Física 2

Taller #7

SOLUCIONES.

- Problema 22.61

a) Una esfera aislante con radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ. La esfera no está centrada en el origen, sino en $\mathbf{r} = \mathbf{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\mathbf{E} = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{b})/3\epsilon_0$.

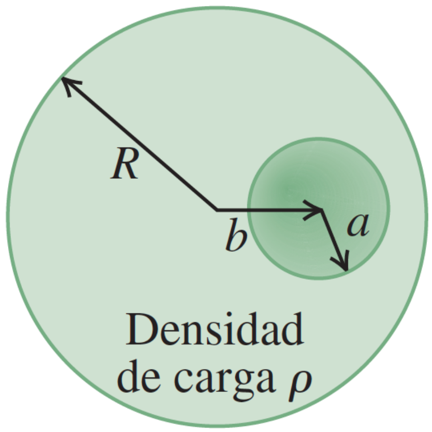


Figure 1:

Hemos realizado anteriormente la solución de una esfera conductora con densidad volumetrica de carga ρ.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr'}{R^3},$$

en este caso, r' es la distancia a la cual quiero medir el campo electrico. La carga Q, en terminos de la densidad de carga se escribe como:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

entonces el campo electrico se escribiria como:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho\mathbf{r}'}{3\epsilon_0},$$

ahora como la esfera esta centrada en **b,** el vector $\mathbf{r}'$ en terminos de la distacia b, se escribe como $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{b}$. Asi entonces el campo electrico seria:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r} - \mathbf{b})}{3\epsilon_0}.$$

b) Una esfera aislante de radio R tiene un agujero esférico de radio a ubicado dentro de su volumen y con centro a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$. La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Obtenga la magnitud y dirección del campo eléctrico dentro del agujero, y demuestre que es uniforme en todo el agujero.

Debemos superponer el campo electrico que general la densidad volumétrica de carga, con el campo que genera el hueco dentro. Este, ultimo genera una distribucion de carga negativa $-\rho$. Debido a que la carga neta debe ser igual a cero.

El campo desde el centro de la esfera:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0},$$

aqui $\mathbf{r}$ es el vector desde el centro de la esfera. El campo de el hueco, usamos la expresión del punto anterior:

$$\mathbf{E}_h = \frac{-\rho\left(\mathbf{r}-\mathbf{b}\right)}{3\epsilon_0}$$

entonces el campo total será:

$$\begin{aligned} E_T &= E + E_h \\ &= \frac{\rho \mathbf{r}}{3\epsilon_0} + \frac{-\rho\left(\mathbf{r}-\mathbf{b}\right)}{3\epsilon_0} \\ &= \frac{\rho \mathbf{b}}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Ejercicio 23.44

El campo eléctrico en la superficie de una esfera de cobre con carga, sólida y con radio de $0.200\,m$ es de $3800\,N/C$, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se considera un potencial igual a cero a una distancia infinitamente grande con respecto a la esfera?

Este problema es muy sencillo teniendo en cuenta que el potencial electrico es una magnitud física de caracter escalar, y como ya sabemos la expresión para un campo electrico uniforme generado por una carga q a una distancia r

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

de aqui encontramos el valor de la carga: $q = 4\pi\epsilon_0 E r^2 = 1.6 \times 10^{-8} C$.

Con esto reemplazamos en la expresión para un potencial electrico de una carga puntual, teniendo en cuenta que en el infinito el potencial es cero, la carga debe ser negativa

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)}{r} = -760\,V$$

- Problema 23.64

Las placas de desviación verticales de un osciloscopio estudiantil común son un par de cuadrados metálicos paralelos con cargas iguales pero de signo contrario. Las dimensiones comunes miden aproximadamente 3.0 cm por lado, con una separación de cerca de 5.0 mm. Las placas están suficientemente cerca, por lo que se puede ignorar la flexión en los extremos. En estas condiciones: a) ¿Cuánta carga hay en cada placa?

Conocemos la expresión para un campo electrico que genera una placa conductora:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

ademas la expresión para el potencial en terminos del campo electrico $V = Ed$, y la densidad superficial de carga $\sigma = Q/A$. Entonces:

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A},$$

entonces despejando Q

$$Q = \frac{\epsilon_0 A V}{d} = 1,50 \times 10^{-12} V\, C$$

b)¿qué tan fuerte es el campo eléctrico entre las placas?

Simplemente con la expresión del potencial en terminos del campo electrico ($V = Ed$), quedaría:

$$E = \frac{V}{d} = 200V\, Volt/m$$

c)Si un electrón es lanzado del reposo desde las placas negativas, ¿qué tan rápido se mueve cuando alcanza la placa positiva?

