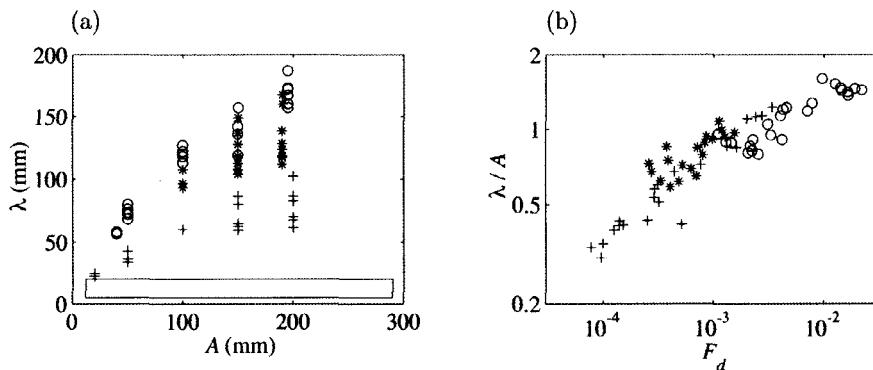


FIG. 7.20 – (a) Longueurs de rides mesurées par Sleath (1976) : (+), sable, $d = 0,40$ mm, (*), sable, $d = 1,14$ mm, (o), nylon, $d = 3$ mm ; le rectangle indique la région occupée par les mesures de Rousseaux *et al.* (2004). (b) Mêmes longueurs dans un diagramme logarithmique (λ/A , F_d).

devine sur la figure de petits arcs d'hyperbole correspondant à une variation de la période, qui ne s'alignent pas du tout dans la direction générale). Une corrélation très différente, $\lambda = 10\sqrt{Ad}$, rassemblerait aussi bien les données. La question du bon plan dans lequel représenter les mesures, dans un espace des paramètres de dimension quatre (en retenant comme grandeurs physiques pertinentes les deux densités, les longueurs d et A , la viscosité, et la gravité), reste ouverte.

Les rides à grains roulants obtenues par Rousseaux *et al.* (2004) dans une configuration annulaire, et pour des billes de verre de diamètre $d = 65\text{ }\mu\text{m}$ à $310\text{ }\mu\text{m}$, s'inscrivent dans le rectangle indiqué sur la figure 7.20a. Ces rides sont assez différentes de celles de Sleath (1976) : leur longueur, centimétrique, est nettement plus petite ; elle est, au voisinage du seuil, indépendante de l'amplitude des oscillations ; elle dépend de la fréquence des oscillations et du diamètre des grains selon la corrélation empirique $\lambda \sim d^{3/4}\omega^{3/8}$. Cette étude a révélé l'importance de la préparation du lit.

Pour conclure ce panorama très partiel, on peut dire que, comme pour les rides formées par un écoulement continu, le problème de la longueur d'onde sélectionnée sous un écoulement oscillant n'est pas bien résolu. Une raison est sans doute que, dans la plupart des expériences, les échelles ne sont pas bien séparées ; en particulier, dans l'eau, l'épaisseur de la couche limite est toujours de l'ordre du diamètre des grains. Les observations de Bagnold, soixante ans après, gardent toute leur fraîcheur.

7.6.3 Mécanisme d'initiation des rides à grains roulant

Lorsqu'un fluide oscille au-dessus d'une paroi ondulée, les particules fluides ne retournent pas exactement à leur position initiale à l'issue d'une période.

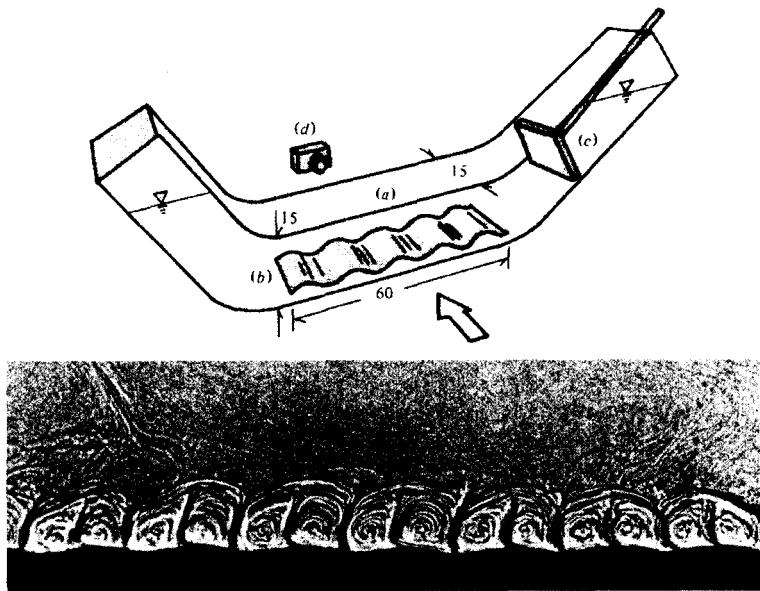


FIG. 7.21 – Écoulement de dérive moyen induit par l'oscillation d'un fluide au-dessus d'un fond ondulé : schéma du dispositif expérimental (en haut), et visualisation de l'écoulement moyen (en bas) pour $\eta_0 = 1,5$ mm, $\lambda = 40$ mm, $\nu = 1,01 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ et $\delta_\omega = 5,5$ mm (Kaneko & Honji 1979).

Il existe un écoulement moyen stationnaire dont les lignes de courant dessinent des cellules de recirculation. La figure 7.21 reproduit, avec le schéma du dispositif expérimental, une photo de cet écoulement moyen réalisée par Kaneko & Honji (1979). Cet écoulement a aussi été calculé, en le supposant laminaire, par Lyne (1971), Sleath (1976) et Blondeaux (1990), entre autres ; la figure 7.22 en donne deux illustrations. Les observations et les calculs montrent en particulier qu'au voisinage de la paroi, le déplacement net du fluide est dirigé des creux vers les crêtes.

Le mouvement des grains créé par l'oscillation du fluide est illustré sur le diagramme spatio-temporel de la figure 7.23. Ce diagramme a été obtenu à partir du cisaillement visqueux sur une paroi sinusoïdale, en intégrant l'équation du mouvement des grains en considérant que leur vitesse est proportionnelle au cisaillement local. Les grains étant initialement distribués uniformément sur le fond ondulé, leur oscillation est bien visible, ainsi que leur dérive moyenne vers les crêtes. Cette dérive vers les crêtes, qui se produit tant que la longueur d'onde n'est pas trop grande ou la fréquence trop basse, conduit donc à une accumulation de grains sur les crêtes et à une amplification de la perturbation initiale du lit.

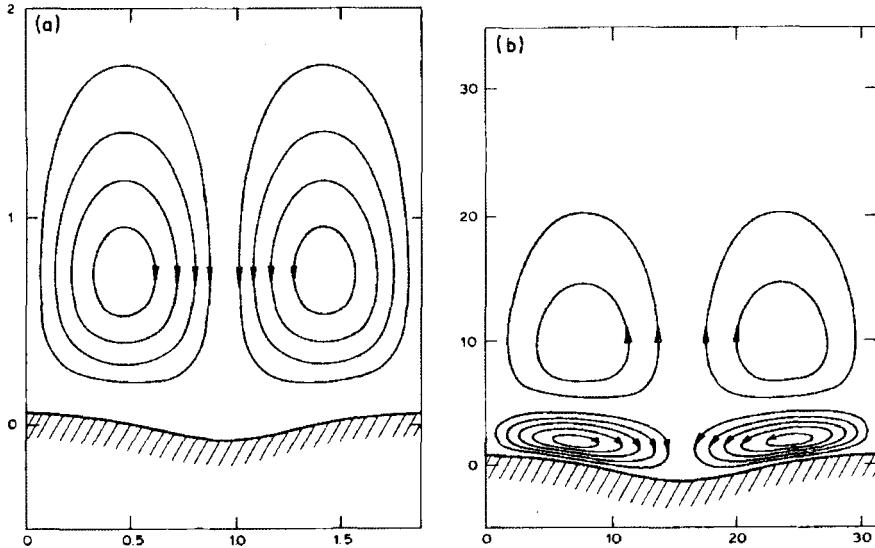


FIG. 7.22 – Écoulement de dérive moyen induit par l'oscillation d'un fluide au-dessus d'un fond ondulé (unité de longueur : δ) ; (a) $\eta_0/\lambda = 0,03$ et $\lambda/\delta_\omega = 2$, (b) $\eta_0/\lambda = 0,03$ et $\lambda/\delta_\omega = 30$ (Sleath 1976).

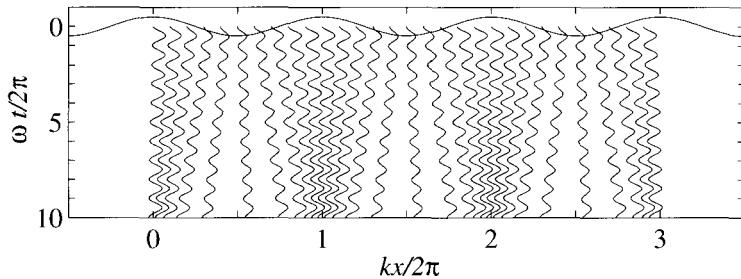


FIG. 7.23 – Diagramme spatio-temporel du mouvement de grains distribués sur un fond ondulé dans un écoulement visqueux oscillant, montrant la dérive des grains vers les crêtes (Charru & Hinch 2006).

Le mécanisme décrit ci-dessus de l'instabilité d'un lit granulaire en écoulement oscillant est identique à celui d'un écoulement continu. L'origine de cette instabilité est dans l'inertie du fluide, qui se traduit par un déphasage du cisaillement sur le lit comme discuté dans la section précédente. Considérons pour simplifier un écoulement de base visqueux quasi statique $\bar{U}(y) = \bar{\gamma}y \sin \omega t$. Au cours de la phase du mouvement où l'écoulement est dirigé vers la droite, la structure des perturbations, illustrée sur la figure 7.24a,

est identique à celle présentée sur la figure 7.11a : l'advection par l'écoulement de base des perturbations de vorticité $\omega^{(0)} \sim \bar{\gamma}\eta/l_v$ générées par la déformation du lit induit une correction inertielle $\omega^{(1)} \sim Re_{\text{eff}}\omega^{(0)}$ de ces perturbations (on rappelle que l_v est la longueur de pénétration des perturbations de vorticité et $Re_{\text{eff}} = \bar{\gamma}l_v^2/\nu$ le nombre de Reynolds effectif). La signature au voisinage du lit de cette correction inertielle est un écoulement dirigé des creux vers les crêtes, et un cisaillement $\tau^{(1)} \sim \mu\omega^{(1)}$. Dans la demi-alternance suivante, l'écoulement de base s'inverse, ainsi que la correction $u^{(0)}$ (figure 7.24b). Par contre, la correction inertielle $u^{(1)}$ ne change pas de sens, ni la correction $\tau^{(1)}$ associée. Sur une période, la moyenne temporelle du champ de vitesse de base $\bar{U}(y) \sim \sin\omega t$ est nulle, ainsi que celle de la correction $u^{(0)} \sim \sin\omega t \cos kx$; mais la moyenne de la correction inertielle $u^{(1)} \sim \sin^2\omega t \sin kx$ n'est pas nulle. L'écoulement moyen dû à cette correction inertielle est dirigé vers les crêtes au voisinage du lit (figure 7.24c) et a la structure d'une cellule de recirculation comme représenté sur la figure 7.22.

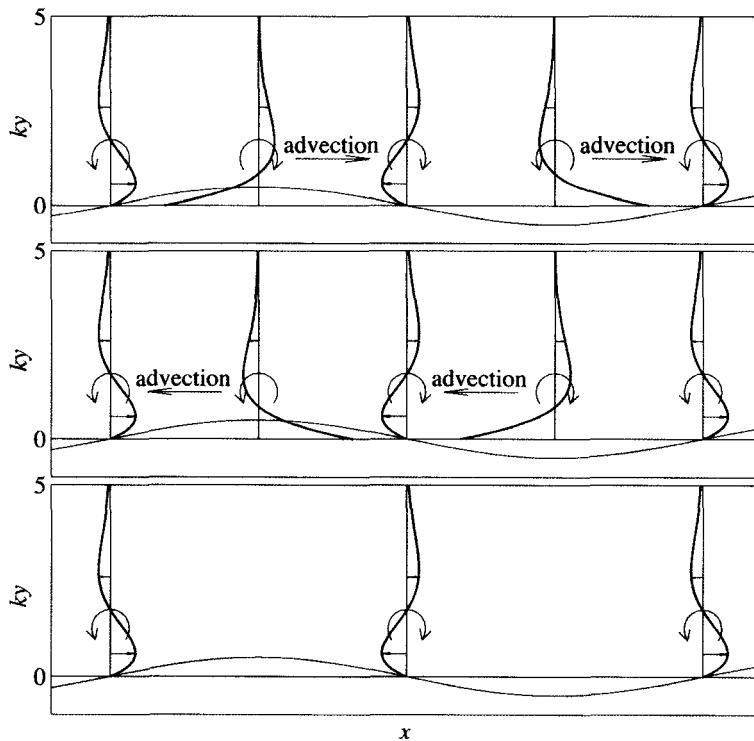


FIG. 7.24 – Mécanisme de création de l'écoulement de dérive vers les crêtes. (a) perturbations de vitesse longitudinales lorsque l'écoulement de base est dirigé vers la droite, pour $kH = 10$ et $kl_v = 1$; (b) idem, vers la gauche; (c) profil de vitesse moyen sur une période.

7.6.4 Discussion

Un calcul complet de croissance de rides sur un fond sableux induit par une onde de gravité en surface a été réalisé par Blondeaux (1990). L'écoulement dans la couche limite oscillante, supposée laminaire, est calculé par un raccord avec l'écoulement potentiel extérieur induit par l'onde de gravité. Le flux de grains est supposé en équilibre avec le cisaillement instantané, et donné par une loi de type (7.14) corrigée empiriquement pour tenir compte de l'instationnarité du mouvement du fluide. Cette étude montre que les grandes longueurs d'onde sont stables, et que l'instabilité se manifeste pour un nombre d'onde fini (il ne s'agit donc pas d'une instabilité de grande longueur d'onde). La raison de la stabilité des grandes longueurs d'onde réside dans l'instationnarité de l'écoulement de base (effets non quasi statiques), responsable d'un écoulement moyen vers les creux qui s'oppose à l'écoulement moyen vers les crêtes induit par l'advection ; pour les grandes longueurs d'onde et les basses fréquences, l'écoulement net (instationnarité + advection) est dirigé vers les creux et stabilise le lit plan. Les prédictions de la longueur d'onde la plus amplifiée sont correctes, autant qu'on puisse en juger du fait de la dispersion des résultats expérimentaux, mais les lois d'échelle ne sont pas données.

Des effets de relaxation ont été pris en compte par Charru & Hinch (2006) dans le cadre du modèle d'érosion-déposition présenté précédemment. Il s'avère en particulier que le mécanisme stabilisant d'érosion des crêtes devient inopérant lorsque l'amplitude de déplacement des grains est petite devant la longueur d'onde.

Notons que l'écoulement moyen au-dessus d'une paroi ondulée est analogue à l'écoulement moyen dans un tube siège d'une onde acoustique stationnaire (tube de Kundt). L'accumulation des grains sur une crête correspond à la concentration d'une poudre fine aux nœuds de vibration du tube (horizontal). Dans ce problème analysé par Rayleigh (1894, vol. II §352), c'est le gradient d'amplitude de l'onde stationnaire qui rompt l'invariance par translation, rôle joué ici par la déformation périodique du fond. Pour une présentation plus générale de ces phénomènes, voir Batchelor (1967, §5.13) et Riley (2001).

Pour conclure, le phénomène d'écoulement moyen (« *steady streaming* ») dirigé vers les crêtes est sans doute un élément d'interprétation de la croissance de rides, mais ce n'est peut-être pas le seul. Le phénomène d'agrégation des grains par piégeage dans le sillage de grains voisins, décrit par Bagnold (1946) et Sleath (1976), pourrait jouer un rôle important ; ce phénomène, non pris en compte par l'analyse présentée ci-dessus, a fait l'objet d'une modélisation par Andersen (2001).

7.7 Dunes aquatiques : un modèle élémentaire

7.7.1 Introduction

Les dunes aquatiques, brièvement présentées dans la section §7.4, se développent au fond des rivières ou au fond des mers peu profondes balayées par des courants de marée (Blondeaux 2001) ; on rencontre aussi de telles structures dans les conduites où circule un mélange de liquide et de grains. Elles sont caractérisées par des dimensions de l'ordre de la hauteur h du fluide. On peut imaginer deux scénarios pour la formation de ces dunes : elles pourraient être le résultat d'un long processus de grossissement des rides par coalescences successives, dont la figure 7.15 montrerait les premiers stades, ou être le résultat d'une instabilité propre, à partir d'un lit plan. Entre ces deux processus, la question du plus pertinent est aujourd'hui ouverte. Dans le premier cas, très peu étudié, le processus de formation d'une dune serait essentiellement non linéaire. Le second cas, celui d'une croissance par une instabilité propre, relèverait d'études de stabilité linéaire, comme celles de Richards (1980) et de Colombini (2004) en particulier. Ces dernières études suivent la même méthodologie que pour la formation des rides aquatiques : l'écoulement, calculé avec un modèle de turbulence, est considéré quasi statique sur un lit sinusoïdal fixe, et le transport granulaire est en équilibre avec le cisaillement. Le fait que le nombre d'onde le plus amplifié corresponde à $k_{\max}h \approx 1$, indépendamment de la rugosité du fond, est considéré comme la signature d'un « mode dune ».

Nous analysons ici le problème à partir d'un modèle très élémentaire, qui échoue à rendre compte de la formation de dunes, mais qui a l'avantage de permettre une approche analytique mettant en œuvre les équations de Saint-Venant, et de mettre en évidence quelques aspects importants du problème. Une approche plus élaborée a été proposée par Lagrée (2003), qui met en œuvre la théorie de couche limite du « triple pont » (Cousteix & Mauss 2006).

7.7.2 Modélisation et écoulement de base

Modélisation

On considère l'écoulement dans la direction x d'une couche fluide d'épaisseur $h(x, t)$, sur un fond érodable $h_b = h_b(x, t)$ de pente moyenne α faible. On considère que l'échelle des variations dans la direction de l'écoulement est grande devant la longueur caractéristique transversale h . Dès lors, la distribution verticale de pression est hydrostatique, et l'intégration sur la hauteur des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement longitudinale donne les équations de Saint-Venant (annexe A). Notant $U(x, t)$ la vitesse longitudinale moyenne sur la hauteur de l'écoulement, et considérant un écoulement à grand nombre de Reynolds (pour lequel le coefficient c_{U^2} de distribution transverse de quantité de mouvement est voisin de l'unité), ces

équations s'écrivent

$$\partial_t h + \partial_x(hU) = 0, \quad (7.51a)$$

$$\rho h \partial_t U + \rho h U \partial_x U = -\rho g h \partial_x(h_b + h) - \tau + \rho g h \alpha, \quad (7.51b)$$

où τ est la contrainte de frottement exercée par le fond. Cette contrainte doit être modélisée, c'est-à-dire exprimée en fonction des variables U et h . C'est ici que réside le plus grand danger de mal représenter la physique du problème. Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, ce cisaillement est classiquement relié à la vitesse U de l'écoulement en introduisant un coefficient de frottement c_f défini par :

$$\tau = c_f \frac{\rho U^2}{2}. \quad (7.52)$$

Ce coefficient de frottement⁸ dépend du nombre de Reynolds ; par souci de simplification, on le considérera ici constant :

$$c_f = 0,01.$$

Lorsque le cisaillement exercé par l'écoulement sur le lit n'est pas trop important, disons pour un nombre de Shields inférieur à l'unité, les sédiments sont transportés par charriage, sans particules en suspension, selon une loi de transport

$$Q = Q(\tau), \quad (7.53)$$

du type Meyer-Peter & Muller (7.14). Enfin, la loi d'évolution du lit est donnée par la loi de conservation de la masse

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad (7.54)$$

en omettant ici la compacité C du lit.

Écoulement stationnaire et uniforme

Les équations (7.51) à (7.54) admettent une solution stationnaire et uniforme correspondant à un équilibre entre la contrainte $\bar{\tau}$ exercée par le fond et le poids par unité de longueur $\rho g \bar{h} \alpha$. Pour un débit par unité de largeur ($\bar{U}\bar{h}$) donné, cette solution s'écrit

$$\bar{U}^3 = \frac{2\alpha g(\bar{U}\bar{h})}{c_f}, \quad (7.55a)$$

$$\bar{h}^3 = \frac{c_f(\bar{U}\bar{h})^2}{2\alpha g}, \quad (7.55b)$$

$$\bar{\tau} = \rho g \bar{h} \alpha, \quad (7.55c)$$

$$\bar{h}_b = 0, \quad (7.55d)$$

$$\bar{Q} = Q(\bar{\tau}). \quad (7.55e)$$

8. On notera que ce coefficient est différent du coefficient (7.2) introduit pour la modélisation des avalanches.

On remarquera qu'une augmentation du coefficient de frottement augmente la hauteur et diminue la vitesse. Pour cette solution de base, le nombre de Froude $Fr = \bar{U}^2 / g\bar{h}$ est

$$Fr = \frac{2\alpha}{c_f}.$$

À titre d'ordre de grandeur, une rivière débitant $(\bar{U}\bar{h}) = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ par unité de largeur avec une inclinaison $\alpha = 10^{-3}$, et $c_f = 0,01$ constant, la hauteur et la vitesse moyenne sont $\bar{h} = 0,80 \text{ m}$ et $\bar{U} = 1,25 \text{ m/s}$, et correspondent à $Fr = 0,2$ et $Re = \rho\bar{U}\bar{h}/\mu = 10^6$. La contrainte sur le fond vaut $7,8 \text{ Pa}$, ce qui correspond pour des grains de sable de $0,3 \text{ mm}$ de diamètre à un nombre de Shields $\theta = 1,6$. La loi de Meyer-Peter & Muller (7.14) donne alors un débit de grains par unité de largeur $\bar{Q} = 17Q_{\text{ref}} = 0,35 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$.

7.7.3 Stabilité sur un fond rigide

On considère dans un premier temps le cas d'un fond non érodable ($Q(\tau) = 0$). Linéarisant les équations des perturbations de l'écoulement de base (7.55e), et introduisant des modes normaux en $e^{ik(x-ct)}$, il vient la relation de dispersion

$$(c/\bar{U} - 1)^2 + \frac{ic_f}{k\bar{h}}(c/\bar{U} - 1) - \frac{1}{Fr} \left(1 + \frac{i\alpha}{k\bar{h}}\right) = 0. \quad (7.56)$$

En tenant compte de la relation $Fr = 2\alpha/c_f$ correspondant à l'écoulement établi, et en introduisant le nombre d'onde de référence k_0 tel que

$$k_0\bar{h} = \frac{\alpha}{\sqrt{Fr}},$$

les solutions de la relation de dispersion sont

$$\frac{c_\pm}{\bar{U}} - 1 = \frac{i}{\sqrt{Fr}} \frac{k_0}{k} \left(-1 \pm \sqrt{1 - (k/k_0)^2 - i\sqrt{Fr}k/k_0}\right). \quad (7.57)$$

Un développement en série de Taylor pour les grandes longueurs d'onde ($k \ll k_0$ réel) donne pour la célérité et le taux de croissance temporel

$$c_{r\pm} = \bar{U} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right), \quad (7.58a)$$

$$\sigma_\pm = kc_{i\pm} = \frac{g\alpha}{\bar{U}} \left(-1 \pm 1 \pm \frac{Fr - 4}{8} \frac{k^2}{k_0^2}\right). \quad (7.58b)$$

Ces expressions montrent que les ondes longues ne sont pas dispersives, et que le mode rapide ($c_+ > \bar{U}$) est instable pour $Fr > 4$, avec comme échelle de temps de l'instabilité $\sigma_0^{-1} = \bar{U}/g\alpha$. La figure 7.25 montre la célérité et le taux

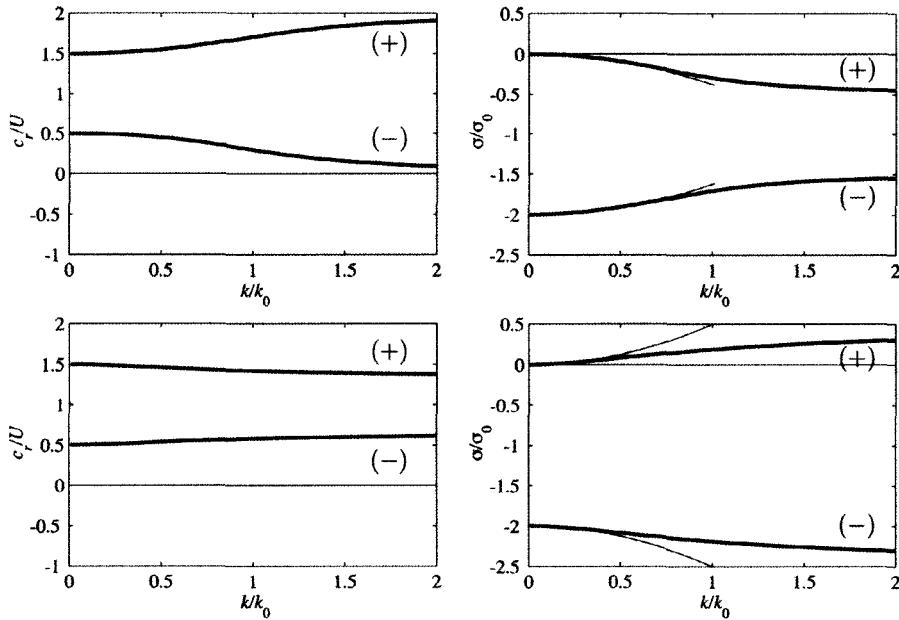


FIG. 7.25 – Célérité (à gauche) et taux de croissance (à droite) correspondant aux valeurs propres (7.57) du problème avec fond non érodable, pour $Fr = 1$ (en haut) et $Fr = 8$ (en bas) ; à droite, les paraboles correspondent aux développements asymptotiques (7.58).

de croissance correspondant à (7.57), pour deux nombres de Froude. Il apparaît que les nombres d'onde sont tous stables pour $Fr = 1$ et tous instables pour $Fr = 8$. On peut vérifier directement sur (7.57) que $Fr = 4$ correspond à la stabilité marginale de tous les nombres d'onde, et pas seulement des ondes longues. La valeur critique $Fr = 4$ a une interprétation simple, en réécrivant la célérité des ondes dans le repère se déplaçant avec la vitesse moyenne U :

$$c_{r\pm} - \bar{U} = \pm \frac{\sqrt{Fr}}{2} \sqrt{gh}.$$

Cette expression montre que pour $Fr < 4$, les ondes, stables, se propagent moins vite que \sqrt{gh} , qui correspond à la célérité des ondes longues de gravité ; inversement pour $Fr > 4$, les ondes, instables, se propagent plus vite. La même remarque vaut pour la stabilité des avalanches présentée au début de ce chapitre, comme montré par Forterre & Pouliquen (2003).

7.7.4 Stabilité sur un fond érodable

Considérons maintenant un fond érodable. La relation de dispersion des petites perturbations de l'écoulement de base (7.55e) est la relation (7.56)

avec le terme supplémentaire

$$-\frac{B}{Fr} \frac{c/\bar{U} - 1}{c/\bar{U}}, \quad B = \frac{Q'(\bar{\tau})\tau'(\bar{U})}{\bar{h}} > 0. \quad (7.59)$$

Multippliant cette relation de dispersion par c/\bar{U} , celle-ci se présente comme une équation du troisième degré en c/\bar{U} (ou en $c/\bar{U} - 1$), et possède donc trois solutions. Pour $B = 0$, on retrouve les deux valeurs propres c_{\pm} correspondant à un fond rigide, données par (7.57), avec en plus la valeur propre nulle $c_0 = 0$. Pour B non nul mais petit, on peut rechercher les corrections c'_{\pm} et c'_0 en linéarisant la relation de dispersion autour de c_{\pm} et c_0 . Il vient, dans la limite des grandes longueurs d'onde ($k \ll k_0$)

$$\frac{c'_0}{\bar{U}} = -i \frac{B}{3\sqrt{Fr}} \frac{k}{k_0}, \quad \frac{c'_+}{\bar{U}} = -i \frac{B}{6\sqrt{Fr}} \frac{k}{k_0}, \quad \frac{c'_-}{\bar{U}} = +i \frac{B}{2\sqrt{Fr}} \frac{k}{k_0}.$$

Ces corrections sont imaginaires pures et n'affectent donc que les taux de croissance, qui deviennent

$$kc_{0i} = -\frac{g\alpha B}{3\bar{U}} \frac{k^2}{k_0^2}, \quad (7.60a)$$

$$kc_{+i} = \frac{g\alpha}{\bar{U}} \left(\frac{Fr - 4}{8} - \frac{B}{6} \right) \frac{k^2}{k_0^2}, \quad (7.60b)$$

$$kc_{-i} = \frac{g\alpha}{\bar{U}} \left(-2 - \frac{Fr - 4}{8} + \frac{B}{2} \right) \frac{k^2}{k_0^2}. \quad (7.60c)$$

Le nouveau mode c_0 lié au fond érodable est donc stable, et la correction des modes de surface est négative pour c_+ et positive pour c_- . Ce dernier mode c_- étant très stable, la correction, bien que positive, ne peut cependant pas le déstabiliser.

Le tracé des racines de la relation de dispersion complète est présenté sur la figure 7.26 pour $B = 1$ et $B = 10$. Ce tracé confirme l'analyse de la stabilité des petits nombres d'onde, et montre de plus que les grands nombres d'onde ($k \gg k_0$) se comportent de la même façon.

La conclusion de cette étude est donc que la présence d'un fond érodable introduit un nouveau mode, en plus des deux modes de surface, mais ce nouveau mode est stable. L'introduction de l'effet stabilisant de la gravité par une contrainte effective (7.32), ou d'une longueur de relaxation entre cisaillement et flux de particules, ne pourrait que stabiliser plus encore le fond. L'échec du modèle à reproduire l'instabilité d'un lit érodable doit être attribué à la modélisation du frottement. En effet, la modélisation (7.52) adoptée ici impose à la perturbation de frottement d'être en phase avec la perturbation de vitesse. Or l'étude précédente des rides a montré le caractère crucial d'un déphasage entre le cisaillement et la déformation du lit. Quelques pistes peuvent être données pour améliorer la situation. La plus simple, proposée dans l'exercice 7.8.2, consisterait à considérer un coefficient de frottement non constant,

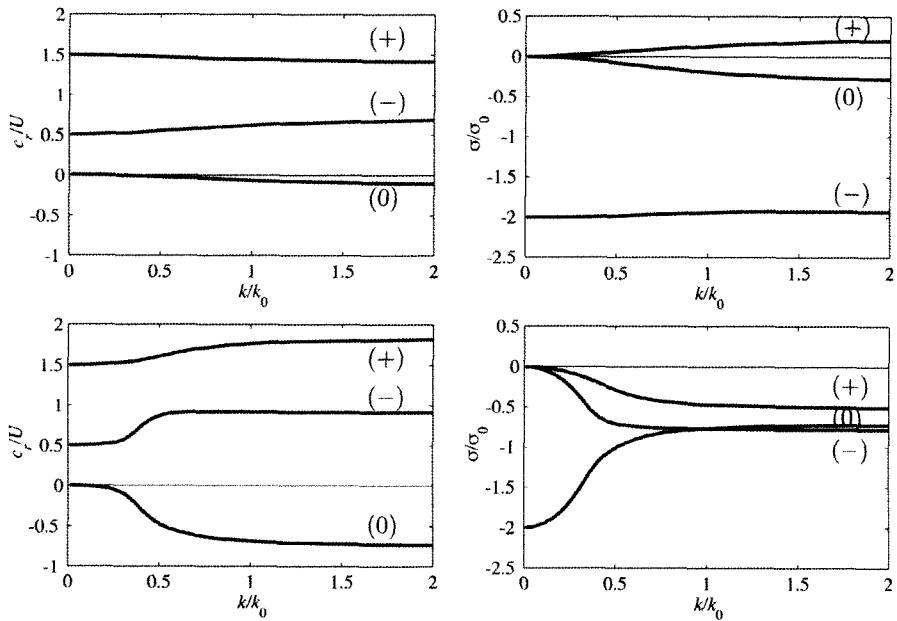


FIG. 7.26 – Célérité c/\bar{U} (à gauche) et taux de croissance $\sigma/\sigma_{\text{ref}} = kc_i/(g\alpha/U)$ (à droite) des trois valeurs propres du problème avec fond érodable, pour $B = 1$ (en haut) et $B = 10$ (en bas), avec $Fr = 8$; le mode (0) est le mode introduit par le fond érodable.

donné par la relation de Blasius ou celle de Manning-Strickler. Une autre piste, toujours dans le cadre d'une approche analytique, consisterait à considérer l'écoulement comme un cœur potentiel de vitesse uniforme U_0 , raccordé au fond érodable par une couche limite d'épaisseur δ (figure 7.27).

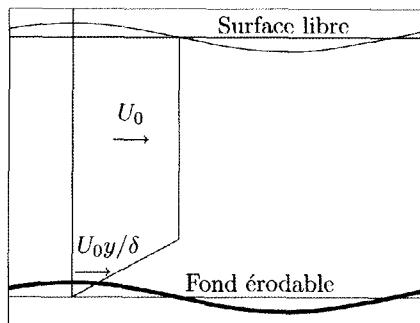


FIG. 7.27 – Modèle d'écoulement à deux couches au-dessus d'un fond érodable.

7.8 Exercices

7.8.1 Dunes : coefficient de frottement constant

1. Fond non érodable

On considère le problème étudié à la section 7.7.3, de la stabilité d'un écoulement au-dessus d'un fond non érodable ($Q(\tau) = 0$). On note u , η , et τ les petites perturbations de la vitesse, de la hauteur et du cisaillement pariétal correspondant à l'écoulement de base (7.55e). Linéariser les équations (7.51) et (7.52), introduire des modes normaux du type

$$u = \frac{1}{2} \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$$

avec les notations habituelles, et montrer que les amplitudes des perturbations satisfont le système homogène

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{\eta} + ik(\bar{U} \hat{\eta} + \bar{h} \hat{u}) &= 0, \\ -i\omega \rho \bar{h} \hat{u} + ik\rho \bar{h} \bar{U} \hat{u} &= -ik\rho g \bar{h} \hat{\eta} - \hat{\tau} + \rho g \alpha \hat{\eta}, \\ \hat{\tau} &= c_f \rho \bar{U} \hat{u}. \end{aligned}$$

En déduire la relation de dispersion (7.56).

2. Fond érodable

On considère maintenant le cas d'un fond érodable étudié à la section 7.7.4. Établir les équations linéarisées des petites perturbations u , η_b , η , q et τ de l'écoulement de base (7.55e), introduire les modes normaux, et montrer que les amplitudes de ces modes normaux satisfont le système algébrique homogène

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{\eta} + ik(\bar{U} \hat{\eta} + \bar{h} \hat{u}) &= 0 \\ -i\omega \rho \bar{h} \hat{u} + ik\rho \bar{h} \bar{U} \hat{u} &= -ik\rho g \bar{h} \cos \alpha(\hat{\eta}_b + \hat{\eta}) - \hat{\tau} + \rho g \sin \alpha \hat{\eta} \\ \hat{\tau} &= c_f \rho \bar{U} \hat{u} \\ \hat{q} &= Q'(\bar{\tau}) \hat{\tau} \\ -i\omega \hat{\eta}_b + ik \hat{q} &= 0. \end{aligned}$$

En déduire que la relation de dispersion est l'équation (7.56) avec le terme supplémentaire (7.59).

7.8.2 Dunes : coefficient de frottement non constant

Reprendre l'exercice précédent avec un frottement non constant donné

1. par la loi de Blasius $c_f = 0,316 Re^{-1/4}$, $Re = \rho U h / \mu$;
2. par la loi de Manning-Strickler $c_f = 0,1 (z_0/h)^{1/3}$ où z_0 est une échelle de rugosité du lit de l'ordre du diamètre des grains.

Chapitre 8

Dynamique non linéaire à petit nombre de degrés de liberté

8.1 Introduction

Selon la théorie de stabilité linéaire développée dans les chapitres précédents, une perturbation d'un écoulement de base peut s'écrire comme une somme de modes propres, chacun de ces modes pouvant s'écrire

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (A(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + A^*(t)\mathbf{f}^*(\mathbf{x})), \quad (8.1)$$

où $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ décrit la structure spatiale du mode, et $A(t)$ son évolution temporelle. Une étude de stabilité linéaire permet donc d'établir un critère de stabilité, et, le cas échéant, de déterminer le plus amplifié. Cependant, la validité de ces prédictions est limitée à des perturbations d'amplitude petite, pour lesquelles l'effet des non-linéarités du problème est effectivement négligeable. L'objet d'une étude de « stabilité non linéaire » est de prédire ce qui se passe au-delà de la croissance exponentielle initiale, lorsque les effets non linéaires deviennent significatifs. Malheureusement, il n'existe pas de théorie générale des effets non linéaires, contrairement à la théorie de stabilité linéaire fondée sur l'algèbre linéaire. Diverses approches ont été développées, chacune d'elles permettant d'étudier une certaine classe de non-linéarités, ou une certaine classe de solutions. L'une de ces approches, dite « faiblement non linéaire » est particulièrement importante, par son caractère assez général fondé sur les méthodes de perturbation.

On doit l'idée essentielle de l'approche faiblement non linéaire au physicien soviétique Lev Landau (1944). Cette idée, très simple, consiste à remarquer tout d'abord que, dans le cadre de la stabilité linéaire, l'amplitude $A(t)$ d'un mode propre est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A, \quad (8.2)$$

où σ est le taux de croissance temporel. Pour A petit (*a priori* complexe), cette équation peut être vue comme le développement de Taylor du taux de croissance dA/dt en puissances de l'amplitude, tronqué au premier ordre. Dès lors, une manière naturelle d'inclure des non-linéarités est de compléter cette équation par les termes d'ordre supérieur, quadratiques d'abord, en A^2 , AA^* , A^{*2} , puis cubiques en A^3 , A^2A^* , etc. L'analyse des symétries du problème permet en général d'exclure un grand nombre de ces termes. Considérons le cas important où le problème est invariant par la translation du temps, c'est-à-dire invariant dans la transformation de t en $t_0 + t$ (*i.e.* l'origine des temps t_0 est arbitraire). Alors, si $A \sim e^{i\sigma t}$ est solution de l'équation recherchée, toute fonction translatée d'une phase ϕ , de la forme $A \sim e^{i(\sigma t+\phi)}$, doit aussi être solution. L'équation de A doit donc être invariante par les rotations dans le plan complexe $A \rightarrow Ae^{i\phi}$. Le terme de plus bas degré satisfaisant cette condition est $|A|^2A$, si bien qu'à des termes d'ordre supérieur près, d'ordre cinq ici, l'amplitude est gouvernée par l'équation

$$\frac{dA}{dt} = \sigma A - \kappa |A|^2 A. \quad (8.3)$$

Cette équation, appelée *équation d'amplitude de Landau*, fait intervenir un nouveau coefficient κ , *a priori* complexe comme σ et A , appelé *coefficient de Landau* (Landau & Lifchitz 1989, §26).

La discussion des solutions de l'équation de Landau s'avère très riche. Bien sûr, l'approche « heuristique » ci-dessus, fondée sur les symétries, ne donne pas la valeur du coefficient κ , pas même son signe, qui doit être déterminé au cas par cas. En hydrodynamique, la non-linéarité classique déterminant cette constante provient du terme advectif de l'accélération, mais elle peut aussi provenir, entre autres, des conditions aux limites sur une interface déformable, ou d'un couplage entre phénomènes dynamiques et thermiques, ou d'une loi de comportement non linéaire. La méthode générale pour obtenir le coefficient de Landau consiste à rechercher la solution du problème comme un développement en puissances de l'amplitude. Les pionniers de cette approche « faiblement non linéaire » ont été Gor'kov (1957) et Malkus & Veronis (1958) pour la convection thermique à frontières libres, et Stuart¹ (1958, 1960) et Watson (1960) pour les écoulements parallèles cisaillés. Il a ainsi été montré que l'instabilité de Rayleigh-Bénard est *supercritique* : pour le mode marginal, la partie réelle de κ est positive et le terme non linéaire cubique sature l'instabilité. Il en est de même pour une autre instabilité fondamentale très étudiée, l'instabilité centrifuge de Couette-Taylor. Par contre, l'instabilité de l'écoulement de Poiseuille plan est *sous-critique* : pour le mode marginal ($k_c h = 1,02$ pour $Re_c = 5\,772$, voir chapitre 5), la partie réelle de κ est négative et le terme non linéaire cubique ne sature pas l'instabilité ; l'équation de Landau apporte alors peu de choses, et le calcul des termes d'ordre supérieur s'avère

1. En hydrodynamique, l'équation de Landau est parfois appelée, plus justement, équation de Stuart-Landau.

à peu près impraticable : c'est là une limitation de l'approche faiblement non linéaire. Au-delà de l'introduction présentée dans ce chapitre et les suivants, on pourra consulter les ouvrages de synthèse de Koschmieder (1993) pour la convection de Rayleigh-Bénard, de Chossat & Iooss (1994) pour l'écoulement de Couette-Taylor, et de Huerre & Rossi (1998), Drazin (2002) et Drazin & Reid (2004) pour les écoulements cisailés ouverts.

Lev Davidovich Landau (1908–1968)



Né à Bakou, Azerbaïdjan, Empire russe. Entre à l'Université de Bakou à 14 ans, et deux ans plus tard à celle de Leningrad. Première publication sur la théorie quantique à l'âge de 19 ans. En 1929 et 1930, voyage en Europe, et travaille en particulier à l'Institut de Physique théorique de Niels Bohr. Réputé pour son tempérament enthousiaste et provocateur d'enfant terrible. Docteur en Sciences Physiques et Mathématiques en 1934 à Kharkov, Ukraine. Directeur de la Division Théorique de l'Institut technique d'Ukraine, et titulaire de la chaire de physique théorique

à l'Institut de Génie mécanique. Production scientifique extraordinaire : un article scientifique original toutes les six semaines pendant deux ans, couvrant un grand nombre de sujets. Fait de Kharkov le centre de la physique théorique de l'URSS. Part à Moscou en 1937 pour la direction de l'Institut de Physique Théorique de l'Académie des Sciences d'URSS. Travaille sur les collisions atomiques, l'astrophysique, la physique des basses températures, la physique nucléaire et atomique, la thermodynamique, l'électrodynamique quantique, la théorie cinétique des gaz, la théorie quantique des champs, et la physique des plasmas. Sa théorie expliquant le caractère superfluide de l'hélium liquide lui vaudra le Prix Nobel en 1962. Suspecté d'être un espion allemand, il est emprisonné un an en 1938 ; libéré après interventions auprès de Staline de Niels Bohr et Piotr Kapitza (ce dernier menaçant d'arrêter son travail scientifique). Auteur de nombreux ouvrages de physique, en particulier du *Cours de Physique Théorique* en dix volumes, écrit avec un de ses étudiants, E. M. Lifshitz, et publié entre 1930 et 1979. Victime d'un grave accident de voiture en 1962, passe six semaines dans le coma ; recouvre une vie à peu près normale mais sa créativité intellectuelle est diminuée. Membre de plusieurs académies des Sciences et honoré par de nombreuses sociétés savantes, prix Fritz London et médaille Max Planck.

Les études mentionnées ci-dessus montrent que la détermination du coefficient κ dans un problème d'hydrodynamique, même le plus simple, conduit à des calculs importants, qui ne peuvent souvent être menés au bout qu'en faisant appel au calcul numérique. Avant d'aborder de tels problèmes, il est très instructif de considérer des modèles qui retiennent les effets non linéaires sous une forme simplifiée. Au premier rang de ces modèles figurent les oscillateurs non linéaires classiques auxquels la première partie de ce chapitre est consacrée². Par la mise en œuvre de la *méthode des échelles multiples*, on montre que l'équation de Landau s'obtient comme une *condition de solvabilité* d'une équation différentielle ; on met ainsi en évidence deux effets non linéaires majeurs, qui se manifestent qualitativement de la même façon dans les problèmes d'hydrodynamique : la saturation de l'amplitude pour l'oscillateur de Van der Pol, et le glissement de la fréquence pour l'oscillateur de Duffing. La seconde partie du chapitre revient au cas d'un problème spatio-temporel gouverné par des équations aux dérivées partielles, lorsque la structure spatiale de la perturbation peut être décrite par un petit nombre de modes de Fourier. On montre alors que la dynamique peut être décrite par les amplitudes des modes de Fourier, et ramenée à une équation de Landau au voisinage du seuil de l'instabilité.

Ce chapitre analyse essentiellement les comportements « sages » des systèmes à petit nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire les comportements périodiques ou quasi périodiques, accessibles par les méthodes de perturbation, qui apparaissent en général au voisinage du seuil d'une instabilité primaire. L'analyse des comportements chaotiques qui se manifestent plus loin du seuil relève d'autres techniques ; un excellent panorama de ces phénomènes est offert par l'ouvrage de Bergé, Pomeau & Vidal (1984) et par celui plus spécialisé de Bergé (1988).

8.2 Oscillateurs non linéaires

L'étude des oscillateurs non linéaires permet de dégager les effets majeurs les plus simples des non-linéarités. Le premier de ces effets « canoniques » est celui de la saturation de la croissance exponentielle à une valeur finie de l'amplitude ; l'oscillateur de Van der Pol (1927) en est le paradigme incontournable. Le second de ces effets est la modification de la fréquence d'une oscillation, illustrée par l'oscillateur de Duffing (1918). Avant l'étude de ces deux oscillateurs, on analyse le problème simple et très classique d'une particule dans un puits de potentiel, partiellement présenté au premier chapitre. L'effet d'un forçage de ces oscillateurs, ainsi que l'étude des oscillateurs paramétriques, sont traités sous la forme d'exercices.

2. Cette présentation reste une simple introduction à un domaine très riche, voir par exemple Bogoliubov & Mitropolski (1962) ; Glendinning (1994, chap. 7).

8.2.1 Oscillateur fortement dissipatif dans un potentiel à deux puits

Considérons un oscillateur fortement dissipatif décrit par une amplitude $A(t)$ réelle, tel que le terme inertiel d^2A/dt^2 du second ordre en temps puisse être négligé devant une force de frottement, supposée de la forme $-dA/dt$ (un choix approprié de l'échelle de temps ayant absorbé la constante multiplicative). Soit $V(A)$ le potentiel dans lequel évolue l'oscillateur, supposé invariant par la symétrie de réflexion $A \rightarrow -A$, c'est-à-dire fonction paire de A . Cet oscillateur est donc régi par l'équation réelle

$$\frac{dA}{dt} = -V'(A), \quad \text{avec} \quad V'(A) = \mu A - \kappa A^3 - \lambda A^5 \quad (8.4)$$

à des termes d'ordre supérieur près. On reconnaît là une équation de Landau complétée par un terme de degré 5. Notons qu'en thermodynamique, cette équation est un bon modèle d'étude des transitions de phase d'un corps pur dont l'état thermodynamique est décrit par le « paramètre d'ordre » $A(t)$ (Callen 1985).

Considérons tout d'abord le cas d'une constante de Landau positive, $\kappa = 1$. Pour $\mu < 0$, le potentiel présente un seul minimum (figure 8.1a), et le système ne peut que relaxer vers $A_0 = 0$. Pour $\mu > 0$, l'état $A_0 = 0$ devient instable ($V(A_0)$ est un maximum local) et le système bifurque vers l'un des deux puits de potentiel $A_{\pm} \sim \pm\sqrt{\mu}$ pour μ petit. Dans le formalisme des systèmes dynamiques (chapitre 1), le système subit une bifurcation fourche supercritique en $\mu = 0$ correspondant au diagramme de bifurcation de la figure 8.1b.

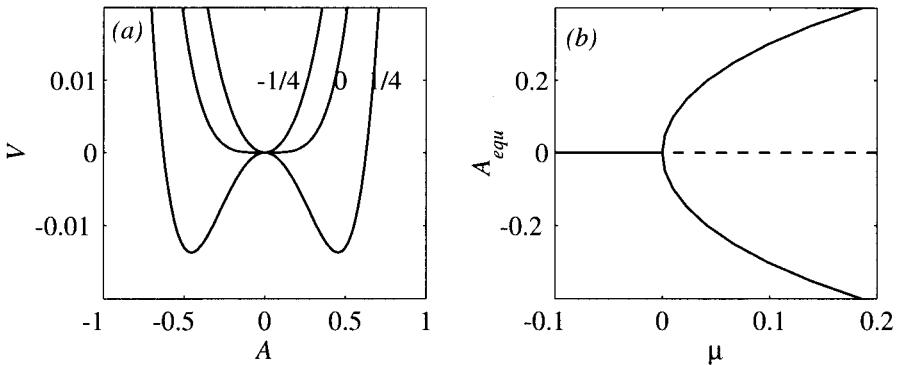


FIG. 8.1 – $\kappa = +1$. (a) Potentiel $V(A)$ pour $\mu = -1/4, 0, 1/4$; (b) diagramme de bifurcation : états stables (—) et instables (---).

Considérons maintenant une constante de Landau négative, $\kappa = -1$, et $\lambda = 1$. Pour $\mu > 0$, le terme cubique n'est plus stabilisant, c'est le terme d'ordre 5 qui va saturer l'instabilité. On vérifie aisément que :

- pour $\mu \leq -1/4$, le potentiel $V(A)$ présente un seul minimum ;
- pour $\mu > 0$, $V(A)$ présente deux minima ;
- à l'intérieur de l'intervalle $[-1/4, 0]$, $V(A)$ présente trois minima, qui sont égaux pour $\mu = -3/16$ (figure 8.2a).

On en déduit le diagramme de bifurcation (figure 8.2b) :

- Pour μ croissant à partir de $\mu < -1/4$, le système subit une bifurcation fourche sous-critique en $\mu = 0$, et saute de la branche $A = A_0$, où $A_0 = 0$, sur l'une des branches stables $A = A_{\pm}$.
- Pour μ décroissant à partir de l'une des branches stables $A = A_{\pm}$, le système subit une bifurcation nœud-col en $\mu = -1/4$, et retombe sur la branche $A = A_0$.
- Pour $-1/4 < \mu < -3/16$, l'état A_0 correspond au minimum absolu $V(A_0)$ du potentiel, tandis que les états A_{\pm} correspondent à des minima relatifs seulement, $V(A_{\pm})$, du potentiel ; les états A_{\pm} , moins stables que A_0 , sont dits métastables ; pour $-3/16 < \mu < 0$, c'est A_0 qui est métastable.

Ainsi, à une valeur de μ dans l'intervalle $[-1/4, 0]$, correspondent plusieurs valeurs de l'amplitude saturée, l'amplitude sélectionnée dépendant de l'histoire de l'oscillateur ; pour μ croissant puis décroissant entre $1/4$ et 0 , l'amplitude saturée décrit une boucle d'hystéresis.

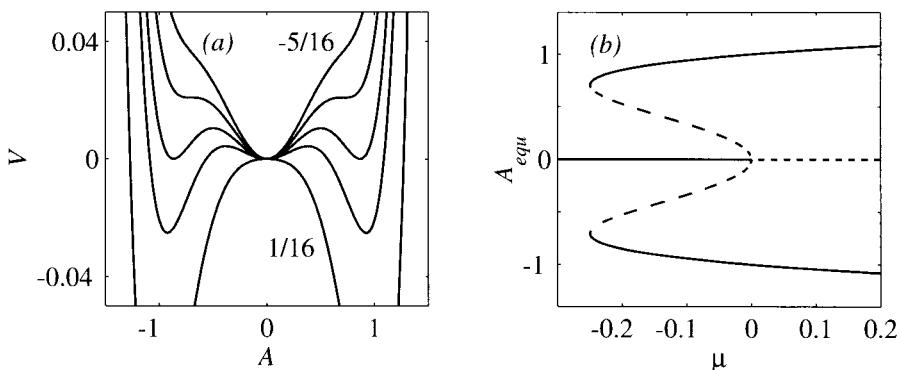


FIG. 8.2 – $\kappa = -1$. (a) Potentiel $V(A)$ pour $\mu = -5/16, -4/16, -3/16, -2/16, 1/16$; (b) diagramme de bifurcation : états stables (—) et instables (- -).

