eurm10
msam10
2013

# Calcul de la courbure

David Fabre

June 22, 2013

VERIFIER LES SIGNES

## 1 Formules de base

On cherche a exprimer la courbure d'une surface ayant une symï£¡trie de rï£¡volution.

La courbure $K$ se dï£¡compose en deux termes :

$$K = K^{(a)} + K^{(b)} \quad \text{avec} \quad \left|K^{(a)}\right| = \frac{1}{|MC^{(a)}|} \quad \text{et} \quad \left|K^{(b)}\right| = \frac{1}{|MC^{(b)}|}$$

Le premier terme est la courbure dans le plan mï£¡ridien ; gï£¡omï£¡triquement, on l'exprime avec le point $C^{(a)}$ qui est le centre du cercle osculateur ï£¡ la courbe mï£¡ridienne. Le second terme est la courbure dans le plan orthogonal ; on l'exprime avec le point $C^{(b)}$ qui est l'intersection entre la normale ï£¡ la courbe et l'axe de symï£¡trie (voir figure a).

On prend la convention suivante pour le signe de $K^{(a)}$ et $K^{(b)}$ : celles-ci sont positives si la surface est convexe et nï£¡gatives si la surface est concave. Par exemple, dans le cas reprï£¡sentï£¡ sur la figure, on a $K^{(a)} > 0$ et $K^{(b)} < 0$.

Le premier terme se calcule a partir des formules de Frï£¡net. On suppose que la courbe mï£¡ridienne, dans le plan $(r, z)$, admet une reprï£¡sentation paramï£¡trique $M(s)$, oï£¡ $s$ est l'abscisse curviligne. On note $\mathbf{T}$ le vecteur tangent ï£¡ la courbe dans le plan mï£¡ridien, et $\mathbf{N}$ le vecteur normal. On a :

$$\mathbf{T} = \frac{\partial O\vec{M}}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = -K^{(a)}\mathbf{N}$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = K^{(a)}\mathbf{T}$$

En pratique on peut aussi utiliser la formule suivante :

$$K^{(a)} = \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{N}) \cdot \mathbf{T}$$

$\mathbf{T}$

$\mathbf{N}$ $C^{(a)}$

$C^{(b)}$

$\mathbf{N_0}$

$\epsilon\eta(s_0)$

$M_0(s_0)$

Le second terme a l'expression suivante :

$$K^{(b)} = \frac{N_{,r}}{r}$$

oï£¡ $N_{,r} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e_r}$ est la composante radiale du vecteur normal.

# 2 Courbure de la forme moyenne

On suppose que la forme moyenne de l'interface est donnï£¡e par un paramï£¡trage de la forme $M_0(s_0)$, oï£¡ $s_0$ est l'abscisse curviligne associï£¡e. On note $T_0$, $N_0$, $K_0$ les vecteurs tangents, normal, et la courbure associï£¡e. Ceux-ci sont donnï£¡s par :

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial \vec{OM}_0}{\partial s_0}$$

$$K_0 = K_0^{(a)} + K_0^{(b)} = \mathbf{T_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_0}{\partial s_0} + \frac{\mathbf{N}_{0,r}}{r} \tag{1}$$

# 3 Perturbation

On suppose maintenant que la surface oscille faiblement autour de la forme moyenne prï£¡cï£¡demment dï£¡finie (voir figure b).

On choisit de paramï£¡trer la dï£¡formation de la maniï£¡re suivante :

$$\vec{OM}(s_0) = \vec{OM}_0(s_0) + \epsilon\eta(s_0)\mathbf{N}_0$$

Dans cette expression, $\epsilon$ est un petit paramï£¡tre, et la fonction $\eta$ correspond ï£¡ l'amplitude de la dï£¡formation mesurï£¡e dans la direction normale ï£¡ la surface *moyenne*. Notons que l'on garde le paramï£¡trage par la variable $s_0$ qui est l'abscisse curviligne de la forme moyenne (et qui n'est pas identique ï£¡ l'abscisse curviligne $s$ de la surface dï£¡formï£¡e).

