Frekvencija maksimalne snage

U pronalasku frekvencije maksimalne snage koristit ćemo se općepoznatim izrazom za trenutnu snagu na otporniku $P = I^2R$. Kako je riječ o izmjeničnoj struji, razmatramo efektivnu vrijednost struje I_{ef}:

$$P = I_{ef}^2 R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{I_{max}^2 R}{2} \tag{1}$$

Odnos struje i napona možemo zapisati kao:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U_{max}\sin(\omega t)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \tag{2}$$

I_{max} se događa periodično, kada je $\sin(\omega t) = 1$, dakle ovisno o varijabli t.
Tada iz (1) i (2) za P imamo:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{I_{max}^2 R}{2} && (3)\\
&= \frac{(U_{max}R)^2}{2\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)} && (4)\\
&= \frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{1}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)} && (5)
\end{aligned}$$

Maksimalna snaga u odnosu na varijablu ω dobija se deriviranjem:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{d\omega} &= \frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)}\right) && (6)\\
&= \frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{-1}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)^2} \cdot \frac{d}{d\omega}\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right) && (7)\\
&= \frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{-1}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)^2} \cdot \left(2(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot (L + \frac{1}{\omega^2 C})\right) && (8)\\
&= 0 && (9)
\end{aligned}$$

Očigledno je da $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, pa je maksimalna snaga ostvarena kada

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \approx 224\text{Hz} \tag{10}$$

i uvrštavanjem u (5) dobije se $P_{max} = 500\text{W}$.

Frekvencija upola manje snage

Frekvenciju upola manje snage dobit ćemo uvrštavanjem u formulu (5) za snagu:

$$P_1 = \frac{1}{2}P_{max} \tag{11}$$

$$\frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{1}{\left(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(U_{max}R)^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \tag{12}$$

$$2R^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \tag{13}$$

$$L\omega^2 \pm R\omega - \frac{1}{C} = 0 \tag{14}$$

Rješenje kvadratne jednažbe (14) iznosi:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm R \pm \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L} \tag{15}$$

Uzimajući u obzir da samo pozitivna rješenja imaju fizikalnog smisla, uvrštavanjem brojeva dobije se: $\omega_1 \approx 221\text{Hz}$ i $\omega_2 \approx 226\text{Hz}$.