8.2.2 Oscillateur de Van der Pol : saturation de l'amplitude

L'oscillateur de Van der Pol fournit un exemple simple de bifurcation de Hopf supercritique, d'un état stationnaire stable à un état oscillant d'amplitude finie. Il s'agit d'un oscillateur dissipatif de pulsation propre linéaire ω_0 , dont la dissipation dépend non linéairement de l'amplitude³ :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (2\epsilon\mu - u^2) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad \mu = \mathcal{O}(1), \quad \epsilon \ll 1. \quad (8.5)$$

Le petit paramètre $\epsilon \ll 1$ est considéré fixé, et $\mu = \mathcal{O}(1)$ est le paramètre de bifurcation.

On vérifie aisément⁴ que la solution $u = 0$ est linéairement stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$, que la fréquence des petites oscillations est $\omega_0 + \mathcal{O}(\epsilon)$ et que le taux de croissance est $\epsilon\mu$, très petit devant ω_0 . Pour $\mu > 0$, l'équation (8.5) montre que le terme responsable de l'instabilité s'annule pour $u^2 = 2\epsilon\mu$, si bien qu'on attend une saturation pour une amplitude de l'ordre de $\epsilon^{1/2}$. Le taux de croissance étant de l'ordre de ϵ , cette saturation doit intervenir au bout d'un temps de l'ordre de ϵ^{-1} très supérieur à la période des oscillations.

On cherche donc la solution sous la forme

$$u(t) = \epsilon^{1/2} \tilde{u}(t), \quad \tilde{u} = \mathcal{O}(1), \quad (8.6)$$

ce qui conduit à l'équation suivante pour $\tilde{u}(t)$:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} - \epsilon(2\mu - \tilde{u}^2) \frac{d\tilde{u}}{dt} + \omega_0^2 \tilde{u} = 0, \quad \mu = \mathcal{O}(1), \quad \epsilon \ll 1.$$

D'autre part, l'instabilité croissant sur une échelle de temps ϵ^{-1} , on recherche une équation décrivant les variations lentes de l'amplitude $A(t)$ de $u(t)$, en mettant en œuvre la technique des *échelles multiples* (Bender & Orszag 1978 ; Hinch 1991 ; Glendinning 1994). On pose

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}(\tau, T), \quad (8.7)$$

où $\tau = t$ est la variable dite « rapide » décrivant les variations de la phase, et $T = \epsilon t$ est la variable dite « lente » décrivant la variation de l'amplitude ;

3. Le changement d'échelle de temps $t' = \omega_0 t$ permettrait de faire disparaître ω_0 du problème, mais nous préférons conserver ce paramètre explicite.

4. Dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques (chapitre 1), l'équation de Van der Pol peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre en u et $v = du/dt$, dont les solutions se représentent par des courbes dans l'espace des phases (u, v) . Les valeurs propres du système linéarisé sont complexes conjuguées et le point fixe $(u, v) = (0, 0)$ est un foyer. Pour $\mu < 0$ ($\mu > 0$) ce foyer est stable (instable) et le portrait de phase dans son voisinage est constitué de spirales convergentes (divergentes). Pour $\mu = 0$, le point fixe est un centre, et le portrait de phase du système linéarisé est constitué d'ellipses fermées ; c'est alors le terme non linéaire qui détermine la stabilité du point fixe, cf. chapitre 11.

ainsi, la saturation est attendue pour $T = \mathcal{O}(1)$. On cherche ensuite $\tilde{u}(\tau, T)$ comme un développement en puissances de ϵ :

$$\tilde{u} = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (8.8)$$

Utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T},$$

et collectant les termes de l'équation de Van der Pol sous la forme d'un polynôme en ϵ , on en déduit la suite d'équations différentielles à résoudre. À l'ordre ϵ^0 et ϵ^1 , ces équations s'écrivent respectivement

$$Lu_0 = 0 \quad \text{avec} \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \omega_0^2, \quad (8.9a)$$

$$Lu_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial T} + (2\mu - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial \tau}. \quad (8.9b)$$

Chacun des problèmes de cette suite est linéaire, homogène à l'ordre ϵ^0 et non homogène aux ordres supérieurs, les membres de droite faisant intervenir la solution des ordres précédents.

À l'ordre ϵ^0 , la solution est

$$u_0 = \frac{1}{2} (A(T)e^{i\omega_0 \tau} + A(T)^* e^{-i\omega_0 \tau}). \quad (8.10)$$

On remarquera que la constante d'intégration A (et son complexe conjugué A^*) dépendent du temps lent T , ici considéré comme un paramètre. À l'ordre ϵ^1 , l'équation (8.9b) s'écrit maintenant

$$Lu_1 = i\omega_0 (\mu A - \frac{dA}{dT}) e^{i\omega_0 \tau} - \frac{i\omega_0}{8} (|A|^2 A e^{i\omega_0 \tau} + A^3 e^{3i\omega_0 \tau}) + c.c. \quad (8.11)$$

où *c.c.* signifie « complexe conjugué ». L'équation ci-dessus peut être interprétée comme décrivant un oscillateur harmonique forcé par le membre de droite. Or, ce forçage contient des termes résonnantes de pulsation ω_0 (termes en $e^{i\omega_0 \tau}$), conduisant à une croissance linéaire et non bornée de l'amplitude de u_1 (voir l'exercice 1.6.1 du chapitre 1). Dans le contexte de la mécanique céleste où Poincaré a introduit ce type d'analyse, une telle croissance, et les termes qui en sont responsables, sont dits « séculaires ». Recherchant une solution périodique bornée, cette croissance séculaire doit être exclue, ce qui implique que l'amplitude $A(T)$ doive satisfaire la *condition de solvabilité* :

$$\frac{dA}{dT} = \mu A - \kappa |A|^2 A, \quad \kappa = \frac{1}{8}. \quad (8.12)$$

Cette équation, qui décrit le taux de croissance de l'amplitude comme une compétition entre un terme linéaire et un terme cubique, est une équation de

Landau. Posant $A = a(T)e^{i\phi(T)}$, et séparant les parties réelle et imaginaire, on déduit les équations d'évolution du module et de la phase de A :

$$\frac{da}{dT} = \mu a - \kappa a^3, \quad \frac{d\phi}{dT} = 0.$$

Les solutions de ces équations sont, pour μ positif,

$$a = a_0 \left(\frac{\kappa}{\mu} a_0^2 + \left(1 - \frac{\kappa}{\mu} a_0^2\right) e^{-2\mu T} \right)^{-1/2}, \quad (8.13a)$$

$$\phi = \phi_0, \quad (8.13b)$$

d'où la solution pour $u(t)$:

$$u(t) = \epsilon^{1/2} a(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2}). \quad (8.14)$$

Ce résultat, conforme à la conjecture initiale $u(t) \sim \epsilon^{1/2}$, montre que l'amplitude des oscillations saturées est $2\sqrt{2\mu\epsilon}$, et que leur fréquence est ω_0 , indépendante de l'amplitude à l'ordre considéré. La figure 8.3 compare la solution numérique de l'équation (8.5) à la solution asymptotique (8.14) représentée seulement par son enveloppe $a(t)$, pour deux valeurs de $2\mu\epsilon$. L'accord s'avère excellent non seulement au voisinage du seuil ($2\mu\epsilon = 0,1$, figure 8.3a), mais également loin du seuil ($2\mu\epsilon = 1$, figure 8.3b). Cependant, la solution numérique apparaît non sinusoïdale, ce qui correspond à l'existence d'harmoniques de la fréquence fondamentale $\omega_0/2\pi$, harmoniques qui n'existent pas dans la solution asymptotique (8.14) et dont l'obtention nécessiterait un calcul à un ordre plus élevé. La figure 8.4 montre les portraits de phase correspondants, pour la solution numérique. Près du seuil ($2\mu\epsilon = 0,1$, portrait gauche), le cycle limite est un cercle, ce qui correspond à une réponse sinusoïdale. Loin du seuil ($2\mu\epsilon = 1$, portrait droit), le cycle limite apparaît déformé, ce qui correspond à la présence d'harmoniques.

Pour conclure, l'état stationnaire $u = 0$ de l'oscillateur de Van der Pol, stable pour $\mu < 0$, devient instable pour $\mu > 0$ via une bifurcation de Hopf supercritique, l'amplitude de l'état saturé croissant comme la racine carrée de l'écart au seuil du paramètre de bifurcation μ (cf. chapitre 1). La figure 8.5 présente le diagramme de bifurcation correspondant.

8.2.3 Oscillateur de Duffing : correction de la fréquence

Considérons l'oscillateur de Duffing, décrit par l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u + \epsilon u^3 = 0, \quad \mu = \mathcal{O}(1), \quad \epsilon \ll 1. \quad (8.15)$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -V'(u), \quad V(u) = \frac{u^2}{2} + \epsilon \frac{u^4}{4},$$

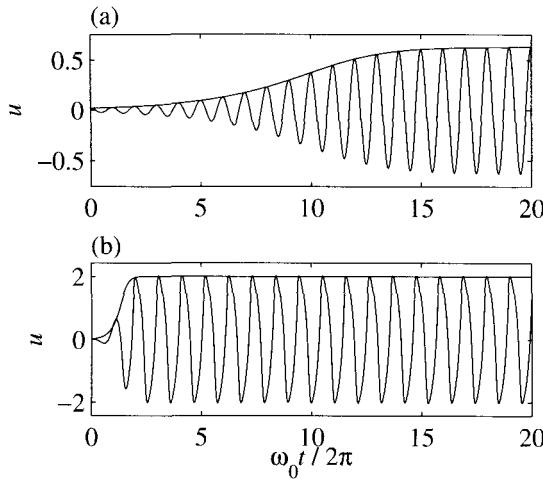


FIG. 8.3 – Réponse de l'oscillateur de Van der Pol (8.5) pour (a), $2\epsilon\mu = 0,1$, et (b), $2\epsilon\mu = 1$, et pour les conditions initiales $u(0) = 0,02$, $u'(0) = 0$. Par souci de clarté, la solution asymptotique (8.14) est représentée par son amplitude (8.13) seulement, la courbe oscillante correspondant à la solution numérique.

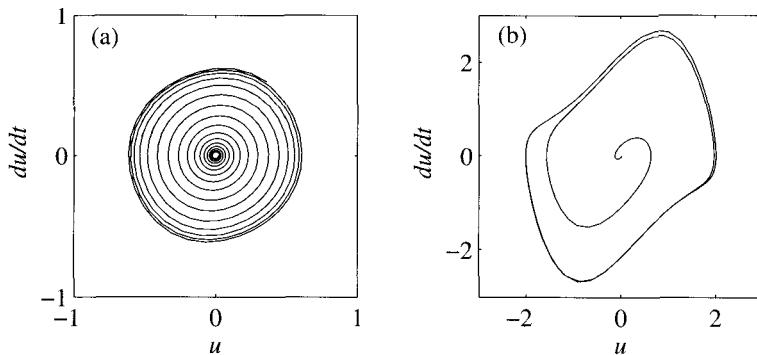
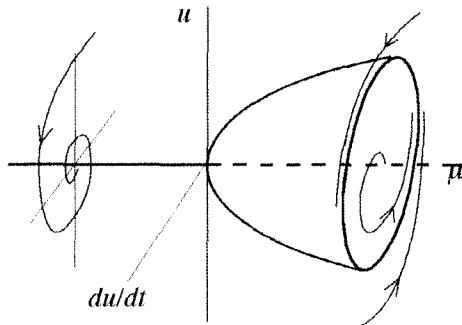
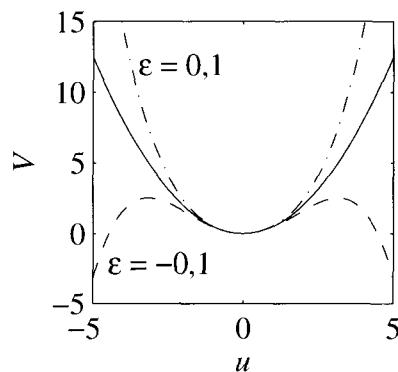


FIG. 8.4 – Portraits de phase de l'oscillateur de Van der Pol (8.5) correspondant aux évolutions temporelles de la figure 8.3 (solution numérique); (a), $2\epsilon\mu = 0,1$; (b), $2\epsilon\mu = 1$.

que l'on reconnaît comme l'équation du mouvement à un degré de liberté $u(t)$ d'une masse soumise à une force $F = -V'(u)$ dérivant du potentiel $V(u)$, les échelles ayant été choisies de façon à normaliser la masse et la pulsation propre de l'oscillateur. Pour un pendule dans le champ de la pesanteur par exemple, le degré de liberté est la position angulaire, et la force de rappel $F = -\sin u$

FIG. 8.5 – Diagramme de la bifurcation de Hopf survenant pour $\mu = 0$.

correspond à $\epsilon = -1/6$ pour u petit. Le potentiel $V(u)$ est représenté sur la figure 8.6 pour trois valeurs du paramètre ϵ .

FIG. 8.6 – Potentiel $V(u)$ pour $\epsilon = -0,1$ (---), $\epsilon = 0$ (—), et $\epsilon = 0,1$ (- · -).

L'équation de Duffing admet l'intégrale première

$$H(u, v) = H_0 \quad \text{où} \quad H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(u) \quad (8.16)$$

avec $v = du/dt$; cette intégrale représente l'énergie, constante, de l'oscillateur⁵. De cette intégrale première, on peut déduire la solution exacte $t(u)$ sous la forme

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{\pm du}{\sqrt{2H_0 - V(u)}},$$

5. Les courbes d'énergie $H(u, v) = \text{Cte}$ définissent les trajectoires dans l'espace des phases (u, v) : ce sont des ellipses centrées sur le point fixe $(0, 0)$. Pour $\epsilon > 0$ il existe deux autres points fixes $(\pm\omega_0/\sqrt{\epsilon}, 0)$, des cols, reliés par deux trajectoires hétéroclines, à l'extérieur desquelles les trajectoires ne sont pas bornées.

qu'un changement de variable permet de ramener à une intégrale elliptique classique, dont la solution est périodique. L'objectif est ici de retrouver cette solution périodique par une méthode de perturbation conduisant à une équation d'amplitude.

Recherchant comme précédemment la solution sous la forme d'une série de puissances de ϵ ,

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \dots,$$

et introduisant un temps rapide $\tau = t$ et un temps lent $T = \epsilon t$, il vient une hiérarchie d'équations linéaires. Aux ordres ϵ^0 et ϵ^1 , ces équations s'écrivent respectivement

$$Lu_0 = 0 \quad \text{avec} \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1, \quad (8.17a)$$

$$Lu_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial T} - u_0^3. \quad (8.17b)$$

À l'ordre ϵ^0 , la solution correspond à des oscillations harmoniques, comme pour l'oscillateur de Van der Pol. À l'ordre ϵ^1 , l'équation à résoudre s'écrit

$$Lu_1 = \left(-i \frac{dA}{dT} - \frac{3}{8} |A|^2 A \right) e^{i\tau} - \frac{1}{8} A^3 e^{3i\tau} + c.c.$$

Le membre de droite se comporte comme le forçage d'un oscillateur harmonique, dont la réponse ne peut être périodique que si le coefficient du forçage résonnant est nul. On en déduit la condition de solvabilité

$$\frac{dA}{dT} = \frac{3i}{8} |A|^2 A. \quad (8.18)$$

On retrouve donc l'équation de Landau (8.3) avec un taux de croissance σ nul et un coefficient de Landau $\kappa = -3i/2$ purement imaginaire. Posant $A = a(T)e^{i\phi(T)}$, et séparant les parties réelle et imaginaire de cette équation, il vient

$$\frac{da}{dT} = 0, \quad \frac{d\phi}{dT} = \frac{3}{8} a^2. \quad (8.19)$$

Les solutions de ces équations sont

$$a = a_0, \quad \phi = \frac{3}{8} a_0^2 T + \phi_0, \quad (8.20)$$

d'où la solution pour $u(t)$:

$$u(t) = a_0 \cos(\omega t + \phi_0) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \omega = 1 + \frac{3}{8} \epsilon a_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (8.21)$$

Ainsi, le terme non linéaire de l'équation de Duffing n'affecte pas l'amplitude des oscillations comme pour l'oscillateur de Van der Pol, mais leur

fréquence⁶. La correction de fréquence d'ordre ϵa_0^2 s'interprète simplement en écrivant la force de rappel

$$F = -(1 + \epsilon u^2)u \approx -(1 + \epsilon a_0^2)u,$$

cette dernière force correspondant à une raideur $r = 1 + \epsilon a_0^2$ dépendant de l'amplitude des oscillations ; la pulsation correspondant à cette raideur corrigée est donc $\omega = r^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon a_0^2$, résultat proche de (8.21).

La figure 8.7 compare les solutions aux ordres ϵ^0 et ϵ^1 à la solution exacte obtenue numériquement. On peut vérifier, comme attendu, que la solution à l'ordre ϵ^0 n'est valide que pour $t \ll 1/\epsilon$, et la solution à l'ordre ϵ^1 , pour $t \ll 1/\epsilon^2$, i.e. tant que la correction non calculée de la phase reste petite. Pour t d'ordre $1/\epsilon^2$, la correction d'ordre ϵ^2 devient nécessaire. Pour une étude détaillée de l'oscillateur de Duffing, voir Guckenheimer & Holmes (1983, §2.2).

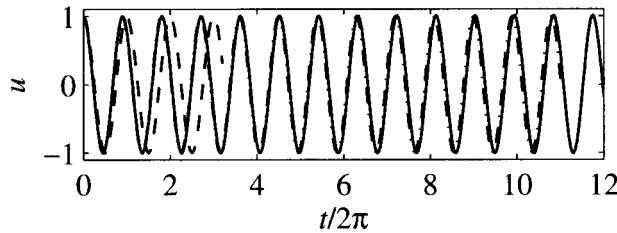


FIG. 8.7 – Réponse de l'oscillateur de Duffing (8.15) pour $\epsilon = 0,3$: (—) solution numérique; (--) solution à l'ordre ϵ^0 ; (- · -) solution à l'ordre ϵ^1 (8.21).

8.2.4 Oscillateurs forcés

Le forçage d'un oscillateur non linéaire conduit à des phénomènes tout à fait remarquables et inattendus. Nous présentons ici très brièvement quelques-uns de ces phénomènes à travers deux études, de l'oscillateur de Van der Pol et de l'oscillateur paramétrique, les calculs correspondant étant proposés en exercice. Pour de plus amples développements, voir (Fauve, 1998) ou l'un des nombreux ouvrages qui traitent des oscillateurs, par exemple ceux de Bender & Orszag (1978) ou de Glendinning (1984).

L'oscillateur de Van der Pol forcé

On considère l'oscillateur de Van der Pol (8.5) soumis à un forçage de pulsation ω_f :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (2\epsilon\mu - u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = F \cos \omega_f t, \quad (8.22)$$

6. Si on avait défini le potentiel sans petit paramètre, et recherché une solution petite d'ordre ϵ , on aurait trouvé la correction de fréquence $\frac{3}{8}\epsilon^2 a_0^2$, d'ordre ϵ^2 : cette différence provient simplement d'une autre définition du petit paramètre.

où le petit paramètre $\epsilon \ll 1$ est fixé, et $\mu = \mathcal{O}(1)$ est le paramètre de bifurcation. En l'absence de forçage ($F = 0$), on sait que la position d'équilibre $u = 0$ est linéairement stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$; on montre dans l'exercice 8.5.2 qu'un forçage d'amplitude F d'ordre $\epsilon^{1/2}$ retardé l'apparition de la bifurcation, c'est-à-dire que la valeur critique de μ n'est plus zéro mais une valeur strictement positive, la bifurcation restant supercritique. Ainsi, pour $\mu > 0$, le forçage *stabilise* la position d'équilibre $u = 0$, d'autant mieux que la pulsation ω_f est proche de la pulsation propre ω_0 .

Un autre phénomène intéressant, détaillé dans l'exercice 8.5.3, est *l'accrochage de fréquence* : pour un forçage presque résonnant, de pulsation ω_f proche de ω_0 et d'amplitude F d'ordre $\epsilon^{3/2}$, l'oscillateur accroche sa réponse sur la pulsation du forçage. Si toutefois la pulsation du forçage s'écarte trop de la pulsation propre, l'oscillateur « hésite » entre les deux pulsations, et sa dynamique est *quasi périodique*.

L'oscillateur paramétrique

L'oscillateur paramétrique est un modèle simple rendant compte d'une instabilité fréquente en physique : l'instabilité sous-harmonique (Bergé, Pomeau & Vidal 1984). L'illustration la plus simple de cette instabilité est la balançoire : une oscillation verticale de la masse suspendue, équivalente à une modulation de la gravité, déstabilise l'équilibre de la balançoire au repos. Cette instabilité se manifeste lorsque la pulsation ω_f du forçage est voisine du double de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur. L'équation modèle correspondante est l'équation de Mathieu

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\epsilon\mu \frac{du}{dt} + \omega_0^2(1 + \epsilon f \sin \omega_f t) \sin u = 0. \quad (8.23)$$

La résolution de cette équation fait l'objet de l'exercice 8.5.5 dans le cas où l'amortissement et le forçage sont petits et du même ordre de grandeur ($\epsilon \ll 1$, et μ et f d'ordre un).

Le problème hydrodynamique associé est celui de l'instabilité d'une couche de fluide dans un récipient soumis à des vibrations verticales : la surface libre plane, déstabilisée par les vibrations, présente des motifs en rouleaux ou en cellules de forme hexagonale ou carrée. Ce problème a été mis en évidence expérimentalement par Faraday (1831), puis analysé par Rayleigh (1883c, 1883d). Benjamin & Ursell (1954) ont montré que la dynamique des petites perturbations de l'interface est régie par l'équation de Mathieu (8.23). Plus récemment, de nombreuses études ont analysé les effets faiblement non linéaires (Miles 1984), et pour des forçages forts, les comportements chaotiques, voir l'article de synthèse de Miles & Henderson (1990).

8.3 Systèmes à petit nombre de degrés de liberté

8.3.1 Équation modèle

Les oscillateurs de Van de Pol et de Duffing nous ont permis de comprendre l'effet du terme cubique de l'équation de Landau sur l'amplitude et la phase d'une oscillation. Nous considérons maintenant le cas d'un nombre de degrés de liberté plus important, mais fini, pour lequel les amplitudes sur chaque degré obéissent à un système d'équations différentielles couplées. Cette situation correspond en particulier à un système gouverné par une équation aux dérivées partielles en temps et en espace, lorsque le plus petit nombre d'onde possible est imposé par la taille finie offerte au système ou par une condition de périodicité, et que, de l'autre côté du spectre, le nombre de composantes de Fourier spatiales est limité par un processus dissipatif à petite échelle.

Considérons ainsi l'équation-modèle de Kuramoto-Sivashinsky :

$$\partial_t u + 2Vu\partial_x u + R\partial_{xx}u + S\partial_{xxxx}u = 0. \quad (8.24)$$

Cette équation décrit par exemple la hauteur de la surface libre d'un film mince tombant sur un plan incliné, ou la position d'un front de flamme, ou encore la concentration d'une espèce chimique dans un système réactif (Cross & Hohenberg 1993). Pour $S = 0$, cette équation se ramène à l'équation de Burgers, modèle élémentaire qui décrit une compétition entre advection et diffusion. Le terme du quatrième ordre est, pour $S > 0$, un terme stabilisant de diffusion des perturbations à petite échelle. Une équation un peu différente, $\partial_t u - \sin u - R\partial_{xx}u = 0$, est étudiée dans le même esprit dans Drazin & Reid (2004, §50) et Drazin (2002, §5.2), et une autre, $\partial_t u + u\partial_x u = Ru - (\partial_{xx} + 1)^2 u$, dans Manneville (1991, chap. 5).

La recherche de solutions dont la structure spatiale comporte un nombre fini N de composantes de Fourier,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N A_n(t) e^{ink_1 x} \quad \text{avec} \quad A_{-n} = A_n^*, \quad (8.25)$$

permet d'illustrer les éléments essentiels de la dynamique d'un système à « petit nombre de degrés de liberté ». Le terme « degré de liberté » fait ici référence aux amplitudes $A_n(t)$, *a priori* complexes, des composantes de Fourier, et le terme « petit » signifie « fini » à strictement parler, et « limité à deux ou trois » souvent en pratique. Au-delà de son intérêt pratique, souvent assez limité, l'étude de cette situation met en évidence le rôle essentiel des harmoniques dans l'évolution non linéaire d'un mode instable, et permet d'interpréter de nombreux résultats expérimentaux ou de simulation numérique.

8.3.2 Équations d'amplitude

L'équation (8.24) admet la solution $u_0 = 0$. Linéarisant l'équation des perturbations de cette solution de base, et recherchant ces perturbations sous forme de modes normaux en $e^{\sigma t+i(\omega t-kx)}$, il vient la relation de dispersion

$$\sigma + i\omega = Rk^2 - Sk^4. \quad (8.26)$$

Pour k réel, le taux de croissance temporel est donc $\sigma = Rk^2 - Sk^4$ et la pulsation ω est nulle. Ainsi, pour $R < 0$, la solution $u_0 = 0$ est stable ($\sigma < 0$ pour tout k), et pour $R > 0$, $u_0 = 0$ est instable vis-à-vis des perturbations de nombre d'onde inférieur à $k_c = \sqrt{R/S}$ (instabilité de grande longueur d'onde).

Pour R positif, les perturbations instables croissent donc exponentiellement, et au bout d'un temps d'ordre σ^{-1} elles atteignent des amplitudes pour lesquelles les effets non linéaires ne peuvent plus être négligés. Choisissant k_1^{-1} comme échelle de longueur, et effectuant un changement d'échelle sur u et t afin de ramener S à l'unité, on élimine deux paramètres du problème. Reportant alors le développement (8.25) de $u(x, t)$ dans l'équation (8.24), et isolant les facteurs des exponentielles e^{inx} , il vient le système d'équations différentielles suivant pour les amplitudes :

$$\frac{dA_n}{dt} = \sigma_n A_n + iV \sum_{p=-\infty}^{\infty} p A_p^* A_{n+p}, \quad (8.27a)$$

$$\sigma_n = Rn^2 - n^4, \quad n \text{ entier}. \quad (8.27b)$$

Ce système d'équations d'amplitudes correspond à une infinité d'oscillateurs de relaxation de taux de croissance linéaire σ_n , et couplés quadratiquement. L'équation du mode $n = 0$ se réduit à $dA_0/dt = 0$, qui donne $A_0 = \text{constante}$; nous supposerons que cette constante, qui est la moyenne spatiale de u , est nulle.

8.3.3 Réduction à la dynamique du mode marginal au voisinage du seuil

Pour R croissant, le premier mode instable est d'après (8.27b) le mode fondamental $n = 1$, pour $R = 1$. Pour $R \gtrsim 1$, ce mode reste le seul instable, le taux de croissance des harmoniques ($n = 2, 3, \dots$) restant fortement négatif comme illustré sur la figure 8.8.

Au voisinage du seuil de l'instabilité, $R \gtrsim 1$, on attend des perturbations d'amplitude petite, disons d'ordre $\epsilon \ll 1$, dominée par le mode fondamental. Supposons que le module de l'harmonique de rang n est d'ordre ϵ^n , conjecture à confirmer par la suite ; retenant les trois premiers harmoniques, le système

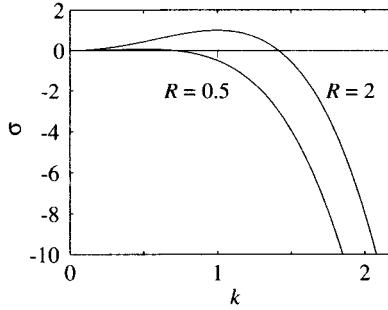


FIG. 8.8 – Taux de croissance (8.27b); le mode fondamental de nombre d'onde $k = n = 1$, stable pour $R = 0,5$, est instable pour $R = 2$, alors que l'harmonique $n = 2$ reste fortement stable.

(8.27) se réduit au système dynamique

$$\frac{dA_1}{dt} = \sigma_1 A_1 - iVA_1^* A_2 + \mathcal{O}(A_1^5), \quad (8.28a)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \sigma_2 A_2 - iVA_1^2 + \mathcal{O}(A_1^4), \quad (8.28b)$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \sigma_3 A_3 - 3iVA_1 A_2 + \mathcal{O}(A_1^5). \quad (8.28c)$$

Ce système dynamique peut être simplifié au voisinage du seuil. En effet, pour $R \gtrsim 1$, seul le fondamental A_1 est marginalement instable et les autres modes sont fortement amortis, soit, pour $n \geq 2$:

$$\sigma_1 > 0, \quad \sigma_n < 0 \quad \text{avec} \quad |\sigma_n| \gg \sigma_1. \quad (8.29)$$

Le temps caractéristique σ_1^{-1} de croissance du fondamental étant beaucoup plus grand que le temps de relaxation $|\sigma_n^{-1}|$ des autres harmoniques, on a, pour $n \geq 2$,

$$\frac{dA_n}{dt} \sim \sigma_1 A_n \ll |\sigma_n| A_n. \quad (8.30)$$

On en déduit que le terme dA_n/dt peut être négligé dans les équations (8.28b) et (8.28c), d'où

$$A_2 = \frac{iV}{\sigma_2} A_1^2 + \mathcal{O}(A_1^4), \quad (8.31)$$

et une équation semblable pour A_3 :

$$A_3 = \frac{3iV}{\sigma_3} A_1 A_2 + \mathcal{O}(A_1^5) \sim A_1^3. \quad (8.32)$$

Remarquons que pour $A_1 \sim \epsilon$, on a bien $A_n \sim \epsilon^n$, conformément à la conjecture initiale. Reportant l'expression ci-dessus de A_2 dans (8.28a), on obtient

que la dynamique du fondamental est régie par l'équation de Landau

$$\frac{dA_1}{dt} = \sigma_1 A_1 - \kappa |A_1|^2 A_1 + \mathcal{O}(A_1^5), \quad \kappa = -\frac{V^2}{\sigma_2}, \quad (8.33)$$

où la constante de Landau κ est réelle et positive (car $\sigma_2 < 0$). Vérifions les ordres de grandeur : soit $\epsilon^2 = R - 1$ l'écart au seuil ; alors $\sigma_1 = \epsilon^2$ d'après (8.27), et l'amplitude saturée est bien d'ordre ϵ ; et pour des temps d'ordre σ_1^{-1} , tous les termes de l'équation de Landau (8.33) sont bien du même ordre ϵ^3 .

Posant $A_n(t) = a_n(t)e^{i\phi_n(t)}$, et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\frac{da_1}{dt} = \sigma_1 a_1 - \kappa a_1^3, \quad \frac{d\phi_1}{dt} = 0. \quad (8.34)$$

On reconnaît dans l'équation de a_1 la forme normale d'une bifurcation fourche en $\sigma_1 = 0$ ($R = 1$), supercritique car κ est positif.

Ainsi, au voisinage du seuil de l'instabilité ($R = 1$), la dynamique faiblement non linéaire du fondamental est gouvernée par une équation de Landau. La dynamique des harmoniques est asservie à celle du fondamental à travers les équations (8.31-8.32) ; bien que ces harmoniques soient linéairement stables ($\sigma_n < 0$), ils croissent par interaction non linéaire avec le fondamental, et c'est cette croissance qui sature l'instabilité.

La théorie des systèmes dynamiques permet de systématiser la démarche ci-dessus, de réduction de la dynamique au mode marginal ; cette systématisation consiste à projeter la dynamique des perturbations sur un sous-espace de l'espace des amplitudes, la « variété centrale ». Cette approche est développée dans le chapitre 11, ainsi que par Glendinning (1994), Manneville (1991, chap. 5) et Newell, Passot & Lega (1993).

8.4 Illustration : instabilité d'une interface cisaillée

La réduction de la dynamique au mode marginal est illustrée dans cette section par une étude expérimentale de l'instabilité d'une interface cisaillée entre deux fluides visqueux (Barthelet, Charru & Fabre 1995). L'installation expérimentale, schématisée sur la figure 8.9, consiste en un canal annulaire de section rectangulaire, partiellement rempli d'un premier liquide au-dessus duquel est déposé un second liquide moins dense (mélange eau-glycérine et huile minérale). Le canal est fermé par un plateau supérieur, dont la rotation entraîne les fluides. Le profil vertical de vitesse est linéaire dans la partie centrale du canal (écoulement de Couette plan), tant que les forces d'inertie centrifuges restent faibles (c'est-à-dire tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à 100). La position de l'interface est mesurée par des sondes conductimétriques.

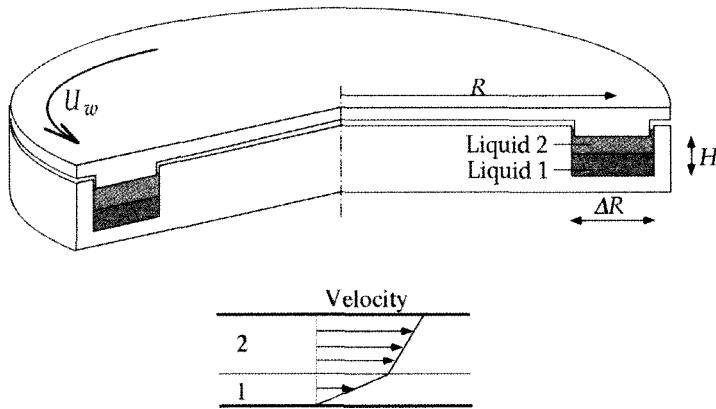


FIG. 8.9 – Schéma de l'installation expérimentale d'étude de l'instabilité de l'interface entre deux liquides visqueux ; le diamètre moyen du canal annulaire est 40 cm (Barthelet *et al.* 1995).

Pour des vitesses U de plateau faibles, l'interface reste plane ; au-delà d'une vitesse critique U_c de l'ordre d'une dizaine de centimètres par seconde (sa valeur précise dépend des viscosités, des densités et des hauteurs de fluide), une onde apparaît à l'interface, croît et sature à une amplitude A_{sat} comme illustré sur la figure 8.10. Sa longueur d'onde est égale au périmètre du canal et sa période est d'une dizaine de secondes. Le profil de l'onde saturée apparaît plus nettement sur la figure 8.11 (l'onde se propageant comme une onde « gelée », un enregistrement temporel donne le profil spatial inversé de l'onde) ; ce profil est quasi sinusoïdal au voisinage du seuil de l'instabilité (trace du milieu sur la figure), puis s'écarte nettement d'une sinusoïde plus loin du seuil, avec un front plus raide que la queue (trace inférieure).

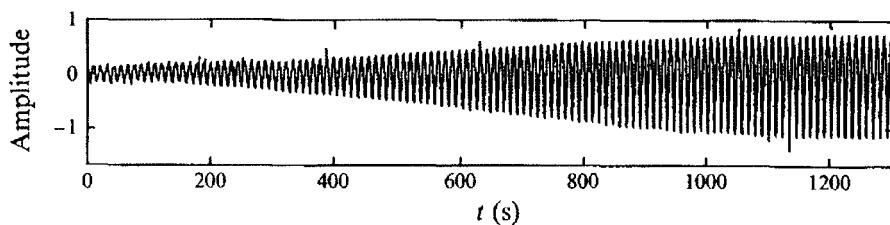


FIG. 8.10 – Croissance temporelle de l'onde interfaciale mesurée en un point du canal, pour $U/U_c = 1,13$. La position de l'interface est normalisée par l'amplitude saturée (Barthelet *et al.* 1995).

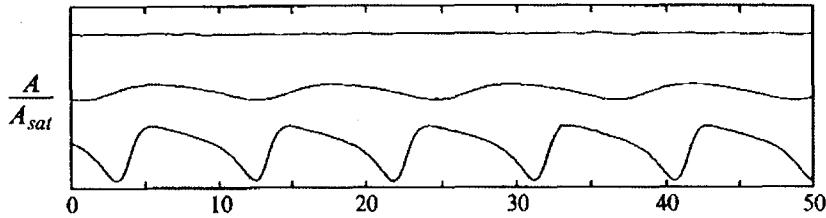


FIG. 8.11 – Enregistrement temporel de la position de l'interface $\eta(x_0, t)$, pour trois vitesses U du plateau supérieur autour de la vitesse critique U_c . De haut en bas, $U/U_c = 0,97$, $U/U_c = 1,06$ et $U/U_c = 1,33$ (Barthelet *et al.* 1995).

La figure 8.12a montre la variation de l'amplitude saturée de l'onde avec la vitesse U . Cette amplitude est nulle en-dessous de la vitesse critique U_c , puis croît comme la racine carrée de l'écart au seuil, $\sqrt{U - U_c}$. Les mesures réalisées pour des vitesses décroissantes se superposent à celles réalisées pour des vitesses croissantes, ce qui montre que le phénomène ne présente pas d'hystéresis. La bifurcation apparaît donc supercritique. La figure 8.12b montre l'évolution du temps de saturation, *i.e.* le temps nécessaire pour atteindre l'amplitude saturée. On voit que ce temps de saturation est d'autant plus grand que la vitesse est proche du seuil, où il diverge.

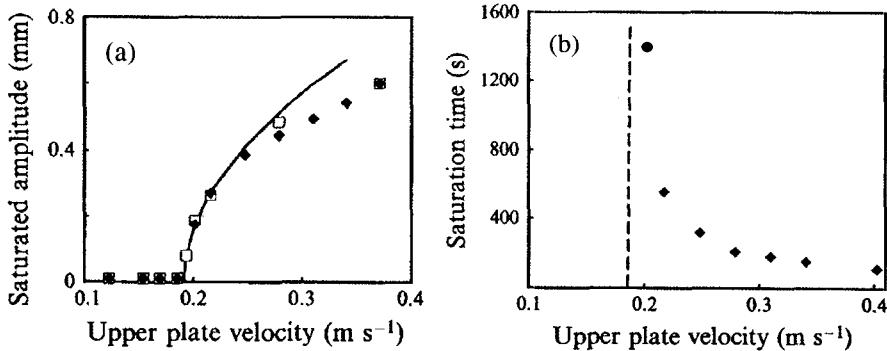


FIG. 8.12 – (a) Variations de l'amplitude saturée A_{sat} de l'onde d'interface pour des vitesses U du plateau croissantes (\blacklozenge) et décroissantes (\square) ; (b) temps de saturation (Barthelet *et al.* 1995).

La validation de la théorie développée dans la section précédente, selon laquelle la dynamique non linéaire au voisinage du seuil de l'instabilité est gouvernée par le mode marginal, demande d'isoler l'évolution temporelle de chaque harmonique spatial. Ces évolutions sont obtenues par un filtrage passe-bande autour de la fréquence $n\omega_1^0$ où n est le rang de l'harmonique et ω_1^0 est la pulsation du mode fondamental dans sa phase initiale de croissance (mode

de longueur d'onde égale au périmètre $L = 2\pi/k_1$ du canal). Ces harmoniques sont de la forme

$$\frac{1}{2} A_n(t) e^{in(k_1 x - \omega_1^0 t)} + c.c.,$$

où $A_n(t) = |A_n(t)| e^{i\phi_n(t)}$ est l'amplitude complexe de l'harmonique. On remarquera qu'on a soustrait de chaque amplitude $A_n(t)$ l'évolution rapide $n\omega_1^0 t$ de la phase correspondant à l'oscillation à la pulsation $n\omega_1^0$: ces amplitudes ne contiennent donc que l'écart à la « phase rapide », *i.e.* la variation lente $\phi_n(t)$. Le module $|A_n(t)|$ et la « phase lente » $\phi_n(t)$ de chaque amplitude peuvent alors être obtenus par une technique de démodulation mettant en œuvre la transformée de Hilbert.

La figure 8.13 montre l'évolution temporelle des modules $|A_n(t)|$ et phases lentes $\phi_n(t)$ du mode fondamental et des deux premiers harmoniques. La figure 8.13a, dont l'ordonnée est en échelle logarithmique, met en évidence la croissance exponentielle puis la saturation du fondamental d'amplitude A_1 , avec des évolutions analogues pour les harmoniques d'amplitude A_2 et A_3 . La théorie développée dans la section précédente est illustrée sur les figures suivantes. La figure 8.13b montre les rapports $|A_2|/|A_1|^2$ et $|A_3|/|A_1|^3$, qui

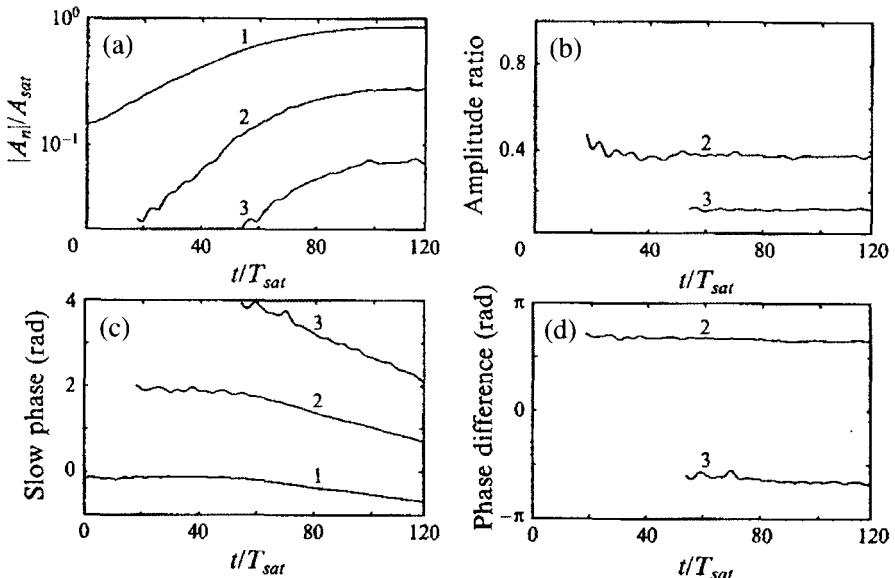


FIG. 8.13 – Évolution temporelle des amplitudes et phases lentes du fondamental d'amplitude A_1 et des deux premiers harmoniques A_2 et A_3 , pour $U/U_c = 1,13$; T_{sat} est la période de l'onde saturée. (a) Modules normalisés par l'amplitude de l'onde saturée ; (b) rapports $|A_2|/|A_1|^2$ et $|A_3|/|A_1|^3$; (c) phases lentes ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 ; (d) différences $\phi_2 - 2\phi_1$ et $\phi_3 - 3\phi_1$ des phases lentes (Barthelet *et al.* 1995).

apparaissent bien constants comme prédit par les équations (8.31) et (8.32). La figure 8.13c montre l'évolution temporelle des « phases lentes » ; la phase ϕ_1 apparaît tout d'abord constante, ce qui correspond à la phase de croissance linéaire, puis décroît avec une pente qui correspond à la diminution de la fréquence du fondamental, diminution de 0,2 % ; les phases lentes des harmoniques A_2 et A_3 évoluent de la même façon, avec des pentes respectivement deux fois et trois fois plus grandes. La dernière figure 8.10d montre l'évolution des différences $\phi_2 - 2\phi_1$ et $\phi_3 - 3\phi_1$: ces différences de phases lentes sont constantes, ce qui correspond bien aux prédictions des équations (8.31) et (8.32). En conclusion, l'évolution des rapports des modules et des différences de phase des amplitudes complexes vérifient bien

$$A_2 \sim A_1^2, \quad A_3 \sim A_1^3,$$

c'est-à-dire que les harmoniques 2 et 3 n'ont pas de dynamique propre mais sont « esclaves » de l'évolution du mode fondamental linéairement instable.

8.5 Exercices

8.5.1 Oscillateur de Van der Pol-Duffing

1. De l'équation (8.11) de u_1 , quelles fréquences peut-on attendre dans le spectre de $u(t)$? Comment varie l'amplitude des harmoniques avec leur rang?
2. Montrer qu'un terme $\sin u$ à la place de u dans l'équation de Van der Pol conduit à un terme en A^2 dans l'équation de ϕ . En déduire la fréquence des oscillations saturées.

8.5.2 Oscillateur de Van der Pol – Restabilisation

L'oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage de pulsation ω_f est régi par l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} - (2\epsilon\mu - u^2)\frac{du}{dt} + \omega_0^2u = F \cos \omega_f t, \quad (8.35)$$

où le petit paramètre $\epsilon \ll 1$ est fixé, et $\mu = \mathcal{O}(1)$ est le paramètre de bifurcation. On considère ici un forçage d'amplitude $F = \epsilon^{1/2}f$ avec $f = \mathcal{O}(1)$. Cherchant une solution dont l'amplitude est d'ordre $\epsilon^{1/2}$ par le changement de variable $u = \epsilon^{1/2}\tilde{u}$, $\tilde{u} = \mathcal{O}(1)$, il vient pour \tilde{u} :

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dt^2} + \omega_0^2\tilde{u} = \epsilon(2\mu - \tilde{u}^2)\frac{d\tilde{u}}{dt} + f \cos \omega_f t, \quad \mu = \mathcal{O}(1), \quad \epsilon \ll 1.$$

1. Par la méthode des échelles multiples, montrer qu'à l'ordre dominant, la réponse s'écrit

$$u_0 = \frac{1}{2}A(T)e^{i\omega_0\tau} + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \frac{e^{i\omega_f\tau}}{2} + c.c.$$

2. Montrer qu'à l'ordre suivant, la condition de non-résonance est l'équation de Landau

$$\frac{dA}{dT} = \xi A - \frac{1}{8}|A|^2 A, \quad (8.36)$$

avec

$$\xi = \mu - \frac{1}{4} \left(\frac{f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)^2.$$

Que peut-on conclure de l'effet du forçage sur l'instabilité de la solution $u = 0$ (Fauve 1998, §2.3 ; Glendinning 1994, §7.9) ?

8.5.3 Oscillateur de Van der Pol – Accrochage de fréquence

On considère l'oscillateur de Van der Pol (8.35) lorsque le forçage est presque résonnant, de pulsation $\omega_f = \omega_0 + \epsilon\Omega$ avec $\Omega = \mathcal{O}(1)$, et d'amplitude petite, $F = \epsilon^{3/2}f$ avec $f = \mathcal{O}(1)$.

1. Montrer que la condition de non-résonance s'écrit

$$\frac{dA}{dT} = \mu A - \frac{1}{8}|A|^2 A - \frac{if}{2\omega_0} e^{i\Omega T}. \quad (8.37)$$

2. Montrer que le changement de variable $B = Ae^{-i\Omega T}$ permet d'obtenir une équation d'amplitude autonome (ne dépendant pas explicitement du temps). Montrer qu'au voisinage de la résonance, l'oscillateur s'accroche sur le forçage, et que sinon la dynamique est quasi périodique (Fauve 1998, §2.3 ; Glendinning 1994, §7.9).

8.5.4 Oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage constant

On considère un oscillateur de Van der Pol soumis à un forçage constant, décrit par l'équation

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 1 + \mu, \quad (8.38)$$

pour $\epsilon \gg 1$, où μ est un paramètre réel. Pour $\mu = -1$, l'équation ci-dessus correspond à un oscillateur de relaxation, qui possède un cycle limite stable d'amplitude voisine de 2. Le problème est ici de déterminer comment ce cycle limite est créé ou détruit lorsque μ varie (Glendinning 1994, §7.13).

1. Montrer que l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \epsilon x \left(\frac{1}{3}x^2 - 1 \right), \\ \dot{y} &= -x + 1 + \mu, \end{aligned}$$

et que ce système dynamique possède un unique point fixe, stable pour $\mu < -2$ et pour $\mu > 0$. Quel type de bifurcation survient vraisemblablement pour $\mu = -2$ et pour $\mu = 0$?

2. On étudie ici la bifurcation survenant en $\mu = 0$. Montrer que, en ramenant le point fixe à l'origine par une translation des axes de coordonnées, le système dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v - \epsilon u \left(\mu(\mu + 2) + (1 + \mu)u + \frac{1}{3}u^2 \right), \\ \dot{v} &= -u.\end{aligned}$$

3. Montrer que la bifurcation est bien une bifurcation de Hopf, *i.e.* que la condition dite de « transversalité » $d\sigma_r/d\mu(\mu = 0) \neq 0$ est bien vérifiée, où σ_r est la partie réelle de la valeur propre. La bifurcation est-elle supercritique ou sous-critique ? Tracer le portrait de phase. Préciser la fréquence du cycle limite, et la loi de variation de son amplitude avec μ .

8.5.5 Oscillateur paramétrique

On considère un oscillateur forcé gouverné par l'équation de Mathieu (8.23)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\epsilon\mu \frac{du}{dt} + \omega_0^2(1 + \epsilon f \sin \omega_f t) \sin u = 0.$$

L'amortissement et le forçage sont supposés petits et du même ordre de grandeur : $\mu = \mathcal{O}(1)$, $f = \mathcal{O}(1)$ et $\epsilon \ll 1$ (Fauve 1998, §2.2 ; Glendinning 1994, §7.7-8).

1. Montrer que pour u petit, l'équation de Mathieu peut se mettre sous la forme suivante, qui correspond à un problème de deux oscillateurs couplés :

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2} + 2\epsilon\mu \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u &= -vu, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \omega_f^2 v &= 0.\end{aligned}$$

En déduire, par un argument qualitatif, que la solution $u = 0$ est instable lorsque la pulsation du forçage vérifie $\omega_0 = \omega_f - \omega_0$, soit $\omega_f = 2\omega_0$. (D'autres résonances, moins fortes, apparaissent pour $\omega_0 = n\omega_f - \omega_0$.)

2. On étudie la réponse de l'oscillateur au voisinage de la résonance $\omega_f = 2\omega_0$. On recherche la solution sous la forme suivante

$$u(t) = \epsilon^{1/2}(u_0(\tau, T) + \epsilon^{1/2}u_1(\tau, T) + \epsilon u_2(\tau, T) + \dots)$$

où $\tau = t$ est la variable « rapide » décrivant les variations de la phase, et $T = \epsilon t$ est la variable « lente » décrivant la variation de l'amplitude (*cf.* la résolution de l'équation de Van der Pol). Montrer que, aux trois premiers ordres $\epsilon^{1/2}$, ϵ^1 et $\epsilon^{3/2}$, la suite d'équations différentielles à résoudre est

$$\begin{aligned}Lu_0 &= 0 \quad \text{avec} \quad L = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1, \\ Lu_1 &= 0, \\ Lu_2 &= -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial T} - 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial \tau} - \omega_0^2 f u_0 \sin \omega_f t + \frac{1}{6} \omega_0^2 u_0^3.\end{aligned}$$

3. Montrer qu'à l'ordre $\epsilon^{3/2}$, la condition de non-résonance (condition pour que le membre de droite ne soit pas résonnant, *i.e.* condition pour que u_2 reste bornée au cours du temps) s'écrit

$$\frac{dA}{dT} = -\mu A + \frac{\omega_0 f}{4} A^* e^{2i\Omega T} - \frac{i\omega_0}{16} |A|^2 A,$$

où l'écart à la résonance est supposé petit : $\omega_f - 2\omega_0 = 2\epsilon\Omega$, avec $\Omega = \mathcal{O}(1)$. (Comme pour l'oscillateur de Van der Pol, la solution à l'ordre ϵ^1 a la même forme qu'à l'ordre $\epsilon^{1/2}$, et n'intervient pas à l'ordre $\epsilon^{3/2}$: on peut poser sans perte de généralité $u_1 = 0$.)

