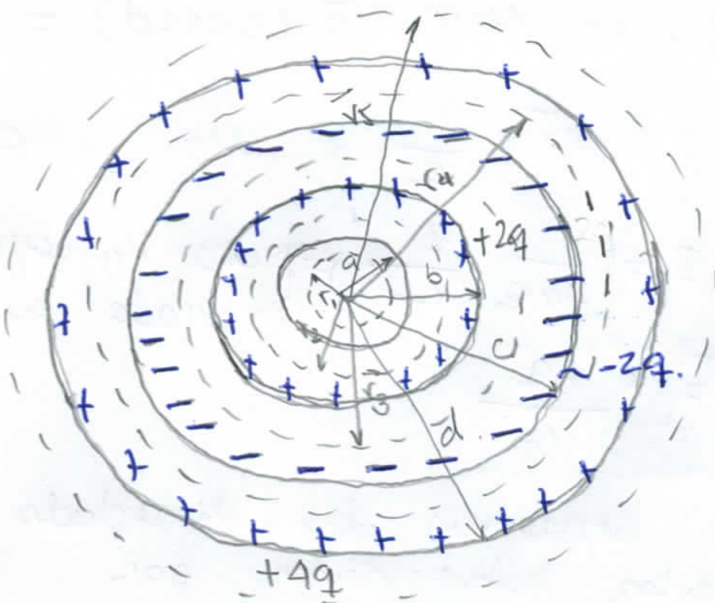
Soluciones

22.45



$E(r<a) \Rightarrow \phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$, luego la superficie gaussiana esta a una distancia r_1, luego

$$\Phi_E = \oint E\, da \cos 0° = q/\varepsilon_0 \Rightarrow E \oint da = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$E\, 4\pi r_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$, pero q para este caso es nula

luego $\boxed{E(r<a) = \emptyset}$

* $E(a<r<b) \Rightarrow \Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$. realizando los mismos pasos que para $E(r<a)$ se tiene que.

$E\, 4\pi r_2^2 = q/\varepsilon_0$, pero en el interior de un conductor en equilibrio electrostático $E = 0$, luego $\boxed{E(a<r<b) = \emptyset.}$

* $E(b<r<c) \Rightarrow \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$. luego simplificando se obtiene que $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r_3^2}$ para este caso la carga encerrada es $q = +2q \Rightarrow \boxed{E(b<r<c) = \frac{K\, 2q}{r_3^2}}$

$E(c<r<d) \Rightarrow$ sucede lo mismo que para el caso de $E(a<r<b)$, es decir $\boxed{E(c<r<d) = \emptyset}$

$E(r>d) \Rightarrow \Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$, luego simplificando.

se obtiene que. $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_s^2}$, pero la carga neta encerrada es $q = +2q + 4q$

$q = +6q$.

luego. $\boxed{E(r>d) = K\frac{6q}{r_s^2}}$.

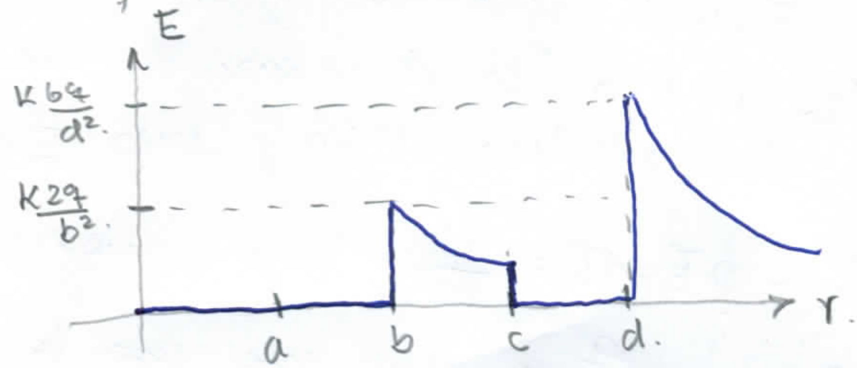
Con lo anterior se encuentran las densidades superficiales de carga, las cuales estan dadas por.

$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = \emptyset}$; $\boxed{\sigma_b = \frac{2q}{4\pi b^2}}$, ahora como el campo en $E(c<r<d) = 0 \Rightarrow$ la carga de la superficie interna de la carga exterior es $q(r=c) = -2q$. luego.

