

Frekvencija maksimalne snage

U pronalasku frekvencije maksimalne snage koristit ćemo se poznatim izrazom za trenutnu snagu na otporniku $P = I^2 R$. Kako je riječ o izmjeničnoj struji, razmatramo efektivnu vrijednost struje I_{ef} :

$$P = I_{ef}^2 R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \right)^2 R = \frac{I_{max}^2 R}{2} \quad (1)$$

Odnos struje i napona možemo zapisati kao:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_{max} \sin(\omega t)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (2)$$

I_{max} se događa periodično, kada je $\sin(\omega t) = 1$, dakle ovisno o varijabli t . Tada iz (1) i (2) za P imamo:

$$P = \frac{I_{max}^2 R}{2} \quad (3)$$

$$= \frac{U_{max}^2 R}{2 (R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \quad (4)$$

$$= \frac{U_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{1}{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \quad (5)$$

Maksimalna snaga u odnosu na varijablu ω dobija se deriviranjem:

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{I_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \right) \quad (6)$$

$$= \frac{I_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{-1}{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^2} \cdot \frac{d}{d\omega} \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right) \quad (7)$$

$$= \frac{I_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{-1}{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^2} \cdot \left(2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) \right) \quad (8)$$

$$= 0 \quad (9)$$

Očigledno je da $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, pa je maksimalna snaga ostvarena kada

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 224 \text{Hz} \quad (10)$$

i uvrštavanjem u (5) dobije se $P_{max} = 500 \text{W}$.

Frekvencija upola manje snage

Frekvenciju upola manje snage dobit ćemo uvrštavanjem u formulu (5) za snagu:

$$P_1 = \frac{1}{2}P_{max} \quad (11)$$

$$\frac{I_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{1}{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{I_{max}^2 R}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \quad (12)$$

$$2R^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \quad (13)$$

$$L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0 \quad (14)$$

Rješenje kvadratne jednažbe (14) iznosi:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm R \pm \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L} \quad (15)$$

Uzimajući u obzir da samo pozitivna rješenja imaju fizikalnog smisla, uvrštavanjem brojeva dobije se: $\omega_1 \approx 221\text{Hz}$ i $\omega_2 \approx 226\text{Hz}$.