4. Montrer que le changement de variable $B = Ae^{-i\Omega T}$ permet d'obtenir une équation d'amplitude autonome. En considérant B comme l'amplitude du mouvement, quelle est la pulsation des oscillations de $u(t)$?
5. Stabilité linéaire de l'état de repos $B = 0$. Posant $B = X + iY$, établir le système de deux équations différentielles ordinaires (EDO) à coefficients réels vérifié par X et Y . Étudier la stabilité linéaire du point fixe $(0, 0)$. Représenter l'évolution des deux valeurs propres dans le plan complexe, lorsque le forçage croît. Déterminer les domaines de stabilité et d'instabilité dans le plan (Ω, f) . Montrer que la réponse forcée est quasi périodique dans le domaine stable et qu'il y a accrochage de fréquence dans le domaine instable. Complément : expliciter complètement la réponse de l'oscillateur initialement au repos ($u(0) = du/dt(0) = 0$), dans le cas instable.
6. Stabilité non linéaire. Posant $B = be^{i\phi}$, établir le système de deux EDO à coefficients réels vérifié par b et ϕ . Montrer que les points fixes de ce système (états stationnaires pour l'amplitude B) correspondent à

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ \frac{\omega_0}{16} b_0^2 &= -\Omega \pm \sqrt{F^2 - \mu^2} \text{ pour } F = \frac{\omega_0 f}{4} \geq \mu. \end{aligned}$$

Représenter ces états stationnaires dans le plan (F^2, b_0^2) , en distinguant les cas $\Omega < 0$ et $\Omega > 0$. Posant $b = b_0 + b'$, $\phi = \phi_0 + \phi'$ et linéarisant les équations, déterminer la stabilité linéaire des solutions $b_0 \neq 0$ (la stabilité de la solution $b_0 = 0$ a été étudiée à la question précédente).

7. Déduire des résultats précédents les diagrammes de bifurcation de l'oscillateur paramétrique dans le plan (F^2, b_0^2) , pour $\Omega < 0$ et pour $\Omega > 0$. Préciser dans chaque cas la nature de la bifurcation lorsque l'état de repos $B = 0$ devient instable.

8.5.6 Dynamique faiblement non linéaire de l'équation KS-KdV

On reprend dans cet exercice la dérivation de l'équation de Landau faite dans la section 8.3.3, pour l'équation

$$\partial_t u + c_0 \partial_x u + 2V u \partial_x u + R \partial_{xx} u + M \partial_{xxx} u + S \partial_{xxxx} u = 0. \quad (8.39)$$

Cette équation est une combinaison de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (8.24) ($c_0 = M = 0$) et de l'équation de Korteweg-de Vries ($R = S = 0$, voir chapitre 9).

Elle rend compte de la propagation d'ondes non linéaires dans un milieu faiblement dispersif.

- Montrer que la relation de dispersion s'écrit, pour k réel (stabilité temporelle) :

$$\sigma(k) = Rk^2 - Sk^4, \quad \omega = c_0 k - Mk^3.$$

Commenter cette relation (condition d'instabilité, célérité des modes normaux).

- On recherche une solution non linéaire par un développement semblable à (8.25) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{in(k_1 x - \omega(k_1)t)}, \quad \text{avec } k_1 = 1, \quad A_n = A_n^*$$

(poser $k_1 = 1$ revient à définir l'échelle de longueur et n'enlève aucune généralité au problème). Les amplitudes étant supposées varier lentement, le développement ci-dessus n'est licite que si la pulsation $\omega(k_n)$ de l'harmonique n est voisine de $n\omega(k_1)$, ce qui correspond à des ondes faiblement dispersives, donc M petit. Montrer que le système d'équations d'amplitudes est

$$\frac{dA_n}{dt} = (\sigma_n + in(n^2 - 1)M)A_n + iV \sum_{p=-\infty}^{\infty} p A_p^* A_{n+p}$$

où $\sigma_n = \sigma(n) = Rn^2 - Sn^4$.

- Montrer que le système ci-dessus, tronqué aux trois premiers harmoniques A_1 , A_2 et A_3 , est identique au système (8.28a–8.28c) à condition de remplacer σ_2 et σ_3 par $(\sigma_2 + 6iM)$ et $(\sigma_3 + 24iM)$, respectivement. Montrer ensuite qu'au voisinage du seuil, le système se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \sigma_1 A_1 - \kappa |A_1|^2 A_1 + \mathcal{O}(A_1^5), \quad \kappa = -\frac{V^2}{\sigma_2 + 6iM}, \\ A_2 &= \frac{iV}{\sigma_2 + 6iM} A_1^2 + \mathcal{O}(A_1^4), \\ A_3 &\sim A_1^3 + \mathcal{O}(A_1^5). \end{aligned}$$

Posant $A_n(t) = a_n(t) e^{i\phi_n(t)}$, et séparant les parties réelle et imaginaire, montrer que

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= \sigma_1 a_1 - \kappa_r a_1^3, \\ \frac{d\phi_1}{dt} &= -\kappa_i a_1^2. \end{aligned}$$

- En quoi ces équations sont-elles différentes de celles obtenues à partir de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky ? Expliciter $u(x, t)$ en précisant l'ordre de grandeur des termes négligés.

Chapitre 9

Dynamique non linéaire d'une onde dispersive

9.1 Introduction

Lorsqu'un fluide est perturbé localement de façon impulsionnelle ou périodique (par exemple par un impact, ou la vibration d'une membrane, corde ou pièce mécanique), la perturbation se propage loin de la source sous la forme d'une onde : onde acoustique, ou onde de surface, ou onde interne dans un fluide stratifié (Lighthill 1978). Pour une perturbation d'amplitude petite, la résolution des équations linéarisées conduit à un résultat majeur : une excitation à une pulsation ω donnée produit une onde de nombre d'onde k et de célérité $c = \omega/k$ définis par la relation de dispersion. Cette relation étant obtenue à partir des équations linéarisées, elle ne fait pas intervenir l'amplitude de la perturbation. Cependant, si cette amplitude excède une gamme d'amplitudes « petites », des effets nouveaux se manifestent, dont ne rend évidemment pas compte la relation de dispersion. Rendre compte de ces effets nouveaux nécessite de considérer les termes non linéaires négligés dans l'étude linéaire, *i.e.* d'élaborer une théorie des *ondes non linéaires* ; ces ondes sont encore appelées *ondes d'amplitude finie* par opposition aux ondes d'amplitude infinitésimale considérées dans une étude linéaire.

L'objet de ce chapitre est donc (i) de montrer comment construire une onde non linéaire par une méthode perturbative, essentiellement la méthode des échelles multiples présentée au chapitre précédent, et (ii) d'étudier la stabilité linéaire de cette onde. Cette introduction à la théorie des ondes non linéaires est présentée à partir d'un grand classique de l'hydrodynamique, le problème des ondes de gravité sur lequel G.G Stokes (1847) a réalisé une avancée déterminante ; on trouvera une histoire de ces ondes dans les articles de O. Darrigol (2003) et A.D.D. Craik (2004, 2005). Ces ondes de gravité sont devenues un « paradigme » des ondes non linéaires : l'étude des ondes dans les solides élastiques, ou des ondes optiques ou électromagnétiques, ou plus

généralement des ondes se propageant dans des milieux dispersifs faiblement dissipatifs, relève des mêmes idées et mêmes techniques d'analyse (Whitham 1974 ; Infeld & Rowland 1990 ; Peyrard & Dauxois 2004). Les effets dissipatifs seront négligés dans ce chapitre ; un calcul d'ordre de grandeur suffit à justifier cette hypothèse : pour une onde de gravité en eau profonde de 100 m de longueur d'onde, le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses est d'ordre $\omega/\nu k^2 = \sqrt{gk}/\nu k^2 = 2 \times 10^8$. Ces effets dissipatifs seront réintroduits au chapitre suivant.

La section suivante de ce chapitre présente l'onde non linéaire de Stokes, et l'évidence expérimentale de son instabilité (Benjamin & Feir 1967). Cette instabilité peut s'interpréter de deux façons qui éclairent le problème sous deux angles différents : soit en termes de *résonances* entre modes de Fourier, soit en termes d'*instabilité de modulation* de l'enveloppe d'une onde quasi monochromatique. Ces deux interprétations sont présentées dans les sections 9.3 et 9.4. Les idées et méthodes de calcul sont illustrées sur un problème modèle de masses couplées par des ressorts, dont la limite continue est gouvernée par une équation classique de la théorie des champs, l'*équation de Klein-Gordon* (Whitham 1974, § 14 ; Peyrard & Dauxois 2004, chapitre 2) ; ce problème modèle a l'avantage de contenir l'essentiel de la physique (dispersion et non-linéarités), tout en étant beaucoup plus économique en calculs que tout problème d'hydrodynamique. La dernière section du chapitre revient sur le problème des résonances.

9.2 Instabilité des ondes de gravité

9.2.1 Ondes de Stokes

Considérons une onde de gravité se propageant à la surface d'un fluide de grande profondeur, les effets de la viscosité et de la tension de surface étant négligeables. Pour une onde de nombre d'onde k_0 et de pulsation ω_0 , et d'amplitude a_0 petite (plus précisément, de cambrure $k_0 a_0 \ll 1$), la résolution du problème linéarisé conduit à la relation de dispersion

$$\omega_0^2 = gk_0. \quad (9.1)$$

Or l'observation montre qu'une onde de gravité, à la surface de l'océan par exemple, diffère sensiblement d'une sinusoïde : elle présente des crêtes plus pointues et des creux plus plats. Cette observation montre que l'onde contient des harmoniques, et que ces harmoniques se propagent à la même célérité que le mode fondamental ; or ceci est interdit par la relation (9.1), et révèle donc l'intervention de phénomènes non linéaires. L'observation montre de plus que la relation (9.1) n'est pas tout à fait exacte. On doit à Stokes (1847) d'avoir résolu ce problème par un développement en puissance de la cambrure de l'onde. Le profil de la surface libre $\eta(x, t)$ est alors donné par (Lamb 1932,

§250 ; Whitham 1974, §13.13)

$$\frac{\eta(x, t)}{a_0} = \frac{k_0 a_0}{2} + \cos \theta + \frac{k_0 a_0}{2} \cos 2\theta + \frac{3(k_0 a_0)^2}{8} \cos 3\theta + \mathcal{O}((k_0 a_0)^3), \quad (9.2)$$

où la phase θ et la pulsation ω sont définies par

$$\theta = k_0 x - \omega t, \quad \omega^2 = \omega_0^2(1 + k_0^2 a_0^2 + \mathcal{O}((k_0 a_0)^4)).$$

Le profil de cette onde est représenté sur la figure 9.1, et comparé à une onde sinusoïdale. Sa pulsation ω n'est pas tout à fait égale à la pulsation ω_0 d'une onde d'amplitude infinitésimale, mais, à l'ordre dominant, égale à

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{2} k_0^2 a_0^2. \quad (9.3)$$

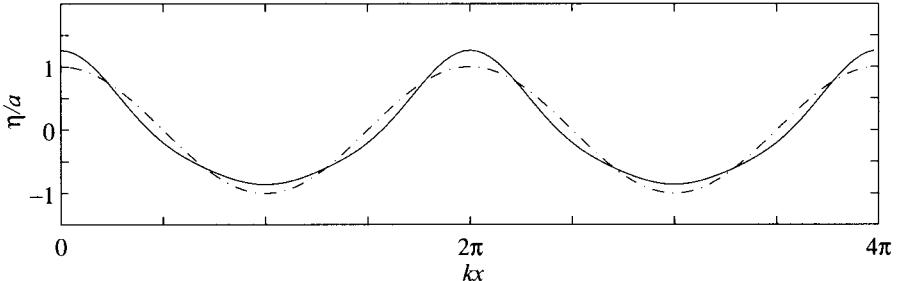


FIG. 9.1 – (—), onde de Stokes (9.2) pour $ka = 0,4$; (— . —), onde sinusoïdale.

George Gabriel Stokes (1819–1903)



Né à Skreen, Comté de Sligo, Irlande. Famille protestante très religieuse : son père est recteur de la paroisse de Skreen, ses trois frères ainés seront prêtres. Études à Dublin, puis à Bristol, où il est remarqué pour ses talents mathématiques. En 1837, entre au *Pembroke College* à Cambridge, où il se révèle un étudiant brillant ; son tuteur William Hopkins l'incite à entreprendre des recherches en hydrodynamique. Bénéficie d'une bourse de *Pembroke College* à partir de 1841. Publie en 1845 un article, *On the theories of the internal friction of fluids in motion*, où il établit

les équations du mouvement d'un écoulement visqueux, et montre le lien entre ces équations et celles d'un solide élastique (en fait, ces équations avaient été établies antérieurement par Navier (1821), puis par Poisson et Saint-Venant (1843) avec une présentation correcte des contraintes visqueuses, mais ces travaux n'étaient pas connus à Cambridge). Nombreux travaux en optique : sur les aberrations chromatiques en 1845, sur la diffraction en 1849 (problème également étudié par Cauchy), sur les raies Fraunhofer du spectre solaire en 1854. Étude majeure de géodésie, *On the variation of gravity at the surface of the earth*. Appointé comme professeur de Mathématiques à Cambridge en 1849, élu à la *Royal Society* en 1851. Travail majeur sur le mouvement d'une sphère dans un écoulement visqueux en 1851. Explique et nomme le phénomène de fluorescence en 1852, dans le cadre d'une théorie moléculaire faisant intervenir un éther élastique. Se marie en 1857, ce qui le constraint à abandonner sa bourse de *Pembroke College* (qui impliquait alors le célibat) ; sa carrière prend alors un tournant, vers plus d'expérimentation et de charges administratives. Président de la *Royal Society* de 1885 à 1890, et du *Victoria Institute* de 1886 à sa mort en 1903. Médaille *Copley* de la *Royal Society* en 1893. L'influence de Stokes est ainsi résumée par Parkinson : « ... *Stokes was a very important formative influence on subsequent generations of Cambridge men, including Maxwell. With Green, who in turn had influenced him, Stokes followed the work of the French, especially Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson, and Cauchy. This is seen most clearly in his theoretical studies in optics and hydrodynamics; but it should also be noted that Stokes, even as an undergraduate, experimented incessantly. Yet his interests and investigations extended beyond physics, for his knowledge of chemistry and botany was extensive, and often his work in optics drew him into those fields.* » Les articles de Stokes ont été rassemblés et publiés en cinq volumes, par Stokes lui-même puis par Sir Joseph Larmor.

Ces résultats mettent en évidence deux phénomènes qualitativement nouveaux par rapport à la théorie linéaire. Le premier est qu'une onde d'amplitude finie peut se propager sans se déformer, les harmoniques se propageant avec la même célérité que le fondamental (ce qui n'est pas du tout évident *a priori* du fait de la dispersion). Le second est que la relation de dispersion (9.3) fait intervenir l'amplitude ; ici, la pulsation d'une onde de nombre d'onde k_0 et donc sa célérité $c_0 = \omega_0/k_0$ croissent avec l'amplitude. On propose en exercice le calcul d'une onde non linéaire semblable à (9.2) à partir de l'équation de Klein-Gordon.

9.2.2 Instabilité de Benjamin-Feir

Le train de vagues produit par un batteur de houle à l'extrémité d'un canal ne reste pas uniforme au cours de sa propagation, et dégénère en une série de groupes de vagues (figure 9.2). Ce phénomène bien connu a longtemps été attribué au batteur lui-même, et on tentait de le minimiser en modifiant la conception du batteur. Après de nouvelles et vaines tentatives pour le résoudre, Benjamin et Feir reprirent la théorie et montrèrent que le phénomène pouvait ne pas être lié au batteur, mais devait résulter d'une instabilité intrinsèque de l'onde de Stokes (Benjamin & Feir 1967 ; Hunt 2006). Il s'est avéré que l'instabilité ainsi découverte est très générale : il s'agit de l'instabilité d'une onde dispersive monochromatique, de nombre d'onde k_0 , vis-à-vis de perturbations de nombres d'onde $k_0 + \delta k$ voisins (Phillips 1981).

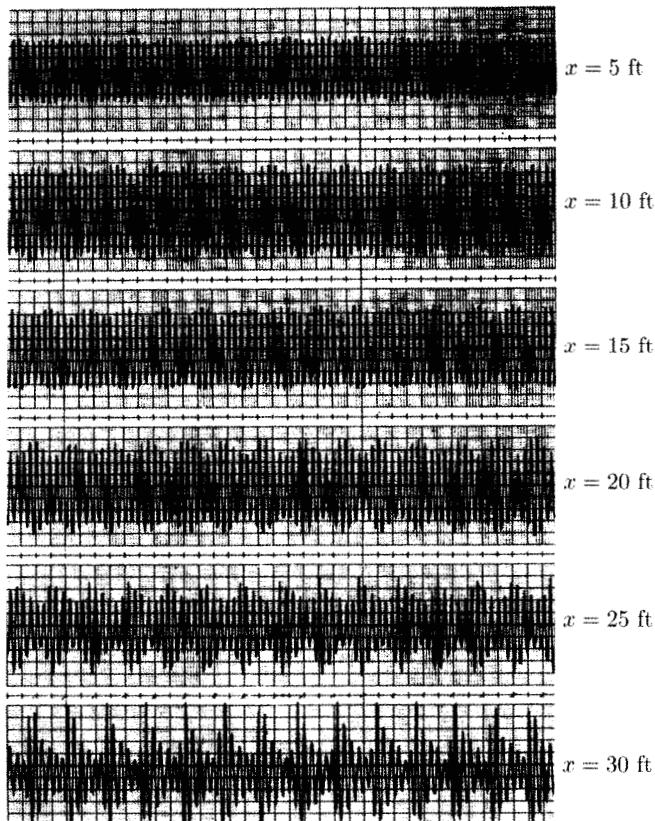


FIG. 9.2 – Enregistrement temporel d'une onde de gravité en canal mesurée à différentes distances x du batteur (mesurées en pieds), montrant la croissance d'une modulation sur un train d'ondes initialement non modulé (Lake *et al.* 1977).

Ces perturbations, inévitablement présentes dans toute expérience, croissent exponentiellement par un mécanisme de résonance lorsque

$$\frac{\delta k^2}{k_0^2} < 8(k_0 a_0)^2, \quad (9.4)$$

c'est-à-dire lorsque leur nombre d'onde se trouve dans une bande étroite autour de k_0 . Compte tenu de la relation de dispersion (9.1), la fréquence de ces perturbations se trouvent dans l'intervalle étroit $\omega_0(1 \pm \sqrt{2}k_0 a_0)$. Les deux perturbations les plus amplifiées sont celles dont le nombre d'onde est $k_0(1 \pm 2k_0 a_0)$, et leur taux de croissance est

$$\sigma_{\max} = \frac{\omega_0}{2}(k_0 a_0)^2. \quad (9.5)$$

On remarquera que ce taux de croissance maximum est égal à la correction non linéaire de la pulsation.

Les expériences de Lake *et al.* (1977) ont confirmé l'analyse de Benjamin et Feir comme le montrent les figures 9.2, 9.3 et 9.4. La figure 9.2 montre des enregistrements temporels de la position de l'interface, à différentes distances du batteur ; l'amplification de modulations y est très claire. La figure 9.3 montre

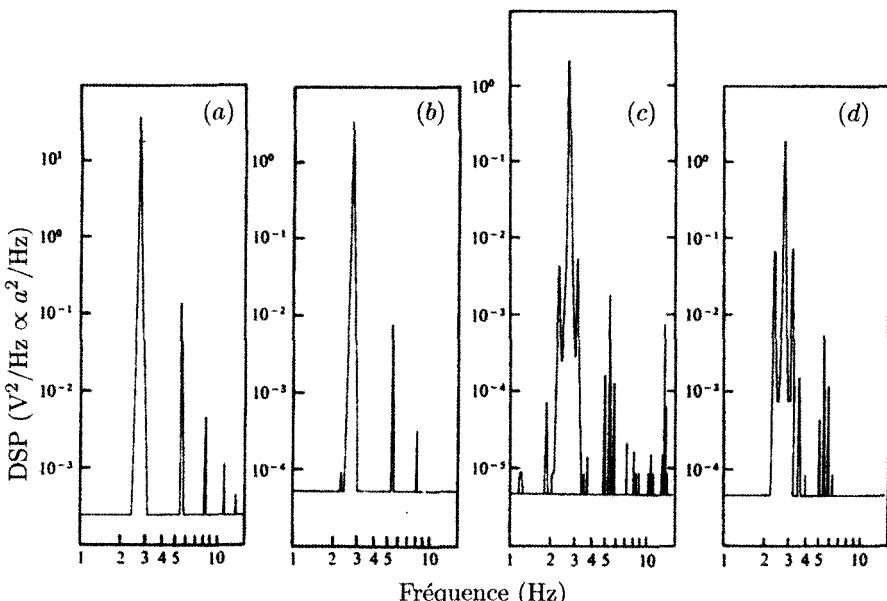


FIG. 9.3 – Spectres de puissance (DSP = densité spectrale de puissance) correspondant aux enregistrements temporels de la figure 9.2 ; (a) $x = 5$ ft, (b) $x = 10$ ft, (c) $x = 20$ ft, (d) $x = 30$ ft (Lake *et al.* 1977).

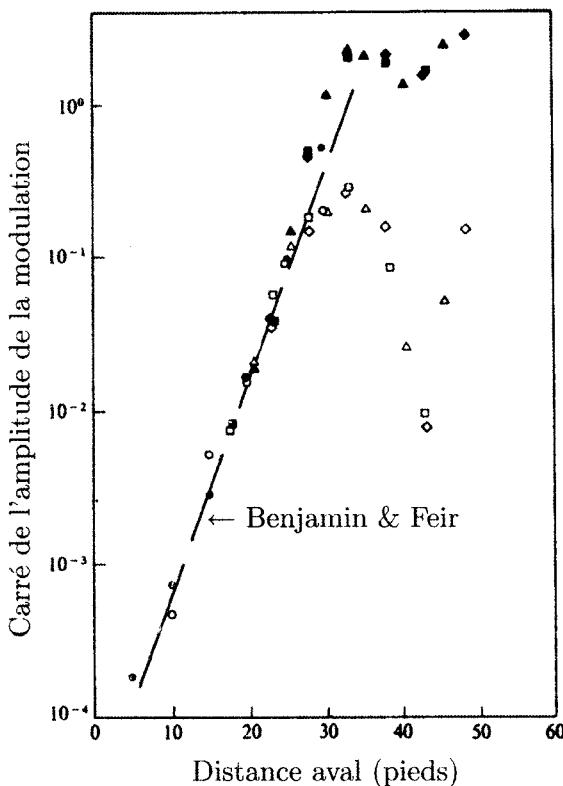


FIG. 9.4 - Croissance spatiale de l'amplitude des perturbations de nombre d'onde voisin du fondamental : comparaison des mesures de Lake *et al.* (1977) à la prédition du taux de croissance (9.5) de Benjamin & Feir (1967). Symboles pleins : perturbation $\omega_0 - \Delta\omega$, symboles vides : perturbation $\omega_0 + \Delta\omega$. $f_0 = \omega_0/2\pi = 2,5$ Hz, $ka_0 = 0,16$.

les spectres d'amplitude correspondants, qui mettent en évidence la croissance de nombres d'onde voisins du fondamental ; on voit également croître des perturbations de fréquences proches de celles des harmoniques. La figure 9.4 compare des mesures de Lake *et al.* (1977) de croissance de l'amplitude de la perturbation à la prédition du taux de croissance (9.5) de Benjamin & Feir (1967) ; on peut voir que l'accord est excellent.

Comme annoncé dans l'introduction, plutôt que de présenter l'étude hydrodynamique de Benjamin et Feir, nous discutons ci-dessous un problème modèle plus simple illustrant la généralité du mécanisme d'instabilité d'une onde non linéaire disperive.

9.3 Instabilité par interactions résonnantes

9.3.1 Problème modèle

L'équation modèle utilisée ici pour mettre en évidence l'instabilité d'une onde par interactions résonnantes est l'équation de Klein-Gordon non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -V'(u), \quad V(u) = \frac{u^2}{2} + \gamma u^4, \quad (9.6)$$

où $V'(u)$ est la dérivée du potentiel $V(u)$ et γ est un paramètre réel. Cette équation est une généralisation de l'équation classique des ondes linéaires, rencontrée dans de nombreux domaines de la physique (Whitham 1974, §14; Fauve 1998, §3; Peyrard & Dauxois 2004). Une équation voisine possédant une non-linéarité quadratique, $\partial_{tt}u + \partial_{xx}u + \partial_{xxxx}u + u = u^2$, est discutée par Drazin & Reid (2004, §51.2).

L'équation (9.6) correspond à une modélisation continue d'une chaîne de pendules (oscillateurs de Duffing) couplés élastiquement, schématisée sur la figure 9.5. Chaque oscillateur est constitué d'une masse m au bout d'une tige de longueur l articulée à son autre extrémité, dont la position angulaire est repérée par l'angle u . Chaque oscillateur oscille dans le potentiel de la gravité, $-mgl \cos u$, et il est couplé à ses deux plus proches voisins par un ressort de constante de torsion C . L'équation de son mouvement s'écrit donc

$$ml^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -mgl \sin u + C(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (9.7)$$

Dans la limite où les longueurs d'onde considérées sont grandes devant la distance entre deux oscillateurs, (9.7) se réduit à l'équation $\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = -\sin u$ (dite de Sine-Gordon), après un choix approprié des échelles de temps,

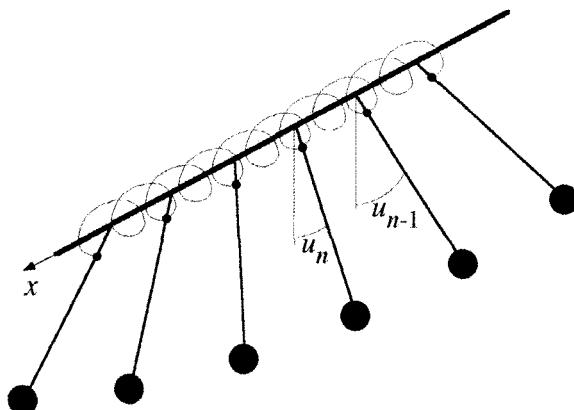


FIG. 9.5 – Chaîne de pendules couplés élastiquement.

de masse et de longueur. Pour des amplitudes petites, l'équation de Sine-Gordon correspond à celle de Klein-Gordon (9.6) avec $\gamma = -1/24$.

9.3.2 Onde non linéaire de Klein-Gordon

Relation de dispersion

Linéarisant (9.6) autour de la solution de base $u = 0$, et considérant les modes normaux $u \sim e^{i(kx - \omega t)}$, il vient la relation de dispersion

$$\omega^2 = 1 + k^2. \quad (9.8)$$

Cette relation montre que les perturbations se propagent avec une célérité $c = \omega/k$ dépendant du nombre d'onde : les ondes d'amplitude infinitésimale sont donc dispersives.

Équations d'amplitude

Recherchons une solution de type onde progressive¹ se propageant dans le sens des x croissant ($c = \omega/k > 0$), sous la forme d'une somme finie de composantes de Fourier d'amplitudes petites (Whitham 1974, §15.6) :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \epsilon \hat{u}_n(t) e^{ik_n x}, \quad (9.9)$$

avec

$$k_{-n} = -k_n, \quad \hat{u}_{-n} = \hat{u}_n^* = \mathcal{O}(1), \quad \epsilon \ll 1.$$

Reportant ce développement dans l'équation de Klein-Gordon (9.6), il vient, pour chaque composante de Fourier :

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} + \omega_n^2 \hat{u}_n = -\epsilon^2 \gamma \sum_{k_p + k_q + k_r = k_n} \hat{u}_p \hat{u}_q \hat{u}_r. \quad (9.10)$$

Le membre de droite correspond au couplage entre les modes de Fourier, et provient bien sûr de la non-linéarité cubique de l'équation initiale ; ce couplage, d'ordre ϵ^2 , est faible, et on peut donc attendre pour chaque mode de Fourier une solution non linéaire voisine de la solution linéaire en $e^{-i\omega_n t}$. Nous pouvons donc chercher $\hat{u}_n(t)$ sous la forme

$$\hat{u}_n(t) = A_n(t) e^{-i\omega_n t}, \quad (9.11)$$

avec

$$A_{-n} = A_n^* = \mathcal{O}(1), \quad \omega_n = \sqrt{1 + k_n^2} \quad \text{pour} \quad k_n > 0, \quad \omega_{-n} = -\omega_n,$$

1. Pour les solutions de type onde solitaire, voir Whitham (1974 §17.10) ; Fauve (1998 §3.2) ; Peyrard & Dauxois (2004 chapitre 2).

où la dépendance en temps de l'amplitude doit permettre de prendre en compte des effets non linéaires. Reportant (9.11) dans (9.10), il vient

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} - 2i\omega_n \frac{dA_n}{dt} = -\epsilon^2 \gamma \sum_{k_p+k_q+k_r=k_n} A_p A_q A_r e^{i(\omega_n - \omega_p - \omega_q - \omega_r)t}.$$

Cette équation montre que l'échelle de temps des interactions non linéaires est d'ordre ϵ^{-2} , ce qui suggère l'introduction de l'échelle de temps lente $T = \epsilon^2 t$ (noter l'analogie avec l'étude de l'oscillateur de Duffing). La dérivée seconde en temps apparaît alors comme un terme d'ordre ϵ^4 négligeable, et on en déduit l'équation d'amplitude du mode n :

$$\frac{dA_n}{dT} = -\frac{i\gamma}{2\omega_n} \sum_{k_p+k_q+k_r=k_n} A_p A_q A_r e^{i(\omega_n - \omega_p - \omega_q - \omega_r)T/\epsilon^2}. \quad (9.12)$$

Cette équation correspond à une interaction entre modes de Fourier dont les nombres d'ondes vérifient la condition $k_p + k_q + k_r = k_n$. Cette interaction conduit à des solutions remarquables en particulier lorsque l'argument de l'exponentielle est nul, c'est-à-dire lorsque les fréquences satisfont la *condition de résonance*

$$\omega_p + \omega_q + \omega_r = \omega_n. \quad (9.13)$$

Notons bien que, compte tenu de la relation de dispersion (9.8), les quadruplets de nombres d'onde qui satisfont $k_p + k_q + k_r = k_n$ et qui satisfont également la relation de résonance ci-dessus ne peuvent être qu'exceptionnels.

Onde non linéaire monochromatique

Considérons le cas simple et important de l'interaction résonnante d'une onde monochromatique, de nombre d'onde k_0 , avec elle-même (auto-interaction). La sommation dans (9.9) porte sur les deux nombres d'onde k_0 et $-k_0$. Parmi les 2^3 triplets $(\pm k_0, \pm k_0, \pm k_0)$, trois d'entre eux seulement satisfont la condition $k_p + k_q + k_r = k_0$ et la condition de résonance (9.13), à savoir $(k_0, k_0, -k_0)$, $(k_0, -k_0, k_0)$ et $(-k_0, k_0, k_0)$. L'équation d'amplitude (9.12) pour A_0 se réduit alors à

$$\frac{dA_0}{dT} = -i\beta A_0^2 A_0^*, \quad (9.14)$$

avec

$$\beta = \frac{3\gamma}{2\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{1 + k_0^2}.$$

La solution de cette équation est

$$A_0 = a_0 e^{-i\beta a_0^2 T}, \quad a_0 = \mathcal{O}(1) \text{ réel}, \quad (9.15)$$

soit, en revenant à la variable angulaire initiale $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \epsilon a_0 \cos(k_0 x - \omega t) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (9.16a)$$

$$\omega = \omega_0 + \beta(\epsilon a_0)^2, \quad (9.16b)$$

expression valide pour t d'ordre ϵ^{-2} .

Ainsi, la fréquence et la célérité de l'onde d'amplitude finie (9.16) sont modifiées par l'auto-interaction de l'onde due à la non-linéarité cubique de l'équation de Klein-Gordon, et dépendent maintenant de l'amplitude. On notera que la correction de fréquence est strictement identique à celle d'un simple oscillateur de Duffing ! Et que cette correction est très semblable au résultat (9.2-9.3) obtenu par Stokes pour les ondes de gravité. Un calcul plus complet incluant les harmoniques est proposé en exercice.

9.3.3 Instabilité d'une onde non linéaire monochromatique

Instabilité de l'onde (9.16) de Klein-Gordon

Considérons maintenant l'effet d'une perturbation de l'onde monochromatique (9.16) sous la forme de deux ondes de nombres d'onde $k_0 \pm \epsilon K$, $K = \mathcal{O}(1)$, voisins de k_0 , de pulsation ω_{\pm} , et d'amplitudes $|A_{\pm}| \ll |A_0|$. Ne retenant que les termes dominants, le système (9.12) se réduit à :

$$\frac{dA_0}{dT} = -i\beta A_0^2 A_0^*, \quad \beta = \frac{3\gamma}{2\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{1 + k_0^2}, \quad (9.17a)$$

$$\frac{dA_-}{dT} = -i\beta(2A_0 A_0^* A_- + A_0^2 A_+^* e^{i\Omega T}), \quad (9.17b)$$

$$\frac{dA_+}{dT} = -i\beta(2A_0 A_0^* A_+ + A_0^2 A_-^* e^{i\Omega T}), \quad (9.17c)$$

avec

$$\Omega = \frac{1}{\epsilon^2}(\omega_+ + \omega_- - 2\omega_0) \approx \omega_0'' K^2 = \mathcal{O}(1), \quad \omega_0'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_0) = \omega_0^{-3}.$$

L'équation (9.17a), identique à (9.14), décrit l'auto-interaction, et sa solution est donnée par (9.15) (l'effet sur A_0 des perturbations est d'ordre supérieur). Les équations (9.17b) et (9.17c) décrivent l'évolution de la perturbation : le premier terme des membres de droite correspond à la résonance exacte $\omega_{\pm} = \omega_0 - \omega_0 + \omega_{\pm}$, le second à une « presque-résonance ». Substituant la solution (9.15) dans (9.17b) et (9.17c), il vient

$$\frac{dA_-}{dT} = -i\beta a_0^2 \left(2A_- + A_+^* e^{i(\Omega - 2\beta a_0^2)T} \right), \quad (9.18a)$$

$$\frac{dA_+}{dT} = -i\beta a_0^2 \left(2A_+ + A_-^* e^{i(\Omega - 2\beta a_0^2)T} \right). \quad (9.18b)$$

Remplaçant (9.18b) par son complexe conjugué, on obtient un système linéaire en A_- et A_+^* , non autonome (il dépend explicitement du temps). Ce système peut être rendu autonome par le changement de variable $B_{\pm} = A_{\pm} e^{i\rho T}$ qui correspond à une rotation dans le plan complexe, et on obtient aisément par substitution que $\rho = \beta a_0^2 - \Omega/2$ répond au problème. Le système obtenu est

un problème aux valeurs propres qui admet des solutions de la forme $B \sim e^{\sigma T}$ pourvu que σ soit valeur propre, *i.e.* vérifie le polynôme caractéristique

$$\sigma^2 + \beta\omega_0'' a_0^2 K^2 + \frac{\omega_0''^2}{4} K^4 = 0, \quad (9.19)$$

où on a explicité $\Omega = \omega_0'' K^2$. Si $\beta\omega_0''$ est positif, les racines de ce polynôme sont imaginaires pures, et l'onde non linéaire (9.16) est linéairement stable. Si $\beta\omega_0''$ est négatif, les racines sont réelles de signe opposé pour K inférieur au nombre d'onde de coupure

$$K_{\text{off}} = 2a_0 \sqrt{-\frac{\beta}{\omega_0''}}, \quad (9.20)$$

et données par

$$\sigma_{\pm} = \pm\sigma_{\text{ref}} \sqrt{\frac{K^2}{K_{\text{off}}^2} - \frac{K^4}{K_{\text{off}}^4}}, \quad \sigma_{\text{ref}} = 2|\beta|a_0^2. \quad (9.21)$$

La perturbation associée à σ_+ croît et l'onde non linéaire (9.16) est linéairement instable.

Finalement, la condition d'instabilité est donc

$$\beta\omega_0'' < 0, \quad (9.22)$$

l'onde étant alors instable vis-à-vis des perturbations de nombre d'onde $k_0 \pm \epsilon K$ voisins de k_0 , tels que $K < K_{\text{off}}$.

La figure 9.6a montre les variations $\sigma^2/\sigma_{\text{ref}}^2$ avec K^2/K_{off}^2 dans les deux cas $\beta\omega_0'' < 0$ (instable) et $\beta\omega_0'' > 0$ (stable). La figure 9.6b montre, dans le cas instable, le taux de croissance normalisé $\sigma_{-r}/\sigma_{\text{ref}}$ et $\sigma_{+r}/\sigma_{\text{ref}}$ des deux modes, en fonction de K/K_{off} . On vérifie aisément à partir de (9.21) que les deux nombres d'onde les plus amplifiés sont

$$k_{\max} = k_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon K_{\text{off}}. \quad (9.23)$$

L'onde de Klein-Gordon, pour laquelle $\omega_0'' = \omega_0^{-3}$ et $\beta = 3\gamma/2\omega_0$, est donc stable si γ est positif et instable dans le cas contraire. La chaîne de pendules vérifiant $\gamma = -1/24$ est instable.

Retour sur l'instabilité de l'onde de Stokes

La condition d'instabilité (9.22), établie pour l'onde de Klein-Gordon (9.16), est en fait tout à fait générale : elle reste valide pour toute onde non linéaire discente, avec ω_0'' donné par la relation de dispersion des ondes d'amplitude infinitésimale, et β le coefficient de la correction non linéaire

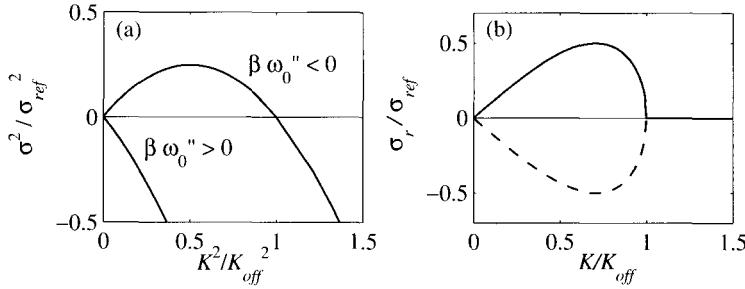


FIG. 9.6 – (a) Carré normalisé de la valeur propre correspondant à la relation de dispersion (9.19), fonction de K^2/K_{off}^2 ; (b) pour $\beta\omega_0'' < 0$, taux de croissance normalisé des deux modes, en fonction de K/K_{off} ; (—), σ_{+r} ; (- -), σ_{-r} .

$\beta(\epsilon a_0)^2$ de la pulsation. Pour une onde de gravité par exemple, on déduit de la relation de dispersion (9.3) des ondes d'amplitude finie, déterminée par Stokes :

$$\omega_0'' = -\frac{\omega_0}{4k_0^2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\omega_0 k_0^2.$$

La condition d'instabilité (9.22) s'écrit alors

$$(\epsilon K)^2 < 8k_0^4(\epsilon a_0)^2.$$

On retrouve exactement la condition d'instabilité (9.4) obtenue par Benjamin & Feir (1967) dans leur résolution du problème hydrodynamique ! Cette conclusion n'est pas fortuite, l'instabilité résultant d'une compétition entre dispersion linéaire et non-linéarité, cette dernière étant entièrement contenue dans la correction non linéaire de la pulsation de l'onde.

9.4 Instabilité vis-à-vis de modulations

L'instabilité de Benjamin-Feir d'une onde non linéaire, interprétée ci-dessus en termes d'interactions résonnantes, peut également s'interpréter comme une instabilité vis-à-vis de modulations de grande longueur d'onde (Stuart & DiPrima 1978). Cette interprétation s'appuie sur une équation qui gouverne l'enveloppe d'un *paquet d'ondes* quasi monochromatique, l'équation de Schrödinger non linéaire. L'évolution générale, linéaire puis non linéaire, d'un tel paquet d'ondes est tout d'abord étudiée, puis une illustration en est donnée à partir de la chaîne d'oscillateurs décrite précédemment.

9.4.1 Dynamique linéaire d'un paquet d'ondes : équation d'enveloppe

Reprendons l'étude de la propagation et la dispersion d'un paquet d'ondes étudiée au chapitre 3, dans la perspective d'une prise en compte d'effets non linéaires. Considérons une onde représentée par l'intégrale de Fourier

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega k t)} dk, \quad (9.24)$$

où $\omega = \omega(k)$ est une branche réelle la relation de dispersion correspondant à une propagation dans le sens des x croissant, vérifiant donc $\omega(-k) = -\omega(k)$ (par exemple pour une onde de gravité en eau profonde², $\omega = +\sqrt{gk}$ pour $k > 0$ et $\omega = -\sqrt{-gk}$ pour $k < 0$). Le caractère réel de $u(x, t)$ imposant alors $\hat{u}^*(k) = \hat{u}(-k)$, l'intégrale ci-dessus peut encore s'écrire

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + c.c. \quad (9.25)$$

Considérons maintenant que $u(x, t)$ est un paquet d'ondes de largeur δk , centré sur un nombre d'onde k_0 , *i.e.* que les amplitudes complexes $\hat{u}(k)$ ne sont non nulles que dans un voisinage étroit de k_0 (Lighthill 1978, §3.7; Whitham 1974, §17.7). Isolant l'onde monochromatique dominante, le paquet peut s'écrire

$$u(x, t) = \frac{1}{2} A(x, t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c., \quad (9.26)$$

où $\omega_0 = \omega(k_0)$, et où *l'enveloppe* $A(x, t)$ du paquet d'ondes est définie par

$$A(x, t) = \int_0^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(k - k_0)x - i(\omega(k) - \omega_0)t} dk. \quad (9.27)$$

Les amplitudes $\hat{u}(k)$ étant nulles en dehors d'un voisinage δk de k_0 , on peut limiter l'intégration à ce voisinage, où la pulsation $\omega(k)$ est donnée par un développement en série de Taylor autour de k_0 . Tronqué au second ordre, ce développement est

$$\omega - \omega_0 = c_g(k - k_0) + \frac{\omega''_0}{2}(k - k_0)^2 + \dots$$

où la vitesse de groupe c_g et le coefficient ω''_0 sont donnés par

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0), \quad \omega''_0 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_0).$$

2. Pour $k < 0$, la relation de dispersion est $\omega^2 = -gk$, car la solution bornée pour la fonction propre est, pour $y < 0$, proportionnelle à e^{-ky} ; sans ce signe « - » dans la relation de dispersion, un plan d'eau serait instable !

Substituant ce développement dans (9.27), on reconnaît alors la solution générale (somme continue de modes de Fourier) de l'équation d'enveloppe

$$i \partial_t A = -ic_g \partial_x A + \alpha \partial_{xx} A, \quad \alpha = \frac{1}{2} \omega_0''.$$
 (9.28)

Cette équation linéaire décrit donc génériquement l'évolution linéaire de l'enveloppe $A(x, t)$ d'un paquet d'ondes dispersives centré sur k_0 . Ce paquet se propage à la vitesse de groupe c_g , et du fait de la dispersion des nombres d'onde qui se propagent avec des vitesses légèrement différentes, la largeur du paquet croît linéairement en temps et son amplitude décroît en $1/\sqrt{t}$.

9.4.2 Dynamique non linéaire : l'équation de Schrödinger

Que peut-on maintenant attendre d'effets non linéaires sur la dispersion d'un paquet d'ondes ? Pour répondre à cette question, on peut rechercher le terme non linéaire dominant qui pourrait compléter l'équation d'enveloppe (9.28). Le type de ce terme peut être déduit de considérations de symétries (Fauve 1998). Supposons que le problème est invariant par les translations $x \rightarrow x + \xi$ et $t \rightarrow t + \tau$, comme l'est par exemple le problème de pendules couplés étudié précédemment ; alors si A est solution de l'équation d'amplitude, $Ae^{i\phi}$, qui correspond à une onde déphasée de ϕ , doit aussi être solution. L'équation doit donc être invariante par la transformation $A \rightarrow Ae^{i\phi}$, et le terme de plus bas degré possédant cette propriété, dominant pour $u(x, t)$ petit, est $|A|^2 A$. Dans un repère en translation à la vitesse de groupe c_g , l'équation d'enveloppe est donc l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i \partial_t A = \alpha \partial_{xx} A - \beta |A|^2 A.$$
 (9.29)

Si, de plus, le problème est invariant par les réflexions $x \rightarrow -x$ et $t \rightarrow -t$ (comme l'est encore le problème des pendules couplés), le coefficient β doit être réel. En effet, compte tenu de ces symétries, si $u(x, t)$ est solution, alors $u(-x, -t)$ doit aussi être solution (les deux symétries doivent être appliquées simultanément afin de conserver le sens de propagation de l'onde). Donc si $A(x, t)$ est solution de (9.29), $A^*(-x, -t)$ doit aussi être solution, compte tenu de (9.26). L'équation de Schrödinger (9.29) doit donc être invariante par les transformations $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$ et $A \rightarrow A^*$, et s'écrit alors

$$-i \partial_t A^* = \alpha \partial_{xx} A^* - \beta |A|^2 A^*.$$

Prenant le complexe conjugué de cette équation, on obtient alors (9.29) avec β^* à la place de β . On en déduit $\beta^* = \beta$, d'où β est réel. L'invocation des symétries ne permet cependant pas de déterminer le coefficient β , en particulier son signe dont dépend la stabilité de l'onde. Ce coefficient est déterminé ci-dessous dans le cas simple de l'équation de Klein-Gordon non linéaire.

On notera que l'équation de Schrödinger possède la même non-linéarité cubique que l'équation de Landau, et qu'à la place du terme d'amplification σA elle fait intervenir un terme de diffusion $\alpha \partial_{xx} A$ (au facteur i près).

L'équation de Schrödinger non linéaire (9.29) (souvent abrégée en équation NLS pour *NonLinear Schrödinger*) intervient dans de nombreux domaines de la physique (lignes électriques, fibres optiques, plasmas) et de la biologie (dynamique de l'ADN) (Peyrard & Dauxois 2004). Dans le cadre de l'hydrodynamique, cette équation a été établie pour la première fois par Benney et Newell (1967) pour décrire la dynamique faiblement non linéaire des modulations lentes des ondes de gravité en eau profonde. Ces auteurs ont en fait étudié un problème un peu plus général incluant des modulations dans la dimension d'espace transverse y , et montré que l'enveloppe $A(x, y, t)$ d'une onde de gravité quasi monochromatique est alors gouvernée par l'équation

$$i(\partial_t A + c_g \partial_x A) = \frac{\omega_0''}{2} (\partial_{xx} A - 2 \partial_{yy} A) - \beta |A|^2 A,$$

avec $c_g = c/2 = \omega_0/2k_0$, $\omega_0'' = -\omega_0/4k_0^2$ et $\beta = \omega_0 k_0^2/2$.

9.4.3 Stabilité d'une onde quasi monochromatique

L'équation de Schrödinger non linéaire (9.29) admet la solution spatialement uniforme

$$A_0 = a_0 e^{i(\Omega t + \Phi)}, \quad a_0 = |A_0| \text{ réel}, \quad \Omega = \beta a_0^2, \quad (9.30)$$

qui correspond à l'onde progressive non modulée

$$u(x, t) = a_0 \cos(k_0 x - \omega t + \Phi), \quad \omega = \omega_0 + \beta a_0^2, \quad (9.31)$$

où Φ est une phase indéterminée qui traduit l'invariance par translation du problème initial. Cette solution montre que l'équation de Schrödinger non linéaire décrit un phénomène remarquable : une non-linéarité, cubique en l'occurrence, peut contrecarrer la dispersion, de façon à maintenir une onde se propageant sans se déformer. Ce résultat, que Stokes avait obtenu dans le cas particulier des ondes de gravité, est donc très général, et concerne toutes les ondes dispersives d'amplitude finie décrites génériquement (pour les mêmes symétries) par l'équation de Schrödinger. Notons que cette équation admet aussi des solutions localisées qui ne seront pas discutées ici (Fauve 1998, Peyrard & Dauxois 2004).

Pour étudier la stabilité de cette onde, perturbons la solution A_0 sous la forme

$$A(x, t) = (a_0 + a(x, t)) e^{i(\Omega t + \Phi + \varphi(x, t))}, \quad (9.32)$$

et substituons cette expression dans l'équation (9.29). Après linéarisation et séparation des parties réelle et imaginaire, il vient

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \alpha a_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (9.33a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\beta a_0 a - \frac{\alpha}{a_0} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}. \quad (9.33b)$$

Ce système linéaire à coefficients constants admet des solutions de la forme $e^{\sigma t - ipx}$, si son déterminant est nul, c'est-à-dire si p et σ satisfont la relation de dispersion

$$\sigma^2 + 2\alpha\beta a_0^2 p^2 + \alpha^2 p^4 = 0. \quad (9.34)$$

Cette relation de dispersion est très semblable à la relation (9.19) obtenue pour les interactions résonantes. Si α et β sont de même signe ($\alpha\beta > 0$), les racines σ_{\pm} de cette équation sont imaginaires et le taux de croissance σ_r est nul ; l'onde progressive est alors stable, la non-linéarité contrebalançant la dispersion. Dans le cas contraire ($\alpha\beta < 0$), les racines sont imaginaires pures pour $p^2 > p_{\text{off}}^2$, où $p_{\text{off}} = -2\beta/\alpha a_0^2$ est un nombre d'onde de coupure, et réelles et de signe opposé pour $p^2 < p_{\text{off}}^2$:

$$\sigma_{\pm} = \pm \sigma_{\text{ref}} \sqrt{\frac{p^2}{p_{\text{off}}^2} \left(1 - \frac{p^2}{p_{\text{off}}^2}\right)}, \quad \sigma_{\text{ref}} = 2|\beta|a_0^2. \quad (9.35)$$

La racine positive correspond à une instabilité de l'onde vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde de son enveloppe ; cette instabilité se manifeste par la croissance d'une modulation semblable à celle montrée sur la figure 9.2.

La figure 9.7a, identique à la figure 9.6a, montre $\sigma^2/\sigma_{\text{ref}}^2$ fonction de p^2/p_{off}^2 dans les deux cas stable et instable. La figure 9.7b, très semblable à la figure 9.6b (elle inclut les p négatifs), montre les taux de croissance normalisés des deux modes, $\sigma_{-r}/\sigma_{\text{ref}}$ et $\sigma_{+r}/\sigma_{\text{ref}}$, en fonction du nombre d'onde normalisé p/p_{off} . On vérifie aisément à partir de (9.34) que les deux nombres d'onde les plus amplifiés sont

$$p_{\max} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} p_{\text{off}}. \quad (9.36)$$

Le fait que la discussion ci-dessus soit très proche de celle sur les interactions résonnantes est lié au fait que les relations de dispersion (9.19) et (9.34) sont identiques si on identifie (i) K dans (9.19) et p (9.34), et (ii) le coefficient β de la non-linéarité cubique de l'équation (9.14) avec celui de l'équation de Schrödinger (9.29) (avec aussi $\alpha = \omega_0''/2$). Cette identification s'éclairera dans la section suivante où on établit l'équation de Schrödinger pour l'onde de Klein-Gordon. Finalement, on peut résumer la situation comme suit :

- la dynamique d'une onde dispersive d'amplitude finie est gouvernée géneriquement par l'équation de Schrödinger non linéaire ;

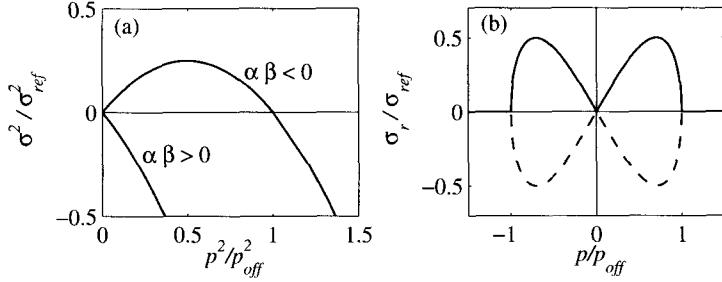


FIG. 9.7 – (a) Carré normalisé de la valeur propre correspondant à la relation de dispersion (9.34), fonction de p^2/p_{off}^2 ; (b) pour $\alpha\beta < 0$, taux de croissance normalisé des deux modes, en fonction de p/p_{off} ; (—), σ_{+r} ; (- -), σ_{-r} .

- lorsque la dispersion et la non-linéarité coopèrent ($\alpha\beta < 0$), cette onde est instable vis-à-vis de modulations de grande longueur d'onde;
- cette instabilité est identique à l'instabilité par résonance avec des perturbations de nombres d'onde voisins découverte par Benjamin & Feir.