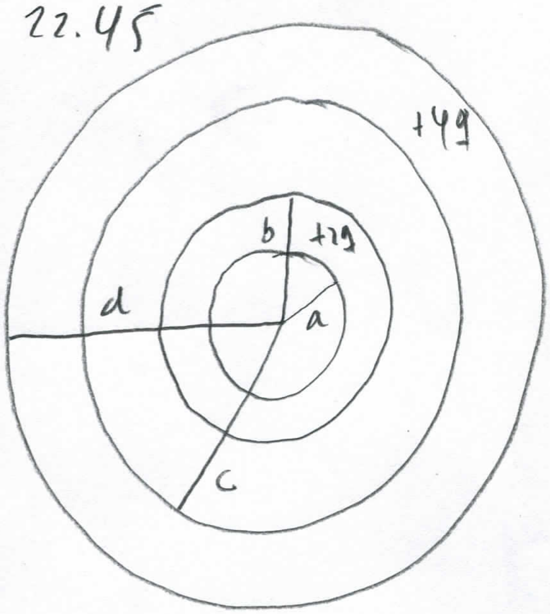
Como el electron sale del reposo, y sabemos el potencial dentro de las placas, podemos plantear una ecuación de conservación de energía, asi:

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV$$

despejando la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 5,39 \times 10^5 \sqrt{V} m/s$$

22.45



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{enc}/\varepsilon_0$$

a) $r<a \Rightarrow q_{enc}=0$, $\Phi_E=0$, $\vec{E}=\vec{0}$

No se pueden dibujar líneas de campo $\vec{E}$

$a<r<b$ $|\vec{E}|=0$ $\vec{E}=\vec{0}$ Dentro del Conductor.

$b<r<c$ $q_{enc}=+2q \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{2q}{A\varepsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

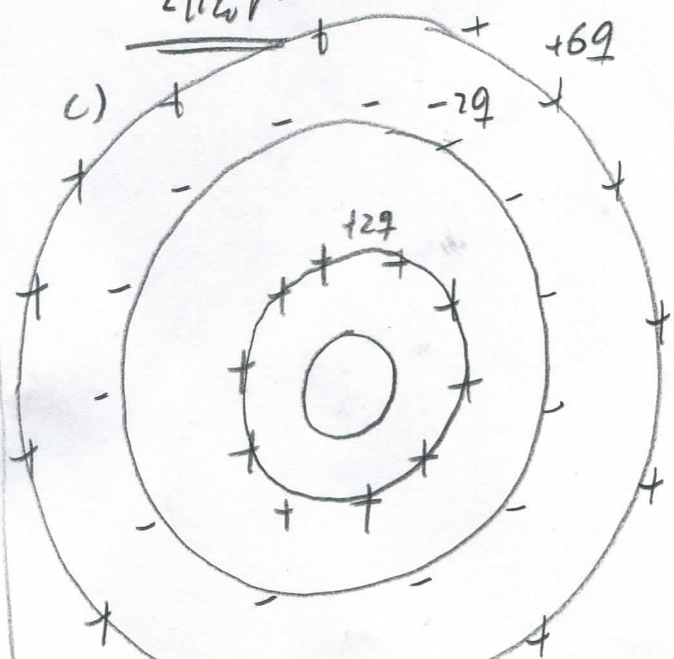
$c<r<d \Rightarrow \vec{E}=\vec{0}$ Dentro del Conductor.

$r>d \Rightarrow q_{enc} = +2q+4q = +6q$

$$\vec{E} = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

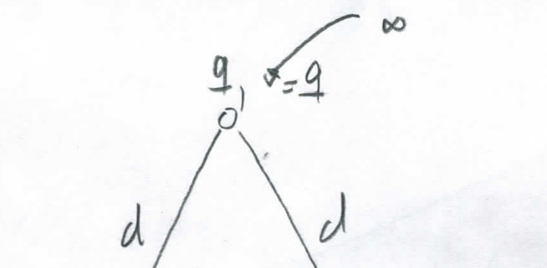
b)

c)



Probl. 23.11

Tres Cargas Puntuales Inicialmente Infinitamente Separadas



$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$ Para fuerzas Conservativas

