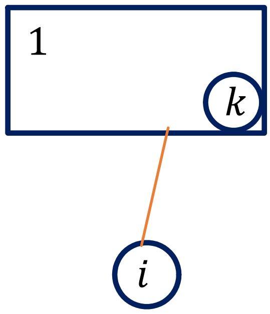
图论有关的计数问题

先来看几个概念

1. 割边与连通块的对应关系，连通分量缩点之后，$base$ 点是 p，那么每个连通块，都会贡献一条到 p 的割边
2. 假设连通块的数量为 x ，那么有如下等式
   $x \le \min\{N, M\}$ ，N 是点的个数，M 是割边数

之前谈到过，此类问题的解决方式



如图所示，假设从起点 1 出发，在同一个连通分量中走，
最远能够走到 k ，相关的状态转移方程是
$f(k) \cdot C_{i-1}^{k-1} \cdot other(i-k)$

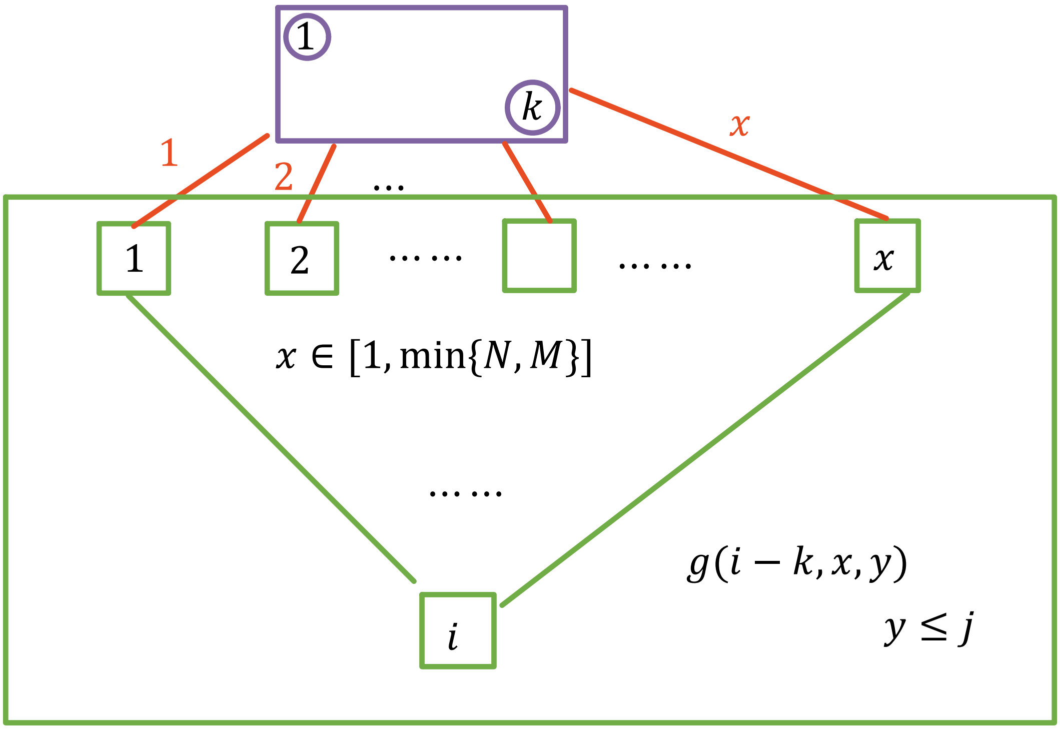
方程的意义就是，从 $i-1$ 个点中选出 $k-1$ 个点，和 k 这个点构成连通分量
那么，剩下的 $i-k$ 个点，爱咋咋地，$other(i-k)$
只是在本例中，很显然剩下的点不能爱咋咋地，要特别处理

第一部分，因为本例中有割边的限制，剩下的点可不能“爱咋咋地”
所以状态转移方程要稍微变一下
$f(i,j)$ 表示走到第 i 个点，包含 j 条割边的无向连通图的数量，方程改写

$$f(i,j) = \sum_{k=1}^{i-1} \left(f(k,0) \cdot C_{i-1}^{k-1} \cdot other(i-k) \right)$$

第二部分，来研究 $other(i-k)$ ，这部分很重要的一点是，它和剩余的

点个数，割边数有关，这个也可以像 $f(i,j)$ 一样定义状态
$g(i,j)$ ，表示有 i 个点，只不过这里的 i 个点表示的是，由连通分量缩点后，
形成的点；有 j 个割边；这里的 i 还和剩余的总点数 $i-k$ 有关
所以要扩展一维表示
$g(i,j,k)$ 表示 有 i 个总点数，j 个连通块缩点，k 条割边



下面绿色部分，共 $i-k$ 个点，x 个连通缩点，y 条割边
其中 $x \in [1, \min\{N,M\}] = [1, \min\{i-k, j\}]$
其中，y 条割边，是可以计算出来的，我们知道走到 i 这个点有 j 条割边
我们定义了 $f(i,j)$ 嘛，而红色部分，$\{1,2,\cdots,x\}$ 每一个连通分量，
和第一个 $[1,k]$ 矩形相连，都会拿走 1 条割边，那么剩下的割边数
$y = j - x$，所以绿色矩形中的种类数有
$g(i-k, x, j-x)$

接下来是红色的连线部分有多少种可能性？这个就简单了，
$\{1,2,\cdots,x\}$ 每个点都可以和 $[1,k]$ 任意一个点相连，所以是
$(C_k^1)^x$

第二部分就可以写出完整的状态转移方程了

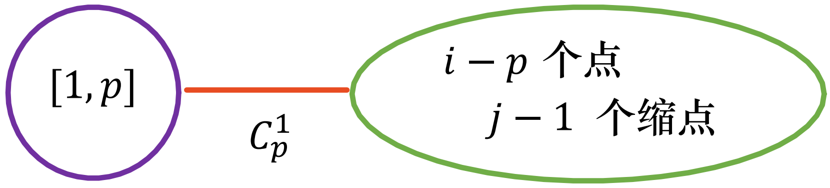
$f(i,j) = \sum(purple \times red \times green)$ ，紫色，绿色，红色乘起来就可以

$$f(i,j)=\sum_{k=1}^{i-1}(f(k,0)\cdot C_{i-1}^{k-1}\cdot \sum_{x=1}^{\min(i-k,j)}(g(i-k,x,j-x)\cdot k^x))$$

第三部分，具体实现，i 个节点构成的无向连通图数量，楼天城男人八题中有可以先预处理出来，存在数组 $H[i]$ 中，那么

$$f(i,0)=H[i]-\sum_{j=1}^{i-1}f(i,j)$$

$g(i,j,k)$ 也可以单独与处理，保存在数组 $g[\,][\,][\,]$ 中
这个就简单了，每个连通分量都可以看成是缩点，
像第一部分那样，枚举每一个起点 p，枚举这个起点出发能够走到的割边 q
$f(p,q)\cdot C_{i-1}^{p-1}$ 相当于紫色部分



红色部分有 C_p^1 种选择，然后绿色部分就是 dp 递归求解剩下的 $g[\,][\,][\,]$

$$g(i,j,k)=\sum_{p=1}^{i}\sum_{q=0}^{k}f(p,q)\cdot C_{i-1}^{p-1}\cdot p\cdot g(i-p,j-1,k-q)$$