9.4.4 Interprétation en termes d'instabilité de phase

Nous montrons très brièvement ici comment l'instabilité de Benjamin-Feir peut s'interpréter en termes de dynamique de la phase. Dérivant par rapport au temps l'équation de la perturbation de phase (9.33b), et y substituant l'équation de la perturbation d'amplitude (9.33a), il vient *l'équation de phase*

$$\partial_{tt}\varphi - 2\alpha\beta a_0^2 \partial_{xx}\varphi + \alpha^2 \partial_{xxxx}\varphi = 0.$$

Cette équation est une équation d'onde classique, complétée par un terme d'ordre quatre. À ce terme près, les solutions de cette équation sont des ondes propagatives de la forme $\varphi = \varphi(x \pm ct)$, pourvu que $c^2 = 2\alpha\beta a_0^2$ soit positif. Il apparaît donc que la condition d'instabilité $\alpha\beta < 0$ correspond à une vitesse imaginaire de propagation des perturbations de phase. Pour une présentation plus large des instabilités de phase, nous renvoyons à Manneville (1991).

9.4.5 Dérivation de l'équation NLS pour l'onde de Klein-Gordon

Pour la chaîne d'oscillateurs décrite par la figure 9.5 et modélisée par l'équation de Klein-Gordon (9.6), les coefficients des termes linéaires de l'équation de Schrödinger sont connus par la relation de dispersion (9.8) :

$$c_g(k_0) = \omega'_0 = \frac{k_0}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{\omega''_0}{2} = \frac{1}{2\omega_0^3}.$$

Il s'agit ici de déterminer le terme non linéaire dominant de cette équation d'enveloppe, ce qui peut se faire par la méthode des échelles multiples. Soit $\epsilon = \delta k/k_0 \ll 1$ la largeur relative du paquet d'ondes. Dans un repère en translation à la vitesse de groupe c_g , deux modes de Fourier dont les nombres d'onde diffèrent de δk ont des célérités dont la différence relative $\delta c/c$ est d'ordre $\delta k/k_0$. Cette dispersion engendre une différence de parcours de l'ordre d'une longueur d'onde sur un temps d'ordre $(k_0 \delta c)^{-1} = (\epsilon \omega_0)^{-1}$, après une distance parcourue d'ordre $c/k_0 \delta c = (\epsilon k_0)^{-1}$. Les effets dispersifs se manifestent donc sur des temps d'ordre $T_1 = \epsilon t = \mathcal{O}(1)$ et sur des distances d'ordre $X = \epsilon x = \mathcal{O}(1)$. D'autre part, il s'avère que les effets non linéaires se manifestent sur des temps plus grands encore, d'ordre $T_2 = \epsilon^2 t$. On pose donc

$$u(x, t) = u(x, t, X, T_1, T_2), \quad (9.37)$$

et on cherche u sous la forme d'un développement en puissances de ϵ :

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (9.38)$$

Les calculs ne posant aucune difficulté particulière, on n'en donne ici que les grandes lignes. À l'ordre ϵ , on trouve pour la solution se propageant dans le sens des x positifs :

$$u_1 = \frac{1}{2} A(X, T_1, T_2) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c. \quad (9.39)$$

où $\omega_0 = \omega(k_0)$ est donné par la relation de dispersion. À l'ordre ϵ^2 , la condition de solvabilité s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -c_g \frac{\partial A}{\partial X}, \quad c_g = c_g(k_0) = \frac{k_0}{\omega_0}, \quad (9.40)$$

dont la solution est

$$A(X, T_1, T_2) = A(X - c_g T_1, T_2). \quad (9.41)$$

L'interprétation de ce résultat est qu'à l'ordre considéré, l'enveloppe de l'onde se propage à la vitesse de groupe sans se déformer.

À l'ordre ϵ^3 , la condition de solvabilité donne l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i \frac{\partial A}{\partial T_2} = \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - \beta |A|^2 A, \quad \alpha = \frac{\omega_0''}{2} = \frac{1}{2\omega_0^3}, \quad \beta = \frac{3\gamma}{2\omega_0}. \quad (9.42)$$

Cette équation est identique à l'équation de Schrödinger non linéaire (9.29), à la définition des échelles de longueur et de temps près, et le coefficient β trouvé est bien identique au coefficient β de l'équation (9.14). Cette équation admet la solution (9.30), qui correspond bien à l'onde non linéaire (9.16). Compte tenu des résultats de stabilité obtenus dans la section 9.4.3, on peut conclure que l'onde non linéaire solution de l'équation de Klein-Gordon (9.6) est instable pour $\alpha\beta$ négatif, ce qui est le cas de la chaîne de pendules. Ces conclusions sont naturellement identiques à celles tirées de l'analyse en termes d'interactions résonantes.

9.5 Retour sur les résonances

L'instabilité de Benjamin-Feir d'une onde de gravité vis-à-vis de nombres d'onde voisins (l'anglais donne l'expression plus compacte « *side-band instability* ») est un cas particulier d'instabilités résultant de l'interaction résonnante entre des nombres d'ondes quelconques. Nous concluons ce chapitre en donnant un exemple d'une telle interaction, liée à une non-linéarité quadratique, celui des ondes de capillarité-gravité. Une illustration simple de ces résonances est traitée complètement dans (Drazin & Reid 2004, §51) pour un pendule double. Pour une présentation plus approfondie de ce problème, éclairci au début des années 1960 notamment par Phillips et Benney, voir les articles de revue de Phillips (1981), Hammack & Henderson (1993) et Dias & Kharif (1999).

Considérons donc un problème faisant intervenir une non-linéarité quadratique, et une solution $u(x, t)$ de ce problème donnée par la somme de Fourier

$$u(x, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i(k_j x - \omega(k_j)t)}, \quad A_j = A(k_j). \quad (9.43)$$

Dans l'équation de l'amplitude A_n , la non-linéarité quadratique va faire apparaître une sommation

$$\sum_{k_p+k_q=k_n} A_p A_q e^{i(\omega_n - \omega_p - \omega_q)t}, \quad (9.44)$$

analogue à la sommation dans l'équation (9.12). Si la triade de nombres d'onde vérifiant $k_p + k_q = k_n$ est telle que les fréquences satisfont la condition

$$\omega_n = \omega_p + \omega_q, \quad (9.45)$$

on dit que la triade est résonnante. Une telle résonance n'implique pas nécessairement l'apparition d'une instabilité, mais elle y est très favorable.

Pour les ondes de capillarité-gravité, la relation de dispersion est donnée par

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma k^3}{\rho},$$

où ρ est la masse volumique du fluide et γ est la tension interfaciale. La condition de résonance (9.45) est satisfaite pour les triades de nombres d'onde $k_3 = k_1 + k_2$ dont le rapport $r = k_2/k_1$ satisfait la relation (McGoldrick 1965, Craik 1985 chapitre 5)

$$\Gamma = \frac{(1+r^2) + (1+r)(1+7r+r^2)^{1/2}}{r(9+14r+9r^2)},$$

où $\Gamma = \gamma k_1^2 / 2\rho g$. Cette équation peut être arrangée comme un polynôme cubique en r , dont les coefficients dépendent de Γ . Une solution simple pour

$\Gamma = 1/4$ (soit $\lambda_1 = 2,4$ cm dans l'eau) est $r = 1$, ce qui correspond à la triade

$$k_1 = k_2 = -k_3/2.$$

Ainsi, une onde de capillarité-gravité peut être instable du fait de son interaction avec elle-même et avec une onde de nombre d'onde moitié : cette résonance est dite *sous-harmonique*. Dans un fluide stratifié, de telles résonances de triades peuvent également survenir entre deux ondes de surface et une onde interne.

Notons que si les ondes peuvent se propager dans plus d'une direction d'espace, la condition sur les nombres d'onde $k_p + k_q = k_n$ devient une condition sur les vecteurs d'onde

$$\mathbf{k}_n + \mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q = \mathbf{0},$$

et la condition de résonance est alors moins restrictive ; cette situation est donc plus favorable à l'apparition de résonances.

Pour des ondes de gravité, la relation de dispersion interdit toute résonance de triades ; pour des ondes de faible cambrure $\epsilon = ka$, aucune interaction résonante n'apparaît donc à l'ordre ϵ^2 dominant. Les interactions résonantes apparaissent entre quadruplets à l'ordre de perturbation ϵ^3 suivant. En particulier, l'interaction des nombres d'onde

$$k, \quad k, \quad -k(1 + \epsilon), \quad -k(1 - \epsilon),$$

dont les fréquences sont respectivement

$$\omega, \quad \omega, \quad -\omega(1 + \frac{1}{2}\epsilon), \quad -\omega(1 - \frac{1}{2}\epsilon),$$

correspond à l'instabilité de Benjamin-Feir.

9.6 Exercices

9.6.1 Onde non linéaire incluant un harmonique (1)

On considère une onde $u(x, t)$ régie par l'équation de Klein-Gordon (9.6), d'amplitude petite d'ordre ϵ , composée d'un fondamental k_1 d'amplitude ϵA_1 , et de son premier harmonique $k_2 = 2k_1$ d'amplitude ϵA_2 .

- La sommation dans (9.9) porte sur les quatre nombres d'onde $\pm k_1$ et $\pm k_2$. Montrer que parmi les 4^3 produits cubiques possibles de nombres d'onde, les triplets (k_p, k_q, k_r) vérifiant $k_1 = k_p + k_q + k_r$ sont au nombre de neuf, qu'ils sont tous résonnantes, et qu'il en est de même pour les triplets vérifiant $k_2 = k_p + k_q + k_r$. En déduire le système d'équations d'amplitude

$$\frac{dA_1}{dT} = -i\beta A_1^2 A_1^* - 2i\beta A_2 A_2^* A_1, \quad (9.46a)$$

$$\frac{dA_2}{dT} = -i\beta A_2^2 A_2^* - 2i\beta A_1 A_1^* A_2, \quad (9.46b)$$

avec

$$\beta = \frac{3\gamma}{2\omega_{10}}, \quad \omega_{10} = \sqrt{1 + k_1^2}.$$

2. Vérifier que ce système n'admet pas de solution non nulle indépendante du temps.
3. Trouver une solution pour $|A_2| \sim \epsilon|A_1|$, et en déduire la solution pour $u(x, t)$ (Craik 1985, p. 177) :

$$u(x, t) = \epsilon a_1 \cos \theta + \epsilon^2 a_2 \cos(2\theta - k_2(c_1 - c_2)t) + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

avec

$$\theta = k_1 x - \omega_{10} t, \quad \omega_1 = \omega_{10} + \beta \epsilon^2 a_1^2, \quad c_j = \omega_j/k_j, \quad a_j = \mathcal{O}(1), \quad j = 1, 2.$$

La correction non linéaire de la fréquence est-elle affectée par l'harmonique ? Quelle condition devrait satisfaire la relation de dispersion pour que l'onde se propage sans se déformer ? Cette condition peut-elle être satisfaite ici ?

4. On peut trouver une solution au système différentiel (9.46) pour des amplitudes du même ordre de grandeur, $|A_2| \sim |A_1| \sim \epsilon$, en séparant module et phase ; les conclusions sont les mêmes. On peut également reprendre l'exercice avec les nombres d'onde k_1 et $k_3 = 3k_1$; les conclusions sont-elles les mêmes ?

9.6.2 Onde non linéaire incluant un harmonique (2)

Comme le montre l'exercice précédent, supposer que les amplitudes varient lentement ne peut conduire qu'à une correction petite, d'ordre ϵ^2 , de la fréquence et de la célérité des modes de Fourier. On ne peut alors pas construire d'onde de Stokes incluant des harmoniques et se propageant sans se déformer, sauf cas particulier d'une résonance sous-harmonique où les harmoniques auraient la même célérité³. Le présent exercice montre comment construire une onde non linéaire en « verrouillant » au départ les célérités des harmoniques.

1. On cherche une solution non linéaire de l'équation de Klein-Gordon (9.6) sous la forme « naïve »

$$u = \epsilon u_1(\theta) + \epsilon^3 u_3(3\theta) + \dots, \quad \theta = kx - \omega(k)t.$$

où $\omega(k)$ est une branche de solutions de la relation de dispersion. Montrer que le système d'équations obtenu est

$$Lu_1 = 0, \tag{9.47a}$$

$$Lu_3 = -4\gamma u_1^3, \tag{9.47b}$$

où l'opérateur L est défini par $L = (\omega^2 - k^2)\partial_{\theta\theta} + 1$. En déduire que la solution à l'ordre ϵ^3 fait apparaître un terme séculaire (non borné) en $\theta e^{i\theta}$ (il s'agit du même problème que celui rencontré dans la résolution « naïve » de l'oscillateur de Duffing, voir chapitre 8).

3. Une telle résonance survient par exemple dans les ondes de capillarité-gravité de Kelvin-Helmholtz pour la triade $(k, k, k/2)$, voir l'exercice 4.5.1 du chapitre 4, ainsi que Nayfeh & Saric (1972) et Craik (1985, §14 et §19).

2. La difficulté rencontrée ci-dessus, l'apparition d'un terme séculaire, est due au fait qu'on recherchait une onde non linéaire de fréquence donnée par la relation de dispersion linéaire. Pour résoudre la difficulté, on relaxe la fréquence de l'onde en posant $\omega = \omega_0 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots$ qui introduit une correction inconnue ω_2 . Montrer que le système d'équations à résoudre est maintenant

$$Lu_1 = 0, \quad (9.48a)$$

$$Lu_3 = -4\gamma u_1^3 - 2\omega_0 \omega_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2}. \quad (9.48b)$$

3. Montrer que la solution à l'ordre ϵ est

$$u_1 = \frac{1}{2} A_1 e^{i\theta} + c.c., \quad \theta = kx - \omega_0 t,$$

et que la condition de solvabilité à l'ordre ϵ^3 entraîne

$$\omega_2 = \frac{3\gamma}{2\omega_0} a^2, \quad a = |A_1|.$$

En déduire que la solution est donnée par :

$$u(x, t) = \epsilon a \cos \theta + \frac{\gamma}{8} (\epsilon a)^3 \cos 3\theta + \mathcal{O}(\epsilon^5), \quad \omega = \omega_0 + \frac{3\gamma}{2\omega_0} (\epsilon a)^2.$$

On remarquera que la correction de fréquence obtenue est identique à la correction (9.16b), obtenue pour une onde monochromatique par la résolution de l'équation d'amplitude (9.12), et identique également à la correction (9.42) obtenue par le calcul du terme cubique de l'équation de Schrödinger pour l'enveloppe d'un paquet d'ondes.

9.6.3 Onde non linéaire de Korteweg-de Vries

On considère l'équation de Korteweg-de Vries (Boussinesq 1871 ; Korteweg & de Vries 1895 ; Miles 1981), qui gouverne la dynamique des ondes de gravité de longueur d'onde grande devant la profondeur h ($kh \ll 1$) (Whitham 1974, §13.12-13) :

$$\partial_t \eta + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h} \right) \partial_x \eta + \gamma \partial_{xxx} \eta = 0, \quad (9.49)$$

avec

$$c_0 = \sqrt{gh}, \quad \gamma = \frac{1}{6} c_0 h^2.$$

(Le calcul de Stokes (1847) correspond à la limite opposée, $kh \gg 1$.) Pour une onde d'amplitude a et de nombre d'onde k , les effets non linéaires sont d'ordre $c_0/h \eta \partial_x \eta \sim c_0 kh(a/h)^2$ et la dispersion est d'ordre $c_0 h^2 \partial_{xxx} \eta \sim c_0 h^3 k^3 a/h$. Lorsque ces deux effets sont du même ordre, soit $a/h \sim k^2 h^2$, l'équation ci-dessus admet des solutions localisées de type « onde solitaire ». Les ondes d'amplitude finie recherchées ici peuvent s'obtenir par un développement en puissances de $\epsilon = a/h$, avec $a/h \ll k^2 h^2$.

Par la même méthode qu'à l'exercice précédent, on cherche donc une solution sous la forme

$$\frac{\eta}{h} = \epsilon \eta_1(\theta) + \epsilon^2 \eta_2(2\theta) + \dots,$$

avec

$$\theta = kx - \omega t, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots, \quad \omega_0 = c_0k - \gamma k^3.$$

(La première correction non linéaire est d'ordre ϵ^2 car la non-linéarité dans l'équation est quadratique.)

1. Montrer qu'il n'y a pas de résonance à l'ordre ϵ^2 , qu'on peut donc poser $\omega_1 = 0$, et que la condition de non-résonance (ou de solvabilité) à l'ordre ϵ^3 s'écrit

$$\omega_2 = \frac{3c_0^2}{32\gamma k}.$$

2. En déduire la solution suivante

$$\frac{\eta}{h} = \epsilon \cos \theta + \frac{3\epsilon^2}{4k^2 h^2} \cos 2\theta + \frac{27\epsilon^3}{64k^4 h^4} \cos 3\theta + \dots, \quad (9.50)$$

avec

$$\omega = \omega_0 + \frac{9\epsilon^2}{16k^2 h^2}.$$

Chapitre 10

Dynamique non linéaire des systèmes dissipatifs

10.1 Introduction

Comme discuté dans les premiers chapitres, un système physique dissipatif dans un état stationnaire et uniforme peut devenir linéairement instable lorsqu'un paramètre de contrôle R excède une valeur critique R_c ; il s'agit par exemple de l'instabilité d'une couche fluide chauffée par le bas, gouvernée par le nombre de Rayleigh, ou de l'instabilité de l'écoulement de Poiseuille plan, gouvernée par le nombre de Reynolds. L'instabilité peut se manifester par l'apparition d'une structure spatialement périodique stationnaire (les rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard par exemple) ou d'une onde propagative (les ondes de Tollmien-Schlichting). Ce type de situation a été étudié au chapitre 8 pour des systèmes spatialement *confinés* où la dynamique peut être réduite à un système différentiel pour les amplitudes des harmoniques. Lorsque le système physique est *spatialement étendu*, c'est-à-dire lorsque sa dimension est grande devant la longueur d'onde de la structure périodique, le spectre des nombres d'onde tend à devenir continu, et des modulations spatiales des amplitudes peuvent se manifester; le formalisme approprié à la description de ces modulations est celui des *équations d'enveloppe*.

Dans ce chapitre, nous présentons ce formalisme, étudions les conditions de saturation de l'instabilité primaire, ainsi que les instabilités secondaires qui se manifestent lorsque le paramètre de bifurcation excède un second seuil. On étudie d'abord le cas où la structure périodique est stationnaire, c'est-à-dire où, au seuil $R = R_c$, la valeur propre du système linéarisé traversant l'axe imaginaire est *réelle*, *i.e.* la bifurcation est du type nœud-col, ou fourche pour un système présentant la symétrie de réflexion $x \rightarrow -x$; l'instabilité secondaire typique de cette dernière situation est l'instabilité d'Eckhaus rencontrée en particulier dans la convection de Rayleigh-Bénard et l'écoulement de Couette-Taylor. On présente ensuite le cas des ondes correspondant à une

bifurcation de Hopf (valeur propre complexe) ; on retrouve là l'instabilité de Benjamin-Feir d'une part, et les ondes de Tollmien-Schlichting d'autre part. La dernière section est consacrée au cas où, du fait d'une symétrie particulière, le nombre d'onde $k = 0$ est neutre ; de ce fait, la dynamique du mode de nombre d'onde k_c fini, marginal au seuil $R = R_c$, est fortement influencée par le couplage avec des perturbations de grande longueur d'onde presque neutres.

10.2 Dynamique faiblement non linéaire

10.2.1 Évolution linéaire d'un paquet d'ondes

Considérons la situation où, pour une valeur critique R_c d'un paramètre de bifurcation R , apparaît une instabilité de nombre d'onde k_c fini et de célérité et vitesse de groupe nulle ($\omega = \partial\omega/\partial k = 0$ au voisinage de k_c au moins), correspondant à une instabilité absolue.

Pour $r = R/R_c$ voisin de $r_c = 1$, c'est-à-dire pour

$$\epsilon^2 = r - r_c \ll 1, \quad (10.1)$$

le taux de croissance $\sigma(k, r)$ au voisinage de k_c a alors l'allure présentée sur la figure 10.1a. Développons ce taux de croissance en série de Taylor au voisinage du point critique (k_c, r_c) (en supposant qu'un tel développement existe) :

$$\sigma(k, r) = \sigma(k_c, r_c) + \frac{\partial\sigma}{\partial k}(k - k_c) + \frac{\partial\sigma}{\partial r}(r - r_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}(k - k_c)^2 + \dots \quad (10.2)$$

où les dérivées sont évaluées au point critique (k_c, r_c) . Il apparaîtra ci-dessous que les termes quadratiques omis, $(r - r_c)^2$ et $(k - k_c)(r - r_c)$, sont d'un ordre de grandeur inférieurs au terme $(k - k_c)^2$ conservé. Pour $r = r_c$, le taux de croissance $\sigma(k_c, r_c)$ est nul, et la courbe $\sigma(k)$ étant tangente à l'axe k , le terme $\partial\sigma/\partial k$ est nul également. L'équation ci-dessus se réduit donc à

$$\tau_c \sigma(k, r) = (r - r_c) - \xi_c^2 (k - k_c)^2 + \dots, \quad (10.3)$$

où τ_c et ξ_c sont des échelles caractéristiques de temps et de longueur définies par

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{\partial\sigma}{\partial r}, \quad \frac{\xi_c^2}{\tau_c} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2\sigma}{\partial k^2}.$$

Dans le plan (k, r) , la courbe de stabilité marginale, définie par $\sigma(k, r) = 0$, est donc donnée par la parabole

$$r - r_c = \xi_c^2 (k - k_c)^2,$$

représentée sur la figure 10.1b. Pour $r > r_c$, les nombres d'onde à l'intérieur de la parabole sont instables, et pour $\epsilon^2 = r - r_c$ donné, ils forment une bande

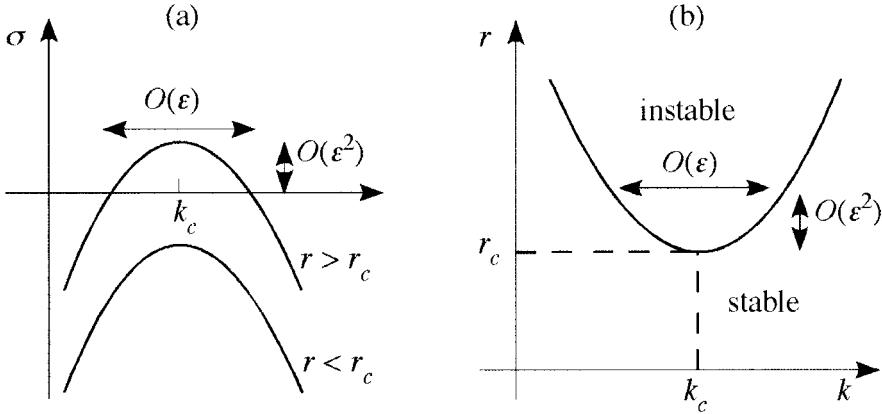


FIG. 10.1 – (a) Taux de croissance $\sigma(k)$ au-dessous et au-dessus du seuil $r = r_c$; (b) parabole de stabilité marginale $\sigma = 0$.

dont la largeur est d'ordre ϵk_c ; les termes omis dans (10.3) sont donc au moins d'ordre ϵ^3 .

Considérons maintenant une perturbation de l'état de base, représentée comme au chapitre précédent par l'intégrale de Fourier

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \hat{u}(k) e^{ikx + \sigma(k)t} dk + c.c. \quad (10.4)$$

où *c.c.* désigne le complexe conjugué. La perturbation peut s'écrire sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(x, t) e^{ik_c x} + c.c., \quad (10.5)$$

où l'enveloppe $\mathcal{A}(x, t)$ du paquet d'ondes est définie par

$$\mathcal{A}(x, t) = \int_0^{+\infty} \hat{u}(k) e^{i(k - k_c)x + \sigma(k)t} dk. \quad (10.6)$$

Cette intégrale est dominée par les nombres d'onde voisins de k_c (les autres modes sont amortis exponentiellement), pour lesquels on peut substituer à $\sigma(k)$ le développement en série de Taylor (10.3). On reconnaît alors la solution générale de l'équation d'enveloppe

$$\tau_c \partial_t \mathcal{A} = (r - r_c) \mathcal{A} + \xi_c^2 \partial_{xx} \mathcal{A}. \quad (10.7)$$

Cette équation décrit l'évolution linéaire de l'enveloppe d'un paquet d'ondes instable au voisinage de la stabilité marginale. Le premier terme du membre de droite correspond à l'amplification exponentielle de l'enveloppe, et le second, à la diffusion de cette enveloppe. La longueur ξ_c apparaît donc comme

une longueur caractéristique de cette diffusion pendant le temps τ_c . Cette équation, à coefficients réels, semble proche de l'équation gouvernant l'enveloppe d'un paquet d'ondes dispersives établie (par la même méthode) au chapitre précédent; elle en diffère en fait assez fortement : elle comporte un terme d'amplification, et la dérivée spatiale correspondante est un terme de diffusion du paquet d'ondes, et non de dispersion.

10.2.2 Effets faiblement non linéaires : équation de Ginzburg-Landau

Comme pour les ondes dispersives du chapitre précédent, on peut chercher à introduire dans (10.7) le terme non linéaire dominant par des considérations de symétrie. Pour un système invariant par translation en temps et en espace, l'équation doit être invariante par les rotations de \mathcal{A} dans le plan complexe, et le terme dominant doit donc être un terme cubique de la forme $|\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}$ (voir chapitre précédent). L'équation d'enveloppe (10.7) devient

$$\tau_c \partial_t \mathcal{A} = (r - r_c) \mathcal{A} + \xi_c^2 \partial_{xx} \mathcal{A} - \kappa |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}, \quad (10.8)$$

où le coefficient de Landau κ doit être réel. Cette équation, dite de Newell-Whitehead-Segel (Newell & Whitehead 1969, Segel 1969), ou plus communément appelée *équation Ginzburg-Landau*¹, gouverne donc la dynamique faiblement non linéaire de l'enveloppe d'un paquet d'ondes instables au voisinage de la stabilité marginale. Elle généralise l'équation de Landau-Stuart en autorisant des modulations spatiales de l'enveloppe. Nous considérons ici le cas $\kappa > 0$, pour lequel le terme non linéaire contrecarre la croissance exponentielle, et donne lieu à une bifurcation supercritique pour $r = r_c$ ($\epsilon = 0$).

Sur quelles échelles les différents termes de l'équation (10.8) sont-ils du même ordre de grandeur, soit

$$\tau_c \partial_t \sim (r - r_c) \sim \xi_c^2 \partial_{xx} \sim \kappa |\mathcal{A}|^2 ?$$

Pour $r > r_c$, l'instabilité se manifeste au bout d'un temps de l'ordre de l'inverse du taux de croissance, c'est-à-dire pour $t/\tau_c \sim 1/(r - r_c)$; par ailleurs, on doit attendre des modulations spatiales sur une échelle de l'ordre de l'inverse de la largeur du paquet d'ondes, soit pour $x/\xi_c \sim 1/\sqrt{r - r_c}$. Enfin, pour que le terme non linéaire soit du même ordre de grandeur que les autres, l'amplitude de l'enveloppe doit être d'ordre $\epsilon = \sqrt{r - r_c}$. Les échelles répondant à la question sont donc

$$T = \epsilon^2 \frac{t}{\tau_c} = \mathcal{O}(1), \quad (10.9a)$$

$$X = \epsilon \frac{x}{\xi_c} = \mathcal{O}(1), \quad (10.9b)$$

$$A = \frac{\sqrt{\kappa}}{\epsilon} \mathcal{A} = \mathcal{O}(1). \quad (10.9c)$$

1. Voir la note historique dans Newell, Passot & Lega (1993), p. 403.

Avec ces échelles, l'équation de Ginzburg-Landau se met alors sous la forme normalisée

$$\partial_T A = A + \partial_{XX} A - |A|^2 A. \quad (10.10)$$

Notons que l'équation ci-dessus a l'avantage de ne dépendre d'aucun paramètre, mais au prix d'un changement d'échelle qui dépend de la distance au seuil *via* le petit paramètre $\epsilon = \sqrt{r - r_c}$, et même diverge au seuil. Afin d'éviter cette divergence, on préfère parfois introduire un changement d'échelle *indépendant* de la distance au seuil, en écrivant cette distance $r - r_c = \mu\epsilon^2$, où $\epsilon \ll 1$ est un petit paramètre formel fixé et $\mu = \mathcal{O}(1)$ est une mesure de la distance au seuil. L'équation de Ginzburg-Landau s'écrit alors sous la forme suivante qui dépend du paramètre de bifurcation μ :

$$\partial_T A = \mu A + \partial_{XX} A - |A|^2 A. \quad (10.11)$$

L'équation (10.8) peut être généralisée sans difficulté, au moins formellement, pour prendre en compte des modulations dans une direction transversale y ; elle devient alors

$$\tau_c \partial_T \mathcal{A} = (r - r_c) \mathcal{A} + \xi_c^2 \left(\partial_{XX} + \frac{1}{2ik_c} \partial_{YY} \right) \mathcal{A} - \kappa |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}. \quad (10.12)$$

Pour la convection de Rayleigh-Bénard, la détermination du coefficient de Landau κ (le point dur du problème) a été faite par Newell & Whitehead (1969) et Segel (1969).

10.2.3 Exemple de dérivation de l'équation de Ginzburg-Landau

L'équation-modèle de Swift & Hohenberg permet d'obtenir l'équation de Ginzburg-Landau assez simplement (Swift & Hohenberg 1977). Dans le contexte de la convection de Rayleigh-Bénard, la partie linéaire de cette équation est issue des équations de Boussinesq, la partie non linéaire prenant en compte l'advection de façon plus heuristique. Une version unidimensionnelle cette équation-modèle s'écrit

$$\tau_c \partial_t u = (r - r_c) u - \xi^4 (\partial_x^2 + k_c^2)^2 u - \gamma u \partial_x u. \quad (10.13)$$

L'état de base $u_0 = 0$, linéairement stable pour $r < r_c$, subit une bifurcation pour $r = r_c$ vis-à-vis du mode marginal de nombre d'onde k_c . Au voisinage du seuil, le taux de croissance est donné par la relation de dispersion

$$\tau_c \sigma = (r - r_c) - \xi^4 (k^2 - k_c^2)^2,$$

dont le graphe correspond à la figure 10.1. À une distance du seuil

$$\epsilon^2 = r - r_c$$

petite, la largeur de la bande de nombres d'onde instables est $2\epsilon/k_c\xi^2$, et le taux de croissance d'ordre ϵ^2 ; on en déduit que les échelles temporelle et spatiale des variations lentes de l'amplitude sont

$$T = \epsilon^2 t, \quad X = \epsilon x.$$

Nous indiquons seulement ici les étapes du calcul, détaillé en exercice à la fin du chapitre (l'introduction d'une échelle spatiale « très lente » $X_2 = \epsilon^2 x$, *a priori* nécessaire, s'avère finalement inutile). Recherchant une solution sous la forme d'un développement

$$u(x, t) = \epsilon u_1(x, X, T) + \epsilon^2 u_2(x, X, T) + \dots,$$

la solution à l'ordre ϵ s'écrit

$$u_1 = \frac{1}{2} A_1(X, T) e^{ik_c x} + c.c.$$

où $A_1(X, T)$ est l'enveloppe lentement variable du paquet d'ondes centré sur k_c . La non-linéarité quadratique engendre à l'ordre ϵ^2 un harmonique de nombre d'onde $2k_c$, lequel interagit avec le fondamental à l'ordre ϵ^3 , et cette interaction est résonnante ($k_c = 2k_c - k_c$, fréquences nulles). La condition de solvabilité donne alors l'équation de Ginzburg-Landau

$$\tau_c \partial_T A_1 = A_1 + \xi_c^2 \partial_{XX} A_1 - \kappa |A_1|^2 A_1, \quad \xi_c^2 = 4\epsilon^4 k_c^2, \quad \kappa = \frac{\gamma^2}{9\xi_c^2}.$$

Notons que le coefficient unité du terme A_1 provient de la définition du petit paramètre. Manneville (1991, chap. 8) discute une version plus générale de l'équation de Swift-Hohenberg qui inclut la diffusion transverse et permet de décrire des modulations dans les deux directions du plan horizontal.

10.3 Saturation de l'instabilité primaire

Pour $\kappa > 0$, l'équation de Ginzburg-Landau (10.10) possède une famille de solutions uniformes et stationnaires, définies par

$$A_0 = a_0 e^{i(q_0 X + \Phi)}, \quad a_0 = \sqrt{1 - q_0^2}, \quad (10.14)$$

où q_0 est un paramètre compris entre -1 et 1 , et où Φ est une phase indéterminée. Revenant aux variables initiales, ces solutions correspondent à une texture périodique

$$U_0(x) = u_0 \cos(k_0 x + \Phi), \quad (10.15)$$

d'amplitude u_0 et de nombre d'onde k_0 définis par

$$u_0 = \sqrt{r - r_c} \sqrt{\frac{1 - q_0^2}{\kappa}}, \quad k_0 = k_c + \epsilon q_0 / \xi_c.$$

La phase Φ indéterminée correspond à l'hypothèse que le problème est invariant par translation, c'est-à-dire que si $u(x, t)$ est une solution, alors $v(x, t) = u(x + \Phi, t)$ est aussi solution. L'amplitude, proportionnelle à la racine carrée de l'écart au seuil $\epsilon = \sqrt{r - r_c}$, est donc maximale pour $k_0 = k_c$ ($q_0 = 0$), décroît lorsque le nombre d'onde s'éloigne de k_c , et s'annule pour $k_0 = k_c \pm \epsilon/\xi_c$ ($q_0 = \pm 1$), c'est-à-dire sur la parabole de stabilité marginale.

Notons que l'équation de Ginzburg-Landau, comme l'équation de Schrödinger non linéaire, admet d'autres solutions remarquables, spatialement localisées, qui ne seront pas discutées ici (Fauve 1998, Peyrard & Dauxois 2004).

10.4 Instabilité secondaire d'Eckhaus

10.4.1 Critère d'instabilité

La solution stationnaire (10.15) de l'équation de Ginzburg-Landau (10.10) est-elle stable ? Perturbons l'amplitude a_0 et la phase Φ de cette solution sous la forme

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\kappa}{r - r_c}} U(x, t) &= (a_0 + a(X, T)) \cos(kx + \Phi + \varphi(X, T)) \\ &= \frac{1}{2} A(X, T) e^{i(k_c x + \Phi)} + c.c. \end{aligned}$$

avec

$$A(X, T) = (a_0 + a(X, T)) e^{i(q_0 X + \varphi(X, T))}.$$

Reportant cette amplitude perturbée $A(X, T)$ dans (10.10), linéarisant autour de $(a, \varphi) = (0, 0)$, et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\partial_T a = -2a_0^2 a + \partial_{XX} a - 2a_0 q_0 \partial_X \varphi, \quad (10.16a)$$

$$\partial_T \varphi = -\frac{2q_0}{a_0} \partial_X a + \partial_{XX} \varphi. \quad (10.16b)$$

Remarquons tout d'abord que, pour des perturbations *uniformes* spatialement, *i.e.* de nombre d'onde nul, ce système se réduit à

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Cette expression met en évidence deux modes découplés, un *mode d'amplitude* stable et un *mode de phase* neutre. Ceci suggère, compte tenu de la discussion des modes « actifs » et des modes « esclaves » des systèmes à petit nombre de degrés de liberté (chapitre 8), que le mode de phase doit gouverner la dynamique faiblement non linéaire, le mode d'amplitude lui étant asservi. Le caractère neutre du mode de phase pour $k = 0$ est lié à l'invariance par translation. Nous reviendrons sur ces points dans la section suivante.

Le système différentiel (10.16) étant linéaire, homogène et à coefficients constants, il admet des solutions de la forme $e^{ipX+\sigma T}$ si le déterminant du système algébrique associé est nul. On en déduit la relation de dispersion

$$(\sigma + 2a_0^2 + p^2)(\sigma + p^2) - 4q_0^2 p^2 = 0,$$

dont les racines sont

$$\sigma_{\pm} = -(a_0^2 + p^2) \pm \sqrt{a_0^4 + 4q_0^2 p^2}. \quad (10.18)$$

La racine σ_- est toujours négative, et s'écrit pour p petit

$$\sigma_- = -2a_0^2 + \mathcal{O}(p^2); \quad (10.19)$$

cette racine correspond donc au mode d'amplitude. L'autre racine σ_+ correspond au mode de phase ; elle est toujours négative pour p grand mais peut être positive pour p petit ; dans ce dernier cas, elle est donnée par

$$\sigma_+ = -\frac{1 - 3q_0^2}{1 - q_0^2} p^2 + \mathcal{O}(p^4). \quad (10.20)$$

Compte tenu de $|q_0| < 1$, σ_+ est donc positif pour

$$q_0^2 > \frac{1}{3}, \quad \text{soit} \quad \xi_c^2(k_0 - k_c)^2 > \frac{r - r_c}{3}. \quad (10.21)$$

La condition $q_0^2 = 1/3$ définit dans le plan (k, r) une parabole représentée sur la figure 10.2, intérieure à la parabole de stabilité marginale $r - r_c = \xi_c^2(k_0 - k_c)^2$. À l'intérieur de cette parabole, σ_+ est négative et la structure périodique (10.15) est donc stable, et à l'extérieur, cette structure est instable vis-à-vis de perturbations de grande longueur d'onde (Eckhaus 1965).

Ainsi, une texture de rouleaux de convection est linéairement stable si le nombre d'onde est voisin de k_c ; si cette texture est trop « comprimée » ou trop « dilatée », elle est linéairement instable. On peut montrer que cette bifurcation secondaire est sous-critique, c'est-à-dire que le terme non linéaire dominant ne sature pas l'instabilité (Fauve 1998). La perturbation s'amplifie de façon « catastrophique », ce qui conduit à la disparition d'un rouleau ou à la nucléation d'un nouveau rouleau, et à la relaxation de la texture vers un nouveau nombre d'onde uniforme, plus proche de k_c ; si ce nouveau nombre d'onde est à l'intérieur de la parabole d'Eckhaus, la texture ne bouge plus, sinon, une nouvelle disparition ou nucléation peut survenir.

10.4.2 Interprétation en termes de dynamique de la phase

L'analyse précédente a fait apparaître que, lors d'une perturbation de grande longueur d'onde ($p \ll 1$) de la texture périodique issue de l'instabilité primaire, le module de l'amplitude de la perturbation relaxe sur un

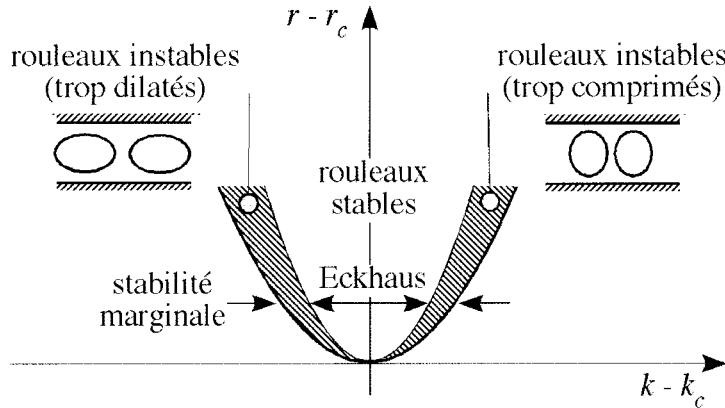


FIG. 10.2 – Parabole de stabilité marginale ($\sigma = 0$) et parabole d’Eckhaus dans le plan $(k - k_c, r - r_c)$. Pour $r > r_c$ donné, un rouleau de convection dont le nombre d’onde est situé entre les deux paraboles est instable.

temps beaucoup plus court que la phase :

$$|\sigma_-| \sim | - 2a_0^2 | \gg |\sigma_+| \sim |p^2|.$$

Ce résultat invite à rechercher une *équation de phase* découpée du module de l’amplitude « esclave ». Pour cela, on peut partir du système (10.16) gouvernant la dynamique des perturbations, ou retourner à l’équation de Ginzburg-Landau (10.10) initiale et séparer les évolutions du module et de la phase de l’enveloppe en introduisant $A = ae^{i\phi}$. Choisissant la deuxième option, il vient les équations couplées

$$\partial_T a = (1 - (\partial_X \phi)^2) a + \partial_{XX} a - a^3, \quad (10.22a)$$

$$a \partial_T \phi = a \partial_{XX} \phi + 2\partial_X a \partial_X \phi. \quad (10.22b)$$

Plutôt que de raisonner sur la phase ϕ proprement dite, qui croît (ou décroît) spatialement de façon indéfinie, il est judicieux d’introduire ici le *gradient* de la phase,

$$q(X, T) = \partial_X \phi, \quad (10.23)$$

qui mesure la correction *locale* du nombre d’onde k_c de la texture ($kx = k_c x + qX = (k_c + \epsilon q)x$). Le système ci-dessus devient, après dérivation de (10.22b) par rapport à X ,

$$\partial_T a = (1 - q^2)a + \partial_{XX} a - a^3, \quad (10.24a)$$

$$\partial_T q = \partial_X \left(\partial_X q + \frac{2q}{a} \partial_X a \right). \quad (10.24b)$$

Ce système admet une famille de solutions stationnaires et uniformes

$$a_0 = \sqrt{1 - q_0^2}, \quad |q_0| < 1,$$

paramétrées par le gradient de phase q_0 ; ces solutions correspondent naturellement à la texture décrite par (10.14) et (10.15). Lors d'une perturbation d'une de ces solutions, le temps de relaxation de l'amplitude perturbée a est beaucoup plus court que celui du gradient de phase q , si bien que a reste à peu près « en équilibre » avec q , *i.e.* donnée par $a = \sqrt{1 - q^2}$ (on dit que a suit « adiabatiquement » q ou est « esclave » de q). On en déduit que $\partial_X a = (-q/a)\partial_X q$. Insérant cette expression dans (10.24b), il vient

$$\partial_T q = \partial_X (D(q) \partial_X q), \quad D(q) = \frac{1 - 3q^2}{1 - q^2}. \quad (10.25)$$

Cette équation se présente comme une équation de diffusion non linéaire faisant intervenir une diffusivité $D(q)$. Linéarisant cette équation pour des perturbations $\delta q = q - q_0$ petites, il vient

$$\partial_T \delta q = D(q_0) \partial_{XX} \delta q. \quad (10.26)$$

Ainsi, pour $q_0^2 < 1/3$, la diffusivité $D(q_0)$ est positive et le nombre d'onde q relaxe vers l'équilibre q_0 ; sinon, la diffusivité $D(q_0)$ est négative et le nombre d'onde local diverge : on retrouve bien le critère d'instabilité d'Eckhaus (10.21).

Un développement faiblement non linéaire de l'équation de phase au voisinage de l'instabilité d'Eckhaus conduit à une équation du type Kuramoto-Sivashinsky, dont le terme non linéaire est tel que la bifurcation est *sous-critique* comme mentionné ci-dessus (Kuramoto 1984; Fauve 1998, § 6). La notion de dynamique de la phase, introduite par Pomeau & Manneville (1979), s'est avérée très fructueuse et pertinente au-delà du domaine faiblement non linéaire. En particulier, les solutions chaotiques de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky ont permis d'introduire une « turbulence de phase », qui éclaire certains aspects de la turbulence en général (Manneville 1991, chap. 10).

10.4.3 Illustrations expérimentales

Deux systèmes physiques correspondant à la situation ci-dessus ont été particulièrement étudiés : la convection de Rayleigh-Bénard et l'écoulement de Couette-Taylor, études synthétisées dans les ouvrages de Koschmieder (1993) et Chossat & Iooss (1994). Au-delà de l'intérêt propre de ces systèmes, assez limité si on considère les grandes précautions expérimentales nécessaires, ces études ont révélé des comportements « génériques » que doivent présenter tous les systèmes possédant les mêmes symétries, c'est-à-dire les systèmes invariants par réflexion et par translation.

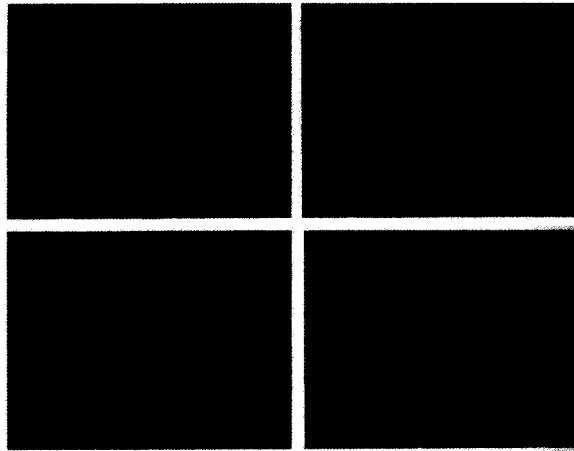


FIG. 10.3 – Instabilité en rouleaux croisés des rouleaux de Rayleigh-Bénard, dans une huile silicone entre deux plaques distantes de $d = 5$ mm, pour un nombre de Rayleigh $Ra = 3000$; l'évolution temporelle se lit de gauche à droite et de haut en bas, les intervalles de temps entre les figures étant de 10, 7 et 35 min; noter la longueur d'onde finale bien supérieure à la longueur initiale $\lambda = 1,64 d$ (Busse & Whitehead 1971).

Pour la convection de Rayleigh-Bénard, les « textures » spatiales observées dépendent de la forme et des dimensions de la boîte, du type de paroi (imposant soit une température soit un flux thermique), et de nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$ où κ est la diffusivité thermique du fluide. Ces textures peuvent être des rouleaux alignés, ou des structures bidimensionnelles, carrés ou hexagonales (Manneville 1991, chap. 4). Pour des rouleaux, l'instabilité secondaire d'Eckhaus se manifeste par une compression ou une dilatation locale de la texture, qui conduit typiquement à la disparition d'une paire de rouleaux, et à la relaxation du système vers une longueur d'onde plus grande. La figure 10.3 illustre une manifestation particulière de l'instabilité d'Eckhaus, l'instabilité en *rouleaux croisés* (Busse & Whitehead 1971). La texture initiale est imposée par une technique d'impression thermique, qui consiste à chauffer légèrement le fluide, juste en dessous du nombre de Rayleigh critique Ra_c , avec une lampe à travers une grille; les régions éclairées étant plus chaudes que les régions à l'ombre de la grille, un mouvement de convection forcée s'installe. Passant au-dessus de Ra_c et supprimant le forçage, les rouleaux initiaux (en haut à gauche) sont instables car trop comprimés; un système de rouleaux orthogonal au premier se développe et tend à se substituer au premier, avec une longueur d'onde plus grande (en bas à droite).

Une autre variante de l'instabilité d'Eckhaus est l'instabilité en zig-zag, illustrée sur la figure 10.4. Ici, les rouleaux initiaux, en haut à gauche, sont

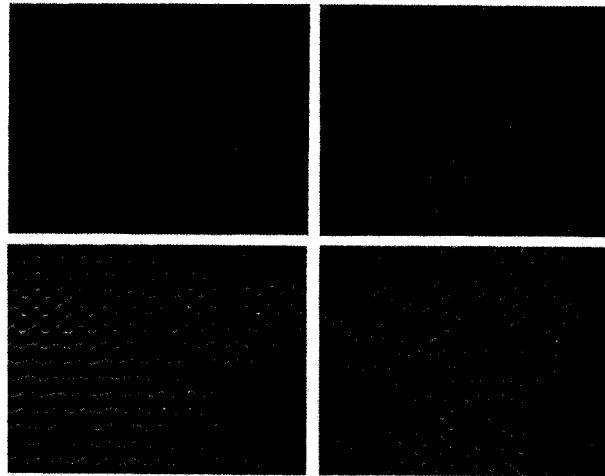


FIG. 10.4 – Instabilité zig-zag des rouleaux de convection de Rayleigh-Bénard, dans une huile silicone entre deux plaques distantes de $d = 5$ mm, pour un nombre de Rayleigh $Ra = 3\,600$; les intervalles de temps entre les figures sont 19, 36 et 72 min; la longueur d'onde finale est ici inférieure à la longueur initiale $\lambda = 2,8d$ (Busse & Whitehead 1971).

trop dilatés ; l'apparition de zig-zag , en bas à droite, est une façon de réduire la longueur d'onde localement de façon « économique », par petites perturbations, c'est-à-dire sans devoir créer de nouveaux rouleaux.

Pour l'écoulement de Couette-Taylor, les rouleaux issus de la bifurcation primaire supercritique deviennent instables au-delà d'une deuxième vitesse critique (chapitre 4). Cette instabilité se manifeste par une ondulation azimutale des rouleaux, illustrée sur la figure 10.5. Observé dans un repère tournant, l'écoulement reste stationnaire. Pour une discussion plus générale et une classification des instabilités secondaires des motifs périodiques fondée sur les symétries, voir Coullet & Iooss (1990).

10.5 Instabilité d'une onde propagative

La théorie ci-dessus rend bien compte de la saturation d'instabilités primaires *stationnaires* et de l'apparition d'instabilités secondaires pour la convection de Rayleigh-Bénard ou de l'écoulement de Couette-Taylor entre deux cylindres. Plus généralement, cette théorie rend compte de la dynamique faiblement non linéaire de systèmes présentant la symétrie de translation $x \rightarrow x + \Phi$ et la symétrie de réflexion $x \rightarrow -x$. D'un point de vue un peu différent, ce succès est lié au caractère absolu de l'instabilité primaire, auquel est associé une valeur critique bien définie du paramètre de contrôle.

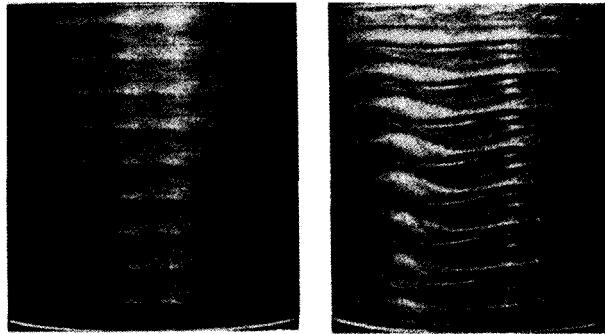


FIG. 10.5 – Rouleaux rectilignes de Couette-Taylor (à gauche) et rouleaux ondulés issus de l’instabilité secondaire (à droite) (Fenstermacher, Swinney & Gollub 1979).

Les *écoulements* ne présentent en général pas la deuxième symétrie (l’écoulement de Couette-Taylor, parce qu’il est bouclé sur lui-même, est une exception). Les instabilités primaires se manifestent alors sous la forme d’ondes se propageant avec une célérité non nulle ; les ondes de Tollmien-Schlichting se développant dans un écoulement cisaillé au voisinage d’une paroi en sont un exemple typique (chapitre 5). L’analyse faiblement non linéaire doit alors être reprise pour tenir compte du caractère complexe de la valeur propre au voisinage du seuil, correspondant à une bifurcation de Hopf.

10.5.1 Évolution d’un paquet d’ondes

L’équation de l’enveloppe d’un paquet d’ondes propagatives au voisinage du seuil de l’instabilité peut être déterminée comme dans la section précédente. Soit $r = R/R_c$ le paramètre de bifurcation normalisé, et k_c et ω_c le nombre d’onde et la pulsation du mode marginal. Au seuil, la valeur propre $s = \sigma + i\omega$ traverse l’axe imaginaire ($\sigma = 0$ et $\omega = \omega_c$), et au voisinage du seuil la pulsation ω et le taux de croissance σ sont donnés par leur développement en série de Taylor

$$\omega = \omega_c + c_g(k - k_c) + \frac{\omega_c''}{2}(k - k_c)^2 + \dots, \quad (10.27a)$$

$$\tau_c \sigma = (r - r_c) - \xi_c^2(k - k_c)^2 + \dots \quad (10.27b)$$

où, en plus des notations introduites précédemment, la vitesse de groupe c_g et le coefficient ω_c'' sont définis par

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_c), \quad \omega_c'' = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}(k_c).$$

Introduisant l’enveloppe $\mathcal{A}(x, t)$ du paquet d’ondes $u(x, t)$ par

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(x, t)e^{i(k_c x - \omega_c t)} + c.c., \quad (10.28)$$

et suivant le même raisonnement que précédemment, on déduit par transformée de Fourier inverse de la relation de dispersion (10.27) l'équation linéaire d'évolution de l'enveloppe :

$$\tau_c (\partial_t \mathcal{A} + c_g \partial_x \mathcal{A}) = (r - r_c) \mathcal{A} + (\xi_c^2 + \frac{i \tau_c \omega_c''}{2}) \partial_{xx} \mathcal{A}. \quad (10.29)$$

Le type de la non-linéarité dominante peut être déterminé par des arguments de symétrie, comme précédemment. Pour un problème invariant par translation en temps et en espace, toute solution déphasée doit rester une solution : l'équation d'enveloppe doit donc être invariante dans la transformation $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} e^{i\phi}$; on déduit que la non-linéarité dominante est $|\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}$. D'où *l'équation de Ginzburg-Landau à coefficients complexes*, plus brièvement équation CGL, gouvernant la dynamique faiblement non linéaire du paquet d'ondes :

$$\tau_c (\partial_t \mathcal{A} + c_g \partial_x \mathcal{A}) = (r - r_c) \mathcal{A} + (\xi_c^2 + \frac{i \tau_c \omega_c''}{2}) \partial_{xx} \mathcal{A} - \kappa |\mathcal{A}|^2 \mathcal{A}, \quad (10.30)$$

où la constante de Landau $\kappa = \kappa_r + i\kappa_i$ est *a priori* complexe. Supposant la bifurcation supercritique ($\kappa_r > 0$), le changement d'échelles (10.9) conduit à l'équation normalisée suivante, dans le référentiel se déplaçant à la vitesse de groupe ($X = \epsilon(x - c_g t)/\xi_c$) :

$$\partial_T A = A + (1 + i c_1) \partial_{XX} A - (1 + i c_2) |A|^2 A, \quad (10.31)$$

avec

$$c_1 = \frac{\tau_c \omega_c''}{2 \xi_c^2}, \quad c_2 = \frac{\kappa_i}{\kappa_r}.$$

Les différences avec l'équation de Ginzburg-Landau (10.10) sont (i) le terme de propagation à la vitesse de groupe, absorbé ci-dessus dans le changement de référentiel, et (ii) les coefficients complexes des termes diffusif et non linéaire.