$W = -\Delta U \Rightarrow W = -(U_f - U_0)$

$U_0 \equiv 0$ Inicialmente Infinitamente Separadas

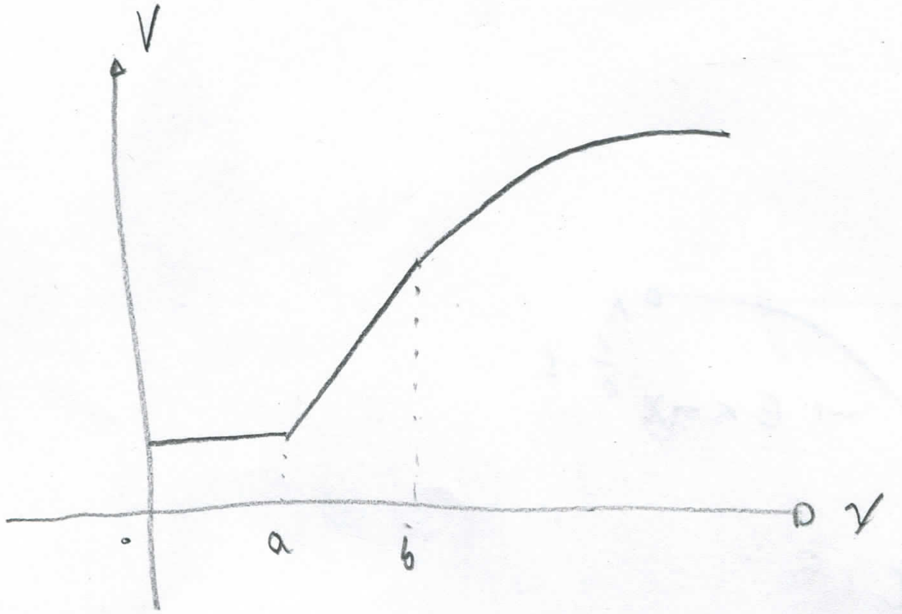
$$U_f = K\frac{q_1 q_2}{d} + K\frac{q_1 q_3}{d} + K\frac{q_3 q_2}{d} = \frac{K}{d}\left(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_3 q_2\right)$$

$$U_f = \frac{K}{d}\left(q q_2 + q^2 + q q_2\right) \Rightarrow U_f = \frac{K}{d}\left(q^2 + 2 q q_2\right)$$

$W = -U_f = 0 \Rightarrow 0 = +\cancel{\frac{k}{d}}\left(q^2 + 2q q_2\right)$

$q^{\cancel{2}} = -2\cancel{q} q_2 \Rightarrow \underline{\underline{q_2 = -\frac{q}{2}}}$

Prob. 23.52



$E_x = ? \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$ Para este caso $\Rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{x}$

$E_x \hat{x} = -\frac{dV}{dx}\hat{x} \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$

$0 - a \Rightarrow V = cte \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \quad E_x \equiv 0$

$a - b \Rightarrow V \propto x \Rightarrow \frac{dV}{dx} = m \Rightarrow E_x = -m = cte$