On injecte maintenant ce paramï£¡trage dans les formules prï£¡cï£¡dentes, et on linï£¡arise par rapport ï£¡ $\epsilon$, ce qui aboutit ï£¡ :

$$\frac{\partial s}{\partial s_0} = \left| \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_0} \right| = 1 - \epsilon \eta K_0^{(a)};$$

$$\mathbf{T} = \left( \frac{\partial s}{\partial s_0} \right)^{-1} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial s_0} = \mathbf{T}_0 + \epsilon \mathbf{T}_1; \quad \mathbf{T}_1 = -\frac{\partial \eta}{\partial s_0} \mathbf{N_0}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 + \epsilon \mathbf{N}_1; \quad \mathbf{N}_1 = \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \mathbf{T_0}$$

$$\begin{aligned} K^{(a)} = \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} &= (\mathbf{T}_0 + \epsilon \mathbf{T}_1) \left( \frac{\partial s_0}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial s_0} (\mathbf{N}_0 + \epsilon \mathbf{N}_1) \\ &= K_0^{(a)} + \epsilon K_1^{(a)} \\ K_1^{(a)} &= -\frac{\partial^2 \eta}{\partial s_0^2} - \left( K_0^{(a)} \right)^2 \eta \end{aligned}$$

De mï£¡me, pour la seconde composante de la courbure :

$$\begin{aligned} K^{(b)} &= \frac{N_{,r}}{r} = \frac{N_{0,r} + \epsilon N_{1,r}}{r + \epsilon \eta N_{0,r}} \\ &= K_0^{(b)} + \epsilon K_1^{(b)} \\ K_1^{(b)} &= -\frac{T_{0,r}}{r} \frac{\partial \eta}{\partial s_0} - \left( K_0^{(b)} \right)^2 \eta \end{aligned}$$

Au final on a donc :

$$K = K_0 + \epsilon K_1$$

$$K_0 = \mathbf{T_0} \frac{\partial \mathbf{N_0}}{\partial s_0} + \frac{N_{0,r}}{r}$$

$$K_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s_0} \left( r \frac{\partial \eta}{\partial s_0} \right) - \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{N_0}}{\partial s_0} \right|^2 + \frac{N_{0,r}^2}{r^2} \right] \eta$$

Dans cette derniï£¡re expression on a utilisï£¡ l'identitï£¡ $T_{0,r} = \partial r / \partial s_0$.

## 4 Cas particulier : forme moyenne sphï£¡rique

On suppose que la forme moyenne est une sphï£¡re de rayon $R_0$. On utilise les coordonnï£¡es sphï£¡riques $(R, \Theta)$. Dans ce cas, l'abscisse curviligne de la forme moyenne $s_0$ est donnï£¡ par $s_0 = R_0\Theta$, et on a :

$$r = R_0 \sin\Theta; \quad z = R_0 \cos\Theta; \quad \frac{\partial}{\partial s_0} = \frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial \Theta}$$

$$\mathbf{N_0} = \mathbf{e_R}; \quad \mathbf{T_0} = \mathbf{e_\Theta}; \quad N_{0,r} = \sin\Theta;$$

En injectant dans les formules prï£¡cï£¡dentes, on aboutit ï£¡ :

$$K_0 = \frac{2}{R_0}$$

$$K_1 = -\frac{1}{R_0^2 \sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right) - \frac{2}{R_0^2}\eta$$

Ce qui correspond bien aux formules obtenues dans ce cas.

## 5 Paramï£¡trage selon $r$

Vï£¡rifions que les formules gï£¡nï£¡rales trouvï£¡e ici est ï£¡quivalente ï£¡ celles utilisï£¡es dans le cas oï£¡ la surface est paramï£¡trï£¡e par $r$ et non par $s_0$ C'est-ï£¡-dire :

$$z = H(r) = h_0(r) + \epsilon\eta_z(r)$$

Dans ce cas le calcul de la courbure conduit ï£¡ :

$$K = K_0(r) + \epsilon k(r)$$

avec :

$$K_0(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\sqrt{1+h_0'^2}}\frac{\partial h_0}{\partial r}\right)$$

$$k(r) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{(1+h_0'^2)^3}\frac{\partial \eta_z}{\partial r}\right)$$

(Par rapport aux formules donnï£¡es dans le rapport de Jï£¡rï£¡me on a changï£¡ les signes afin d'utiliser la mï£¡me convention sur les normales, et on a rectifiï£¡ une petite erreur dans le terme $k$).