10.5.2 Onde non linéaire

L'équation de Ginzburg-Landau complexe (10.31) admet la famille de solutions

$$A(X, T) = a_0 e^{i(q_0 X - \Omega T + \Phi)}, \quad (10.32a)$$

$$a_0 = \sqrt{1 - q_0^2}, \quad (10.32b)$$

$$\Omega = c_2 + (c_1 - c_2) q_0^2, \quad (10.32c)$$

paramétrée par q_0 tel que $q_0^2 \leq 1$, et où Φ est une phase indéterminée reflétant l'invariance par translation du problème. Ces solutions correspondent aux ondes propagatives d'amplitude finie

$$U_0(x, t) = u_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t + \Phi), \quad (10.33)$$

d'amplitude, de nombre d'onde et de pulsation

$$u_0 = \sqrt{r - r_c} \sqrt{\frac{1 - q_0^2}{\kappa}}, \quad (10.34a)$$

$$k_0 = k_c + \frac{q_0 \sqrt{r - r_c}}{\xi_c}, \quad (10.34b)$$

$$\omega_0 = \omega_l + \frac{1}{\tau_c} \kappa_i u_0^2 \quad \text{avec} \quad \omega_l = \omega_c + c_g(k_0 - k_c) + \frac{\omega_c''}{2}(k_0 - k_c)^2. \quad (10.34c)$$

La pulsation est donc la somme de la pulsation ω_l des ondes d'amplitude infinitésimale (10.27a), et d'une correction d'amplitude finie. On notera que l'amplitude et le nombre d'onde sont identiques aux solutions (10.15) de l'équation de Ginzburg-Landau à coefficients réels, et que la correction de la pulsation est identique à la correction de Stokes d'une onde dispersive, introduite au chapitre 9.

Comme l'équation de Ginzburg-Landau à coefficients réels et l'équation de Schrödinger non linéaire, l'équation CGL admet des solutions localisées (Cross & Hohenberg 1993 ; Fauve 1998) qui ne seront pas discutées ici.

10.5.3 Instabilité de Benjamin-Feir-Eckhaus

Perturbant l'amplitude et la phase de l'enveloppe (10.32) suivant

$$A_0(X, T) = (a_0 + a(X, T))e^{i(q_0 X - \Omega T + \Phi + \varphi(X, T))},$$

linéarisant les équations des perturbations d'amplitude et de phase, et recherchant la solution sous forme de modes normaux, on obtient la relation de dispersion. Comme précédemment, cette analyse fait apparaître un mode d'amplitude stable, et un mode de phase marginal dans la limite de perturbations de nombre d'onde nul qui correspond à l'invariance par translation. Le critère d'instabilité apparaît clairement en considérant l'équation de la perturbation de la phase $\varphi(X, T)$; dans la limite des grandes longueurs d'onde, cette équation est une équation de diffusion avec le coefficient de diffusion (Kuramoto 1984 ; Janiaud *et al.* 1992)

$$D(q_0) = 1 + c_1 c_2 - \frac{2q_0^2(1 + c_2^2)}{1 - q_0^2}. \quad (10.35)$$

De cette expression, on déduit les résultats suivants, résumés sur la figure 10.6 qui représente les différents cas dans le plan (c_1, c_2) .

- Pour $1 + c_1 c_2 > 0$, *i.e.* entre les deux branches d'hyperboles $1 + c_1 c_2 = 0$ de la figure 10.6, il existe des ondes d'amplitude finie stables parmi toutes les ondes existant pour $r - r_c > \xi_c^2(k - k_c)^2$ (*i.e.* dans la parabole

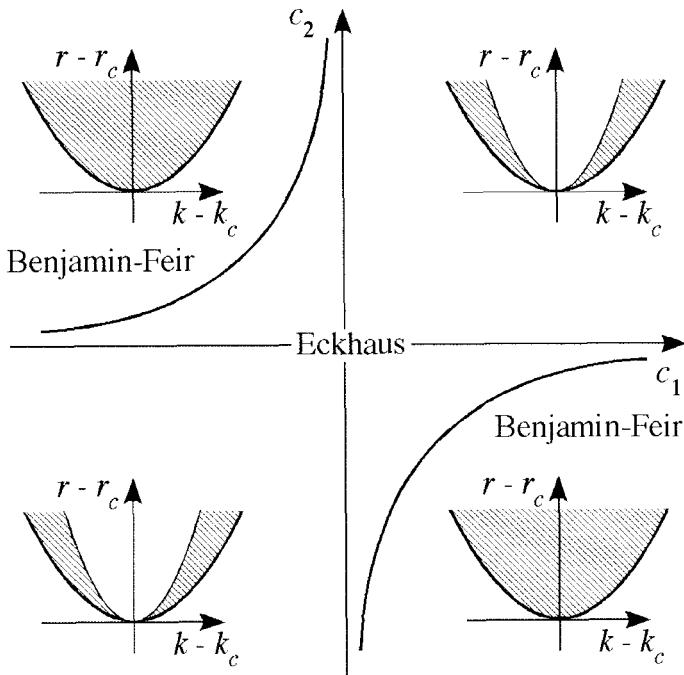


FIG. 10.6 – Domaine d'existence des ondes instables (hachurées) dans le plan $(k - k_c, r - r_c)$, selon que le point (c_1, c_2) est à l'extérieur ou à l'intérieur de l'hyperbole de Lange & Newell.

de stabilité marginale), celles dont le paramètre q_0 vérifie la condition

$$q_0^2 < \frac{1 + c_1 c_2}{2(1 + c_2^2) + 1 + c_1 c_2}. \quad (10.36)$$

Pour $c_1 = c_2 = 0$, on retrouve le critère d'Eckhaus (10.21) (l'équation CGL est alors à coefficients réels); pour c_1 et c_2 non nuls, la largeur de la bande de nombres d'onde stables dépend de c_1 et c_2 , pour s'annuler sur l'hyperbole.

- Pour $1 + c_1 c_2 < 0$, i.e. à l'extérieur des deux branches d'hyperboles $1 + c_1 c_2 = 0$, le coefficient de diffusion est négatif pour tout q_0 compris entre -1 et $+1$, aucune des ondes d'amplitude finie (10.15) n'est stable (Lange & Newell 1974). D'autre part, pour $c_2 = -c_1$ grands, les coefficients des termes diffusif et non linéaire de l'équation CGL sont essentiellement imaginaires, et l'équation CGL dégénère en équation de Schrödinger non linéaire : l'instabilité de l'onde correspond à l'instabilité de Benjamin-Feir discutée au chapitre précédent.

Ainsi, dans le formalisme des équations d'enveloppe, les instabilités d'Eckhaus et de Benjamin-Feir se trouvent unifiées. Cette parenté des deux instabilités a été pointée par Stuart & DiPrima (1978) qui ont montré, en perturbant l'onde d'amplitude finie par une somme de deux nombres d'ondes voisins, qu'on pouvait interpréter l'instabilité d'Eckhaus en termes d'interactions résonnantes, comme l'instabilité de Benjamin-Feir (dans le cas Eckhaus, seule subsiste la condition de résonance sur les nombres d'onde, la condition de résonance sur les fréquences dégénérant puisque toutes les fréquences sont nulles).

10.5.4 Ondes de Tollmien-Schlichting et transition à la turbulence

L'écoulement de Poiseuille plan est linéairement instable au-delà du nombre de Reynolds critique $Re_c = 5\,772$, le nombre d'onde marginal correspondant à $k_ch = 1,02$ (chapitre 5). Au voisinage de ce seuil, la dynamique faiblement non linéaire est gouvernée par l'équation de Ginzburg-Landau (10.30), résultat établi par Stewartson & Stuart (1971). Le calcul du coefficient de Landau révèle le caractère sous-critique de la bifurcation ($\kappa_r < 0$) : la non-linéarité cubique ne sature pas l'instabilité primaire, comme pour la convection de Rayleigh-Bénard ou l'écoulement de Couette-Taylor, mais amplifie encore la perturbation (Drazin 2002, § 5.2 & § 8.9). Par ailleurs, la simulation numérique directe des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles a mis en évidence l'existence d'une branche d'ondes de Tollmien-Schlichting d'amplitude finie *stables*, cette branche descendant jusqu'à $Re_{cg} \approx 2\,900$; en-dessous de cette valeur, l'écoulement est globalement stable, c'est-à-dire qu'il relaxe vers l'écoulement de Poiseuille quelle que soit la perturbation initiale (chapitre 3). Ces résultats sont rassemblés sur le diagramme de bifurcation présenté sur la figure 10.7, où A est l'amplitude de la perturbation bidimensionnelle.

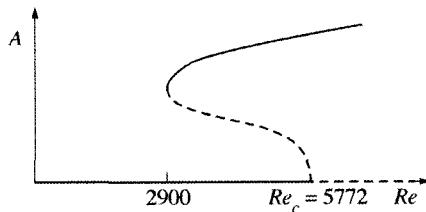


FIG. 10.7 – Diagramme de bifurcation de l'écoulement de Poiseuille plan pour des perturbations bidimensionnelles.

Malgré le caractère sous-critique de la bifurcation, des instabilités secondaires des ondes de Tollmien-Schlichting forcées ont pu être observées avant la transition à la turbulence. Pour la couche limite par exemple, Klebanoff,

Tidstrom & Sargent (1962) ont observé qu'au-delà d'une certaine distance vers l'aval, une ondulation transversale des « crêtes » de l'onde apparaît (suivant la direction z), de longueur d'onde λ_z bien définie ; deux crêtes consécutives sont typiquement déphasées de $\lambda_z/4$, et forment des motifs en « A » alternés. Ces observations ont stimulé l'analyse, et permis de mettre en évidence deux mécanismes d'instabilité secondaire des ondes bidimensionnelles : un mécanisme elliptique et un mécanisme sous-harmonique ; voir les articles de revue de Bayly, Orszag & Herbert (1988), Herbert (1988), Huerre & Rossi (1998, §8) et Kerswell (2002). Ces instabilités sont toutes deux non visqueuses, et se développent donc sur un temps de l'ordre de l'inverse du gradient local de vitesse, bien plus court que celui de l'instabilité primaire (visqueuse), ce qui explique qu'on puisse les observer.

Cependant, le diagramme 10.7 et les observations, très brièvement résumées ci-dessus, sur les instabilités secondaires sont loin de mettre un point final à l'analyse de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille ou de la couche limite. En effet, comme discuté au chapitre 5, les perturbations ne restent bidimensionnelles que dans des expériences très bien contrôlées, et pour des fluctuations de vitesse à l'entrée très faibles. Sans ces précautions, l'écoulement se montre instable pour des nombres de Reynolds inférieurs au nombre critique, pour l'écoulement de Poiseuille comme pour la couche limite ; l'instabilité se manifeste non par une onde de Tollmien-Schlichting mais par une structure tridimensionnelle de stries longitudinales, laquelle évolue rapidement vers la turbulence. Trois phénomènes jouent probablement là un rôle essentiel :

- le caractère convectif de l'instabilité par lequel tous les « bruits » peuvent être amplifiés sans sélection d'un mode propre particulier ;
- la croissance transitoire (mécanisme linéaire) de certains de ces bruits (qu'on peut toujours considérer comme des combinaisons linéaires de modes propres stables) ;
- et bien entendu des effets non linéaires (ici dus à l'advection) sans lesquels toute perturbation décroît aux temps longs.

Les effets non linéaires entraînent une transition rapide vers la turbulence. Cette transition se manifeste par une intermittence entre des phases laminaires et des bouffées turbulentes, phénomène étudié en particulier par Wygnanski & Champagne (1973) pour l'écoulement de Poiseuille en tube. L'entretien de ces bouffées turbulentes dans un écoulement linéairement stable motive aujourd'hui des recherches actives, tant théoriques que numériques et expérimentales ; la nature des perturbations initiales y joue un rôle essentiel. Nous renvoyons vers le bon article de synthèse de Kerswell (2005) pour plus de développements.

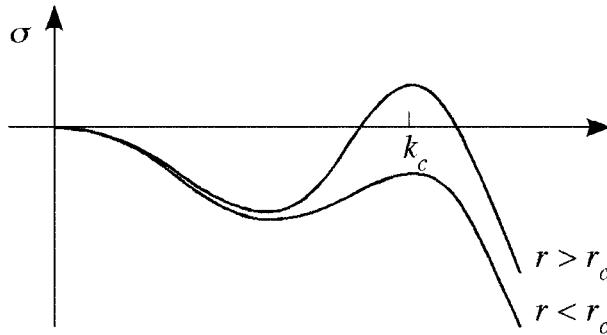


FIG. 10.8 – Allure du taux de croissance au-dessous et au-dessus du seuil de l'instabilité de nombre d'onde k_c fini, lorsque $k_0 = 0$ est neutre et que les petits nombres d'onde sont stables.

10.6 Couplage avec un champ à grande échelle

10.6.1 Invariance galiléenne et lois de conservation

L'analyse ci-dessus des ondes d'amplitude finie doit être modifiée lorsque le nombre d'onde $k_0 = 0$ est neutre, le taux de croissance ayant alors l'allure décrite sur la figure 10.8. Les perturbations de grande longueur d'onde ($k \ll k_c$), très peu dissipées, peuvent être facilement excitées par le mode de nombre d'onde fini k_c linéairement instable ; le couplage des deux modes conduit alors à une dynamique nouvelle.

Cette situation se produit en particulier lorsque le problème satisfait *l'invariance galiléenne*, c'est-à-dire qu'il est invariant dans la transformation

$$y = x - Vt, \quad v = u - V. \quad (10.37)$$

Considérons par exemple l'équation-modèle

$$\partial_t u = Lu - u \partial_x u, \quad L = \partial_x^2 + 2r \partial_x^4 + \partial_x^6. \quad (10.38)$$

Notons d'abord que l'équation (10.38) est invariante par translation : si $u(x, t)$ est une solution, on vérifie aisément que la fonction $v(x, t) = u(x - \phi, t)$, correspondant à $u(x, t)$ translatée d'une phase ϕ , est bien solution aussi ; comme discuté dans la section 10.4, cette invariance par translation est associée à un mode de phase neutre. L'équation (10.38) vérifie également l'invariance galiléenne ; en effet, dans le changement de repère galiléen $y = x - Vt$, cette équation devient

$$\partial_t u = \partial_y^2 u + 2r \partial_y^4 u + \partial_y^6 u - (u - V) \partial_y u,$$

et on vérifie que la transformation $v = u - V$ restitue bien l'équation (10.37)².

2. À titre de contre-exemple, on peut vérifier que l'équation de Swift-Hohenberg (10.13) ne satisfait pas l'invariance galiléenne.

En hydrodynamique, l'invariance galiléenne est en général brisée par la condition d'adhérence sur les parois, mais elle peut subsister dans certains cas, dans la convection de Rayleigh-Bénard à frontières libres par exemple. Cette invariance peut aussi être satisfaite de manière approchée, par exemple dans la convection de Rayleigh-Bénard à frontières rigides mais à petit nombre de Prandtl (faible viscosité, fines couches limites dynamiques sur les parois inférieure et supérieure). Loin des parois latérales, un écoulement horizontal lent à grande échelle est alors peu ou pas dissipé, ce qui correspond bien à des perturbations presque neutres de nombre d'onde très petit (Siggia & Zippelius 1981).

La situation d'un nombre d'onde nul neutre se rencontre aussi lorsque l'équation d'évolution se présente sous la forme conservative

$$\partial_t U + \partial_x(f(U, \partial_x U, \dots)) = 0, \quad (10.39)$$

où la fonction f est une somme de produits de U et de ses dérivées. Une perturbation $\hat{u} e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$ d'une solution stationnaire et uniforme U_0 de cette équation satisfait la relation de dispersion

$$-i\omega + ikf'(U_0) + \mathcal{O}(k^2) = 0, \quad (10.40)$$

qui montre bien que le mode $k = 0$ est neutre. C'est le cas de la convection thermohaline, où $U(x, t)$ est un champ de concentration de sel (Riecke 1992). Un autre exemple est celui d'un écoulement à surface libre de profondeur finie³; le champ $U(x, t)$ représentant l'épaisseur de la couche fluide et $f(U, \partial_x U, \dots)$ le débit horizontal, la conservation de la masse s'exprime bien par une loi du type (10.39) (Renardy & Renardy 1993).

10.6.2 Équations d'évolution couplées

Considérons une perturbation d'un écoulement de base, stationnaire et uniforme, au voisinage de la stabilité marginale $r = r_c$, sous la forme de la somme

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(x, t)e^{i(k_c x - \omega_c t)} + c.c. + \mathcal{B}(x, t). \quad (10.41)$$

$\mathcal{A}(x, t)$ est l'enveloppe complexe d'un paquet d'ondes centré sur le nombre d'onde k_c fini, et $\mathcal{B}(x, t)$ représente la perturbation (réelle) de grande longueur d'onde, presque neutre.

3. Notons que la stabilité faiblement non linéaire des films liquides tombant sur un plan incliné ne relève pas de l'analyse faite ici. En effet, l'analyse linéaire révèle que l'instabilité ne survient pas sur un mode de nombre d'onde fini isolé, mais implique une bande instable s'étendant de $k = 0$ au nombre d'onde de coupure (instabilité de grande longueur d'onde), voir chapitre 6 et aussi Ruyer-Quil & Manneville (2000) et Chang (1994). L'analyse de Benney (1966), qui considère l'interaction d'un harmonique k_0 avec l'écoulement moyen ($k = 0$) et le second harmonique $2k_0$, permet d'obtenir une équation CGL, mais cette analyse qui ignore le caractère continu du spectre de nombres d'onde instables est incomplète.

Sans tenir compte du couplage de \mathcal{A} et \mathcal{B} pour le moment, l'évolution faiblement non linéaire de l'enveloppe \mathcal{A} est toujours gouvernée par l'équation de Ginzburg-Landau complexe (10.30). L'équation d'évolution linéaire du mode \mathcal{B} s'obtient à partir du développement en série de Taylor de la relation de dispersion autour de $k_0 = 0$, soit

$$\partial_t \mathcal{B} = -c_0 \partial_x \mathcal{B} + \frac{\xi_0^2}{\tau_c} \partial_{xx} \mathcal{B}, \quad (10.42)$$

où la célérité c_0 et l'échelle de longueur de diffusion ξ_0 du mode $k_0 = 0$ sont définis par

$$c_0 = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \frac{\xi_0^2}{\tau_c} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial k^2},$$

les dérivées étant évaluées au point critique ($r_c = 1, k_0 = 0$) (le coefficient de diffusion ξ_0^2/τ_c est bien positif pour des ondes longues linéairement stables correspondant à la figure 10.8).

La détermination des termes de couplage dépend du choix de l'ordre de grandeur relatif de \mathcal{A} et \mathcal{B} . Les expériences montrant que \mathcal{B} est petit devant $|\mathcal{A}|$, on peut considérer

$$\mathcal{B} \sim \epsilon \mathcal{A} \sim \epsilon^2.$$

Les termes de couplage dominants satisfaisant l'invariance par translation sont alors $\mathcal{A}\mathcal{B}$ dans l'équation de \mathcal{A} , et $\partial_x |\mathcal{A}|^2$ dans l'équation de \mathcal{B} (ce dernier terme étant supérieur d'un ordre de grandeur au moins aux non-linéarités n'impliquant que \mathcal{B}). Le changement d'échelle (10.9) conduit finalement, dans le repère lié à la vitesse de groupe $c_g(k_c)$, au système d'équations couplées suivant

$$\partial_T A = A + (1 + ic_1) \partial_{XX} A - (1 + ic_2) |A|^2 A + (1 + ic_3) AB, \quad (10.43a)$$

$$\partial_T B = \frac{\epsilon^{-1} \tau_c}{\xi_c} (c_g - c_0) \partial_X B + \frac{\xi_0^2}{\xi_c^2} \partial_{XX} B + \epsilon^{-1} \gamma \partial_X |A|^2, \quad (10.43b)$$

où le mode \mathcal{B} a été normalisé de façon à normaliser à $1 + ic_3$ le coefficient du terme de couplage AB . Cette équation décrit par exemple l'évolution de l'interface entre deux couches de fluides visqueux en écoulement de Couette-Poiseuille, les coefficients ayant été calculés par Renardy & Renardy (1993).

Ainsi, tous les termes de l'équation de A sont bien du même ordre de grandeur (ϵ^3), mais ce n'est pas le cas de l'équation de B . Si les coefficients $\tau_c(c_g - c_0)/\xi_c$ et γ sont d'ordre un, l'équation (10.43b) dégénère et s'intègre en

$$B = \frac{\xi_c \gamma}{\tau_c(c_g - c_0)} |A|^2.$$

Le mode B est alors esclave de A , et n'apporte rien de qualitativement nouveau. La situation est différente si la différence $c_g - c_0$ et le coefficient de couplage γ sont petits, d'ordre ϵ : les quatre termes de l'équation (10.43b)

sont alors du même ordre de grandeur. C'est cette dernière situation que nous considérons ci-dessous.

Notons que, dans le cas d'une bifurcation *stationnaire* ($\omega_c = 0$), un système d'équations d'amplitude similaire, présentant en plus la symétrie de réflexion $x \rightarrow -x$, a été étudié par Coullet & Fauve (1985).

10.6.3 Stabilité des ondes

Le système (10.43) admet la famille de solutions $B_0 = 0$ et A_0 donné par l'équation (10.32), qui correspond aux ondes d'amplitude finie (10.33). La stabilité de ces ondes a été étudiée par Barthelet & Charru (1998), nous en donnons ici les principaux résultats. Pour des perturbations *uniformes* spatialement, *i.e.* de nombre d'onde nul, le système des perturbations se réduit à

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_0^2 & 0 & 1 \\ -2a_0 c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \varphi \\ b \end{pmatrix}, \quad (10.44)$$

dont les valeurs propres sont

$$s_1 = -2a_0^2, \quad s_{2,3} = 0.$$

On retrouve le mode d'amplitude stable, et deux modes neutres correspondant aux deux invariances : par translation et galiléenne (notons qu'un changement de variable sur A et B correspondant à une rotation dans le plan complexe pourrait rendre la matrice ci-dessus diagonale). La discussion des valeurs propres correspondant à des perturbations spatialement *périodiques*, et non plus uniformes, montre qu'à l'intérieur de la parabole de stabilité marginale dans le plan $(k - k_c, r - r_c)$, des ondes stables existent à l'intérieur de régions délimitées par des arcs de parabole correspondant aux zéros des valeurs propres, comme représenté sur la figure 10.9. Ces arcs ne sont pas symétriques par rapport à l'axe $k = k_c$, ce qui est cohérent avec l'absence de symétrie de réflexion. Ainsi, l'effet du couplage avec un mode de grande longueur d'onde a pour effet de briser la parabole d'Eckhaus (10.21) en plusieurs arcs.

10.6.4 Illustration expérimentale

L'analyse ci-dessus est illustrée ici par des observations d'instabilité secondaire d'ondes à l'interface entre deux liquides cisaillés (Charru & Barthelet 1999). L'expérience, présentée au chapitre 8, consiste en un canal annulaire de périmètre L , la rotation d'un plateau supérieur entraînant les fluides par cisaillement (écoulement de Couette). Pour certains rapports de viscosité, une onde de longueur d'onde $2\pi/k$ centimétrique apparaît à l'interface au-delà d'une vitesse critique U_c du plateau, correspondant à une bifurcation supercritique, et se propageant avec une célérité ω/k proche de la vitesse de l'interface.

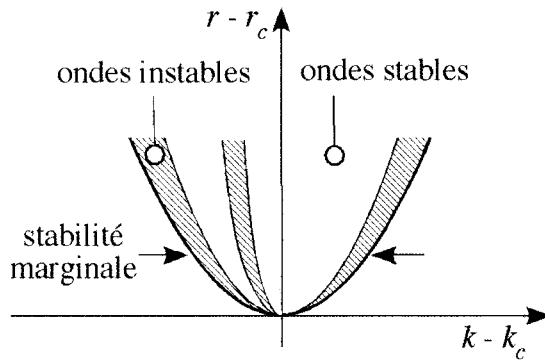


FIG. 10.9 – Parabole de stabilité marginale dans le plan $(k - k_c, r - r_c)$, et paraboles délimitant les régions d'existence d'ondes stables et instables (hachures).

Lorsque la vitesse de l'écoulement est augmentée par petits incrémentums, l'amplitude saturée $|A|$ de l'onde augmente comme $\sqrt{U - U_c}$, le nombre d'onde k restant constant du fait du confinement (il y a une trentaine de longueurs d'onde dans le canal $L/(2\pi/k) \approx 30$). Cependant, lorsque la vitesse devient trop élevée (typiquement $U \approx 1,1 U_c$), un pincement apparaît dans le train d'ondes, qui diverge et se conclut par la disparition d'une longueur d'onde et la relaxation du train vers une longueur d'onde plus grande. Ce phénomène, illustré sur la figure 10.10 pour deux rapports de viscosité des fluides, peut se répéter plusieurs fois (disparition de plusieurs longueurs d'onde) avant qu'un équilibre soit atteint. Un processus inverse de nucléation d'une nouvelle longueur d'onde survient lorsque la vitesse est diminuée. Ce processus de coalescence-nucléation, qui présente une hystérésis, peut s'interpréter comme la relaxation du nombre d'onde des régions paraboliques instables montrées sur la figure 10.9, vers des régions stables.

La figure 10.11 détaille un processus de disparition de deux longueurs d'ondes. À gauche, est présentée l'évolution du profil de l'interface au cours du temps ; la longueur d'une ligne correspond au temps de retour de la perturbation devant la sonde (4,02 s), et donne donc à peu près une image spatiale (renversée) du train d'ondes dans l'anneau ; on y voit la disparition d'une première longueur d'onde (entre les lignes 10 et 11), puis d'une seconde (entre les lignes 23 et 24). À droite, sont montrées les évolutions correspondantes de l'amplitude $|A|$ et de la fréquence f du mode k (obtenues par démodulation par transformée de Hilbert), et du mode B de grande longueur d'onde (obtenu par filtrage passe-bas). On distingue bien la croissance du défaut, constitué d'une diminution de l'amplitude $|A|$ associée à une augmentation de la fréquence f (compression locale du nombre d'onde), et d'une variation locale de la position moyenne B de l'interface. La première relaxation est immédiatement suivie de la croissance d'un deuxième défaut, la deuxième coalescence

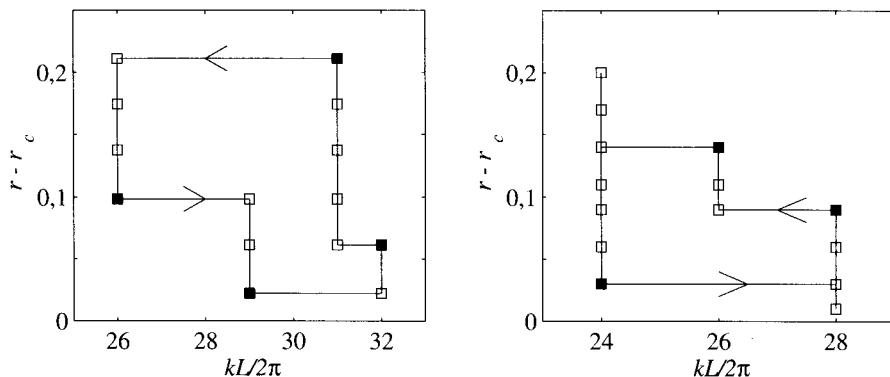


FIG. 10.10 – Nombre d’onde $kL/2\pi$ fonction de l’écart au seuil $r - r_c = (U - U_c)/U_c$, pour deux rapports de viscosité $\mu_2/\mu_1 = 1,55$ (à gauche) et $\mu_2/\mu_1 = 2,60$ (à droite). (□), train d’onde stable, (■), train d’onde instable. D’après Charru & Barthelet (1999).

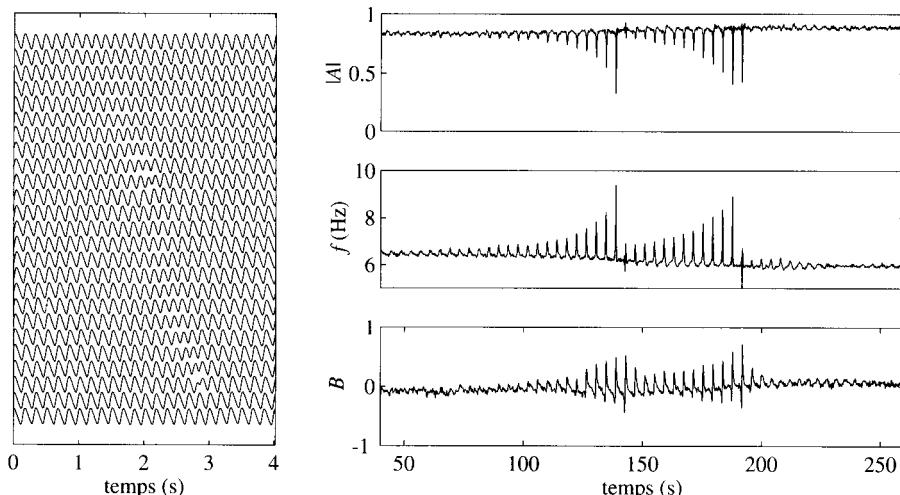


FIG. 10.11 – Gauche : évolution temporelle de l’interface (de gauche à droite et de haut en bas); la longueur d’une ligne correspond au temps (4,02 s) de parcours du périmètre du canal à la vitesse de phase ; à droite, évolutions temporelles $|A|(t)$, $f(t)$ et $B(t)$. D’après Charru & Barthelet (1999).

permettant à l’onde d’atteindre finalement l’équilibre. On remarquera que, du fait de la disparition de deux longueurs d’onde, la fréquence a diminué de 6,5 à 6,0 Hz.

10.7 Exercices

10.7.1 Dérivation de l'équation GL à partir du modèle de Swift-Hohenberg

On détermine ici l'équation de Ginzburg-Landau (*i.e.* le coefficient de Landau) gouvernant la dynamique lente de l'enveloppe des rouleaux droits de convection, juste au-dessus du nombre de Rayleigh critique $Ra_c = 1\,709$, à partir d'un modèle simplifié issu des équations de Boussinesq, l'équation de Swift-Hohenberg (Swift & Hohenberg 1977, Manneville 1991, chap. 8) :

$$\tau_c \partial_t u = \mu u - \xi^4 (\partial_x^2 + k_c^2)^2 u - \gamma u \partial_x u.$$

- Montrer que la relation de dispersion des petites perturbations $\hat{u}e^{ikx+\sigma t}$ de la solution $u = 0$ est

$$\tau_c \sigma = \mu - \xi^4 (k^2 - k_c^2)^2.$$

En déduire que $u = 0$ est instable pour $\mu > 0$, et que le mode marginal a pour nombre d'onde k_c . Tracer l'allure du taux de croissance $\sigma(k)$ au voisinage de k_c pour $\mu \lesssim 0$ et $\mu \gtrsim 0$.

- Montrer qu'à une distance $\mu = \epsilon^2$ du seuil, où ϵ est un petit paramètre, la largeur de la bande de nombres d'onde instables est $2\epsilon/k_c \xi^2$, et le taux de croissance d'ordre ϵ^2 . En déduire que les échelles temporelle et spatiale des variations lentes de l'amplitude sont

$$T = \epsilon^2 t, \quad X = \epsilon x, \quad X_2 = \epsilon^2 x.$$

(À l'ordre où une condition de solvabilité détermine l'équation d'enveloppe dominante, on montre ci-dessous que la dépendance spatiale « très lente » en X_2 n'intervient pas ; cette dépendance peut être omise pour simplifier les calculs.)

- Recherchant une solution sous la forme d'un développement

$$u(x, t) = \epsilon u_1(x, X, X_2, T) + \epsilon^2 u_2(x, X, X_2, T) + \dots$$

montrer que les dérivées successives sont données par

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \epsilon^3 \partial_T u_1 + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \partial_x u &= \epsilon \partial_x u_1 + \epsilon^2 (\partial_x u_2 + \partial_X u_1) + \epsilon^3 (\partial_x u_3 + \partial_X u_2 + \partial_{X_2} u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \partial_x^2 u &= \epsilon \partial_x^2 u_1 + \epsilon^2 (\partial_x^2 u_2 + 2\partial_x \partial_X u_1) \\ &\quad + \epsilon^3 (\partial_x^2 u_3 + 2\partial_x \partial_X u_2 + 2\partial_x \partial_{X_2} u_1 + \partial_X^2 u_1)) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \partial_x^3 u &= \epsilon \partial_x^3 u_1 + \epsilon^2 (\partial_x^3 u_2 + 3\partial_x^2 \partial_X u_1) \\ &\quad + \epsilon^3 (\partial_x^3 u_3 + 3\partial_x^2 \partial_X u_2 + 3\partial_x \partial_X^2 u_1 + 3\partial_x^2 \partial_{X_2} u_1)) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ \partial_x^4 u &= \epsilon \partial_x^4 u_1 + \epsilon^2 (\partial_x^4 u_2 + 4\partial_x^3 \partial_X u_1) \\ &\quad + \epsilon^3 (\partial_x^4 u_3 + 4\partial_x^3 \partial_X u_2 + 6\partial_x^2 \partial_X^2 u_1 + 4\partial_x^3 \partial_{X_2} u_1)) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \\ u \partial_x u &= \epsilon^2 u_1 \partial_x u_1 + \epsilon^3 (u_2 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x u_2 + u_1 \partial_X u_1) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

4. En déduire que la suite de problèmes linéaires à résoudre aux ordres ϵ , ϵ^2 et ϵ^3 , est

$$\begin{aligned} Lu_1 &:= -\xi^4(\partial_x^2 + k_c^2)^2 u_1 = 0, \\ Lu_2 &= \xi^4(4\partial_x^3 \partial_X + 4k_c^2 \partial_x \partial_X)u_1 + \gamma u_1 \partial_x u_1, \\ Lu_3 &= \tau_c \partial_T u_1 - u_1 + \xi^4(4\partial_x^3 \partial_X + 4k_c^2 \partial_x \partial_X)u_2 + \\ &\quad + \xi^4(4\partial_x^3 \partial_{X_2} + 6\partial_x^2 \partial_X^2 + 4k_c^2 \partial_x \partial_{X_2} + 2k_c^2 \partial_X^2)u_1 + \\ &\quad \gamma(u_2 \partial_x u_1 + u_1 \partial_x u_2 + u_1 \partial_X u_1). \end{aligned}$$

5. Montrer qu'à l'ordre ϵ , la solution est

$$u_1 = \frac{1}{2} A_1(X, X_2, T) e^{ik_c x} + c.c.$$

où $A_1(X, X_2, T)$ est l'enveloppe lentement variable du paquet d'ondes centré sur k_c .

6. Montrer qu'à l'ordre ϵ^2 , le membre de droite se réduit au terme non résonnant

$$\frac{ik_c \gamma}{4} A_1^2 e^{2ik_c x} + c.c.,$$

et que la solution est

$$u_2 = \frac{1}{2} A_2(X, X_2, T) e^{ik_c x} + \frac{1}{2} B_2(X, X_2, T) e^{2ik_c x} + c.c.$$

où le premier terme correspond à la solution générale de l'équation homogène, et le second est la solution particulière

$$B_2 = -\frac{i\gamma}{18\xi^4 k_c^3} A_1^2.$$

7. Montrer qu'à l'ordre ϵ^3 , le membre de droite est une somme d'exponentielles $e^{ink_c x}$, avec $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, et qu'en particulier les termes résonnants sont

$$\frac{1}{2} (\tau_c \partial_T - 1) A_1 - 2\xi^4 k_c^2 \partial_X^2 A_1 + \frac{ik_c \gamma}{4} B_2 A_1^*,$$

ainsi que leur complexe conjugué (les deux termes en $\partial_{X_2} A_1$ s'annulent).

8. En déduire que la condition de non-résonance (ou condition de solvabilité, ou alternative de Fredholm) correspond à l'équation de Ginzburg-Landau

$$\tau_c \partial_T A_1 = A_1 + \xi_c^2 \partial_{XX} A_1 - \kappa |A_1|^2 A_1, \quad \xi_c^2 = 4\xi^4 k_c^2, \quad \kappa = \frac{\gamma^2}{9\xi_c^2}.$$

10.7.2 Invariance par translation et invariance galiléenne

Montrer que les trois équations d'évolution suivantes satisfont l'invariance par translation, c'est-à-dire que si $u(x, t)$ est une solution alors $v(x, t) = u(x - \phi, t)$ est aussi une solution, mais que seule la dernière satisfait l'invariance galiléenne, c'est-à-dire que, si $u(x, t)$ est une solution, alors $v(x, t) = u(x - Vt, t) - V$ est aussi solution.

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Lu - u \partial_x u, \quad L = \mu - (\partial_x^2 + 1)^2, \\ \partial_t u &= Lu - u^3, \quad L = \partial_x^2 + 2\mu \partial_x^4 + \partial_x^6, \\ \partial_t u &= Lu - u \partial_x u, \quad L = \partial_x^2 + 2\mu \partial_x^4 + \partial_x^6. \end{aligned}$$

Chapitre 11

Systèmes dynamiques et bifurcations

11.1 Introduction

Un bon cadre mathématique des études de stabilité linéaire et non linéaire est la théorie des *équations différentielles ordinaires* (EDO), encore appelée théorie des systèmes dynamiques lorsque l'accent est mis sur une interprétation géométrique des concepts. L'objet de ce chapitre est de présenter les éléments de base de cette théorie, suivant un point de vue plus systématique et plus mathématique que dans le premier chapitre. Il s'agit en particulier de montrer comment s'effectue la réduction du nombre de degrés de liberté d'un problème, réduction qui conduit aux « formes normales » des bifurcations élémentaires souvent invoquées dans les chapitres précédents.

Malgré son caractère restrictif par rapport à la théorie des équations aux dérivées partielles de la physique, la théorie des systèmes dynamiques a révélé l'extraordinaire richesse et complexité des comportements possibles dès que des effets non linéaires interviennent. L'acte de naissance de cette théorie peut être situé dans l'œuvre de Henri Poincaré, en particulier dans ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892). Les idées de Poincaré furent ensuite développées dans la première moitié du xx^e siècle par l'École russe de Mathématiques. Puis la découverte qu'un système à petit nombre de degrés de liberté pouvait avoir des comportements chaotiques, imprévisibles, a suscité à partir des années 1960 une quantité considérable de travaux. Des concepts nouveaux ont été introduits, tels que le chaos déterministe, la sensibilité aux conditions initiales, qui ont sensiblement modifié notre perception de la nature (Prigogine & Stengers 1979 ; Bergé, Pomeau & Vidal 1984). Malgré son développement rapide, cette théorie est encore loin d'être complète, et les difficultés d'ordre mathématique et conceptuel ne manquent pas !

Le plan du chapitre est le suivant : on présente d'abord les notions d'espace des phases, de flot et d'attracteur (§11.2) qui permettent de reprendre l'étude

linéaire de stabilité dans un cadre géométrique (§11.3). On aborde ensuite les aspects non linéaires par l'étude des variétés invariantes et des formes normales (§11.4). Une présentation des questions de stabilité structurelle, de généréricité et de transversalité (§11.5) permet d'aborder l'étude des systèmes à paramètres, et donc des bifurcations locales de codimension 1 et 2 (§11.6).

Les points essentiels développés sont les suivants. Il s'agit d'abord de l'étude de la stabilité linéaire d'un point fixe. Il s'agit ensuite de la notion de projection de la dynamique d'un système à grand nombre de degrés de liberté sur une « surface » de faible dimension, la variété centrale ; c'est l'aspect le plus « technique » de ce chapitre. Il s'agit enfin de l'étude des bifurcations élémentaires de codimension un d'un point fixe.

De nombreuses illustrations des idées présentées ici, et des extensions vers l'étude du chaos, pourront être trouvées dans les ouvrages classiques de Bergé *et al.* (1984) et de Schuster & Wolfram (2005) ; un point de vue plus mathématique sera trouvé dans celui de Glendinning (1994) et dans ceux, plus avancés, de Guckenheimer & Holmes (1986) et de Demazure (1989). Pour un point de vue mettant en avant les symétries, voir les articles de revue de Crawford (1991) et de Crawford & Knobloch (1991).

11.2 Espace des phases, attracteurs

11.2.1 Flot engendré par un champ de vecteurs. Orbites dans l'espace des phases

Considérons un système physique dont l'état est entièrement déterminé par n grandeurs scalaires indépendantes et réelles $x_i(t)$, $i = 1, n$, appelées les degrés de liberté du système. L'état du système peut donc être représenté, à un instant donné, par un point dans un espace des phases $V \subset \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont les $x_i(t)$. Des « liaisons » peuvent assujettir les $x_i(t)$ à ne parcourir qu'une partie \mathbb{R} , ou bien les $x_i(t)$ peuvent n'être définis que *modulo* une certaine relation (les angles par exemple). Ainsi, V n'est souvent qu'une partie de \mathbb{R}^n , ou un sous-espace quotient (cylindre, sphère, tore, etc). Nous supposerons que l'on peut définir sur V un système global de coordonnées, *i.e.* que V est une variété (Arnold 1974, chap. 5).

Les équations d'évolution du système se présentent de façon très générale sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(\mu, \mathbf{x}, t), \quad (11.1)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur d'état, t est le temps en général, $\mu \in \mathbb{R}^m$ désigne les m paramètres du problème, et où \mathbf{X} définit un champ de vecteurs sur V . Le système (11.1) ne fait dépendre l'évolution du système que de son état actuel, et non de son histoire par exemple.

Lorsque le champ \mathbf{X} ne dépend pas explicitement du temps, le système est dit autonome; sinon, il est dit non autonome. Notons qu'un système non autonome peut toujours être ramené à un système autonome en introduisant un nouveau degré de liberté $\theta = t$, régi par l'équation $d\theta/dt = 1$.

Exemple 11.1. L'oscillateur de Van der Pol forcé, régi par l'équation

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = \cos \omega t,$$

peut se mettre sous la forme autonome

$$\dot{x} = y - \alpha(x^3/3 - x), \quad \dot{y} = -x + \cos \omega \theta, \quad \dot{\theta} = 1.$$

La dépendance du champ \mathbf{X} vis-à-vis de paramètres ne sera discutée qu'en fin de chapitre, si bien que nous pouvons omettre cette dépendance pour le moment. Pour un système autonome, le système d'équations (11.1) se réécrit alors

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (11.2)$$

Géométriquement, un tel système peut être interprété de deux façons : en termes de *flot* à t fixé, ou en termes de *trajectoire* d'un point particulier.

1. Ainsi, sous l'action du champ \mathbf{X} , une partie V_1 de la variété V va se trouver transportée au bout d'un temps t vers une autre partie $\phi_t(V_1)$ de \mathbb{R}^n . On appelle flot engendré par le champ de vecteurs \mathbf{X} l'application $\phi_t : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui réalise ce transport (figure 11.1a). Cette notion de flot nous permettra en particulier de définir les *sous-variétés invariantes* de V . Le flot ϕ_t et le champ de vecteurs \mathbf{X} sont reliés par

$$\frac{d}{dt} (\phi_t(\mathbf{x}))_{t=\tau} = \mathbf{X}(\phi_\tau(\mathbf{x})).$$

2. D'autre part, une solution $\mathbf{x}(t)$ de (11.2) correspondant à une condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ peut être représentée par une trajectoire, ou orbite, ou courbe intégrale dans l'espace des phases V (figure 11.1b). Précisément, cette trajectoire est l'image par le flot ϕ_t d'un intervalle $]t_1, t_2[$, le flot étant considéré comme une fonction de t à $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ fixé :

$$\phi(\mathbf{x}_0, \circ) :]t_1, t_2[\rightarrow \mathbb{R}^n.$$

On montre que, sous réserve que le champ de vecteurs \mathbf{X} soit continûment différentiable, l'équation (11.2) associée à une condition initiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ admet une solution unique (au moins « localement », *i.e.* dans un voisinage de $t = t_0$), et que cette solution dépend régulièrement de la condition initiale.

L'étude globale et qualitative d'un système différentiel tel que (11.2) consiste donc essentiellement en la détermination de la structure topologique de l'ensemble de ses solutions. Cette structure peut être représentée par le dessin de quelques trajectoires typiques, dessin appelé portrait de phase du système différentiel (figure 11.2).

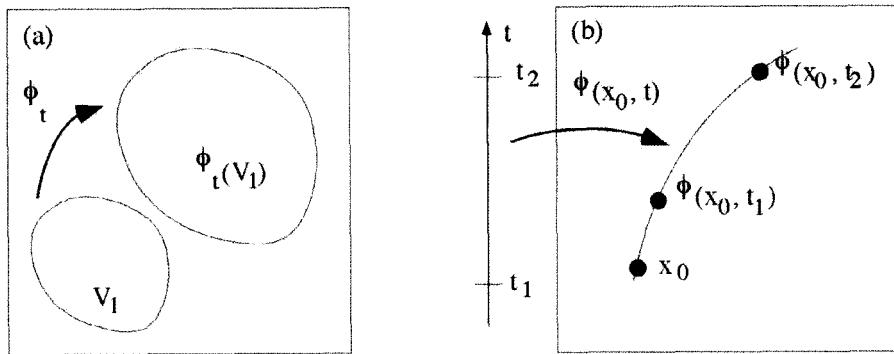


FIG. 11.1 – (a) Image par le flot ϕ_t d'une partie V_1 de V ; (b) trajectoire solution du système différentiel associé à une condition initiale.

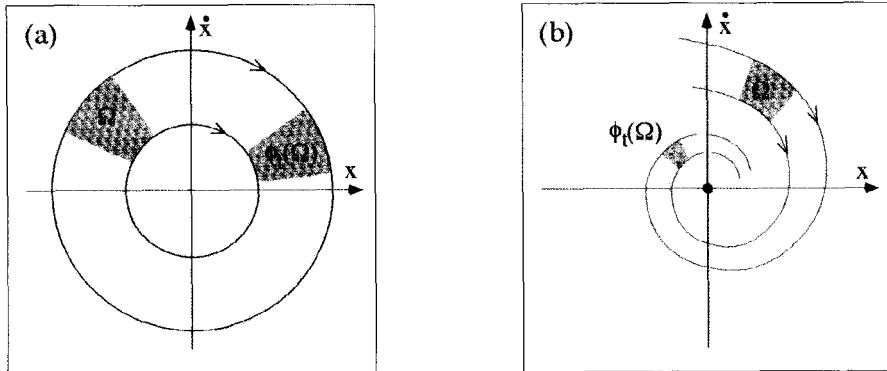


FIG. 11.2 – Portraits de phase du pendule dans l'espace des phases (x, \dot{x}) . (a) Pendule non amorti : conservation des aires ; (b) pendule amorti : contraction des aires.

11.2.2 Systèmes dissipatifs et conservatifs. Attracteurs

Les comportements les plus simples d'un système physique correspondent à des états stationnaires ou périodiques. Un état stationnaire correspond par définition à $dx/dt = 0$, et il est représenté dans l'espace des phases par un *point fixe* du système différentiel (11.2), correspondant à $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$. Un comportement périodique est représenté dans l'espace des phases par une *orbite périodique*. La détermination des orbites périodiques est en général plus difficile que celle des points fixes.

Exemple 11.2. Considérons un pendule amorti, de pulsation propre ω_0 et de coefficient d'amortissement β (on peut sans perte de généralité poser $\omega_0 = 1$ par un changement d'unité de temps). L'élongation x du pendule obéit au

principe fondamental de la dynamique

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + x = 0.$$

Cette équation différentielle du second ordre peut se mettre sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \beta y\end{aligned}$$

dont le seul point fixe dans l'espace des phases (x, \dot{x}) est l'origine $(0, 0)$. La trajectoire issue d'une condition initiale quelconque est une spirale convergant vers ce point fixe (figure 11.2b). Dans le cas du pendule non amorti ($\beta = 0$), l'origine demeure le seul point fixe, mais les trajectoires sont des cercles centrés sur l'origine (figure 11.2a).

Exemple 11.3. Considérons un oscillateur entretenu qui décrit en coordonnées polaires par le système dynamique

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

Pour $r > 1$, \dot{r} est négatif et pour $0 < r < 1$, \dot{r} est positif. L'origine $r = 0$ est donc un point fixe instable, mais le système admet $r = 1$ comme solution stable. Cette solution correspond à un comportement périodique de période 2π . Dans l'espace des phases, une trajectoire issue d'un point quelconque (hormis l'origine) converge vers le cercle $r = 1$. Sur ce cercle, l'énergie de l'oscillateur est constante, la dissipation étant compensée par l'apport extérieur d'énergie.

La différence essentielle entre systèmes dissipatifs et non dissipatifs (improprement appelés « conservatifs ») se traduit dans l'espace des phases par la propriété suivante : le flot engendré par le champ de vecteurs conserve les volumes pour un système non dissipatif, et les contracte ou les dilate pour un système dissipatif. Cette contraction est mesurée par la divergence du champ de vecteurs. La propriété « de compressibilité » des flots dissipatifs est illustrée sur la figure 11.2 dans le cas du pendule, pour lequel on peut vérifier que $\text{div} \mathbf{X} = -\beta$.

Pour un système dissipatif, les trajectoires convergent vers l'un de ses attracteurs, qui représentent les comportements asymptotiques du système. L'ensemble des conditions initiales à partir desquelles le système évolue vers un attracteur donné est appelé *bassin d'attraction* de cet attracteur. Dans un espace des phases de dimension deux, on montre que les seuls attracteurs possibles sont les points fixes et les orbites périodiques. En dimension supérieure, d'autres attracteurs peuvent exister : tores représentant des comportements périodiques ou quasi périodiques à plusieurs fréquences, ou « attracteurs étranges » représentant des comportements « chaotiques ». Un attracteur

étrange est caractérisé par sa structure fractale et par le fait que les trajectoires issues de deux points voisins divergent (tout en restant sur l'attracteur). Ce dernier phénomène très important est appelé sensibilité aux conditions initiales, et rend le système physique correspondant imprédictible du fait que les conditions initiales ne peuvent jamais être connues exactement (Bergé *et al.* 1984 ; Schuster & Wolfram 2005). Un exemple classique de système exhibant des comportements chaotiques est le système de Lorenz, brièvement décrit ci-dessous.

Exemple 11.4. À partir des équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, Lorenz (1963) a proposé le système très simplifié suivant pour décrire les mouvements de convection atmosphérique :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

où σ , r et b sont des constantes positives. L'étude classique consiste à fixer les constantes $\sigma = 10$ et $b = 8/3$ et à étudier les solutions pour r variable. Pour $r < 1$, l'origine est le seul point fixe et le seul attracteur. Pour $r = 1$, l'origine devient instable et deux autres points fixes apparaissent, stables tant que $r < 24,74$. Pour $r > 24,74$ apparaît un attracteur étrange.