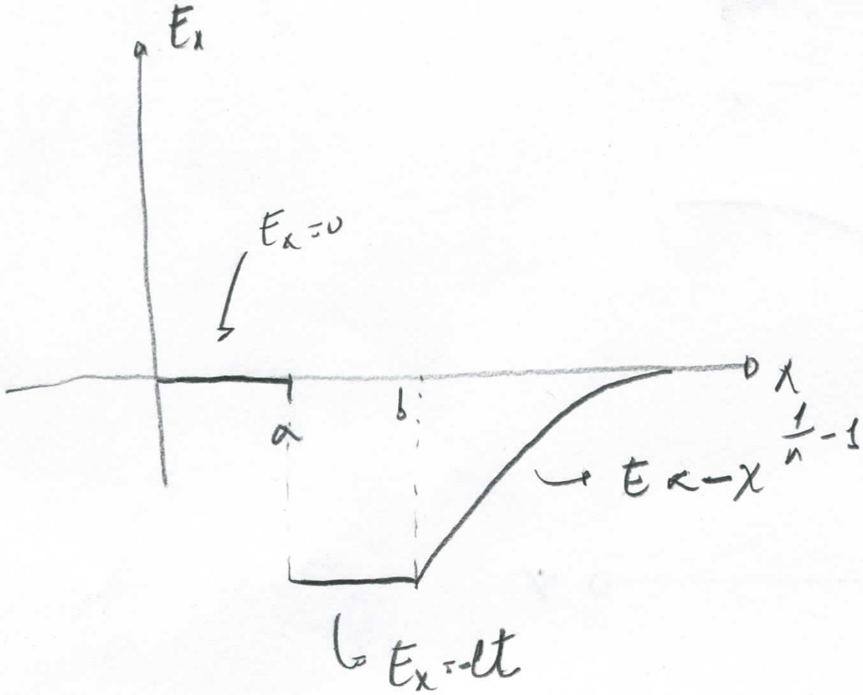
$V = mx$

4

$b \to \infty \quad V \propto x^{\frac{1}{n}}$

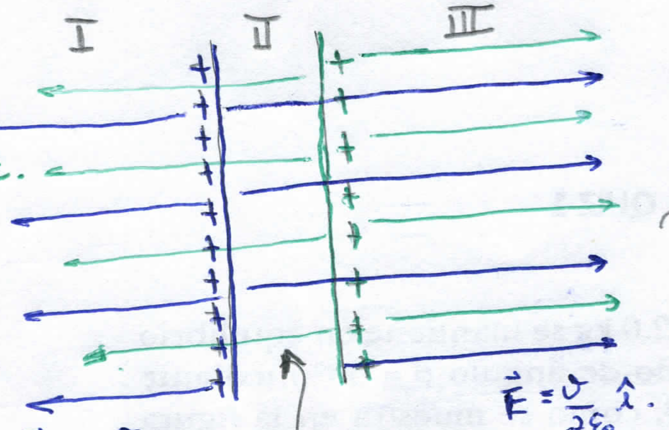
$$V = m x^{\frac{1}{n}} \qquad E_x = -\frac{d}{dx} V = -\left(m \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \right)$$

Esquematicamente se tiene



Soluciones

22.51



$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}$.

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}$.

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}$.

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}$.

En esta región el campo total es

$$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{\imath}$$

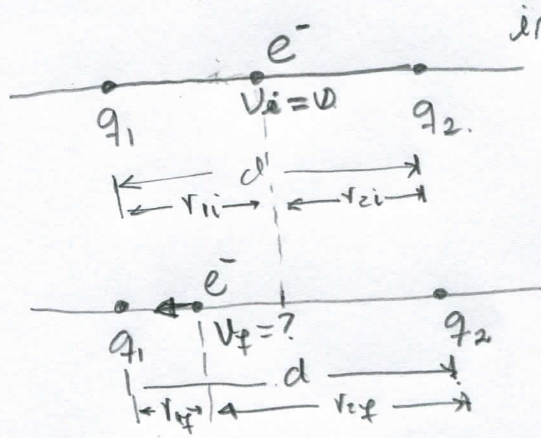
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\imath}$$

En esta región los campos se cancelan, por el principio de superposición $\Rightarrow \vec{E} = 0$.

En esta región el campo total.

es $\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\hat{\imath}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\imath}$, luego en las regiones I y III se tiene que $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

23.18



inicial. $q_1 = 3nC$.

$q_2 = 2nC$.

$d = 0.5$ mts.

final.

Por conservación de la energía, se tiene que

$$\cancel{K_i} + U_i = K_f + U_f. \quad \text{luego.}$$

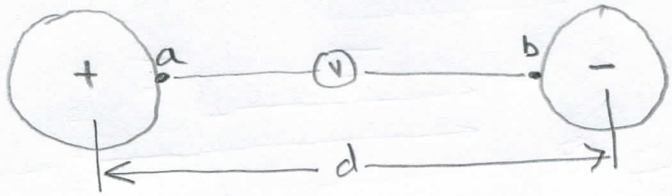
(reposo e^-)

$$-\frac{keq_1}{r_{1i}} - \frac{keq_2}{r_{2i}} = -\frac{keq_1}{r_{1f}} - \frac{keq_2}{r_{2f}} + \frac{1}{2}m_e V_e^2$$

luego. $$V_e^2 = 2\left(keq_1\left(-\frac{1}{r_{1i}} + \frac{1}{r_{1f}}\right) + keq_2\left(-\frac{1}{r_{2i}} + \frac{1}{r_{2f}}\right)\right) \Big/ m_e.$$

$$V_e = 6.87 \times 10^6 \text{ m/s}.$$

23.56



$$V_a = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{d-r} \quad \wedge \quad V_b = -\frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r}$$

luego $\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r}$

$$\Delta V_{ab} = kq\left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{d-r}\right) = 2kq\left(\frac{1}{d-r} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Delta V_{ab} = -8.4 \times 10^{6}\ \text{v}.$$

Como $\Delta V_{ab} < 0 \Rightarrow V_a > V_b$ ✓.

⇒ El punto que esta mas cercano al lado "positivo" del campo eléctrico $\vec{E}$ tiene mayor energía potencial electrostática, y por lo tanto se encuentra a un potencial mayor.