La correspondance entre les deux formulations s'ï£¡tablit en utilisant les identitï£¡s suivantes :

$$\eta_z(r) = \frac{\eta(s_0)}{N_{0,z}}; \quad T_{0,r} = N_{0,z} = \frac{1}{\sqrt{1+h_0'^2}}; \quad T_{0,z} = -N_{0,r} = \frac{h_0'}{\sqrt{1+h_0'^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = N_{0,z}\frac{\partial}{\partial s_0}$$

$$k(r) = K_1(s_0) - \frac{\partial K_0}{\partial s_0} T_{0,z}\eta_z(r)$$

(formules vï£¡rifiï£¡es avec Maple)

## 6 Calcul de la forme d'ï£¡quilibre par mï£¡thode de Newton

Le but est de construire un maillage tel que le long de sa frontiï£¡re, on ait l'ï£¡quilibre de Laplace :

$$F = K - \frac{\Delta P}{\sigma} = 0. \tag{2}$$

avec

$$\Delta P = \Delta P_b + \Delta\rho g z$$

Ici $\Delta P_b$ est la diffï£¡rence de pression ï£¡ la base de la bulle ($z = 0$), que l'on impose dans le calcul (on pourrait aussi imposer le volume dans la bulle et considï£¡rer $\Delta P_b$ comme une inconnue, mais cela reste ï£¡ faire proprement).

La mï£¡thode est la suivante :

1. On part d'un maillage correspondant ï£¡ une forme approximative de la bulle (par exemple un dï£¡veloppement en sï£¡rie de Legendre issu des expï£¡riences).
2. On ï£¡crit un dï£¡veloppement de Taylor de la fonction $F$ par rapport ï£¡ des petites variations $\eta$ de la forme de la surface :

   $$F \approx F_0 + F_1 = 0 \quad \text{avec } F_0 = K_0 - (\Delta P + \Delta\rho g z)/\sigma, \quad F_1 = K_1 - \frac{\Delta\rho g}{\sigma} N_{0,z}\eta$$

   oï£¡ $K_1$ est donnï£¡ (en fonction de $\eta$) par la formule de la section prï£¡cï£¡dente.
3. On inverse la relation prï£¡cï£¡dente, ce qui donne la fonction $\eta$ correspondant au dï£¡placement qu'il faut donner ï£¡ l'interface pour assurer la condition $F = 0$ (sous l'hypothï£¡se de linï£¡arisation).
4. On construit un champ de vecteurs $\mathbf{U}$, dï£¡fini ï£¡ l'intï£¡rieur du domaine, correspondant ï£¡ un dï£¡placement lagrangien vï£¡rifiant $\mathbf{U} = \eta\mathbf{N_0}$ sur la frontiï£¡re du domaine et ï£¡tant suffisamment rï£¡gulier ï£¡ l'intï£¡rieur (en pratique on rï£¡soud une ï£¡quation de Poisson).
5. On dï£¡forme le maillage selon le champ de vecteur $\mathbf{U}$, ce qui aboutit ï£¡ un nouveau maillage en principe plus proche de la solution d'ï£¡quilibre.

6. On rï£¡pï£¡te l'opï£¡ration de maniï£¡re itï£¡rative a partir du point ($b$), jusqu'ï£¡ convergence (c'est ï£¡ dire jusqu'ï£¡ ce que la quantitï£¡ $F_0$ devienne effectivement nï£¡gligeable.

## 7 Implï£¡mentation avec Freefem

Pour le calcul de la courbure moyenne, il faut commencer par interpoler les vecteurs normal (et tangent) sous forme de champs P1 dï£¡finis sur la frontiï£¡re :

```
(...)

mesh Shempty=emptymesh(Sh);
fespace Wh1(Shempty,P1);
Wh1 N0r,N0z,T0r,T0z,K0a,K0b,test ;

problem CalcN0r(N0r,test)=
 int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(N0r*test)-int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(N.x*test);
problem CalcN0z(N0z,test)=
 int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(N0z*test)-int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(N.y*test);

CalcN0r;
CalcN0z;
T0r =  N0z;
T0z = -N0r;

macro Ds(u1,u2)
[dx(u1)*T0r+dy(u1)*T0z,dx(u2)*T0r+dy(u2)*T0z]
//

problem ComputeK0a(K0a,test)=
 int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(K0a*test)
-int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(Ds(N0r,N0z)'*[T0r,T0z]*test);
ComputeK0a;

problem ComputeK0b(K0b,test)=
 int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(K0b*test*x)
-int1d(Shempty,qfe=qf3pE)(N0r*test);
ComputeK0b;
```

Pour les perturbations, le terme de courbure se traite par intï£¡gration par partie :

$$p = \sigma K_1$$

$$\int_{\mathcal{S}} \eta^\dagger p r d\ell = \sigma \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial \eta^\dagger}{\partial s_0} \frac{\partial \eta}{\partial s_0} - \left[ \left| \frac{\partial \mathbf{N_0}}{\partial s_0} \right|^2 + \frac{N_{0,r}^2}{r^2} \right] \eta^\dagger \eta \right) r d\ell \text{ (+ termes de bord)}$$