11.2.3 Sections de Poincaré

La question de la stabilité des attracteurs et de leur persistance lorsqu'un paramètre varie est l'objet principal de la théorie des systèmes dynamiques dissipatifs. L'étude des points fixes, attracteurs les plus simples, fait l'objet de la suite de ce chapitre. L'étude d'une orbite périodique, plus difficile, peut dans une certaine mesure se ramener à celle d'un point fixe grâce à la notion d'application de premier retour dans une section de Poincaré. Cette notion est essentiellement une interprétation géométrique de la théorie de Floquet des équations différentielles à coefficients périodiques (Bergé *et al.* 1984). Considérons un espace des phases de dimension trois, et dans cet espace, une orbite périodique de période T d'un flot ϕ_t associé à un champ de vecteur $\mathbf{X}(\mathbf{x})$. Imaginons une section locale de cette orbite par un morceau de surface Σ , et soit \mathbf{p} leur intersection (figure 11.3).

L'application de premier retour P d'un ouvert $U \subset \Sigma$ dans Σ d'un point \mathbf{q} est définie par

$$P(\mathbf{p}) = \phi_\tau(\mathbf{q}), \quad (11.3)$$

où τ est la durée nécessaire au point $\mathbf{q} \in U$ pour retourner sur Σ sous l'action du flot. La durée τ dépend en général du point \mathbf{q} , avec $\tau \rightarrow T$ pour $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$ sur Σ . Le point \mathbf{p} est donc un point fixe de l'application P , et la stabilité de l'orbite sous l'action du flot ϕ_t est manifestement liée à la stabilité du point

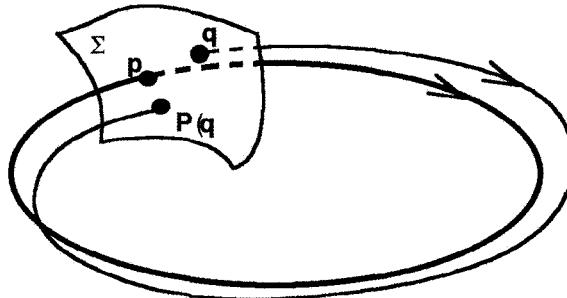


FIG. 11.3 – Section de Poincaré d'une orbite périodique.

fixe \mathbf{p} pour l'application P . On remarquera cependant que la définition de l'application de premier retour fait intervenir le flot ϕ_t , et requiert donc en général la connaissance des solutions du système différentiel !

L'intérêt de l'étude des applications de premier retour dépasse le cadre des sections de Poincaré. En effet, la modélisation de nombreux systèmes physiques se présente non pas sous la forme de systèmes différentiels, mais sous la forme de récurrences non linéaires ou « systèmes dynamiques discrets » du type

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad (11.4)$$

où \mathbf{F} est une application continûment différentiable. Il existe pour les systèmes discrets une théorie parallèle à celle des systèmes différentiels, mais cette théorie des systèmes discrets ne sera pas abordée ici. L'application « logistique » est un exemple simple de telles récurrences.

Exemple 11.5. L'application logistique est définie par

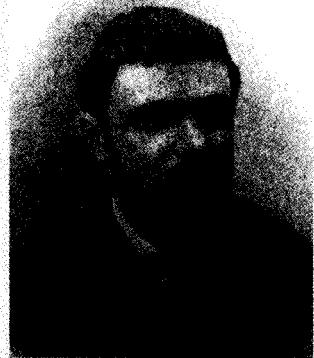
$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad x \in [0, 1], \lambda \in [0, 4].$$

Cette application possède une richesse de comportements surprenante qui, pour des valeurs croissantes du paramètre λ , vont du simple point fixe ($F(x) = x$) pour $\lambda < 0,75$, à des dynamiques périodiques ($F^p(x) = x, p \in \mathbb{N}$), puis chaotiques pour $\lambda > 0,89$. La séquence de ces comportements se retrouve pour toutes les fonctions F présentant un extremum quadratique, ce qui confère à cet exemple un caractère d'universalité, voir l'article de P. Coullet dans Bergé (1988).

L'attracteur de Hénon, autre exemple classique d'attracteur étrange, est étudié dans l'exercice 11.7.1.

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

Né à Nancy, France. Issu de la grande bourgeoisie lorraine, cousin de Raymond Poincaré, président de la République française de 1913 à 1920. Polytechnicien en 1875, Ingénieur des Mines. Docteur en Mathématiques de l'Université de Paris en 1879, sous la direction de Charles Hermite. Enseignant à Caen puis à Paris, nommé à la chaire de physique mathématique à la Sorbonne en 1881, ainsi qu'à l'École Polytechnique. Considéré comme le fondateur de la topologie algébrique et de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, auteur de contributions majeures à la théorie des nombres, il domine toutes les mathématiques de son temps. Inaugure une méthode novatrice d'étude des grands problèmes, en particulier celui de la résolution des équations différentielles, fondée sur une intuition géométrique de la situation : il est « le plus pénétrant critique des méthodes quantitatives, et le grand précurseur des méthodes qualitatives » (I. Ekeland). Remporte une compétition mathématique organisée par Oscar II, roi de Suède et de Norvège (1889), en montrant que la solution du « problème des trois corps » ne peut s'exprimer que par des séries divergentes ; la stabilité du système solaire ne peut donc être résolue pour les temps longs. Les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* en trois volumes publiés entre 1892 et 1899, et les *Leçons de mécanique céleste* (1905) sont des œuvres majeures qui ont fondé la théorie des systèmes dynamiques et du chaos. Passe tout près de la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein. Auteur de plusieurs livres d'histoire et de philosophie des sciences, creusant en particulier les rapports du raisonnement et de l'intuition, et la psychologie des découvertes scientifiques : *La Science et l'Hypothèse* (1901), *La Valeur de la Science* (1905), *Science et Méthode* (1908). Élu à l'Académie des Sciences en 1887, Académie qu'il préside à partir de 1906 ; seul membre élu dans chacune des cinq sections de Géométrie, de Mécanique, de Physique, de Géographie et de Navigation. Élu à l'Académie Française en 1908. Nombreux Prix et Distinctions. « La pensée n'est qu'un éclair entre deux longues nuits, mais c'est un éclair qui est tout. »



11.3 Étude du système linéarisé – Stabilité linéaire

Une première idée naturelle pour analyser le portrait de phases local autour d'un point fixe consiste à linéariser le champ de vecteurs : c'est le principe d'une étude de stabilité linéaire. Considérons donc le système différentiel (11.2) linéarisé en un point fixe \mathbf{a} , et soit $\mathbf{L} = D\mathbf{X}(\mathbf{a})$ l'opérateur linéarisé du champ \mathbf{X} calculé au point fixe \mathbf{a} . En dimension finie et dans une base donnée, la matrice de \mathbf{L} (notée \mathbf{L} également) est la matrice jacobienne de \mathbf{X} calculée au point \mathbf{a} , dont les éléments sont $\partial_{x_j} X_i(\mathbf{a})$, $i, j = 1, n$.

11.3.1 Solution du système linéarisé

La solution unique du système linéarisé associé à une condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ s'écrit (Arnold 1974, Glendinning 1994)

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{L}}\mathbf{x}_0, \quad (11.5)$$

où l'exponentielle de la matrice est définie par la série

$$e^{t\mathbf{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{L}^n. \quad (11.6)$$

On peut vérifier à partir de cette définition que si la matrice \mathbf{L} est de l'une des formes ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \rho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

alors l'exponentielle $e^{t\mathbf{L}}$ est respectivement égale à (voir exercice 11.7.2)

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.8)$$

Le premier cas correspond à deux valeurs propres réelles, le second à un couple de valeurs propres complexes conjuguées, et le troisième à une valeur propre double associée à un sous-espace propre de dimension un.

Dans le cas général, le calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice s'effectue à partir la forme de Jordan \mathbf{J} de la matrice \mathbf{L} , constituée de blocs du type ci-dessus. Notons \mathbf{P} la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres : \mathbf{P} est la matrice de changement de base. Cette matrice fait éventuellement intervenir des vecteurs propres généralisés, dans le cas de valeurs propres de multiplicité m dont le sous-espace propre est de dimension inférieure à m . Alors la forme de Jordan de \mathbf{L} est $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{P}$ et l'exponentielle $e^{t\mathbf{L}}$ s'écrit

$$e^{t\mathbf{L}} = \mathbf{P} e^{t\mathbf{J}} \mathbf{P}^{-1}. \quad (11.9)$$

Le calcul de la solution de quelques systèmes différentiels est proposé dans l'exercice 11.7.3.

11.3.2 Sous-espaces invariants

La matrice $e^{t\mathbf{L}} = D\phi_t(\mathbf{a})$ définit un flot linéaire, endomorphisme de l'espace vectoriel E tangent à V en \mathbf{a} , engendré par le champ de vecteurs linéaire \mathbf{Lx} . Dans une base propre, les équations différentielles associées à chacune des valeurs propres sont découplées et peuvent être intégrées séparément. Il s'ensuit que tout sous-espace propre de \mathbf{L} est invariant par le flot $D\phi_t(\mathbf{a})$. Considérons par exemple le sous-espace propre engendré par une valeur propre réelle simple λ_j . Dans une base propre, l'équation différentielle associée à λ_j s'écrit $dx_j/dt = \lambda_j x_j$ et pour toute condition initiale $(0, \dots, x_0, \dots, 0)$ sur le sous-espace propre, $\mathbf{x}(t) = (0, \dots, x_0 e^{\lambda_j t}, \dots, 0)$: le sous-espace associé à λ_j est invariant par le flot. De la même façon, un sous-espace de dimension deux associé à un couple de valeurs propres complexes conjuguées est invariant, ainsi qu'un sous-espace de dimension m associé à une valeur propre de multiplicité m .

On peut dès lors réaliser une partition de l'espace E en trois sous-espaces propres E^s , E^i et E^c , respectivement engendrés par les vecteurs propres associés aux valeurs propres à partie réelle négative, positive et nulle. Chacun de ces sous-espaces est invariant par le flot $e^{t\mathbf{L}}$. Ces sous-espaces E^s , E^i et E^c sont respectivement appelés sous-espace contractant (ou stable en ce sens que le flot attire vers le point fixe les points de E^s), dilatant (ou instable), et central (figure 11.4).

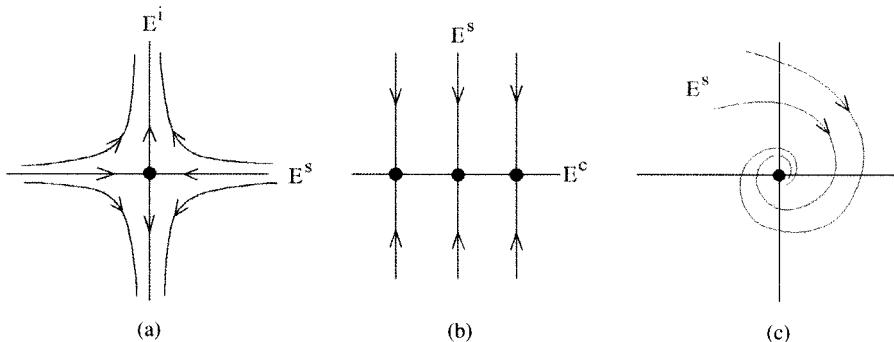


FIG. 11.4 – Exemples de sous-espaces invariants et portraits de phases correspondants. (a) $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$; (b) $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$; (c) $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$, $\rho < 0$.

11.3.3 Types de points fixes

Le type du point fixe dépend des valeurs propres de la matrice \mathbf{L} , racines du polynôme caractéristique. En dimension deux, ce type ne dépend que des valeurs de la trace et du déterminant de \mathbf{L} , comme discuté dans le premier chapitre, section 1.2.2 discussion résumée sur la figure 1.2.

En dimension supérieure à deux, on retrouve les mêmes types :

- lorsque les racines sont toutes réelles, certaines positives et d'autres négatives, le point fixe est appelé *col* ; un col est répulsif (instable) sauf pour des conditions initiales sur le sous-espace contractant ;
- lorsque les racines sont toutes réelles et de même signe, le point fixe est appelé *nœud*, attractif (stable) si les racines sont négatives, et répulsif (instable) sinon ;
- lorsque les racines sont complexes, le point fixe est appelé *foyer*, attractif (stable) si les parties réelles sont toutes négatives, et répulsif (instable) sinon ;
- lorsque les racines sont imaginaires pures, le point fixe est un *centre*.

Si la partie réelle de chacune des valeurs propres est non nulle, le point fixe est dit hyperbolique ; sinon, le point fixe est dit non hyperbolique (il existe une valeur propre dont la partie réelle est nulle).

11.3.4 « Ressemblance » des champs non linéaire et linéarisé

L'étude du portrait de phase du système linéarisé autour d'un point fixe étant faite, se pose alors la question de la « ressemblance » du système linéarisé avec le système initial. Intuitivement, on peut dire que deux champs se ressemblent si, à chaque trajectoire de l'un, on peut faire correspondre une trajectoire de l'autre. Plus précisément, on dit que deux champs \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 sont orbitalement (ou topologiquement) équivalents s'il existe un homéomorphisme \mathbf{h} (l'application \mathbf{h} et son inverse existent et sont continues) qui transforme chaque trajectoire de \mathbf{X}_1 en une trajectoire de \mathbf{X}_2 , en conservant le sens de parcours. On montre alors (théorème de Hartman-Grobman) qu'un champ \mathbf{X} continulement différentiable sur une variété V , et son linéarisé \mathbf{L} en un point fixe \mathbf{a} , sont topologiquement équivalents si toutes les valeurs propres de \mathbf{L} ont leur partie réelle non nulle, *i.e.* si le point fixe est hyperbolique.

Ainsi, d'après le théorème de Hartman-Grobman, si le point fixe \mathbf{a} est hyperbolique (les valeurs propres ont toutes une partie réelle non nulle), la procédure de linéarisation permet d'obtenir le type topologique du point fixe (noeud, foyer, col, etc.) et permet de tracer l'allure du portrait de phase dans son voisinage. Si \mathbf{a} n'est pas hyperbolique, la linéarisation n'apporte aucun renseignement sur la stabilité du point fixe, laquelle est déterminée par les termes de degré supérieur. Seule la prise en considération de ces termes de degré supérieur dans \mathbf{X} permet d'ébaucher un portrait de phase : on rentre là dans le domaine de la stabilité non linéaire.

Exemple 11.6. Considérons le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{X}(x, y) = (y + x\phi(x^2 + y^2), -x + y\phi(x^2 + y^2)), \quad (11.10)$$

où ϕ est une fonction telle que $\phi(0) = 0$. Le champ linéarisé est $\mathbf{L}(x, y) = (y, -x)$, et admet deux valeurs propres complexes conjuguées. Le point fixe n'est donc pas hyperbolique, et les trajectoires de \mathbf{L} sont des cercles centrés sur l'origine. L'allure du portrait de phases de \mathbf{X} dépend en revanche du choix de la fonction ϕ . Passons en coordonnées polaires (r, θ) : les trajectoires sont alors définies par l'équation $dr/d\theta = r\phi(r^2)$. Pour toute valeur de r annulant ϕ , le cercle de rayon r est une trajectoire de \mathbf{X} . Si par exemple la fonction ϕ s'annule pour deux valeurs a et b du rayon r , en étant positive entre a et b , alors toute trajectoire issue d'un point de l'anneau compris entre $r = a$ et $r = b$ tend vers le cercle extérieur de rayon b . Il y a donc au moins autant de portraits de phases non orbitalement équivalents que de façons de choisir les zéros de la fonction ϕ !

Notons que la ressemblance définie ci-dessus ne retient que les propriétés topologiques des trajectoires et oublie la loi du mouvement (la période d'une orbite fermée par exemple). La définition d'une ressemblance plus forte entre le champ \mathbf{X} et son linéarisé \mathbf{L} , qui conserverait la loi du mouvement sur les trajectoires, est possible : elle requiert la différentiabilité de l'homéomorphisme de transport \mathbf{h} (*i.e.* que ce dernier soit un difféomorphisme). Leur ressemblance sera même d'autant plus forte que la classe de différentiabilité de \mathbf{h} sera plus élevée. Mais cette différentiabilité fait alors apparaître des *conditions de non-résonance* entre les valeurs propres de \mathbf{L} (théorème de Sternberg).

Exemple 11.7. Considérons le champ de vecteurs donné par

$$\mathbf{X}(x, y) = (2x + y^2, y). \quad (11.11)$$

Le champ linéarisé à l'origine est $\mathbf{L}(x, y) = (2x, y)$, et les flots engendrés par \mathbf{L} et \mathbf{X} sont respectivement

$$\phi_t^{\mathbf{L}}(x, y) = (xe^{2t}, ye^t), \quad \phi_t^{\mathbf{X}}(x, y) = ((x + ty^2)e^{2t}, ye^t). \quad (11.12)$$

Ces flots se ressemblent « à l'œil », on peut montrer qu'ils sont topologiquement équivalents, mais l'application qui permet de transformer les trajectoires de l'un en trajectoires de l'autre est de classe C^1 au plus. En effet, cherchons à construire deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, de jacobien non nul en 0, avec

$$\phi_t^{\mathbf{L}}(f(x, y), g(x, y)) = (f(\phi_t^{\mathbf{X}}(x, y)), g(\phi_t^{\mathbf{X}}(x, y))). \quad (11.13)$$

Cela donne en particulier

$$e^{2t}f(x, y) = f((x + ty^2)e^{2t}, ye^t). \quad (11.14)$$

Or, on peut vérifier, en dérivant deux fois par rapport à y , que dès que f est de classe C^2 , cette dernière relation, même pour une seule valeur non nulle de t , implique que les deux dérivées partielles de f en 0 sont nulles.

11.4 Variétés invariantes et formes normales

L'étude linéaire de stabilité d'un point fixe permet de tracer le portrait de phase autour du point fixe si le point fixe est hyperbolique, *i.e.* si toutes les valeurs propres ont une partie réelle non nulle. Lorsque le point fixe n'est pas hyperbolique, l'étude linéaire de stabilité n'est pas suffisante et il faut donc prendre en compte les non-linéarités. Nous allons donc généraliser la notion de sous-espace tangent invariant à celle de sous-variété (ou simplement variété) invariante. Apparaîtra alors le rôle essentiel joué par la variété centrale, sur laquelle nous chercherons à simplifier le champ de vecteurs par le calcul de sa forme normale. Insistons sur le fait que les méthodes introduites ci-dessous ne sont applicables que localement au voisinage d'un point fixe (ou d'une orbite périodique).

11.4.1 Variétés stable et instable d'un point fixe hyperbolique

Nous avons introduit précédemment les sous-espaces propres E^s et E^i , invariants par le flot linéarisé. On peut généraliser la notion de sous-espace invariant aux flots non linéaires, au moins localement dans un voisinage U du point fixe \mathbf{a} , et définir les variétés stable V^s et instable V^i . C'est le théorème de la variété stable : pour tout point fixe \mathbf{a} hyperbolique d'un système différentiel, il existe une variété stable et une variété instable, définies par

$$V^s(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{a} \text{ pour } t \rightarrow \infty \text{ et } \phi_t(\mathbf{x}) \in U \forall t \geq 0\}, \quad (11.15)$$

$$V^i(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in U \mid \phi_t(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{a} \text{ pour } t \rightarrow -\infty \text{ et } \phi_t(\mathbf{x}) \in U \forall t \leq 0\}, \quad (11.16)$$

respectivement de même dimension que E^s et E^i , et tangentes à E^s et E^i au point \mathbf{a} (figure 11.5). Ces variétés sont uniques et aussi régulières que le champ \mathbf{X} .

Ces variétés peuvent être représentées par le graphe d'une fonction de la manière suivante. Supposons que le système différentiel, que nous notons ici $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{z})$, se présente sous sa forme de Jordan. Posons $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x} \in E^i$, $\mathbf{y} \in E^s$. Soit \mathbf{L}_+ (resp. \mathbf{L}_-) la restriction de \mathbf{L} à E^i (resp. E^s). Le système peut alors s'écrire

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{L}_+ \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (11.17)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{L}_- \mathbf{y} + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (11.18)$$

Déterminons par exemple la variété instable V^i . Puisque V^i est tangente à E^i en \mathbf{a} , on peut localement la décrire par

$$V^i = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \text{ et } D\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}, \quad (11.19)$$

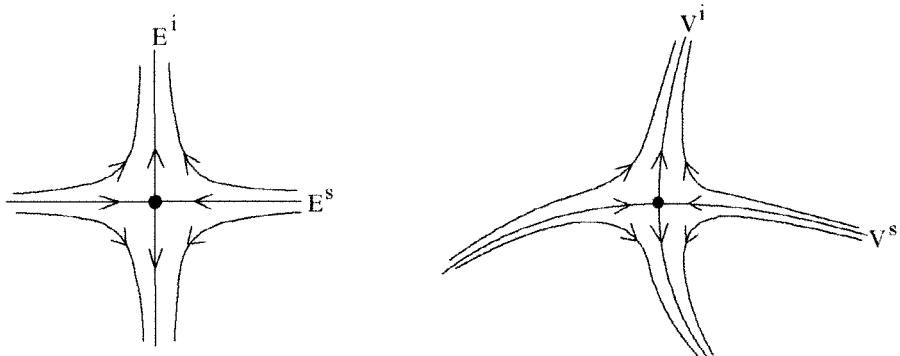


FIG. 11.5 – Sous-espaces tangents invariants E^s et E^i et variétés invariantes V^s et V^i .

où \mathbf{h} est une application de E^i dans E^s (figure 11.6). Cette application peut être déterminée à partir des deux expressions suivantes de $\dot{\mathbf{y}}$ sur la variété instable (où $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$) :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{L}_- \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})), \quad (11.20)$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{h}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{h}(\mathbf{x})(\mathbf{L}_+ \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))). \quad (11.21)$$

L'identification de ces deux expressions de $\dot{\mathbf{y}}$ conduit à une équation aux dérivées partielles pour $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, qui permet de calculer successivement les coefficients du développement de Taylor de \mathbf{h} au point fixe \mathbf{a} . Notons que les premiers termes non nuls de ce développement sont d'ordre deux au moins.

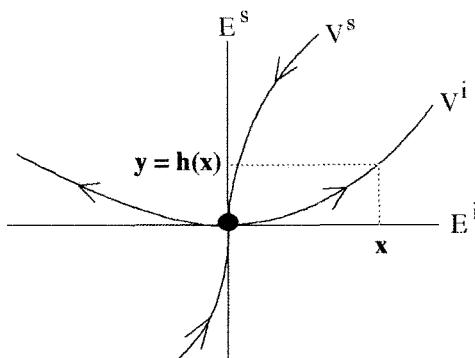


FIG. 11.6 – Sous-espaces propres et variétés correspondantes d'un point fixe hyperbolique et application \mathbf{h} définissant la variété instable.

Exemple 11.8. Soit à déterminer les variétés stable et instable du système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + X(x, y), & X(x, y) &= 0, \\ \dot{y} &= -y + Y(x, y), & Y(x, y) &= ax^2.\end{aligned}$$

Le seul point fixe de ce système est l'origine, les valeurs propres du système linéarisé sont 1 et -1 , et les sous-espaces propres associés sont respectivement l'axe $0x$ et l'axe $0y$. On recherche la variété instable sous la forme $y = h(x)$. L'identification des deux expressions de \dot{y} sur la variété instable :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -y + Y(x, h(x)), \\ \dot{y} &= h'(x)\dot{x} = h'(x)(x + X(x, h(x))),\end{aligned}$$

et la recherche de $h(x)$ sous la forme d'un développement polynômial $h(x) = \sum_i h_i x^i$ conduit à

$$-\sum_i h_i x^i + ax^2 = \sum_i i h_i x^i,$$

d'où on déduit $h_2 = a/3$ et $h_i = 0$ pour $i \geq 3$. La variété instable est donc définie par $y(x) = ax^3/3$.

Des calculs de variétés stables et instables sont proposés dans les exercices 11.7.4 et 11.7.5.

11.4.2 Variété centrale

Dans le cas d'un point fixe non hyperbolique \mathbf{a} , on est tenté de généraliser les définitions précédentes et d'introduire, en plus des variétés stable et instable, une variété centrale tangente en \mathbf{a} au sous-espace central. On démontre effectivement (théorème de la variété centrale) qu'une telle variété centrale V^c existe et qu'elle est de même dimension que E^c , mais deux difficultés techniques surgissent qui n'étaient pas présentes dans le théorème de la variété stable : (i) V^c n'est pas nécessairement unique et (ii) si \mathbf{X} est de classe C^r , V^c est de classe C^{r-1} seulement. Ces deux dernières précisions sont mineures pour ce qui nous intéresse, voir Guckenheimer & Holmes (1983, p. 124).

La détermination de la variété centrale par une fonction $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ s'effectue exactement comme celle des variétés stable et instable. Dans le cas physiquement le plus important où toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative sauf quelques-unes dont la partie réelle est nulle, il suffit de reprendre les équations (11.17–11.21) en remplaçant, \mathbf{L}_+ , V^i et E^i par \mathbf{L}_0 , V^c et E^c . La fonction $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ est alors solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathbf{L}_- \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = D\mathbf{h}(\mathbf{x})(\mathbf{L}_0 \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))), \quad (11.22)$$

qui peut être résolue en recherchant $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ sous la forme d'un développement de Taylor.

Exemple 11.9. Considérons le système différentiel (Guckenheimer & Holmes 1983, p. 132)

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -v + \alpha u^2 + \beta uv.\end{aligned}$$

L'origine est l'unique point fixe et les valeurs propres du système linéarisé sont 0 et -1 . Par un changement de variables utilisant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

le système peut être mis sous la forme standard où la partie linéaire est sous forme de Jordan (ici diagonale) :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (\alpha(x+y)^2 - \beta y(x+y)).$$

Puisque E^c et E^s sont ici de dimension un, l'application $y = h(x)$ est une fonction à valeurs réelles et l'équation (11.22) devient

$$h'(x) (\alpha(x+h(x))^2 - \beta h(x)(x+h(x))) = -h(x) - \alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x)+h^2(x)),$$

avec

$$h(0) = h'(0) = 0.$$

Substituant dans cette équation le développement $h(x) = ax^2 + bx^3 + \dots$, les coefficients a, b, \dots peuvent être déterminés. Ainsi

$$h(x) = -\alpha x^2 + \alpha(4\alpha - \beta)x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Toujours dans le cas physiquement le plus important où toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative sauf quelques-unes dont la partie réelle est nulle, tout état initial relaxe rapidement sur la variété centrale. La dynamique du système sur cette variété est donc très importante puisqu'elle représente le comportement asymptotique du système, et elle est gouvernée par le système (11.17-11.18) avec \mathbf{L}_0 à la place de \mathbf{L}_+ et $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$. La variété centrale étant tangente au sous-espace propre central E^c , une bonne approximation de cette dynamique asymptotique est donnée par sa projection sur E^c :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{L}_0 \mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})). \quad (11.23)$$

Exemple 11.10. Poursuivant l'étude de l'exemple précédent, une bonne approximation de la dynamique sur la variété centrale est

$$\dot{x} = \alpha x^2 + \alpha(\beta - 2\alpha)x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

Remarquons que, au second ordre, on obtient le même résultat sans calculer la variété centrale, en insérant dans l'équation (11.23) l'approximation $h(x) = 0 + \mathcal{O}(x^2)$, dite approximation de l'espace tangent.

Un calcul de variété centrale est proposé dans l'exercice 11.7.6.

11.4.3 Forme normale d'un champ de vecteurs

Calculer la forme normale d'un champ de vecteurs, c'est rechercher une transformation des coordonnées qui simplifie autant que possible l'expression de ce champ de vecteurs. Pour suggérer l'existence d'une telle transformation, considérons un champ de vecteurs linéaire : on imagine sans peine qu'une transformation non linéaire peut transformer ce champ linéaire en un champ non linéaire ; les non-linéarités ainsi apparues ne sont que des complications dues à un système de coordonnées inadapté au problème. Réciproquement, on peut se demander si, pour un champ non linéaire donné, certaines non-linéarités (voire toutes) ne sont pas dues au fait que le système de coordonnées adopté n'est pas optimal.

Nous allons montrer qu'en effet, on peut trouver un système de coordonnées curvilignes « naturel » dans lequel le système dynamique est plus simple à étudier : c'est le théorème de la forme normale. Par ailleurs, un tel système de coordonnées peut révéler des propriétés du système, propriétés de symétrie en particulier, cachées dans la formulation initiale. Cependant, il s'avère que certaines non-linéarités résistent à toute transformation de coordonnées et ne peuvent donc pas être éliminées. Ces non-linéarités irréductibles dites résonnantes sont les non-linéarités significatives du point de vue de la dynamique du système. Ainsi par exemple, le système différentiel

$$\dot{x} = 2x + y^2, \quad \dot{y} = y, \quad (11.24)$$

ne peut s'écrire

$$\dot{u} = 2u, \quad \dot{v} = v, \quad (11.25)$$

dans aucun système de coordonnées locales (u, v) : la non-linéarité y^2 est résonnante.

Considérons donc un système différentiel défini par un champ de vecteurs régulier sur une variété V de dimension n . L'origine est supposée être un point fixe, au voisinage duquel le champ est développable en série de Taylor :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{X}_2(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{X}_N(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{N+1}). \quad (11.26)$$

$\mathbf{L} = D\mathbf{X}(\mathbf{0})$ est l'opérateur jacobien de \mathbf{X} , supposé diagonal, et \mathbf{X}_r est la fonction vectorielle dont les n composantes X_{ri} contiennent les termes de degré $r \geq 2$. Définissant

$$M_r = \{\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \quad \text{avec} \quad \sum m_j = r\},$$

$\mathbf{X}_r(\mathbf{x})$ peut s'écrire

$$\mathbf{X}_r(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m} \in M_r} \mathbf{X}_{\mathbf{m}} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{\mathbf{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} \quad (11.27)$$

où les \mathbf{X}_m sont des vecteurs dont les n composantes représentent les coefficients des monômes de degré r . Par exemple, en dimension deux, $M_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $M_2 = \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ et \mathbf{X}_2 s'écrit

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_{(2,0)}x^2 + \mathbf{X}_{(1,1)}xy + \mathbf{X}_{(0,2)}y^2. \quad (11.28)$$

Le calcul de la forme normale du champ $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ consiste à construire une séquence de transformations des coordonnées conservant la partie linéaire \mathbf{L} du champ (transformations dites « presqu'identité »), qui permettent d'éliminer autant que possible les termes non linéaires d'ordre successif. Considérons donc un système différentiel de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{X}_r(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{r+1}), \quad r \geq 2, \quad (11.29)$$

et recherchons une transformation des coordonnées de la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \phi_r(\mathbf{x}), \quad r \geq 2, \quad (11.30)$$

où ϕ_r ne contient que des termes de degré r , qui permettrait d'exprimer, dans les nouvelles coordonnées, le système (11.29) sous la forme

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ly} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1}), \quad r \geq 2. \quad (11.31)$$

Si cette transformation existe, on pourra ainsi, en réitérant l'opération, éliminer successivement tous les termes non linéaires.

Raisonnons sur les composantes du système différentiel. La i -ème composante de la transformation (11.30) est

$$y_i = x_i + \sum_{\mathbf{m} \in M_r} \phi_{\mathbf{m},i} \mathbf{x}^{\mathbf{m}}, \quad (11.32)$$

transformation dont l'inverse s'écrit

$$x_i = y_i - \sum_{\mathbf{m} \in M_r} \phi_{\mathbf{m},i} \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1}) \quad (11.33)$$

(on pourra se convaincre de cette inversion en prenant un exemple en dimension un, et un polynôme du second degré : $y = x + ax^2$). L'écriture du système sous la forme (11.31) s'obtient en dérivant (11.32) par rapport au temps :

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i + \sum_{\mathbf{m} \in M_r} \phi_{\mathbf{m},i} \frac{d\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{dt}. \quad (11.34)$$

Utilisant successivement (11.29) puis (11.33) avec $\mathbf{x}^{\mathbf{m}} = \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1})$, \dot{x}_i peut s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \lambda_i x_i + \sum_{\mathbf{m} \in M_r} X_{\mathbf{m},i} \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \\ &= \lambda_i y_i - \lambda_i \sum_{\mathbf{m} \in M_r} \phi_{\mathbf{m},i} \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \sum_{\mathbf{m} \in M_r} X_{\mathbf{m},i} \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1}). \end{aligned} \quad (11.35)$$

D'autre part, en définissant $(\mathbf{m}, \lambda) = \sum_{k=1,n} m_k \lambda_k$, la dérivée de $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$ s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}^{\mathbf{m}}}{dt} &= \sum_{k=1,n} \frac{\dot{x}_k}{x_k} m_k \mathbf{x}^{\mathbf{m}} \\ &= (\mathbf{m}, \lambda) \mathbf{x}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{r+1}) \\ &= (\mathbf{m}, \lambda) \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1}).\end{aligned}\quad (11.36)$$

Reportant (11.35) et (11.36) dans (11.34), on obtient une approximation du système dynamique dans les coordonnées transformées :

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sum_{\mathbf{m} \in M_r} X_{\mathbf{m},i} - (\lambda_i - (\mathbf{m}, \lambda)) \phi_{\mathbf{m},i} \mathbf{y}^{\mathbf{m}} + \mathcal{O}(|\mathbf{y}|^{r+1}). \quad (11.37)$$

Il apparaît donc que si pour tout $\mathbf{m} \in M_r$, sont vérifiées les conditions dites *conditions de non-résonance* à l'ordre r des valeurs propres :

$$\lambda_i - (\mathbf{m}, \lambda) \neq 0, \quad (11.38)$$

on peut choisir les $\phi_{\mathbf{m},i}$ de façon à annuler les termes d'ordre r . Le changement de coordonnées recherché est donc explicité par les relations :

$$\phi_{\mathbf{m},i} = \frac{X_{\mathbf{m},i}}{\lambda_i - (\mathbf{m}, \lambda)}. \quad (11.39)$$

S'il apparaît que pour un $\mathbf{m} \in M_r$ particulier, la condition de non-résonance n'est pas vérifiée, le monôme correspondant est dit résonnant et ne peut être éliminé. Notons que le caractère résonnant ou non d'un terme non linéaire ne dépend que des valeurs propres et donc des termes linéaires. Quelques remarques :

1. Le membre de droite de l'équation (11.37) ne comporte, en-dehors du terme linéaire $\lambda_i y_i$, que des termes de degré r ou plus. En particulier si $\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{r-1}$ étaient nuls avant la transformation, ils sont toujours nuls après.
2. On peut vérifier que les termes résonnantes apparus à l'ordre r ne sont pas modifiés par les transformations suivantes visant à éliminer les termes d'ordre supérieur à r . Par contre, les non-linéarités de degré supérieur à r sont en général modifiées.
3. La discussion qui précède repose sur l'hypothèse que le point fixe est hyperbolique et que \mathbf{L} est diagonale. L'argumentation peut être généralisée au cas non hyperbolique et \mathbf{L} non diagonale, voir Guckenheimer & Holmes (1983, §3.3) et Elphick *et al.* (1987) pour une présentation plus formelle et générale.

Nous voilà donc en possession des deux outils fondamentaux d'étude d'un système d'équations différentielles :

- Le théorème de la variété centrale qui permet de focaliser l'étude sur le comportement asymptotique du système sur la variété centrale de basse dimension (en pratique, on se contente de la projection de la dynamique sur le sous-espace central).
- Le théorème de la forme normale qui permet de simplifier l'expression du système différentiel sur la variété centrale, en introduisant un système de coordonnées adapté.

Les exercices 11.7.7 et 11.7.8 proposent des calculs de résonance et de forme normale.

11.5 Stabilité structurelle et générnicité

11.5.1 Position du problème

La question que nous abordons ici, et qui nous conduira à l'étude des bifurcations, est la suivante : pour un système donné, que se passe-t-il si l'un des paramètres du système varie ? Le portrait de phase demeure-t-il qualitativement le même, ou subit-il de profonds changements, tels que la modification du type d'un point fixe, ou sa disparition ?

Une autre question, essentielle du point de vue physique, est la suivante : le système d'équations retenu est-il suffisamment « robuste » pour rendre compte des phénomènes observés ? Un effet négligé dans la modélisation, et dont la prise en compte se traduirait par un système d'équations « voisin », ne serait-il pas susceptible de bouleverser la nature des solutions ? En d'autres termes, le système d'équations est-il suffisamment général ? Que se passe-t-il si on le « perturbe » en lui ajoutant un terme petit ?

Considérons à titre d'illustration un oscillateur déjà présenté au premier chapitre : une barre articulée à son pied et assujettie à se déplacer dans un plan vertical (figure 11.7). Cette barre est soumise à la gravité et à une force de rappel par deux ressorts identiques. La modélisation classique de ce système conduit à l'équation du mouvement suivante, avec les échelles de temps et de longueur appropriées :

$$\ddot{\theta} = \sin \theta - \mu_1 \theta. \quad (11.40)$$

Notons que ce système possède la symétrie de réflexion $\theta \rightarrow -\theta$. Lorsque la « raideur » μ_1 des ressorts est suffisante, la position verticale $\theta = 0$ est la seule position d'équilibre et cet équilibre est stable. Si cette raideur est inférieure à une valeur critique μ_{1c} , la position verticale devient instable et il apparaît deux positions d'équilibre stable symétriques par rapport à la verticale (figure 11.7b). Le système différentiel correspondant à $\mu_1 = \mu_{1c}$ avec $\mu_x = 1$ est donc très particulier, puisqu'il existe des valeurs μ_1 aussi voisines

que l'on veut de μ_{1c} pour lesquelles le système possède deux points fixes et dont le portrait de phases dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$ est topologiquement différent. Le système correspondant à $\mu_1 = \mu_{1c}$ est dit structurellement instable, et à la valeur critique $\mu_1 = \mu_{1c}$ correspond une *bifurcation*, notion développée dans la section suivante. Le nombre et la nature des positions d'équilibre peuvent être représentées en fonction de la raideur sur un *diagramme de bifurcation* (figure 11.7b). Les notions de stabilité « ordinaire » et de stabilité structurelle doivent être bien distinguées : la première est relative à une solution d'un système particulier et la seconde est relative au système lui-même.

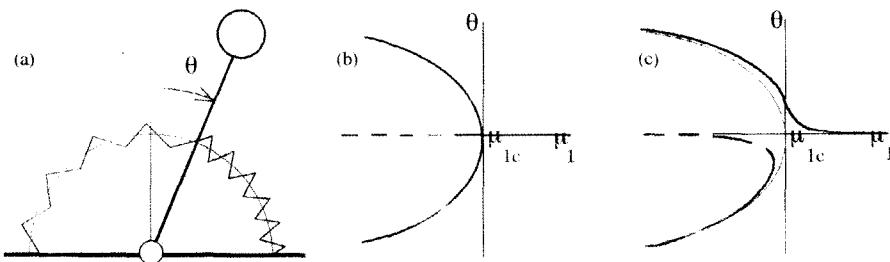


FIG. 11.7 – (a) Système physique considéré, et diagrammes de bifurcation : (b) $\mu_2 = 0$; (c) $\mu_2 \neq 0$. (—) : branches d'équilibres stables; (---) : branches d'équilibres instables.

Le modèle qui vient d'être discuté suppose la symétrie $\theta \rightarrow -\theta$ du système physique. Prenons maintenant en compte la possibilité d'une dissymétrie dans la raideur ou dans la précontrainte des ressorts, ou d'un défaut d'horizontalité de leur plan d'ancrage. Cette prise en compte introduit un second paramètre μ_2 , que nous supposons petit. La modélisation devient

$$\ddot{\theta} = \sin \theta - \mu_1 \theta + \mu_2. \quad (11.41)$$

La symétrie $\theta \rightarrow -\theta$ est maintenant rompue. Le diagramme de bifurcation est alors qualitativement modifié (figure 11.7c). Par exemple, pour μ_1 légèrement inférieur à μ_{1c} , il n'existe plus qu'une position d'équilibre, conformément à ce qui pourrait être observé expérimentalement. Dans le plan des paramètres, le lieu des points correspondant à une bifurcation est donné par une courbe $f(\mu_1, \mu_2) = 0$. On peut montrer que le modèle incluant μ_2 représente correctement le système physique quelles que soient ses imperfections « cachées » : on dit que ce dernier modèle est *générique*.

Considérons comme deuxième exemple les lois de Descartes de réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir plan. Ces lois sont correctement vérifiées par l'expérience, en dépit des inévitables défauts de planéité du miroir ou d'homogénéité de ses propriétés réfléchissantes. Ainsi, l'hypothèse de miroir parfaitement plan est inoffensive, contrairement à l'hypothèse de symétrie de l'exemple précédent. Ce type d'hypothèse permet de « cacher » sans dommage

de nombreux paramètres liés aux imperfections de l'objet physique. Les lois de Descartes sont génériques.

11.5.2 Stabilité structurelle et générnicité : définitions

Rappelons les deux questions posées en introduction de cette section :

- Les petites déformations d'un champ de vecteurs, induites par exemple par la variation d'un paramètre, ressemblent-elles au champ initial (stabilité structurelle) ?
- Un champ pris au hasard est-il représentatif de l'ensemble des champs dans lequel il est pris (générnicité) ?

Il s'agit maintenant de préciser les notions de stabilité structurelle et de générnicité. Ces notions sont en fait reliées à une vieille question de géométrie, celle de « position générale », qui s'est formalisée avec l'introduction des notions mathématiques d'ensemble ouvert et d'ensemble dense, dont nous rappelons la signification à partir d'un exemple simple.

Considérons l'ensemble des triplets de droites du plan, muni d'une topologie adéquate permettant de préciser ce que l'on entend par « distance de deux triplets ». D'une part, toute déformation d'un triangle, pourvu qu'elle soit petite, reste un triangle : l'ensemble des triplets formant un triangle est ouvert dans l'ensemble des triplets de droites du plan. D'autre part, un triplet de droites forme « presque toujours » un triangle. « Presque toujours » signifie que les triplets qui ne forment pas un triangle sont rares, et qu'il existe toujours une déformation, aussi petite que l'on veut, qui transformera un tel triplet en un triplet formant un triangle. On dit que l'ensemble des triplets formant un triangle est dense dans l'ensemble des triplets de droites du plan.

Les notions d'ensemble ouvert et d'ensemble dense étant rappelées, nous pouvons énoncer les définitions d'un *champ structurellement stable* et d'un *champ générique*.

Définition. Soit $E^1(V)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs de classe C^1 sur une variété V compacte (par exemple les parties fermées et bornées de \mathbb{R}^n). Un champ de vecteurs \mathbf{X} de $E^1(V)$ est dit *structurellement stable* s'il existe un ouvert Ω de $E^1(V)$ contenant \mathbf{X} tel que tout élément de Ω est orbitalement équivalent à \mathbf{X} (c'est-à-dire si pour tout élément \mathbf{X}' de Ω , il existe un homéomorphisme \mathbf{h} qui transforme chaque trajectoire de \mathbf{X}' en une trajectoire de \mathbf{X}).

Définition. Une propriété d'un champ de vecteurs est dite *générique* si elle est vérifiée pour tout champ pris « au hasard », i.e. si l'ensemble des champs la vérifiant forme une partie dense dans $E^1(V)$.

Une question maintenant naturelle et fondamentale est de savoir si, comme le « bon sens » le suggère, un champ générique (pris au hasard) est structurellement stable (invariant par petites déformations). Plus précisément, il s'agit de déterminer quels sont les champs structurellement stables et les champs génériques, et de définir des relations, d'inclusion en particulier, entre ces deux ensembles de champs. Le problème est purement mathématique, et son étude sort du cadre de ce cours. Disons simplement que la classification est complète en dimension deux, mais on ne dispose que de peu de résultats en dimension supérieure. Nous ne donnons ici que les résultats dont nous avons besoin pour la suite.

11.5.3 Conditions de stabilité structurelle

Une première condition nécessaire : l'hyperbolicité

Un des résultats essentiels est qu'une condition nécessaire de stabilité structurelle d'un champ de vecteurs est que tous ses points fixes et orbites périodiques soient hyperboliques. Ce résultat se comprend bien à partir de l'exemple de l'oscillateur non amorti, dont les valeurs propres sont purement imaginaires : les orbites périodiques sont toutes brisées par la moindre dissipation. Malheureusement, l'hyperbolicité n'est pas une condition suffisante de stabilité structurelle. Plus précisément, l'hyperbolicité est une condition suffisante de stabilité structurelle *locale* au voisinage d'un point fixe ou orbite périodique hyperbolique, mais ce n'est pas une condition suffisante de stabilité structurelle globale. Considérons par exemple un portrait de phases présentant une *orbite homocline* : c'est une trajectoire bouclant sur un point fixe (figure 11.9). Cette orbite homocline peut être structurellement instable vis-à-vis de toute variation d'un paramètre (la boucle se coupe), sans que le portrait de phases au voisinage du point fixe en soit bouleversé.

Une seconde condition nécessaire : la transversalité

Outre l'hyperbolicité des points fixes et orbites périodiques, une autre condition nécessaire de stabilité structurelle porte sur la position relative des variétés stables et instables des points fixes et orbites périodiques et plus précisément sur leur transversalité. La notion de transversalité de deux variétés, définie ci-dessous, formalise la notion de « position générale ».

Définition. Deux sous-espaces E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont dits *transverses* si l'une des conditions suivantes est satisfait (ces conditions sont équivalentes en dimension finie) :

- $E_1 + E_2 = E$;
- $\text{codim}(E_1 \cap E_2) = \text{codim}E_1 + \text{codim}E_2$;
- $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E$.

Généralisons : deux sous-variétés V_1 et V_2 d'une variété V sont transverses si, en tout point de leur intersection, leurs sous-espaces tangents sont transverses. Si $\dim V_1 + \dim V_2 < \dim V$, V_1 et V_2 seront dites transverses si elles ne se rencontrent pas (c'est le cas de deux courbes ($\dim V_1 = \dim V_2 = 1$) dans un espace de dimension trois).

Quelques dessins (figure 11.8) suggèrent qu'avec ces définitions, la notion de transversalité est invariante par petites déformations des variétés considérées et qu'une intersection transversale correspond bien à la « position générale » des deux variétés (Demazure, chapitre IV).

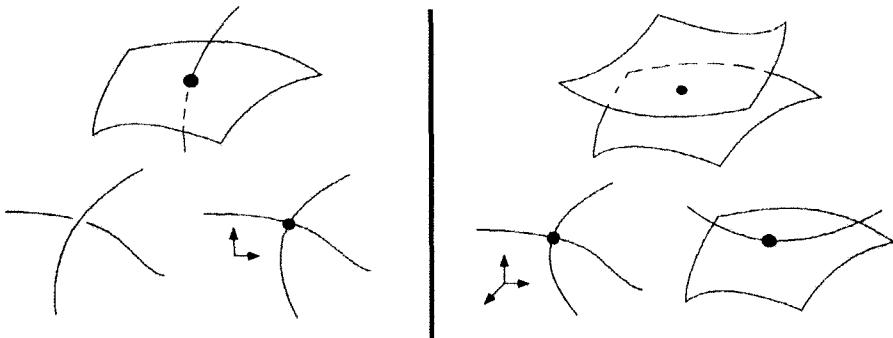


FIG. 11.8 – Exemples d'intersections transversales (à gauche) et non transversales (à droite).

Considérons maintenant les variétés stables et instables des points fixes et d'orbites périodiques. Les variétés stables (resp. instables) ne peuvent se rencontrer nulle part, puisque cela signifierait qu'un point de leur intersection devrait évoluer vers deux « futurs » (resp. « passés ») différents. Par contre une variété stable $V^s(\omega_1)$ peut rencontrer une variété instable $V^i(\omega_2)$, ω_1 et ω_2 désignant indifféremment un point fixe ou une orbite périodique (figure 11.9). On montre alors qu'une condition nécessaire (mais toujours pas suffisante !) de stabilité structurelle est que leurs variétés stables et instables se coupent transversalement (les champs satisfaisant cette condition sont appelés champs de Kupka-Smale).

Ce dernier résultat permet en particulier de montrer simplement qu'un champ dont le portrait de phases présente une orbite homocline (figure 11.9) pour un point fixe ne peut en aucun cas être structurellement stable. En effet, soient ω_1 et ω_2 deux points fixes ou orbites périodiques, supposés hyperboliques. Supposons que les variétés $V^s(\omega_1)$ et $V^i(\omega_2)$ sont transversales, et que leur intersection, notée I , est non vide et non réduite à ω_1 si $\omega_1 = \omega_2$. On a alors $\dim I > 0$. Notant n la dimension de la variété V , on a

- par transversalité : $\dim V^s(\omega_1) + \dim V^i(\omega_2) = n + \dim I$,
- par hyperbolicité : $\dim V^s(\omega_j) + \dim V^i(\omega_j) = n + \dim \omega_j$, $j = 1, 2$.

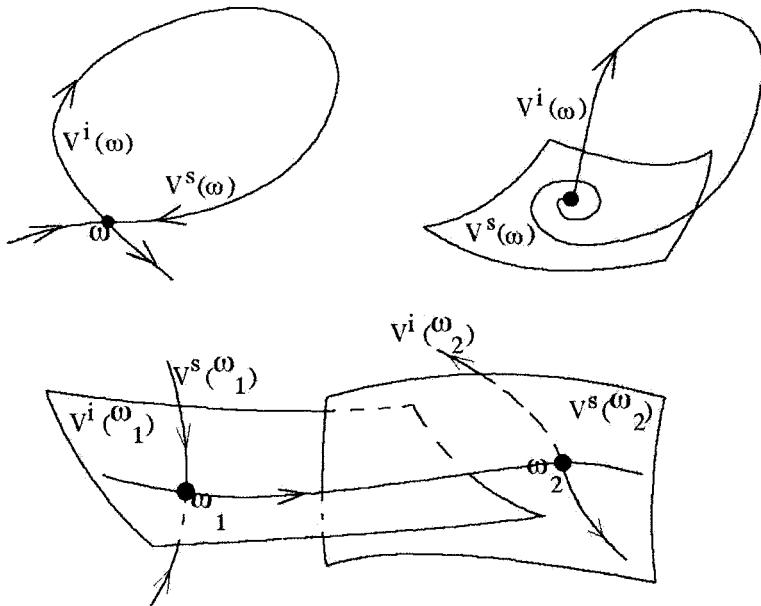


FIG. 11.9 – En haut : orbites homoclines pour un point fixe, structurellement instables. En bas : orbite hétérocline entre deux points fixes, structurellement stable.

On en déduit par exemple : $\dim I = \dim V^s(\omega_1) - \dim V^s(\omega_2) + \dim \omega_2$. Or si $\omega_1 = \omega_2$ est un point singulier, cette relation conduit à $\dim I = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\dim I > 0$. L'intersection des variétés stable et instable de ω_1 ne peut donc être que non transverse (orbite homocline), et le champ correspondant n'est donc pas structurellement stable. Voir l'exercice 11.7.9 pour une autre mise en œuvre de ce type de raisonnement.

Conditions nécessaires et suffisantes

On peut, en apportant des restrictions supplémentaires aux champs de vecteurs, finir par mettre en évidence des classes de champs structurellement stables. Citons en particulier les champs de gradients (tels que $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \nabla U(\mathbf{x})$), et les champs de Morse-Smale (Guckenheimer & Holmes 1983, §1.7).

En dimension deux, les choses s'avèrent plus sympathiques et on démontre (théorème de Peixoto) que dans un espace des phases plan, les champs de Kupka-Smale (hyperbolique + transversalité des variétés stables et instables) sont structurellement stables et génériques (le théorème de Peixoto est en fait un peu plus général, et traite le cas des espaces des phases non plans, comme les tores par exemple).

11.6 Bifurcations

11.6.1 Introduction

De façon très générale, le comportement des systèmes physiques est sous la dépendance d'un certain nombre de paramètres. La réponse du système à une variation de l'un des paramètres est en général régulière, mais il existe des valeurs particulières des paramètres pour lesquelles le système adopte soudain un comportement qualitativement différent du comportement antérieur. Un tel changement de comportement est appelé *bifurcation*. Dans l'exemple du pendule discuté dans la section précédente, le passage de une à deux positions d'équilibre a déjà été présenté comme une bifurcation. Les instabilités hydrodynamiques discutées précédemment correspondent également à des bifurcations ; par exemple, la transition entre les régimes conductif et convectif dans le problème de Rayleigh-Bénard est une bifurcation contrôlée par le nombre de Rayleigh.

Une augmentation lente et continue du paramètre fait en général apparaître une cascade de telles transitions, les comportements observés devenant de plus en plus « compliqués » ou « désordonnés ». Ainsi, pour de nombreux systèmes physiques, à l'état stationnaire stable initial succède un comportement périodique ; lequel se trouve déstabilisé pour donner lieu à des phénomènes de doublement de période, ou d'intermittence, ou de quasi-périodicité ; lesquels disparaissent à leur tour pour laisser place à des comportements imprévisibles. « chaotiques ». Le fait que la même cascade de transitions ou bifurcations se retrouve pour des systèmes mécaniques électriques ou chimiques, a suggéré l'existence d'une certaine universalité de ces bifurcations et en a considérablement stimulé l'étude.

11.6.2 Définition d'une bifurcation

Qu'appeler précisément une bifurcation ? Considérons un système différentiel sur une variété V , dépendant d'un paramètre μ ($\mu \in \mathbb{R}^m$ s'il y a m paramètres) :

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu). \quad (11.42)$$

Une définition naturelle d'une bifurcation pourrait être la suivante : on dit que le champ de vecteurs $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu)$ présente une bifurcation pour la valeur $\mu = \mu_c$ du paramètre si, pour cette valeur du paramètre, le champ n'est pas structurellement stable. Cette définition correspond bien à la notion intuitive de bifurcation : de part et d'autre de μ_c , les solutions sont qualitativement différentes, ce qui correspondra bien à des comportements qualitativement différents du système physique. Il faut néanmoins s'attendre à des bizarries en dimension supérieure à 2 où, ainsi qu'on l'a déjà noté, les champs structurellement stables ne forment pas une partie dense. On peut donc trouver des familles génériques de champs de vecteurs dans lesquelles aucun élément

n'est structurellement stable : pour une telle famille, toutes les valeurs du paramètre seraient donc des valeurs de bifurcation ! Pour éviter cet inconvénient et assurer que les valeurs de bifurcation sont isolées, on restreint la définition précédente :

Définition. On dit que la famille $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu)$ de champs de vecteurs présente une *bifurcation* pour la valeur μ_c du paramètre si le champ $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu_c)$ n'est pas de type Kupka-Smale, c'est-à-dire :

- si l'un des points fixes ou l'une des orbites périodiques perd son hyperbolité (accident local qui conduit à la définition de bifurcation locale) ;
- ou si une variété stable et une variété instable ne se coupent plus transversalement (accident affectant globalement le portrait de phases, correspondant à une bifurcation globale).

11.6.3 Codimension d'une bifurcation

Un modèle (par hypothèse un système d'équations différentielles ordinaires) fait en général intervenir plusieurs paramètres. Une condition de bifurcation se présente alors comme une relation entre ces différents paramètres :

$$f(\mu_1, \dots, \mu_m) = 0. \quad (11.43)$$

Géométriquement, cette relation définit dans l'espace \mathbb{R}^m des paramètres une hypersurface Σ de dimension $m - 1$, ou de codimension un. Ainsi en se déplaçant sur une courbe Γ de \mathbb{R}^m de dimension un, on coupera « en général » l'hypersurface Σ (figure 11.10). Au prix éventuellement d'un changement de repère, il suffira de faire varier un seul paramètre pour rencontrer la bifurcation : une telle bifurcation sera dite de codimension un.

Si la condition de bifurcation fait intervenir deux relations de type (11.43), le lieu des points de bifurcation sera l'intersection des deux hypersurfaces correspondantes Σ_1 et Σ_2 . Pour rencontrer cette intersection de dimension $m - 2$, ou de codimension deux, on devra faire varier indépendamment l'un de l'autre deux paramètres : une telle bifurcation sera dite de codimension deux. On définit ainsi les bifurcations de codimension quelconque.

Pour que cette caractérisation de la codimension d'une bifurcation « marche », il faut néanmoins que le champ de vecteurs soit générique. Supposons en effet qu'une hypothèse de symétrie, ou qu'une méthode de perturbation arrêtée à un ordre insuffisant, « masque » un paramètre, disons μ_{m+1} . L'espace « apparent » des paramètres n'est alors que l'hyperplan $\mu_{m+1} = 0$ de l'espace complet, dont la dimension est $m + 1$. $\mu_{m+1} = 0$ est donc une condition supplémentaire d'apparition de la bifurcation. La codimension réelle de celle-ci sera donc supérieure d'une unité à sa codimension apparente.

Les bifurcations de codimension un sont naturellement les plus simples et on montre qu'elles correspondent nécessairement à l'une des situations suivantes :

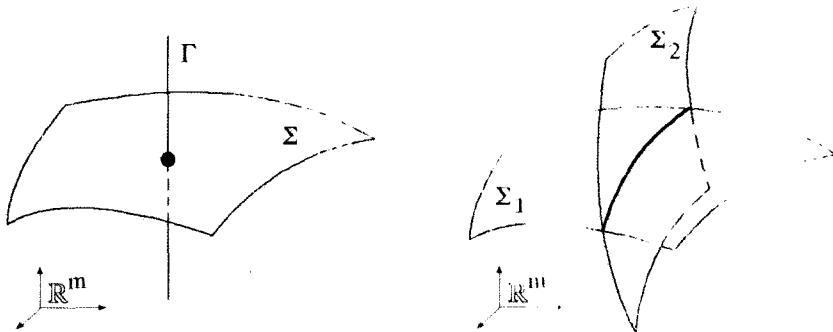


FIG. 11.10 – (a) Bifurcation de codimension un : la variation d'un seul paramètre sur Γ suffit pour rencontrer le lieu Σ des bifurcations ; (b) bifurcation de codimension deux : la variation de deux paramètres (sur une variété non représentée) est nécessaire pour rencontrer le lieu $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ des bifurcations.

1. Bifurcation nœud-col : le champ linéarisé de \mathbf{X} au point fixe possède 0 comme valeur propre de multiplicité 1, toutes les autres étant de partie réelle non nulle. Dans une base propre, la matrice \mathbf{L}_0 de la restriction à la variété centrale du champ linéarisé s'écrit

$$\mathbf{L}_0 = (0).$$

2. Bifurcation de Hopf : le champ linéarisé de \mathbf{X} au point fixe possède un couple de valeurs propres $\pm i\omega$ de multiplicité un, toutes les autres valeurs propres étant de partie réelle non nulle. \mathbf{L}_0 s'écrit

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Bifurcations d'une orbite périodique (encore appelée cycle limite pour un système dissipatif) : leur étude passe par l'étude de l'application de premier retour dans une section de Poincaré de cette orbite. Une bifurcation survient lorsque l'une des valeurs propres de cette application sort du cercle unité du plan complexe : les itérés successifs s'éloignent alors de l'orbite. Selon que la valeur propre coupe ce cercle unité en 1, -1 , ou $\rho \pm i\omega$, la bifurcation est respectivement appelée *bifurcation nœud-col*, *bifurcation par doublement de période*, ou *bifurcation de Hopf*. La difficulté est ici de déterminer l'application de premier retour au voisinage de l'orbite.
4. Bifurcations globales : l'une des orbites de \mathbf{X} est intersection non transversale d'une variété stable et d'une variété instable. Si les deux variétés sont issues du même point fixe ou orbite périodique, la bifurcation est dite homocline, sinon elle est dite hétérocline.

L'étude des bifurcations de codimension deux conduit à une liste analogue des conditions de bifurcations. Limitant notre présentation aux bifurcations locales de points fixes, la forme de Jordan de la restriction à la variété centrale du champ linéarisé est de l'un des trois types ci-dessous :

5. Valeur propre zéro double, non diagonalisable :

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Valeur propres zéro simple et couple d'imaginaires conjugués : \mathbf{L}_0 est constituée de deux blocs du type (1) et (2).
7. Deux couples distincts de valeur propres imaginaires conjuguées : \mathbf{L}_0 est constituée de deux blocs du type (2).

Une étude détaillée des bifurcations énumérées ci-dessus peut être trouvée dans l'ouvrage de Iooss & Joseph (1990). Nous nous limiterons ici aux deux premières et au cas (5). La forme générale du système différentiel pour ces bifurcations peut être déterminée en mettant en jeu des conditions de transversalité (Demazure 1989), mais nous les rechercherons plutôt sous la forme de développements de Taylor, moins élégante mais plus directe.

11.6.4 Bifurcation nœud-col

La bifurcation nœud-col correspond au cas où un point fixe \mathbf{a} perd son hyperbolité pour une valeur μ_c d'un paramètre μ , pour laquelle zéro est valeur propre simple du champ linéarisé au point \mathbf{a} . La variété centrale ayant été déterminée, une bonne approximation de la dynamique sur cette variété est donnée par sa projection sur le sous-espace central de dimension un :

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \mu). \quad (11.44)$$

Afin d'étudier le système pour x et μ voisins de \mathbf{a} et μ_c , il s'avère commode de se ramener à un système usuel sans paramètre en élargissant l'espace des phases (ici réduit à la variété centrale) au paramètre μ . Dans cet espace des phases « élargi », le système devient

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \mu), \quad \frac{d\mu}{dt} = 0. \quad (11.45)$$

Les points fixes du champ de vecteurs ainsi défini sont donnés par $X(x, \mu) = 0$, équation qui définit la « variété des équilibres » dans le plan (x, μ) . Une translation sur les axes x et μ permet toujours de ramener la bifurcation en $x = 0$ pour $\mu = 0$. Pour $\mu = 0$, l'origine $x = 0$ est un point fixe et le linéarisé de X a une valeur propre nulle ; X doit donc vérifier

$$X(0, 0) = 0, \quad X_x(0, 0) = 0. \quad (11.46)$$

La forme générale du champ X au voisinage de $(0, 0)$ est donc de la forme

$$\frac{dx}{dt} = X_\mu \mu + \frac{1}{2}(X_{xx}x^2 + 2X_{\mu x}\mu x + X_{\mu\mu}\mu^2) + \mathcal{O}(3), \quad (11.47)$$

où X_μ désigne la dérivée de X par rapport à μ calculée en $(0, 0)$, avec des notations semblables pour les autres dérivées, et où $\mathcal{O}(3)$ désigne les termes cubiques négligés.

Bifurcation nœud-col proprement dite

Les points fixes de (11.47) sont donnés par $X(x, \mu) = 0$. La solution $x = -X_\mu/X_{\mu x} + \mathcal{O}(\mu)$, obtenue en ne retenant que les termes d'ordre 1 en x , est elle-même d'ordre 1, et n'est donc pas admissible puisqu'elle n'est pas voisine de $x = 0$. Supposons X_{xx} et X_μ non nuls. Nous étudierons que le cas $X_\mu > 0$ et $X_{xx} < 0$, aucun les autres cas peuvent se ramener par une redéfinition de x ou de μ . Les branches de points fixes au voisinage du point de bifurcation sont donc données au second ordre près par

$$x = \pm \sqrt{\frac{-2X_\mu\mu}{X_{xx}}} + \mathcal{O}(\mu). \quad (11.48)$$

Notons que les conditions X_{xx} et X_μ non nuls peuvent s'interpréter en termes de conditions de transversalité : la forme du champ X au voisinage de $(0, 0)$ est « générale » si la surface $X(x, \mu)$ coupe le plan (x, μ) d'une manière invariante par petites perturbations, *i.e.* si l'intersection est transversale. La condition $X_\mu \neq 0$ est une condition de non-tangence de X avec le plan (x, μ) , et la condition $X_{xx} \neq 0$ est une condition de courbure non nulle.

Pour $\mu < 0$, il n'existe aucun point fixe, et pour $\mu > 0$, il existe un couple de points fixes. L'étude de stabilité linéaire montre immédiatement que la branche de solutions positives est stable et que l'autre branche est instable. Le diagramme de bifurcation correspondant est présenté sur la figure 11.11. L'appellation « noeud-col » provient du fait que, si on considère une dimension hyperbolique supplémentaire, disons stable, la bifurcation apparaît lorsque le nœud stable et le col instable coalescent.

Terminons en notant que, au prix d'une redéfinition de x et μ , on peut se ramener à $X_\mu = 1$ et $X_{xx} = -1$, et que le modèle général (c'est une forme normale) du champ de vecteurs donnant lieu à une bifurcation nœud-col est ainsi

$$X(x, \mu) = \mu - x^2. \quad (11.49)$$

Bifurcation transcriptique

Il s'agit là d'une variante de la bifurcation nœud-col, correspondant au fait que de nombreux systèmes admettent une solution stationnaire pour tout μ

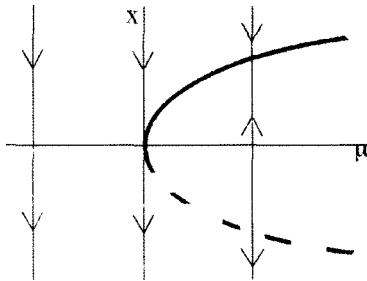


FIG. 11.11 – Diagramme de la bifurcation nœud-col.

les valeurs du paramètre μ . Cette condition est satisfaite si, en plus des conditions (11.46), le champ X vérifie

$$X_\mu(0, 0) = 0. \quad (11.50)$$

En effet, la forme générale du champ X au voisinage de $(0, 0)$ est alors de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(X_{xx}x^2 + 2X_{\mu x}\mu x + X_{\mu\mu}\mu^2) + \mathcal{O}(3), \quad (11.51)$$

et les branches de points fixes au voisinage du point de bifurcation sont donc données au second ordre près par

$$x = \frac{-X_{\mu x} \pm \sqrt{X_{\mu x}^2 - X_{xx}X_{\mu\mu}}}{X_{xx}}\mu + \mathcal{O}(\mu^2), \quad (11.52)$$

pourvu que le discriminant soit positif (s'il est négatif, le point fixe $(0, 0)$ est isolé et les termes de plus haut degré doivent être considérés). Ces deux branches se coupent transversalement au point $(0, 0)$. L'étude de stabilité des points fixes permet de conclure que les branches supérieures sont stables et les branches inférieures instables si $X_{xx} < 0$, ces propriétés de stabilité étant inversées pour $X_{xx} > 0$ (figure 11.12). Le qualitatif « transcritique » souligne « l'échange de stabilité » des deux points fixes à la bifurcation.

Par un changement de variable tel que $x = 0$ soit la solution stationnaire pour toutes les valeurs du paramètre μ , le champ de vecteurs se réduit à la forme normale suivante, qui vérifie bien les conditions (11.46) et (11.50)

$$X(x, \mu) = \mu x - x^2. \quad (11.53)$$

Bifurcation fourche

Il s'agit là encore d'une variante de la bifurcation nœud-col, correspondant au cas où le champ ne possède pas de terme quadratique en x . Ceci survient en particulier dans les systèmes possédant la symétrie de réflexion (invariance

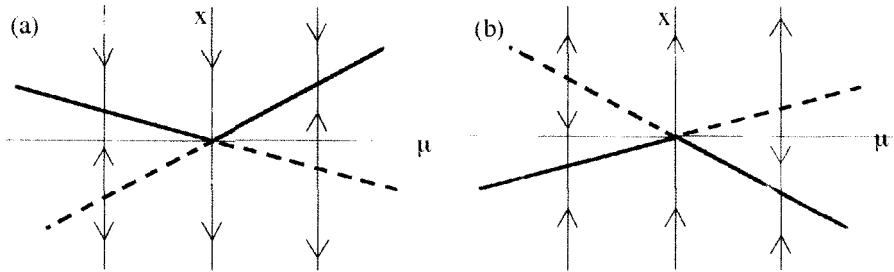


FIG. 11.12 — Diagramme de la bifurcation transcritique. (a) : $X_{xxx} < 0$; (b) : $X_{xxx} > 0$.

des équations par la transformation $x \rightarrow -x$). La forme générale du champ X au voisinage d'une bifurcation fourche est donc de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(2X_{\mu x}\mu x + X_{\mu\mu}\mu^2) + \frac{1}{3!}(X_{xxx}x^3 + 3X_{\mu\mu x}\mu^2 x + X_{\mu\mu\mu}\mu^3) + \mathcal{O}(4). \quad (11.54)$$

Les branches de points fixes $x(\mu)$ correspondaient précédemment à des développements asymptotiques en puissances de $\sqrt{\mu}$ pour la bifurcation nœud-col, et en puissances de μ pour la bifurcation transcritique. Ici, chacun de ces deux développements conduit à une branche de points fixes. Le premier correspond à un équilibre entre les termes en μx et x^3 (tous les autres étant d'ordre supérieur), et le second à un équilibre entre les termes en μx et μ^2 (tous les autres étant d'ordre supérieur). Ces branches de solutions sont données par

$$x = \pm \sqrt{\frac{-6X_{\mu x}\mu}{X_{xxx}}} + \mathcal{O}(\mu). \quad (11.55)$$

$$x = \frac{-X_{\mu\mu}}{2X_{\mu x}}\mu + \mathcal{O}(\mu^2), \quad (11.56)$$

la première branche n'existant que pour $\mu > 0$ ou $\mu < 0$ selon que $X_{xxx}X_{\mu x} < 0$ ou $X_{xxx}X_{\mu x} > 0$. La stabilité des points fixes sur ces branches, qui s'étudie sans difficulté, est présentée sur la figure 11.13. L'allure de ce diagramme explique le qualificatif « fourche » donné à la bifurcation. Pour $X_{xxx} < 0$, la non-linéarité cubique satire l'instabilité du point fixe $x = \mathcal{O}(\mu)$ pour $\mu > 0$, et la bifurcation est dite supercritique. Pour $X_{xxx} > 0$, la non-linéarité amplifie au contraire l'instabilité, et la bifurcation est dite sous-critique.

Par une translation ramenant la solution stationnaire en $x = 0$ pour toutes les valeurs du paramètre μ , on obtient la forme normale d'une bifurcation fourche, qui vérifie bien les conditions (11.46) et la condition de symétrie $x \rightarrow -x$:

$$X(x, \mu) = \mu x - \delta x^3, \quad (11.57)$$

la bifurcation étant supercritique ou sous-critique selon que $\delta = 1$ ou $\delta = -1$.

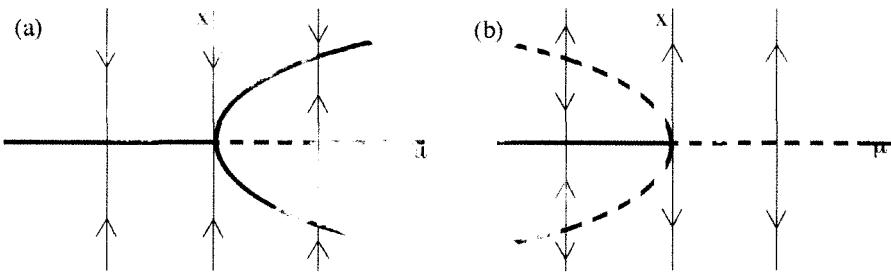


FIG. 11.13 - Diagramme de la bifurcation fourche; (a) : supercritique ; (b) : sous-critique.

Le calcul de la forme normale des équations de Lorenz est proposée dans l'exercice 11.7.10, et la détermination de diagrammes de bifurcation dans les exercices 11.7.11 et 11.7.12.

11.6.5 Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf correspond au cas où un point fixe **a** perd son hyperbolicité pour une valeur μ_c d'un paramètre μ , pour laquelle le champ linéarisé au point **a** admet un couple de valeurs propres purement imaginaires $\pm i\omega_0$ de multiplicité 1. Admettons qu'on ait ramené la bifurcation à l'origine (**a** = **0**) pour $\mu_c = 0$. Le sous-espace central est donc de dimension deux, et la projection sur ce sous-espace de la dynamique sur la variété centrale est

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega_0 y + \text{termes non linéaires}, \\ \dot{y} &= \omega_0 x + \text{termes non linéaires}.\end{aligned}$$

Pour μ voisin de 0, les valeurs propres sont $\lambda(\mu) = \sigma(\mu) \pm i\omega(\mu)$, avec $\sigma(0) = 0$ et $\omega(0) = \omega_0$, soit encore, en ne conservant que les deux premiers ordres du développement de Taylor,

$$\lambda(\mu) = \sigma_1 \mu \pm i(\omega_0 + \omega_1 \mu) + \mathcal{O}(|\mu|^2). \quad (11.58)$$

Posant $z = x + iy$, et utilisant les relations $x = (z + z^*)/2$ et $y = (z - z^*)/2i$, il est commode de condenser les deux équations ci-dessus en une seule, le sous-espace central étant maintenant \mathbb{C} :

$$\dot{z} = Z(z, \mu_c = 0) = i\omega_0 z + \text{termes non linéaires}. \quad (11.59)$$

Toujours par commodité, on peut sans perte de généralité admettre que l'origine est un point fixe pour toute valeur de μ voisine de 0, soit $Z(0, \mu) = 0$. En effet, l'application $z \rightarrow i\omega_0 z$ étant inversible, l'équation $Z(z, \mu) = 0$ donnant les points fixes admet pour μ voisin de 0 une solution unique $z = z(\mu)$ voisine de $z(0) = 0$ (c'est le théorème des fonctions implicites). On peut donc,

pour tout μ voisin de 0, ramener le point fixe à l'origine par la translation $z \rightarrow z - z(\mu)$.

Enfin, une condition de générnicité de la bifurcation est que les deux valeurs propres coupent l'axe imaginaire transversalement pour $\mu = 0$, soit

$$\sigma_1 \neq 0 \text{ avec } \sigma_1 = \frac{d\sigma}{d\mu}(\mu = 0). \quad (11.60)$$

Les valeurs propres $\lambda(0)$ et $\lambda^*(0)$ sont résonnantes aux ordres $2n + 1$ pour tout n entier (car $i\omega_0 = (n + 1)i\omega_0 + n(-i\omega_0)$), et les monômes résonnantes sont donc tous du type $z^{n+1}z^{*n} = z|z|^{2n}$. La forme normale $Z(z)$ du champ de vecteurs est donc de la forme (théorème de Hopf)

$$Z(z, \mu) = \lambda(\mu)z - \kappa(\mu)|z|^2z + \mathcal{O}(|z|^5). \quad (11.61)$$

L'équation différentielle correspondante est l'équation de Landau rencontrée au chapitre 8. Passant en coordonnées polaires (r, θ) , et posant $\kappa(0) = \kappa_r + i\kappa_i$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\dot{r} = \sigma_1 \mu r - \kappa_r r^3 + \mathcal{O}(|r|^5), \quad (11.62a)$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 + \omega_1 \mu - \kappa_i r^2 + \mathcal{O}(|r|^4). \quad (11.62b)$$

Lors de l'étude d'un système particulier, qui comporte *a priori* des non-linéarités quadratiques, la difficulté principale est le calcul de sa forme normale qui permet la détermination du coefficient de Landau κ . Pour $\kappa_r > 0$, la bifurcation donne donc lieu à la naissance pour $\mu > 0$ d'orbites périodiques stables de rayon $\sqrt{\sigma_1 \mu / \kappa_r}$, bifurcation dite supercritique. Pour $\kappa_r < 0$, ces orbites périodiques naissent pour $\mu < 0$ et sont instables, bifurcation dite sous-critique. Les portraits de phases correspondant sont donnés sur la figure 11.14. Des déterminations de bifurcations de Hopf sont proposées dans les exercices 11.7.13 et 11.7.14.

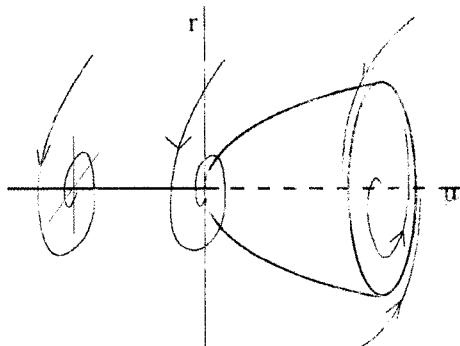
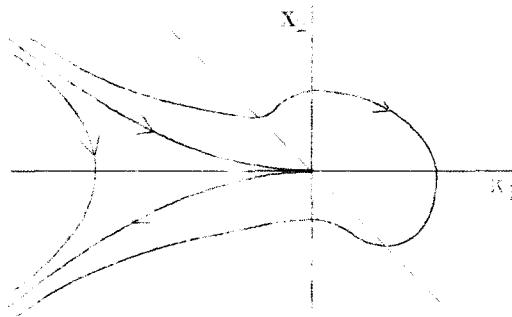


FIG. 11.14 – Bifurcation de Hopf supercritique.

FIG. 11.15 Portrait de phases de (11.64) pour $\mu = \nu = 0$.

11.6.6 Un exemple de bifurcation de codimension deux

L'étude de stabilité d'un film s'éteignant sur un plan incliné fait apparaître une bifurcation de codimension deux, correspondant à une valeur propre nulle double dont le sous-espace propre associé est de dimension un seulement (Pumir, Poussin & Manneville 1983). La forme de Jordan du champ linéarisé est alors de la forme

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la forme normale est, à des homothéties sur x_1 , x_2 et t près,

$$\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1^2 - \delta x_1 x_2) + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^2), \quad \delta = \pm 1. \quad (11.63)$$

Nous n'étudierons que le cas $\delta = +1$. Ce champ est structurellement instable (le point fixe $(0,0)$ n'est pas hyperbolique), et on peut montrer que la famille suivante de champs à deux paramètres est générique, c'est-à-dire qu'elle contient toutes les perturbations possibles du champ (11.63) :

$$\mathbf{X}(x_1, x_2) = (x_2, \mu + \nu x_2 - x_1^2 - x_1 x_2). \quad (11.64)$$

Pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point fixe. Pour $\mu = 0$, l'origine est le seul point fixe. Pour $\mu > 0$, les deux points fixes sont $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. Nous détaillons successivement les deux cas $\mu = 0$ et $\mu > 0$.

Pour $\mu = 0$, le problème linéarisé à l'origine a pour valeurs propres 0 et ν . Pour $\nu = 0$, on déduit aisément le portrait de phases donné par la figure 11.15. Pour $\nu \neq 0$, $\mu = 0$ correspond à une bifurcation noeud-col, la partie transverse étant stable pour $\nu < 0$ et instable pour $\nu > 0$.

Passons au cas $\mu > 0$. En appliquant les résultats précédents, on vérifie que le point fixe $\mathbf{a}_1 = (-\sqrt{\mu}, 0)$ est un col. La nature du point $\mathbf{a}_2 = (\sqrt{\mu}, 0)$ dépend des valeurs relatives de ν et $\sqrt{\mu}$:

- pour $\nu < \sqrt{\mu}$, \mathbf{a}_2 est hyperbolique et attractif;

- pour $\nu > \sqrt{\mu}$, \mathbf{a}_2 est hyperbolique et répulsif;
- pour $\nu = \sqrt{\mu}$, les valeurs propres sont $\pm i\sqrt{2}\mu^{1/4}$, correspondant à une bifurcation de Hopf. On vérifie que l'orbite périodique (ou cycle limite) apparaît pour $\nu < \sqrt{\mu}$ et qu'elle est répulsive.

On peut dès lors ébaucher les portraits de phases correspondant aux différentes régions de l'espace des paramètres (μ, ν) (figure 11.16).

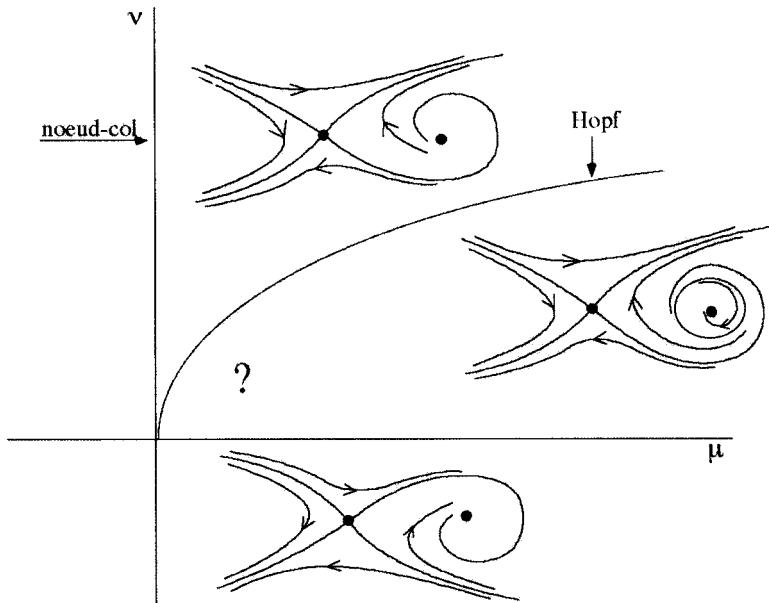


FIG. 11.16 – Ébauches de portraits de phases dans les différents domaines de l'espace des paramètres pour le système dynamique (11.64).

Ce portrait de phases est-il complet ? Fixons μ positif, et faisons varier ν . Pour ν inférieur à $\sqrt{\mu}$, le point \mathbf{a}_2 est entouré d'une orbite périodique répulsive qui tient à l'écart les séparatrices du col, alors que pour $\nu < 0$, l'une des séparatrices arrive sur \mathbf{a}_2 . Il apparaît impossible de passer continûment d'une situation à l'autre sans qu'intervienne quelque part entre les deux une bifurcation globale (les points fixes restent hyperboliques).

La technique mise en œuvre pour aborder le problème est appelée éclatement : elle consiste à « grossir » ce qui se passe dans la région en question au moyen du changement de variables

$$\mu = \epsilon^4, \quad \nu = \epsilon^2 \alpha, \quad x_1 = \epsilon^2 y_1, \quad x_2 = \epsilon^3 y_2, \quad \epsilon \geq 0, \quad (11.65)$$

et à remplacer t par ϵt . Le système (11.64) devient

$$\mathbf{X}(y_1, y_2) = (y_2, 1 - y_1^2 - \epsilon(\alpha y_2 - y_1 y_2)), \quad (11.66)$$

dont les points fixes sont $\mathbf{a}_1 = (-1,0)$ et $\mathbf{a}_2 = (1,0)$. Remarquons que la transformation des paramètres est bijective du demi plan $\mu > 0$ sur le demi-plan $\epsilon > 0$, mais qu'elle transforme le point $(\mu, \nu) = (0,0)$ en la droite $\epsilon = 0$ toute entière.

La conséquence essentielle de cette transformation est que le champ (11.66) se présente comme la somme d'une partie non dissipative (« conservative ») et d'une perturbation dissipative (« non conservative »). En effet, pour $\epsilon = 0$, le champ (11.66) peut s'écrire

$$\mathbf{X}_0(y_1, y_2) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_2}, - \frac{\partial H}{\partial y_1} \right), \quad (11.67)$$

où l'hamiltonien $H(y_1, y_2)$ est défini par

$$H(y_1, y_2) = \frac{y_2^2}{2} - y_1 + \frac{y_1^3}{3}. \quad (11.68)$$

Le portrait de phases du système conservatif (11.67) peut être tracé en remarquant que les trajectoires sont les courbes $H(y_1, y_2) = \text{Cte}$. En effet, long d'une trajectoire,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial y_1} \frac{\partial H}{\partial y_2} + \frac{\partial H}{\partial y_2} \left(- \frac{\partial H}{\partial y_1} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce portrait de phases est représenté sur la figure 11.17. Il fait apparaître une famille continue d'orbites périodiques $H(y_1, y_2) = \text{Cte}$ autour de \mathbf{a}_2 , qui vient s'appuyer sur une orbite homocline Γ_0 issue de \mathbf{a}_1 , qui correspond à $H(y_1, y_2) = 2/3$.

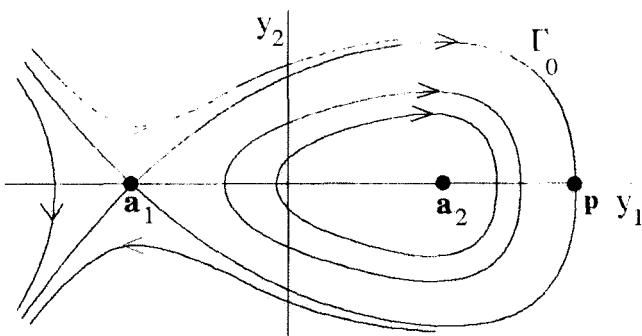


FIG. 11.17 Portrait de phases du système conservatif (11.67).

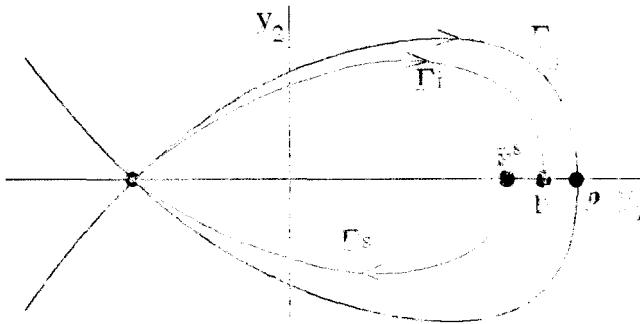


FIG. 11.18 - Illustration de la méthode de Melnikov.

Que devient cette orbite homocline Γ_0 lorsqu'on prend en compte le champ total (11.66) ? Cette question peut être résolue par la méthode de Melnikov. Pour ϵ assez petit, on peut supposer que les deux séparatrices du col Γ^i et Γ^s restent voisines de Γ_0 , et coupent donc l'axe $y_2 = 0$ transversalement en deux points \mathbf{p}^i et \mathbf{p}^s voisins de \mathbf{p} (figure 11.18). Le champ \mathbf{X} possède une orbite homocline Γ si on peut résoudre $H(\mathbf{p}^i) = H(\mathbf{p}^s)$, qui entraîne nécessairement $\mathbf{p}^i = \mathbf{p}^s$. La variation de l'hamiltonien entre \mathbf{p}^s et \mathbf{a}_1 le long de la trajectoire Γ^s est

$$H(\mathbf{a}_1) - H(\mathbf{p}^s) = \int_{\Gamma^s} \frac{\partial H}{\partial t} dt = \epsilon \int_0^\infty y_2^2(t)(\alpha - y_1(t))dt. \quad (11.69)$$

De cette équation et de l'équation analogue pour la séparatrice instable, on déduit que le long de l'orbite homocline Γ recherchée, et qui correspond à $H(\mathbf{p}^i) = H(\mathbf{p}^s)$, on a

$$0 = H(\mathbf{p}^s) - H(\mathbf{p}^i) = M(\alpha, \epsilon), \quad (11.70a)$$

$$\text{avec } M(\alpha, \epsilon) = \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} y_2^2(t)(y - y_1(t))dt. \quad (11.70b)$$

L'orbite homocline Γ étant toujours incouenne, cette intégrale ne peut pas être calculée directement, mais elle peut être estimée en la calculant le long de l'orbite homocline Γ_0 du champ conservatif, qui est proche de Γ :

$$M(\alpha, \epsilon) = \epsilon M(\alpha, 0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (11.71)$$

où $M(\alpha, 0)$ est calculée le long de Γ_0 . Cette intégrale de Melnikov est de la forme $\alpha M_1 - M_0$, et son calcul montre que $\alpha = 5/7$.

Invoquant le théorème des fonctions implicites, il existe donc une fonction $\alpha(\epsilon)$, avec $\alpha(0) = 5/7$, telle que pour ϵ assez petit, le col \mathbf{a}_1 du champ \mathbf{X} possède une séparatrice homocline pour $\alpha = \alpha(\epsilon)$, et seulement dans ce cas.

Repassant aux coordonnées initiales, on a donc démontré l'existence d'une orbite homocline le long d'une courbe du plan (μ, ν) qui est osculatrice à l'origine à la demi-parabole $\nu = 5\sqrt{\mu}/7$ (figure 11.19). L'étude de cette bifurcation de codimension deux est alors complète.

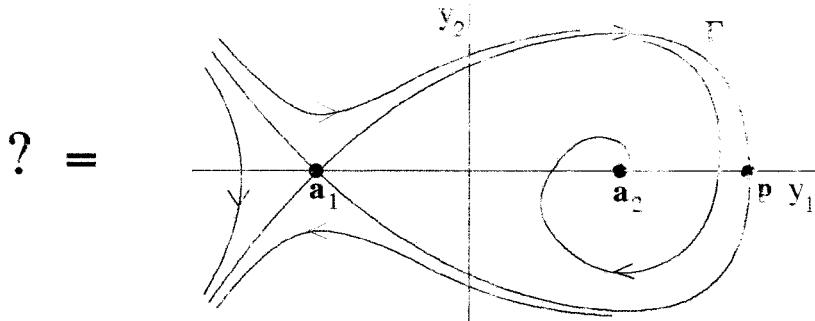


FIG. 11.19 – La figure 11.16 est complétée par ce portrait de phases faisant apparaître une orbite homocline le long de la parabole $\nu = 5\sqrt{\mu}/7$.

11.7 Exercices

11.7.1 Attracteur de Hénon

L'attracteur de Hénon est un exemple classique d'attracteur étrange, correspondant à l'application

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n + 1 - \alpha x_n^2, \\y_{n+1} &= \beta x_n(1 - x_n).\end{aligned}$$

Les valeurs habituelles des paramètres sont $\alpha = 1,4$ et $\beta = 0,3$.

1. À l'aide d'un logiciel graphique (Excel, Matlab, Mathematica ou autre), visualiser les itérés successifs d'une condition initiale prise dans le carré $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$. Essayer plusieurs conditions initiales.
2. Visualiser les premiers itérés d'un ensemble de points situés sur un cercle de rayon unité centré sur l'origine.
3. Vérifier que la distance entre deux points initialement très voisins (10^{-6}) croît exponentiellement (sensibilité aux conditions initiales), jusqu'à ce que cette distance soit de l'ordre de grandeur de la dimension de l'attracteur.
4. À partir d'une condition initiale, calculer et visualiser 10^5 itérés (ou plus si possible). Par des zooms successifs, observer la structure feuilletée et le caractère auto-similaire de l'attracteur, témoins de sa structure fractale (Bergé *et al.* 1984, §6.3).

11.7.2 Exponentielles de matrice

Vérifier que les matrices (11.8) sont bien les exponentielles des matrices (11.7). Pour la deuxième matrice, décomposer en parties symétrique S et antisymétrique A , et utiliser la propriété $e^{t(S+A)} = e^{tS}e^{tA}$.

11.7.3 Intégration de systèmes différentiels linéaires

Montrer que la solution générale des systèmes différentiels définis par les matrices

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

est donnée par

$$\begin{pmatrix} ae^{-2t} + b(e^{2t} - e^{-2t})/4 \\ be^{2t} \end{pmatrix}, \quad e^t \begin{pmatrix} a \cos t + (a+b) \sin t \\ b \cos t - (2a+b) \sin t \end{pmatrix},$$

$$e^{2t} \begin{pmatrix} a + 3(a-b)t \\ b + 3(a-b)t \end{pmatrix}.$$

11.7.4 Portrait de phases

Montrer que la variété stable de l'exemple donné dans la section 11.4.1 est l'axe Oy . Tracer le portrait de phases pour $a = 1$ (en remarquant que $\dot{y} = 0$ sur la parabole $y = x^2$).

11.7.5 Variétés stable et instable

Déterminer les variétés stable et instable, correctes à l'ordre 3, pour les systèmes suivants. Déterminer dans chaque cas l'équation du mouvement sur la variété instable, correcte à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + 2y^2 + xy, & \dot{y} &= -y + 3y^2 + x^2y - 4x^3; \\ \dot{x} &= -2x - 3y - x^2, & \dot{y} &= x + 2y + xy - 3y^3. \end{aligned}$$

11.7.6 Variété centrale

Déterminer la variété centrale et la dynamique sur cette variété du système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy, \\ \dot{y} &= -y + \alpha x^2. \end{aligned}$$

Cette dynamique peut-elle être ici déterminée par l'approximation de l'espace tangent $h(x) = 0 + \mathcal{O}(x^2)$? Tracer le portrait de phases autour de l'origine. Solution dans Guckenheimer & Holmes (1983, p. 133).

11.7.7 Résonances de valeurs propres

Considérons un système différentiel de dimension deux dont la partie linéaire a pour valeurs propres λ_1 et λ_2 . Si $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, le système est résonnant d'ordre 4 puisque $\lambda_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$ (ou $\lambda_2 = \lambda_1 + 3\lambda_2$). Les valeurs propres ci-dessous sont-elles résonnantes, et si oui quel est l'ordre de la résonance ?

- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$;
- $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$;
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$;
- $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \alpha, \alpha > 0$;
- $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha, \alpha > 0$.

11.7.8 Forme normale

Montrer que la forme normale du système différentiel

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + o(x, y) \\ \dot{y} &= -y + o(x, y)\end{aligned}$$

s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \alpha x^2 y + \mathcal{O}(5) \\ \dot{y} &= -y + \beta x y^2 + \mathcal{O}(5).\end{aligned}$$

11.7.9 Stabilité structurelle d'une orbite hétérocline

Montrer par un raisonnement semblable à celui mené en fin de section 11.5.3 qu'une orbite hétérocline joignant deux cols est structurellement instable en dimension deux, mais peut être structurellement stable en dimension supérieure. Qu'en est-il d'une orbite hétérocline joignant un col et un nœud ?

11.7.10 Forme normale des équations de Lorenz

Calculer la forme normale des équations de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}$$

au voisinage du point fixe $(0, 0, 0)$ qui devient non hyperbolique pour $r = 1$, avec $\sigma = 10$ et $b = 8/3$. Montrer que $r = 1$ correspond à une bifurcation nœud-col.

11.7.11 Diagramme de bifurcation (1)

Déterminer le diagramme de bifurcation du système différentiel

$$\dot{x} = x(x^2 - \mu)(x^2 + \mu^2 - 1).$$

11.7.12 Diagramme de bifurcation (2)

Déterminer le diagramme de bifurcation du système différentiel (solution sur la figure 11.20)

$$\dot{x} = 4x((x-1)^2 - \mu - 1).$$

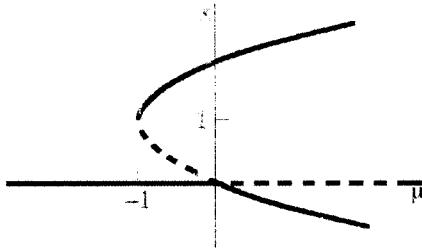


FIG. 11.20 · Diagramme de bifurcation solution de l'exercice 11.7.12.

11.7.13 Bifurcation de Hopf

Déterminer les bifurcations de Hopf du système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - \omega y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= \omega x + y - y(x^2 + y^2) - \mu.\end{aligned}$$

11.7.14 Bifurcation de Hopf du système de Lorenz

Montrer que les deux points fixes symétriques de l'origine du système de Lorenz deviennent non hyperboliques pour $24 < r < 25$, et que la bifurcation est une bifurcation de Hopf sous-critique (cet exercice assez calculatoire requiert le calcul de la forme normale au voisinage du point fixe afin d'expliciter le coefficient de Landau κ du terme en biqude).

Annexe A

Équations de Saint-Venant

On établit dans cette section un système d'équations de conservation simplifiées, les classiques *équations de Saint-Venant* (de Saint-Venant 1871), décrivant bien la dynamique d'un écoulement lorsque l'échelle spatiale λ de ses variations dans la direction longitudinale x est grande devant la longueur caractéristique dans la direction transversale y , ici l'épaisseur h . Ces équations ne font pas intervenir explicitement la nature du milieu qui s'écoule, et sont donc valides, sous certaines conditions précisées ci-dessous, aussi bien pour un fluide que pour un milieu granulaire (Savage & Hutter 1989). Ces équations peuvent s'obtenir de deux façons équivalentes : par intégration des équations de conservation locales suivant la direction transversale, ou par l'écriture des principes de conservation sur un volume de contrôle constitué d'une tranche de fluide d'épaisseur dx . On adopte ici le second point de vue.

A.1 Débit sortant d'une tranche d'un écoulement

Considérons un écoulement dans la direction x incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, entre un fond situé en $y = h_b(x, t)$ et une surface libre en $y = (h_b + h)(x, t)$, où y est la direction transversale. Définissons un volume de contrôle par une tranche de fluide comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Soient, en un point de la frontière de la tranche, \mathbf{n} la normale extérieure, et \mathbf{u} et \mathbf{w} les vitesses du fluide et de la frontière. Pour une grandeur scalaire ϕ , le débit sortant à travers la frontière A de la tranche est

$$\int_A \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA.$$

La vitesse \mathbf{w} étant nulle sur les plans d'abscisse x et $x + dx$, et les vitesses normales $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ et $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ étant égales au fond ainsi qu'à la surface libre (condition cinématique = condition d'imperméabilité de ces surfaces), le débit sortant

ci-dessus devient

$$\int_{h_b(x+dx)}^{(h_b+h)(x+dx)} (\phi u)(x + dx, y) dy - \int_{h_b(x)}^{(h_b+h)(x)} (\phi u)(x, y) dy.$$

Introduisons la vitesse longitudinale moyenne U sur la hauteur de l'écoulement,

$$U(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_{h_b(x, t)}^{(h_b+h)(x, t)} u(x, y, t) dy, \quad (\text{A.1})$$

et la moyenne pondérée par la vitesse Φ de la grandeur ϕ ,

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(hU)(x, t)} \int_{h_b(x)}^{(h_b+h)(x)} (\phi u)(x, y) dy. \quad (\text{A.2})$$

Notons que si la vitesse est uniforme dans la section, la moyenne de ϕ est identique à celle qui définit U dans (A.1). Le débit sortant de ϕ s'exprime finalement par

$$\int_A \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dA = (h\Phi U)(x + dx) - (h\Phi U)(x) = \frac{\partial(h\Phi U)}{\partial x} dx. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Conservation de la masse

Pendant un temps infinitésimal dt , la variation de masse dans la tranche d'épaisseur dx est

$$dx \int_{h_b(t+dt)}^{(h_b+h)(t+dt)} \rho dy - dx \int_{h_b(t)}^{(h_b+h)(t)} \rho dy = \rho \frac{\partial h}{\partial t} dt dx.$$

D'autre part, la masse nette entrée dans la tranche pendant dt s'obtient à partir de (A.3) avec $\phi = \rho$ uniforme, d'où

$$dt \int_{h_b(x)}^{(h_b+h)(x)} \rho u(x, y) dy - dt \int_{h_b(x+dx)}^{(h_b+h)(x+dx)} \rho u(x+dx, y) dy = -\rho \frac{\partial(hU)}{\partial x} dx dt.$$

La conservation de la masse implique que la variation de masse est égale à la masse nette rentrée dans tranche, soit

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.4})$$

A.3 Conservation de la quantité de mouvement

Les vitesses transversale v et longitudinale u étant liées par $v \sim (h/\lambda) u$ du fait de l'incompressibilité, l'hypothèse de variation lente dans la direction x ,

soit $\lambda \gg h$, implique que v est négligeable devant u . Ceci conduit à négliger, dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement transversale, l'inertie et les contraintes visqueuses (Batchelor 1967, §5.7). La distribution de pression est donc hydrostatique :

$$p(x, y, t) = p_a + \rho g \cos \alpha (h_b(x, t) + h(x, t) - y), \quad (\text{A.5})$$

où p_a est la pression, considérée uniforme, régnant au-dessus de la surface libre.

La variation de quantité de mouvement longitudinale dans la tranche d'épaisseur dx pendant un temps infinitésimal dt est

$$dx \int_{h_b(t+dt)}^{(h_b+h)(t+dt)} \rho u(x, y, t+dt) dy - dx \int_{h_b(t)}^{(h_b+h)(t)} \rho u(x, y, t) dy = \rho \frac{\partial(hU)}{\partial t} dt dx.$$

La quantité de mouvement entrée dans la tranche pendant dt s'obtient à partir de (A.3) avec $\phi = \rho u$, d'où

$$\begin{aligned} dt \int_{h_b(x)}^{(h_b+h)(x)} (\rho u^2)(x, y) dy - dt \int_{h_b(x+dx)}^{(h_b+h)(x+dx)} (\rho u^2)(x+dx, y) dy = \\ - \rho \frac{\partial(c_{U^2} h U^2)}{\partial x} dx dt, \end{aligned}$$

où le coefficient c_{U^2} correspond à $\Phi = \rho c_{U^2} U$ dans (A.3), soit

$$c_{U^2}(x, t) = \frac{1}{U^2 h} \int_{h_b(x, t)}^{(h_b+h)(x, t)} u^2(x, y, t) dy. \quad (\text{A.6})$$

Ce coefficient dépend du profil de vitesse ; en particulier :

- $c_{U^2} = 1$ pour un profil de vitesse uniforme ($u(y) = U$), bonne approximation pour les écoulements turbulents à grand nombre de Reynolds ;
- $c_{U^2} = 4/3$ pour le profil de vitesse linéaire ($u(y) = \gamma y$) des films cisaillés ou de certains écoulements granulaires (Rajchenbach 2000) ;
- $c_{U^2} = 5/4$ pour le profil de vitesse ($u(y) \sim y^{3/2}$) de Bagnold d'un écoulement granulaire (1956) ;
- $c_{U^2} = 6/5$ pour le profil demi-parabolique correspondant à un film tombant visqueux ($u(y) = U_{max}(y/h)(2 - y/h)$ et $U_{max} = \frac{3}{2}U$ vitesse de la surface libre).

Si le temps de relaxation de ce profil est court devant les autres échelles de temps, le profil de vitesse est toujours et partout pleinement développé, et le coefficient c_{U^2} est constant et uniforme ; c'est l'hypothèse faite en général (souvent sans justification), afin de simplifier le problème.

Compte tenu de la distribution hydrostatique de pression (A.5), le flux longitudinal de quantité de mouvement lié aux forces de pression est :

$$\begin{aligned} & \int_{h_b(x)}^{(h_b+h)(x)} p(x, y) dy - \int_{h_b(x+dx)}^{(h_b+h)(x+dx)} p(x + dx, y) dy \\ & + p_a(x, h_b + h) dx \frac{\partial_x(h_b + h)}{\sqrt{1 + (\partial_x(h_b + h))^2}} - p(x, h_b) dx \frac{\partial_x h_b}{\sqrt{1 + (\partial_x h_b)^2}} = \\ & dx \rho g h \cos \alpha \partial_x(h_b + h), \end{aligned}$$

avec $(\partial_x(h_b + h))^2 \ll 1$ et $(\partial_x h_b)^2 \ll 1$ (la pression p_a disparaît dans l'intégration). Le flux lié aux contraintes visqueuses est non nul sur le fond seulement (en négligeant les contraintes visqueuses normales) et égal à $-\tau dx$ par unité de temps, où τ est la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur le fond. Enfin, le flux lié à la gravité est $\rho g \sin \alpha h dx$.

La conservation de la quantité de mouvement de la tranche de fluide s'écrit donc finalement, en considérant le coefficient c_{U^2} uniforme :

$$\rho \frac{\partial(Uh)}{\partial t} + \rho c_{U^2} \frac{\partial(U^2 h)}{\partial x} = -\rho g h \cos \alpha \frac{\partial(h_b + h)}{\partial x} - \tau + \rho g h \sin \alpha. \quad (\text{A.7})$$

L'ensemble de cette équation et l'équation de conservation de la masse (A.4) constituent les équations de Saint-Venant. L'approximation supplémentaire $c_{U^2} = 1$, acceptable pour un écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds, permet de simplifier un peu le membre de gauche : distribuant les dérivées des produits, et utilisant la conservation de la masse (A.4), l'équation ci-dessus devient

$$\rho h \frac{\partial U}{\partial t} + \rho U h \frac{\partial U}{\partial x} = -\rho g h \cos \alpha \frac{\partial(h_b + h)}{\partial x} - \tau + \rho g h \sin \alpha. \quad (\text{A.8})$$

A.4 Modélisation du frottement pariétal

L'équation de Saint-Venant fait intervenir le cisaillement pariétal qui doit être modélisé par une « relation de fermeture », c'est-à-dire exprimé en fonction des grandeurs moyennes U et h . C'est ici que réside la plus grande difficulté de bien représenter la physique du problème. On donne ici une relation de fermeture classique pour trois écoulements : un film visqueux, un écoulement à grand nombre de Reynolds, et un écoulement granulaire.

Pour un film visqueux, l'hypothèse de profil pleinement développé, c'est-à-dire parabolique ($c_{U^2} = 6/5$ uniforme) conduit à

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}(y_b) = \mu \frac{2U_{max}}{h} = \mu \frac{3U}{h} = \frac{3\mu}{Q} U^2, \quad (\text{A.9})$$

où $Q = Uh$ est le débit-volume par unité de largeur.

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, le cisaillement est classiquement relié à la vitesse U par un coefficient de frottement c_f défini par :

$$\tau = c_f \frac{\rho U^2}{2}. \quad (\text{A.10})$$

Ce coefficient de frottement dépend du nombre de Reynolds $Re = \rho U h / \mu$. Pour un écoulement turbulent, une relation couramment utilisée en hydraulique est la relation empirique de Blasius (Pope 2000)

$$c_f = 0,316 Re^{-1/4}. \quad (\text{A.11})$$

Une autre relation est celle de Manning-Strickler qui fait intervenir une rugosité z_0 du fond :

$$c_f = 0,1 \left(\frac{z_0}{h} \right)^{1/3}. \quad (\text{A.12})$$

Pour un écoulement granulaire sec, le cisaillement peut être lié à la contrainte normale $\rho g h$ par un coefficient de frottement de Coulomb μ_f :

$$\tau = \mu_f \rho g h. \quad (\text{A.13})$$

Ce coefficient peut être considéré constant (Savage & Hutter 1989), ou lié à la vitesse et l'épaisseur de l'écoulement par une relation phénoménologique $\mu_f = \mu_f(U, h)$ (Pouliquen 1999).

Bibliographie

- ABRAMS, J. & HANRATTY, T. J. 1985 Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface. *J. Fluid Mech.* **151**, 443–455.
- ACHESON, D. J. 1990 *Elementary fluid dynamics*. Oxford: Clarendon.
- ANDERSEN, K. H. 2001 A particle model of rolling grain ripples under waves. *Phys. Fluids* **13** (1), 58–64.
- ANDREOTTI, B. 2004 A two species model for aeolian sand transport. *J. Fluid Mech.* **510**, 47–70.
- ANDREOTTI, B., CLAUDIN, P. & DOUADY, S. 2002a Selection of dune shapes and velocities. Part 1: dynamics of sand, wind and barchans. *Eur. Phys. J. B* **28**, 321–339.
- ANDREOTTI, B., CLAUDIN, P. & DOUADY, S. 2002b Selection of dune shapes and velocities. Part 2: a two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B* **28**, 341–352.
- ANSHUS, B. E. & GOREN, S. L. 1966 A method of getting approximate solutions of the Orr-Sommerfeld equation for flow on a vertical wall. *AIChE J.* **12**, 1004–1008.
- ARADIAN, A., RAPHAEL, É. & DE GENNES, P. G. 2002 Surface flows of granular materials: a short introduction to some recent models. *C.R. Physique* **3** (2), 187–196.
- ARNAL, D. 1994 Predictions based on linear theory. AGARD Rep. 793. ONERA.
- ARNOLD, V. 1974 *Équations différentielles ordinaires*. Moscou: MIR.
- ASCE TASK COMMITTEE ON FLOW AND TRANSPORT OVER DUNES 2002 Flow and transport over dunes. *J. Hydraul. Engng* **128** (8), 726–728.
- AYRTON, H. 1910 The origin and growth of ripple-mark. *Proc. R. Soc. Lond. A* **84**, 285–310.

- BAGNOLD 1946 Motion of waves in shallow water. interaction between waves and sand bottoms. *Proc. R. Soc. Lond. A* **187**, 1–18.
- BAGNOLD, R. A. 1941 *The physics of blown sand and desert dunes*. London: Chapman & Hall.
- BAGNOLD, R. A. 1956 The flow of cohesionless grains in fluids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **249**, 235–297.
- BAGNOLD, R. A. 1973 The nature of saltation and of ‘bed-load’ transport in water. *Proc. R. Soc. Lond. A* **332**, 473–504.
- BARTHELET, P. & CHARRU, F. 1998 Benjamin-Feir and Eckhaus instabilities with galilean invariance: the case of interfacial waves in viscous shear flows. *Eur. J. Mech. B* **17** (1), 1–18.
- BARTHELET, P., CHARRU, F. & FABRE, J. 1995 Experimental study of interfacial long waves in a two-layer shear flow. *J. Fluid Mech.* **303**, 23–53.
- BATCHELOR, G. K. 1967 *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- BAYLY, B. J., ORSZAG, S. A. & HERBERT, T. 1988 Instability mechanisms in shear-flow transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20**, 359–391.
- BÉNARD, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gén. Sci. Pures Appl.* **11**, 1261–1271, 1309–1328.
- BENDER, C. M. & ORSZAG, S. A. 1978 *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill.
- BENJAMIN, T. B. 1957 Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **2**, 554–574.
- BENJAMIN, T. B. 1959 Shearing flow over a wavy boundary. *J. Fluid Mech.* **6**, 161–205.
- BENJAMIN, T. B. & FEIR, J. E. 1967 The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.* **27**, 417–430.
- BENJAMIN, T. B. & URSELL, F. 1954 The stability of the plane free surface of liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. Lond. A* **225**, 505–515.
- BENNEY, D. J. 1966 Long waves on liquid films. *J. Math. Phys.* **45**, 150–155.
- BENNEY, D. J. & NEWELL, A. C. 1967 The propagation of non-linear wave envelopes. *J. Math. Phys.* **46**, 133–145.
- BERGÉ, P. 1988 *Le chaos : théorie et expériences*. Paris: Eyrolles.

- BERGÉ, P., POMEAU, Y. & VIDAL, C. 1984 *L'ordre dans le chaos*. Paris: Hermann.
- BETCHOV, R. & SZEWCZYK, A. 1963 Stability of a shear layer between parallel streams. *Phys. Fluids* **6**, 1391–1396.
- BINNEY, J. & TREMAINE, S. 1988 *Galactic Dynamics*. Princeton University Press.
- BLONDEAUX, P. 1990 Sand ripples under sea waves. Part 1. Ripple formation. *J. Fluid Mech.* **218**, 1–17.
- BLONDEAUX, P. 2001 Mechanics of coastal forms. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 339–370.
- BOGORIOU BOV, N. & MITROPOLSKI, I. 1962 *Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires*. Paris: Gauthier-Villars.
- BOTTARO, A. & LUCHINI, P. 1999 Görtler vortices: are they amenable to local eigenvalue analysis. *Eur. J. Mech. B/Fluids* **18** (1), 47–65.
- BOUASSE, H. 1924 Houle, rides, seiches et marées. In *Bibliothèque scientifique de l'ingénieur et du physicien*. Paris: Delagrave.
- BOUSSINESQ, J. 1871 Théorie de l'intumescence liquide, appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire. *C.R. Acad. Sci. Paris* **72**, 755–759.
- BUSSE, F. & WHITEHEAD, J. A. 1971 Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid. *J. Fluid Mech.* **47**, 305–320.
- CALLEN, H. B. 1985 *Thermodynamics and an introduction to thermostatics*. New York: Wiley.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag.
- CASE, K. M. 1960 Stability of inviscid plane Couette flow. *Phys. Fluids* **3**, 143–148.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. New-York: Dover.
- CHANG, H.-C. 1994 Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, 103–136.
- CHARRU, F. 1997 A simple mechanical system mimicking phase transitions in a one-dimensional medium. *Eur. J. Phys.* **18**, 417–424.
- CHARRU, F. 2006 Selection of the ripple length on a granular bed sheared by a liquid flow. *Phys. Fluids* **18**, 121508.

- CHARRU, F. & BARTHELET, P. 1999 Secondary instabilities of interfacial waves due to coupling with a long wave mode in a two-layer Couette flow. *Physica D* **125**, 311–324.
- CHARRU, F. & HINCH, E. J. 2000 ‘phase diagram’ of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism for the long-wave instability. *J. Fluid Mech.* **414**, 195–223.
- CHARRU, F. & HINCH, E. J. 2006 Ripple formation on a particle bed sheared by a viscous liquid. Part 2. Oscillating flow. *J. Fluid Mech.* **550**, 123–137.
- CHARRU, F., LARRIEU, E., DUPONT, J.-B. & ZENIT, R. 2007 Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow. *J. Fluid Mech.* **570**, 431–453.
- CHARRU, F. & MOUILLETON-ARNOULD, H. 2002 Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **452**, 303–323.
- CHARRU, F., MOUILLETON-ARNOULD, H. & EIFF, O. 2004 Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.* **519**, 55–80.
- CHAVANIS, P. H. 2002 Gravitational instability of finite isothermal spheres. *Astronomy & Astrophysics* **381**, 340–356.
- CHOMAZ, J.-M. 2005 Global instabilities in spatially developing flows: Non-Normality and Nonlinearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 357–392.
- CHOSSAT, P. & IOOSS, G. 1994 *The Couette-Taylor problem*. *Appl. Maths. Sci.* 102. Springer Verlag.
- CLANET, C. & SEARBY, G. 1998 First experimental study of the Darrieus-Landau instability. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3867–3870.
- COLEMAN, S. E. & ELING, B. 2000 Sand wavelets in laminar open-channel flows. *J. Hydraul. Res.* **38** (5), 331–338.
- COLEMAN, S. E. & MELVILLE, B. W. 1994 Bed-form development. *J. Hydraul. Engng* **120** (4), 544–560.
- COLEMAN, S. E. & MELVILLE, B. W. 1996 Initiation of bed forms on a flat sand bed. *J. Hydraul. Engng* **122** (6), 301–310.
- COLOMBINI, M. 2004 Revisiting the linear theory of sand dune formation. *J. Fluid Mech.* **502**, 1–16.
- COUETTE, M. 1890 Études sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.* **21** (6), 433–510.

- COULLET, P. & FAUVE, S. 1985 Propagative phase dynamics for systems with galilean invariance. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2857–2859.
- COULLET, P. & IOOSS, G. 1990 Instabilities of one-dimensional cellular patterns. *Phys. Rev. Lett.* **64** (8), 866–869.
- COUSTEIX, J. & MAUSS, J. 2006 *Analyse asymptotique et couche limite. Mathématiques & Applications* 56. Berlin: Springer.
- CRAIK, A. D. D. 1985 *Wave interactions and fluid flows*. Cambridge University Press.
- CRAIK, A. D. D. 2004 The origins of water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36**, 1–28.
- CRAIK, A. D. D. 2005 George Gabriel Stokes on water wave theory. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **37**, 23–42.
- CRAWFORD, J. D. 1991 Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.* **63** (4), 991–1037.
- CRAWFORD, J. D. & KNOBLOCH, E. 1991 Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid mechanics. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 341–387.
- CROSS, M. C. & HOHENBERG, P. C. 1993 Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.* **65** (3), 851–1113.
- DARRIEUS, G. 1938 Propagation d'un front de flamme : essai de théorie des vitesses anormales de déflagration par développement spontané de la turbulence. *Travail non publié présenté à La Technique Moderne, Paris*.
- DARRIGOL, O. 2003 The spirited horse, the engineer, and the mathematician: water waves in nineteenth-century hydrodynamics. *Arch. Hist. Exact Sci.* **58**, 21–95.
- DEMAZURE, M. 1989 *Catastrophes et bifurcations*. Paris: Ellipses.
- DENN, M. M. 2001 Extrusion instabilities and wall slip. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 265–287.
- DIAS, F. & KHARIF, C. 1999 Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301–346.
- DIU, B., GUTHMANN, C., LEDERER, D. & ROULET, B. 1989 *Physique statistique*. Paris: Hermann.
- DONNELLY, R. J. & GLABERSON, W. 1966 Experiments on the capillary instability of a liquid jet. *Proc. R. Soc. Lond. A* **290**, 547–556.
- DRAZIN, P. G. 2002 *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.

- DRAZIN, P. G. & REID, W. H. 2004 *Hydrodynamic Stability*. 2^e éd. Cambridge University Press.
- DUFFING, G. 1918 *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz*. F. Veiweg u. Sohn, Braunschweig.
- DURAN, J. 1997 *Sables, poudres et grains*. Eyrolles.
- VAN DYKE, M. 1982 *An Album of Fluid Motion*. California: Parabolic Press.
- ECKHAUS, W. 1965 *Studies in non-linear stability theory. Springer Tracts in Natural Philosophy* 6. Berlin: Springer-Verlag.
- EGGERS, J. 1997 Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Mod. Phys.* **69** (3), 865–929.
- ELLINGSEN, T. & PALM, E. 1975 Stability of linear flow. *Phys. Fluids* **18**, 487–488.
- ELPHICK, C., TIRAPEGUI, E., BRACHET, M. E., COULLET, P. & IOSS, G. 1987 A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica* **29D**, 95–127.
- FARACI, C. & FOTI, E. 2001 Evolution of small scale regular patterns generated by waves propagating over a sandy bottom. *Phys. Fluids* **13** (6), 1624–1634.
- FARADAY, M. 1831 On a peculiar class of acoustic figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **121**, 299–340.
- FARRELL, B. F. 1988 Optimal excitation of perturbations in viscous shear flows. *Phys. Fluids* **31** (8), 2093–2102.
- FASEL, H. & KONZELMANN, U. 1990 Non-parallel stability of a flat plate boundary layer using the complete Navier-Stokes equations. *J. Fluid Mech.* **221**, 311–347.
- FAUVE, S. 1998 Pattern forming instabilities. In *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (éd. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 387–492. Cambridge University Press.
- FENSTERMACHER, P. R., SWINNEY, H. L. & GOLLUB, J. 1979 Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow. *J. Fluid Mech.* **94**, 103–128.
- FERMIGIER, M., LIMAT, L., WESFREID, J. E., BOUDINET, P., PETITJEAN, M., QUILLIET, C. & VALET, T. 1990 Gravitational and magnetic instabilities of thin fluid layers. *Phys. Fluids A* **2** (9), 1518–1518.

- FERMIGIER, M., LIMAT, L., WESFREID, J. E., BOUDINET, P. & QUILLET, C. 1992 Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer. *J. Fluid Mech.* **236**, 349–383.
- FERNANDEZ LUQUE, R. & VAN BEEK, R. 1976 Erosion and transport of bedload sediment. *J. Hydraul. Res.* **14** (2), 127–144.
- FJØRTOFT, R. 1950 Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows for the baroclinic circular vortex. *Geofys. Publ., Oslo* **17** (6), 1–52.
- FLORYAN, J. M. 1991 On the görler instability of boundary layers. *Prog. Aerospace Sci.* **28**, 235–271.
- FLORYAN, J. M., DAVIS, S. H. & KELLY, R. E. 1987 Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Phys. Fluids* **30**, 983–989.
- FORTERRE, Y. 2006 Kapiza waves as a test for three-dimensional granular flow rheology. *J. Fluid Mech.* **563**, 123–132.
- FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2003 Long-surface-wave instability in dense granular flows. *J. Fluid Mech.* **486**, 21–50.
- GASTER, M. 1962 A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **14**, 222–224.
- GASTER, M. 1974 On the effects of boundary-layer growth on flow stability. *J. Fluid Mech.* **66**, 465–480.
- DE GENNES, P. G. & BADOZ, J. 1994 *Les objets fragiles*. Paris: Plon.
- GLENDINNING, P. 1994 *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge University Press.
- GOR'KOV, L. P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402–407 (English transl. in Sov. Phys. J.E.T.P. (1958), vol. 6, pp. 311–315).
- GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag.
- GUYON, E., HULIN, J. P. & PETIT, L. 2001 *Hydrodynamique physique*. 2^e éd. Paris: EDP Sciences & CNRS Éditions, coll. Savoirs Actuels.
- HAMMACK, J. L. & HENDERSON, D. M. 1993 Resonant interactions among surface water waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 55–97.
- HANRATTY, T. J. 1983 Interfacial instabilities caused by air flow over a thin liquid film. In *Waves on Fluid Interfaces* (éd. R. Meyer), pp. 221–259. New York: Academic.

- HEISENBERG, W. 1924 Über stabilität und turbulenz von flüssigkeitsstromen. *Ann. Phys.* **74**, 577–627.
- VON HELMHOLTZ, H. 1868 On discontinuous movements of fluids. *Phil. Mag.* **36**, 337–346.
- HERBERT, T. 1988 Secondary instability of boundary layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20**, 487–526.
- HERSEN, P., DOUADY, S. & ANDREOTTI, B. 2002 Relevant lengthscale of barchan dunes. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 264301.
- HESLA, T. I., PRANCKH, F. R. & PREZIOSI, L. 1986 Squire's theorem for two stratified fluids. *Phys. Fluids* **29** (9), 2808–2811.
- HICKOX, C. E. 1971 Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow. *Phys. Fluids* **14** (2), 251–262.
- HINCH, E. J. 1984 A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids. *J. Fluid Mech.* **144**, 463–465.
- HINCH, E. J. 1991 *Perturbation Methods*. Cambridge University Press.
- HINCH, E. J., HARRIS, O. J. & RALLISON, J. M. 1992 The instability mechanism for two elastic liquids being co-extruded. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **43**, 311–324.
- HOF, B., VAN DOORNE, C. W. H., WESTERWEEL, J., NIEUWSTADT, F. T. M., FAISST, H., ECKHARDT, B., WEDIN, H., KERSWELL, R. R. & WALEFFE, F. 2004 Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science* **305**, 1594–1598.
- HOOPER, A. P. & BOYD, W. G. C. 1983 Shear-flow instability at the interface between two viscous fluids. *J. Fluid Mech.* **128**, 507–528.
- HOOPER, A. P. & BOYD, W. G. C. 1987 Shear flow instability due to a wall and a viscosity difference at the interface. *J. Fluid Mech.* **179**, 201–225.
- HOPF, E. 1942 Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystems. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-phys. Kl.* **94**, 1–22 (English transl. in The Hopf bifurcation and its applications (1976), pp. 163–193, eds J.E. Marsden & M. McCracken. New-York: Springer-Verlag).
- HOWARD, L. 1961 A note on a paper of John W. Miles. *J. Fluid Mech.* **10**, 509–512.
- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1985 Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech.* **159**, 151–168.

- HUERRE, P. & MONKEWITZ, P. A. 1990 Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473–537.
- HUERRE, P. & ROSSI, M. 1998 Hydrodynamic instabilities in open flows. In *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (éd. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 81–294. Cambridge University Press.
- HUNT, J. C. R. 2006 Nonlinear and wave theory contributions of T. Brooke Benjamin. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **38**, 1–25.
- HUPPERT, H. E. & TURNER, J. S. 1981 Double-diffusive convection. *J. Fluid Mech.* **106**, 299–329.
- INFELD, E. & ROWLAND, G. 1990 *Nonlinear waves, solitons and chaos*. Cambridge University Press.
- IOOSS, G. & ADELMEYER, M. 1999 *Topics in Bifurcation Theory. Adv. Series in Nonlinear Dynamics* 3, 2^e éd. World Sci.
- IOOSS, G. & JOSEPH, D. D. 1990 *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. 2^e éd. Springer Verlag.
- JANIAUD, B., PUMIR, A., BENSIMON, D., CROQUETTE, V., RICHTER, H. & KRAMER, L. 1992 The Eckhaus instability for travelling waves. *Physica D* **55**, 269–286.
- JEANS, J. H. 1902 The stability of a spherical nebula. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **199**, 1–53.
- JORDINSON, R. 1970 The flat plate boundary layer. Part 1. Numerical integration of the Orr-Sommerfeld equations. *J. Fluid Mech.* **43**, 801–811.
- JOSEPH, D. D., BAI, R., CHEN, K. P. & RENARDY, Y. Y. 1997 Core-annular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 65–90.
- JOULIN, G. & VIDAL, P. 1998 An introduction to the instability of flames, shocks and detonations. In *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (éd. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 493–673. Cambridge University Press.
- KANEKO, A. & HONJI, H. 1979 Double structures of steady streaming in the oscillatory viscous flow over a wavy wall. *J. Fluid Mech.* **93** (4), 727–736.
- KAPITZA, P. L. 1948 Wave flow of thin layers of a viscous liquid. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **18**, 3–28 (English transl. in Collected Papers of P.L. Kapitza, ed. D. Ter Haar, Pergamon, 1965).
- KAPITZA, P. L. & KAPITZA, S. P. 1949 Wave flow of thin layers of a viscous liquid. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 105–120 (English transl. in Collected Papers of P.L. Kapitza, ed. D. Ter Haar, Pergamon, 1965, pp. 690–709).

- VON KÁRMÁN, T. 1934 Some aspects of the turbulence problem. In *Proc. 4th Internat. Congress for Appl. Mech., Cambridge, England*, pp. 54–91.
- KELVIN, L. 1871 Hydrokinetic solutions and observations. *Phil. Mag.* **42**, 362–377.
- KERSWELL, R. R. 2002 Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **34**, 83–113.
- KERSWELL, R. R. 2005 Recent progress in understanding the transition to turbulence in a pipe. *Nonlinearity* **18**, 17–44.
- KLEBANOFF, P. S., TIDSTROM, K. D. & SARGENT, L. M. 1962 The three-dimensional nature of boundary-layer transition. *J. Fluid Mech.* **12**, 1–34.
- KORTEWEG, D. J. & DE VRIES, G. 1895 On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* **39** (5), 422–443.
- KOSCHMIEDER, E. L. 1993 *Bénard Cells and Taylor Vortices*. Cambridge University Press.
- KURAMOTO, Y. 1984 Phase dynamics of weakly unstable periodic structures. *Prog. Theor. Phys.* **71**, 1182–1196.
- LAGRÉE, P.-Y. 2003 A triple deck model of ripple formation and evolution. *Phys. Fluids* **15** (8), 2355–2368.
- LAKE, B. M., YUEN, H. C., RUNGALDIER, H. & FERGUSON, W. E. 1977 Nonlinear deep-water waves: theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *J. Fluid Mech.* **83**, 49–74.
- LAMB, H. 1932 *Hydrodynamics*. 6^e éd. Cambridge University Press.
- LANDAHL, M. T. 1980 A note on an algebraic instability in inviscid parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **98**, 243–251.
- LANDAU, L. 1944 On the problem of turbulence. *C. R. Acad. Sci. U.R.S.S.* **44**, 311–314.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. 1969 *Mécanique*. Moscou: MIR.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. 1989 *Mécanique des fluides*. 2^e éd. Moscou: MIR.
- LANGE, C. G. & NEWELL, A. C. 1974 A stability criterion for envelope equations. *SIAM J. Appl. Math.* **27**, 441–456.
- LEIGHTON, D. & ACRIVOS, A. 1986 Viscous resuspension. *Chem. Engng Sci.* **41** (6), 1377–1384.

- LIGHTHILL, J. 1978 *Waves in Fluids*. Cambridge University Press.
- LIN, C. C. 1955 *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press.
- LINZ, S. J. 1995 A simple non-linear system: the oscillator with quadratic friction. *Eur. J. Phys.* **16**, 67–72.
- LIU, J., PAUL, J. D. & GOLLUB, J. P. 1993 Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.* **250**, 69–101.
- LONGAIR, M. S. 2006 *The Cosmic Century: A History of Astrophysics and Cosmology*. Cambridge University Press.
- LORENZ, E. N. 1963 Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.* **20**, 130–141.
- LUCHINI, P. 2000 Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations. *J. Fluid Mech.* **404**, 289–309.
- LUCHINI, P. & BOTTARO, A. 1998 Görtler vortices: a backward-in-time approach to the receptivity problem. *J. Fluid Mech.* **363**, 1–23.
- LYNE, W. H. 1971 Unsteady viscous flow over a wavy wall. *J. Fluid Mech.* **50**, 33–48.
- MACK, L. M. 1976 A numerical study of the eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer. *J. Fluid Mech.* **73**, 497–570.
- MALKUS, W. V. R. & VERONIS, G. 1958 Finite amplitude cellular convection. *J. Fluid Mech.* **4**, 225–260.
- MANNEVILLE, P. 1991 *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Saclay: Alea.
- MARANGONI, C. G. M. 1871 Über die ausbreitung der tropfen einer flüssigkeit auf der oberfläche einer anderen. *Ann. Phys. Chem.* **143**, 337–354.
- McGOLDRICK, L. F. 1965 Resonant interactions among capillary-gravity waves. *J. Fluid Mech.* **21**, 305–331.
- MICHALKE, A. 1964 On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.* **19**, 543–556.
- MIDI, G. 2004 On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E* **14** (4), 341–365.
- MILES, J. W. 1981 The Korteweg-de Vries equation: a historical survey. *J. Fluid Mech.* **106**, 131–147.

- MILES, J. W. 1984 Nonlinear Faraday resonance. *J. Fluid Mech.* **146**, 285–302.
- MILES, J. W. & HENDERSON, D. M. 1990 Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143–165.
- MILNE-THOMPSON, L. M. 1962 *Theoretical Hydrodynamics*. 4^e éd. London: Mac Millan.
- MOUILLERON-ARNOULD, H., CHARRU, F. & EIFF, O. 2001 Experimental study of ripple growth in a granular bed sheared by an oscillating viscous fluid sheared by an oscillating viscous fluid. 4th International Conference on Multiphase Flows (New Orleans, USA).
- NAYFEH, A. H. & SARIC, W. S. 1972 Nonlinear waves in a Kelvin-Helmholtz flow. *J. Fluid Mech.* **55**, 311–327.
- NEWELL, A. C., PASSOT, T. & LEGA, J. 1993 Order parameter equations for patterns. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 399–453.
- NEWELL, A. C. & WHITEHEAD, J. A. 1969 Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 279–304.
- NIELSEN, P. 1992 *Coastal bottom boundary layers and sediment transport*. Singapore: World Scientific.
- NISHIOKA, M., IIDA, S. & ICHIKAWA, Y. 1975 An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **72**, 731–751.
- ORR, W. M. 1907 The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. *Proc. R. Irish Acad. A* **27**, 9–68, 69–138.
- ORSZAG, S. A. 1971 Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.* **50**, 689–703.
- PEARSON, J. R. A. 1958 On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.* **4**, 489–500.
- PÉREZ, J.-P. 1995 *Mécanique*. 4^e éd. Paris: Masson.
- PEYRARD, M. & DAUXOIS, T. 2004 *Physique des solitons*. EDP Sciences & CNRS Éditions, coll. Savoirs Actuels.
- PHILLIPS, O. M. 1981 Wave interactions - the evolution of an idea. *J. Fluid Mech.* **106**, 215–227.
- PLATEAU, J. 1857 Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur. *Ann. Chim. Phys.* **50**, 97–124.

- PLATEAU, J. 1873 *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gauthier-Villars, Paris.
- VAN DER POL, B. 1927 Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance (receptance with reactive triode). *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.* **3**, 65–80.
- POMEAU, Y. & MANNEVILLE, P. 1979 Stability and fluctuations of a spatially periodic convective flow. *J. Physique-Lettres* **40**, 609–612.
- POPE, S. B. 2000 *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- POULIQUEN, O. 1999 Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids* **11**, 542–548.
- PRANDTL, L. 1921 Bemerkungen über die entstehung der turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 431–436.
- PRIGOGINE, I. & STENGERS, I. 1979 *La Nouvelle Alliance, Métamorphose de la Science*. Paris: Gallimard.
- PROBSTINE, R. F. 2003 *Physicochemical hydrodynamics. An introduction*. 2^e éd. New York: John Wiley & Sons.
- PUMIR, A., MANNEVILLE, P. & POMEAU, Y. 1983 On solitary waves running down an inclined plane. *J. Fluid Mech.* **135**, 27–50.
- RAJCHENBACH, J. 2000 Granular flows. *Adv. in Phys.* **49**, 229–256.
- RAUDKIVI, A. J. 1997 Ripples on stream bed. *J. Hydraul. Engng* **123** (1), 58–64.
- RAUDKIVI, A. J. 1998 *Loose Boundary Hydraulics*. Rotterdam: A.A. Balkema.
- RAYLEIGH, L. 1879 On the instability of jets. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10**, 4–13.
- RAYLEIGH, L. 1880 On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **11**, 57–70.
- RAYLEIGH, L. 1883a Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. Lond. Math. Soc.* **14**, 170–177.
- RAYLEIGH, L. 1883b On maintained vibrations. *Phil. Mag.* **15**, 229–235.
- RAYLEIGH, L. 1883c On the crispations of fluid resting on a vibrating support. *Phil. Mag.* **16**, 50–58.

- RAYLEIGH, L. 1894 *The theory of sound*. 2^e éd. London: Mac Millan (reprinted by Dover, 1945).
- RAYLEIGH, L. 1916a On the convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.* **32**, 529–546.
- RAYLEIGH, L. 1916b On the dynamics of revolving fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A* **93**, 148–154.
- REED, H. L., SARIC, W. S. & ARNAL, D. 1996 Linear stability theory applied to boundary layers. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 389–428.
- RENARDY, M. & RENARDY, Y. 1993 Derivation of amplitude equations and analysis of sideband instabilities in two-layer flows. *Phys. Fluids A* **5** (11), 2738–2762.
- RENARDY, Y. 1985 Instability at the interface between two shearing fluids in a channel. *Phys. Fluids* **28**, 3441–3443.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **174**, 935–982.
- RICHARDS, K. J. 1980 The formation of ripples and dunes on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **99** (3), 597–618.
- RIECKE, H. 1992 Self-trapping of traveling wave pulses in binary mixture convection. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 301–304.
- RIEUTORD, M. 1997 *Une introduction à la dynamique des fluides*. Paris: Masson.
- RILEY, N. 2001 Steady streaming. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 43–65.
- ROCARD, Y. 1967 *Thermodynamique*. 2^e éd. Paris: Masson.
- ROMANOV, V. A. 1973 Stability of plane-parallel Couette flow. *Funkcional Anal. i Prilozhen* **7** (2), 62–73 (English transl. in Functional Analysis and Its Applications, vol. 7, pp. 137–146).
- ROSS, J. A., BARNES, F. H., BURNS, J. G. & ROSS, M. A. S. 1970 The flat plate boundary layer. Part 3. Comparison of theory with experiments. *J. Fluid Mech.* **43**, 819–832.
- ROUSSEAU, G., STEGNER, A. & WESFREID, J. E. 2004 Wavelength selection of rolling-grain ripples in the laboratory. *Phys. Rev. E* **69**, 031307.
- BUYER-QUIL, C. & MANNEVILLE, P. 2000 Improved modeling of flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* **15**, 357–369.

- SAFFMAN, P. G. & TAYLOR, G. I. 1958 The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A* **245**, 312–329.
- DE SAINT-VENANT, A. J. C. 1871 Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C.R. Acad. Sci. Paris* **73**, 147–154, 237–240.
- SAVAGE, S. B. & HUTTER, K. 1989 The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.* **199**, 177–215.
- SAVART, F. 1833 Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en minces parois. *Ann. Chim. Phys.* **53**, 337–386, clichés dans le volume 54.
- SCHATZ, M. F. & NEITZEL, G. P. 2001 Experiments on thermocapillary instabilities. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 93–127.
- SCHERER, M. A., MELO, F. & MARDER, M. 1999 Sand ripples in an oscillating annular sand-water cell. *Phys. Fluids* **11** (1), 58–67.
- SCHLICHTING, H. 1933 Zur entstehung der turbulenz bei der plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* pp. 181–208.
- SCHLUTER, A., LORTZ, D. & BUSSE, F. 1965 On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **23**, 129–144.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and transition in shear flows*. Springer-Verlag.
- SCHUBAUER, G. B. & SKRAMSTADT, H. K. 1947 Laminar boundary-layer oscillations and transition on a flat plate. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **38**, 251–292.
- SCHUSTER, H. G. & WOLFRAM, J. 2005 *Deterministic Chaos, an Introduction*. Wiley-VCH, Berlin.
- SEGEL, L. A. 1969 Distant sidewalls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 203–224.
- SHKADOV, V. Y. 1967 Wave flow regimes of a thin layer of a viscous fluid under the action of gravity. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhidk. i Gaza* **1**, 43–51 (English transl. in *Fluid Dynamics* (1970), vol. 2, pp. 29–34, Faraday Press, New-York).
- SIGGIA, E. D. & ZIPPELIUS, A. 1981 Pattern selection in Rayleigh-Bénard convection near threshold. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 835–838.
- SLEATH, J. F. A. 1976 On rolling-grain ripples. *J. Hydraul. Res.* **14**, 69–81.

- SMITH, M. K. 1990 The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *J. Fluid Mech.* **217**, 469–485.
- SOMMERFELD, A. 1908 Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. In *Atti del 4 Congresso Internazionale dei Matematici, Ser. I*, vol. 3, pp. 116–124. Rome.
- SQUIRE, H. B. 1933 On the stability of three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. Lond. A* **142**, 621–628.
- STEGNER, A. & WESFREID, J. E. 1999 Dynamical evolution of sand ripples under water. *Phys. Rev. E* **60**, 3487–3490.
- STEWARTSON, K. & STUART, J. T. 1971 A nonlinear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **48**, 529–545.
- STOKES, G. G. 1847 On the theory of oscillatory waves. *Camb. Trans.* **8**, 441–473 (Papers 1, 197–229).
- STUART, J. T. 1958 On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* **4**, 1–21.
- STUART, J. T. 1960 On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1. The basic behavior in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **9**, 353–370.
- STUART, J. T. 1963 Hydrodynamic stability. In *Laminar boundary layers* (éd. L. Rosenhead). Clarendon Press, Oxford.
- STUART, J. T. & DI PRIMA, R. C. 1978 The Eckhaus and Benjamin-Feir resonance mechanisms. *Proc. R. Soc. Lond. A* **362**, 27–41.
- SUMER, B. M. & BAKIOGLU, M. 1984 On the formation of ripples on an erodible bed. *J. Fluid Mech.* **144**, 177–190.
- SWIFT, J. & HOHENBERG, P. C. 1977 Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A* **15**, 319–328.
- TAYLOR, G. I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **223**, 289–343.
- TAYLOR, G. I. 1950 The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. *Proc. R. Soc. Lond. A* **201**, 192–196.
- TAYLOR, G. I. & MICHAEL, D. H. 1973 On making holes in a sheet of fluid. *J. Fluid Mech.* **58**, 625–639.
- THORPE, S. A. 1969 Experiments on the instability of stratified shear flows: immiscible fluids. *J. Fluid Mech.* **39**, 25–48.

- TOLLMIEN, W. 1929 Über der entstehung der turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* pp. 21–44.
- TREFETHEN, L. N., TREFETHEN, A. E., REDDY, S. C. & DRISCOLL, T. A. 1993 Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science* **261**, 578–584.
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical Fluid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford.
- VALANCE, A. & LANGLOIS, V. 2005 Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. *Eur. Phys. J. B* **43**, 283–294.
- DE VEGA, H. J., SANCHEZ, N. & COMBES, F. 1996 Self-gravity as an explanation of the fractal structure of the interstellar medium. *Nature* **383**, 56–58.
- VILLERMAUX, E. 1998 On the role of viscosity in shear instabilities. *Phys. Fluids* **10**, 368–373.
- VITTORI, G. & BLONDEAUX, P. 1990 Sand ripples under sea waves. Part 2. Finite-amplitude development. *J. Fluid Mech.* **218**, 19–39.
- WATSON, J. 1960 On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille and for plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **9**, 371–389.
- WELANDER, P. 1967 On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. *J. Fluid Mech.* **29**, 17–30.
- WERLÉ, H. 1980 *Rech. Aérospace* **5**, 35–49.
- WHITHAM, G. B. 1974 *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley.
- WILLIAMSON, C. H. K. 1996 Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28**, 477–539.
- WYGNANSKI, I. J. & CHAMPAGNE, F. H. 1973 On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.* **59**, 281–335.
- YALIN, M. S. 1985 On the determination of ripple geometry. *J. Hydraul. Engng* **111**, 1148–1155.
- YIH, C. S. 1963 The mechanism for surface wave instability in film flow down an inclined plane. *Phys. Fluids* **6**, 321–334.
- YIH, C. S. 1967 Instability due to viscous stratification. *J. Fluid Mech.* **27**, 337–352.

Index

A

Accrochage de fréquence, 261, 263
Amplitude (équations), 254
Application
 de premier retour, 320, 321, 342
 logistique, 321
Attracteur, 315
 bassin, 2, 92, 319
 de Hénon, 321, 353
 étrange, 319
 fractal, 353
Avalanche, 38, 193–200
angle, 194

B

Bagnold
 conjecture, 203
 Ralph Alger, 200
Bénard-Marangoni
 instabilité thermocapillaire, 76–78
Benjamin-Feir (instabilité), 269–271,
 290
-Eckhaus, 303
expérience, 271
Bifurcation, 6–13, 44, 316, 335,
 340–353
codimension, 316, 341–343
d'une orbite périodique, 342
de codimension deux, 349–353
de Hopf, 12, 27, 30, 100, 247, 262,
 290, 301, 342, 347–348, 356
fourche, 9–12, 23, 27, 289, 345
fourche sous-critique, 244
fourche supercritique, 243, 256
générique, 11
globale, 341, 342, 350
homocline, 342

hétérocline, 342
locale, 341
nœud-col, 7–9, 16, 20, 23, 289, 342–
 347
par doublement de période, 342
sous-critique, 154, 225, 296, 298,
 305
supercritique, 292
transcritique, 12, 344
Boussinesq (approximation), 24, 28,
 73, 293
Bulle de gaz et de vapeur, 17–21

C

Cauchy (conditions), 98
Chandrasekhar, Subrahmanyan, 52
Chaos déterministe, 26, 69, 242, 252,
 315
Coefficient de frottement, 194, 196,
 201, 233, 361
 de Blasius, 237, 238, 361
 de Manning-Strickler, 237, 238,
 361
Condition
 de solvabilité, 242, 246, 250, 283,
 287, 288, 294, 313, 314
Contraction des aires, 319
Convection
 thermohaline, 27, 308
Convection thermique
 dans un anneau, 23–27
Coriolis (force d'inertie), 130
Couche critique, 110, 146, 149
Couche de mélange, 100, 104, 115
Couche limite, 100, 101, 140, 158–164
 effet non parallèle, 159–162
 instabilité, 185
 instabilité secondaire, 305

- oscillante, 226, 231
- Couette plan (stabilité), 111, 158
- Couette-Taylor
 - critère de Rayleigh, 127
 - instabilité, 124–132, 164, 240
 - instabilité secondaire, 300
- Coulomb (lois), 194, 196, 202
- Couplage k fini- k nul, 307–312
- Croissance transitoire, 1, 30–34, 40–41, 156, 162, 306
- Cycle limite, 13, 247, 261, 342, 350
- D**
 - Darrieus-Landau (instabilité), 83
 - Dean (tourbillons), 124, 164
 - Degré de liberté, 1, 316
 - Développement asymptotique
 - ondes courtes, 174
 - ondes longues, 172
 - Diagramme de bifurcation, 9, 15, 243, 263, 335, 355, 356
 - de Hopf, 348
 - fourche, 347
 - nœud-col, 345
 - transcritique, 346
 - Diagramme de stabilité, 174, 175
 - Dispersion
 - d'un paquet d'ondes, 87–90, 101, 279
 - Duffing (oscillateur), 242, 247–251, 275
 - oscillateurs couplés, 272
 - Dune
 - aquatique, 193, 208, 232–237
 - barkhane, 210, 222
 - éolienne, 193, 207
 - E**
 - Échelles multiples (méthode), 242, 245, 265
 - Eckhaus (instabilité), 289, 295–300
 - zig-zag, 299
 - Équation d'enveloppe, 278–283, 289, 302
 - Équation différentielle ordinaire, 1, 315, 316
 - Érosion, 205–206
 - Espace des phases, 2, 315, 316
 - directions propres, 4
 - élargi, 343
 - Excitation optimale d'un mode instable, 34–36, 41
 - Exponentielle de matrice, 354
 - F**
 - Faiblement non linéaire (approche), 239
 - Faraday, 21
 - instabilité, 252
 - Film de savon, 13
 - Film liquide
 - annulaire, 166
 - cisaillé, 166, 186, 256
 - tombant, 168–184, 195
 - Fjørtoft (théorème), 113
 - Floquet (théorie), 320
 - Fluide
 - élastique, 167
 - miscible, 166
 - Fonction de Green, 93
 - Fonction propre
 - couche limite, 159
 - Poiseuille plan, 153
 - Forme normale
 - d'une EDO, 316, 331, 355
 - de la bifurcation de Hopf, 13, 348
 - de la bifurcation fourche, 10, 30, 346
 - de la bifurcation nœud-col, 9, 344
 - de la bifurcation transcritique, 345
 - Fredholm (alternative), 314
 - Fréquence
 - correction non linéaire, 251
 - de Brunt-Väisälä, 29, 30
 - de coupure, 180, 198
 - Froude critique (nombre), 174, 198, 235
 - G**
 - Gaster (relation), 100, 179, 183
 - Généricité, 334–339
 - Ginzburg-Landau (équation), 97, 292–294

- coefficients complexes, 302–306
 solution localisée, 295, 303
Görtler (tourbillons), 124, 164
- H**
- Hamiltonien, 351
 Hartman-Grobman (théorème), 325
 Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von, 119
 Hilbert (transformée), 259, 311
 Howard (théorème du demi-cercle), 113
 Hystérésis, 9, 244
- I**
- Instabilité
 absolue, 94, 98–100, 290, 300
 centrifuge, 106
 convective, 94, 98–101, 151, 156, 174, 183–184, 306
 de grande longueur d'onde, 61, 121, 123, 168, 172–174, 308
 elliptique, 306
 secondaire, 299
 sous-harmonique, 306
 tridimensionnelle, 156
Interface
 condition cinématique, 58, 170
 condition dynamique, 58, 170
 instabilité, 172
Intermittence, 306
Invariance
 galiléenne, 95, 307–308, 314
 par réflexion, 10, 60, 243, 279, 298, 300, 310
 par rotation, 127
 par translation, 45, 50, 127, 231, 240, 279, 292, 295, 298, 300, 302, 307, 314
- J**
- Jeans (instabilité gravitationnelle), 44–53
 Jet, 104, 121
- K**
- Kapitza, 168, 179
 Pyotr Leonidovich, 168
Kelvin (Lord), William Thomson, 118
 Kelvin-Helmholtz (instabilité), 103, 115–123
 avec gravité-capillarité, 132
 avec parois, 132
 effets non parallèles, 123
 instabilité absolue, 122
 sur un film visqueux, 134
Klein-Gordon
 onde non linéaire, 274, 286
 équation, 266, 272–273
 équation d'amplitude, 273
Korteweg-de Vries (équation), 263, 287
Kuramoto-Sivashinsky (équation), 253, 263, 298
- L**
- Landau
 équation, 240, 256, 280, 292, 348
 Lev Davidovich, 241
Laplace-Young (loi), 13, 18
Linéarisation, 50
Longueur
 d'accélération, 207, 222
 de déposition, 208, 221
 de pénétration, 211
Lorenz
 équations de, 23, 26, 320, 356
 forme normale, 355
- M**
- Masse effective, 54
Mathieu (équation), 252, 262
Matrice
 de Jordan, 4, 5, 31, 323, 330, 343, 349
 exponentielle, 323
 jacobienne, 3, 323
Melnikov (méthode perturbative), 352
Métastabilité, 127
Mode
 d'amplitude, 295
 de phase, 295, 307

- esclave, 74, 79, 131, 256, 295, 297, 309
- global, 94
- normal, 44, 46
- propre, 43, 46, 51
- temporel, 96
- Modulation, 266
 - instabilité, 277
- N**
- Non-linéarité résonnante, 331
- Non-normalité d'un opérateur, 30–36, 156
- Nucléation-coalescence d'onde, 311
- O**
- Onde
 - acoustique, 44–47
 - acoustique stationnaire, 231
 - de capillarité-gravité, 54, 60, 284
 - de gravité, 102, 197, 231, 235, 265, 280
 - de Stokes, 266–268, 276, 303
 - dispersive, 87
 - interne (écoulement stratifié), 132
 - non linéaire, 265
 - non linéaire dissipative, 300
 - oblique, 162
 - solitaire, 168, 179, 287
- Opérateur adjoint, 35
- Orbite
 - homocline, 337–339, 351, 353
 - hétérocline, 339, 355
 - périodique, 318–320, 338, 348
- Orr-Sommerfeld
 - équation, 145–147, 171, 185
 - Résolution asymptotique, 147
 - Résolution numérique, 147
- Oscillateur
 - couplés, 272
 - de relaxation, 261
 - dissipatif, 243
 - harmonique, 1
 - harmonique forcé, 37
 - non linéaire, 242–252
 - paramétrique, 252, 262–263
 - quasi périodique, 37, 263
- P**
- Paquet d'ondes, 87, 278, 290, 291, 301–302
- Paramètre d'ordre, 39, 243
- Paroi (instabilité), 184
- Perturbation
 - d'amplitude finie, 11
 - d'amplitude infinitésimale, 11
 - isentropique, 50
 - optimale, 32, 40, 156, 162
 - rotationnelle, 56, 117
- Petit nombre de Reynolds
 - (instabilité), 165
- Phase
 - dynamique, 296, 298
 - équation, 298, 303
 - gradient, 297
 - instabilité, 282
 - stationnaire (méthode), 88, 98
 - turbulence, 298
- Poincaré
 - Jules Henri, 315, 322
 - section, 320–321, 342
- Point fixe, 316, 318, 319, 323, 324
 - col, 4, 325
 - définition, 3
 - en dimension deux, 4–6
 - foyer, 4, 325
 - hyperbolique, 5, 325
 - nœud, 4, 325
 - non hyperbolique, 6, 7
 - stabilité linéaire, 3–6
- Poiseuille (écoulement)
 - annulaire, 186
 - en tube, 100, 138, 157, 186, 306
 - plan, 100, 150–157, 163, 186, 240, 305
- Polynôme
 - caractéristique, 4
 - de Chebyshev, 147, 174
- Portrait de phase, 2, 3, 33, 247, 317, 354
- Potentiel, 3, 10, 23, 38, 39
 - à deux puits, 37
 - chimique, 20
 - électrostatique, 22
 - gravitationnel, 49

- mécanique, 7
thermodynamique, 16, 20, 39
- Problème aux valeurs initiales, 95
- Q**
- Quasi-périodicité, 319
Quasi statique (condition aux limites), 134, 210, 213, 216
- R**
- Rayleigh
équation, 109
John William Strutt, Lord, 75
théorème du point d'infexion, 112
- Rayleigh-Bénard
à grand nombre de Prandtl, 71
coefficient de Landau, 293
conditions aux limites, 73
frontières libres, 308
instabilité, 68–74, 130–132, 240
instabilité secondaire, 299
- Rayleigh-Plateau
instabilité capillaire, 64–68
- Rayleigh-Taylor
entre parois, 80
film visqueux, 81
instabilité, 53–64, 170
- Relation de dispersion, 43–46, 50, 51, 108, 146
non linéaire, 268
- Relaxation
phénomène, 194, 204
- Réponse impulsionale, 93, 98, 184
- Résidus (théorème), 96
- Résonance, 37
auto-résonance, 274
d'un quadruplet, 285
d'une triade, 284
de valeurs propres, 326, 333, 355
entre modes de Fourier, 266, 274, 284
entre modes voisins, 272–277, 281
presque-résonance, 275
sous-harmonique, 285
- Resuspension visqueuse, 204
- Reynolds
contrainte, 148
expérience, 138
nombre critique, 174, 180
nombre de sédimentation, 214
nombre effectif, 187, 211, 230
Osborne, 140
- Reynolds-Orr (équation), 148
- Ride granulaire, 193
à grains roulants, 224
à tourbillons, 224
aquatique, 208, 210–223
écoulement oscillant, 223–231
éolienne, 207
- S**
- Saffman-Taylor (instabilité), 81
Saint-Venant (équation), 175, 196–198, 232, 357–361
- Saturation
de l'amplitude, 257
temps de, 258
- Schrödinger (équation), 279–283
onde non linéaire, 280
solution localisée, 280
- Second principe de thermodynamique, 20
- Sensibilité aux conditions initiales, 315, 320, 353
- Shields
diagramme, 201
nombre, 201, 233
- Sillage, 100, 106, 121
- Sous-espace propre (invariant), 324
- Sous-harmonique (instabilité), 252
- Squire
interface déformable, 144
théorème, 109, 143–144, 157, 170
transformation, 108, 143
- Stabilité
asymptotique, 4, 91
au sens de Lyapunov, 91
globale, 92, 305
linéaire, 93, 95
marginale, 174
mécanique, 19
métastabilité, 8, 18, 39

- neutre, 4
- non linéaire, 6, 325
- spatiale, 121, 146
- structurelle, 316, 334–340, 355
- temporelle, 51, 146
- thermodynamique, 19
- Stokes**
 - écoulement, 177, 188
 - George Gabriel, 267
- Suspension colloïdale, 21–23
- Swift-Hohenberg (équation), 293, 307, 313
- Symétrie**
 - brisure, 11, 44, 335
 - de réflexion, 10, 334, 345
- Système**
 - confiné, 289
 - étendu, 289
- Système dynamique**, 2, 315
 - autonome, 4
 - discret, 321
 - non autonome, 37, 317
- T**
- Taux de croissance
 - maximum, 183
 - spatial, 99, 183, 198
- Taylor, Geoffrey Ingram, 16
- Théorème des fonctions implicites, 347, 352
- Tollmien-Schlichting
 - onde, 140, 168, 185, 186, 223, 290, 301
 - onde forcée, 153, 158
 - onde non linéaire, 305
- Transition de phase**
 - du premier ordre, 39
 - du second ordre, 39
- Transport granulaire, 201–206
 - Meyer-Peter & Muller (loi), 204, 233
- Transversalité, 262, 337–339, 344
- Triple couche (théorie), 190, 232
- Turbulence (transition), 106, 124, 126, 138, 139, 141, 154, 158, 166, 306
- V**
- Valeur propre, 4, 323
 - spectre continu, 110, 111
 - spectre discret, 151
- van der Pol (oscillateur), 242, 245–247
 - forcé, 251, 260
- van der Waals (forces), 22
- Variété, 316
 - centrale, 256, 316, 329, 354
 - invariante, 316, 327–334, 354
- Vecteur propre, 4, 5, 31, 323
 - généralisé, 323
 - non orthogonalité, 31, 34
- Vitesse
 - de frottement, 201
 - de groupe, 89, 98, 101, 174, 183, 279, 301, 302
 - de phase, 51
- Vorticité
 - équation d’Helmholtz, 56, 109, 117, 188
 - profondeur de pénétration, 190, 211, 230

INSTABILITÉS HYDRODYNAMIQUES

FRANÇOIS CHARRU

Depuis plus d'un siècle, les instabilités hydrodynamiques se révèlent un champ d'étude foisonnant et constamment renouvelé, enrichi par un dialogue fructueux de la mécanique avec de nombreuses branches de la physique, en particulier les transitions de phase, l'optique et la chimie non linéaires, l'astrophysique et la géophysique. Des problèmes anciens et fondamentaux comme la transition vers la turbulence sont vivifiés par de nouvelles idées. De nouveaux champs d'étude émergent aussi, comme le contrôle des instabilités, les fluides non newtoniens ou diphasiques, et les milieux granulaires.

Cet ouvrage, issu d'un cours de Master de l'université de Toulouse, s'adresse à tout étudiant, chercheur ou ingénieur désirant s'initier à ces questions. Il est structuré par la théorie des systèmes dynamiques, des bifurcations et des ruptures de symétrie. Les phénomènes sont discutés, autant que possible, en termes d'échelles caractéristiques et d'analyse dimensionnelle pour accéder aux mécanismes physiques. Les méthodes asymptotiques ont aussi une large place. De nombreuses études expérimentales sont discutées en détail. Chaque chapitre se termine par des exercices, qui sont souvent des ouvertures vers des problèmes nouveaux. Enfin, onze notices biographiques présentent quelques grands noms attachés à l'étude des instabilités.

François Charru est professeur de mécanique à l'université Paul Sabatier, et mène ses recherches à l'Institut de mécanique des fluides de Toulouse. Ses travaux portent sur les instabilités des interfaces fluides, leur dynamique non linéaire, ainsi que sur les écoulements granulaires.

Série Physique et collection dirigée par Michèle LEDUC

SAVOIRS ACTUELS

CNRS ÉDITIONS

www.cnrseditions.fr

 **EDP
SCIENCES**

www.edpsciences.org

Création graphique : Béatrice Couëdel



9 782868 839855

44 €

ISBN EDP Sciences 978-2-86883-985-5
ISBN CNRS Éditions 978-2-271-06565-0

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.