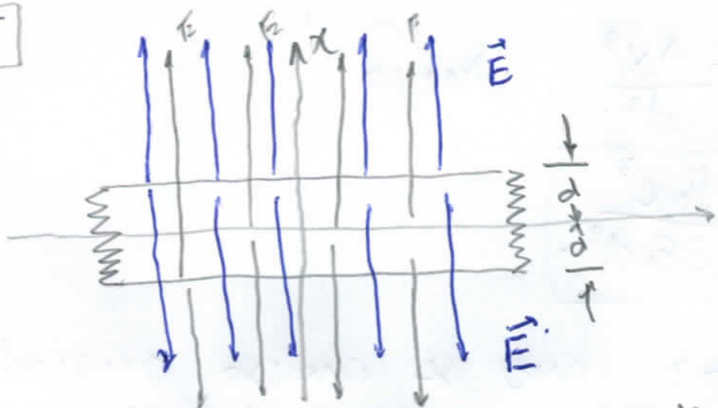
$\boxed{\sigma_c = -\frac{2q}{4\pi c^2}}$

y la densidad $\boxed{\sigma_d = \frac{4q}{4\pi d^2}}$

luego en un diagrama de $E-r$ se tiene de manera esquemática que



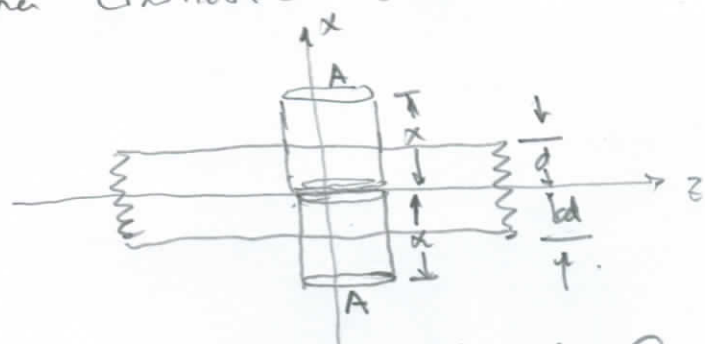
22.55



$$\rho(x) = \rho_0\left(\frac{x}{d}\right)^2.$$

Por la superposición de líneas de campo, se tiene que $E=0$ en $x=0$.

* Para $|x|>d$ se tiene la superficie gaussiana en forma cilíndrica como.



luego $\Phi_E = 2EA$.

y de acuerdo con la ley de Gauss. $2EA = \frac{q_{encerr}}{\varepsilon_0}$.

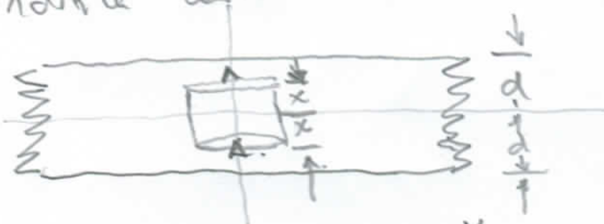
ahora como $\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow q_{enc} = 2\int_0^d \rho\, dV = \int \rho_0\left(\frac{x}{d}\right)^2 A\, dx$.

luego $q_{enc} = 2\int_0^d \rho_0\left(\frac{x}{d}\right)^2 A\,dx = \frac{2\rho_0}{d^2}A\int_0^d x^2\,dx = \frac{2\rho_0 A}{3d^2}d^3$

$$q_{encerrada} = \frac{2}{3}\rho_0 A d\,,$$ luego.

$$\Phi_E = 2EA = \frac{2\rho_0 A d}{3}$$ luego $$\boxed{E = \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}}$$

* Para $|x|<d$ se tiene la superficie gaussiana en forma cilíndrica como.



Se procede como en el caso $|x|>d$ pero ahora se tiene que.

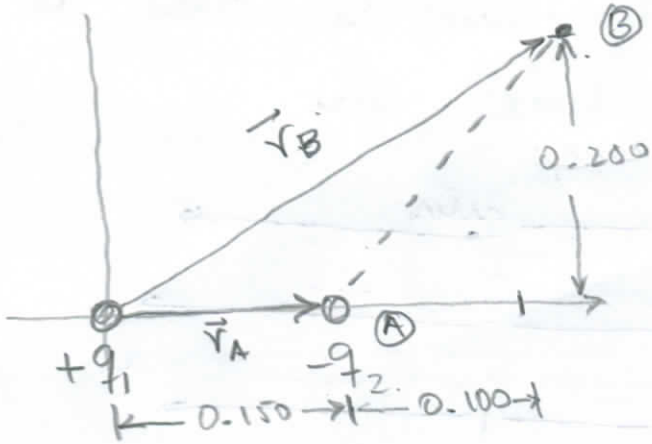
$$q_{ence} = 2\int^x dq = 2\int^x \rho\, dV = \int^x \rho_0\left(\frac{x}{d}\right)^2 A\,dx = \frac{2}{3}\frac{\rho_0 A x^3}{d^2}.$$

luego $\Phi_E = 2EA = \frac{2}{3} \frac{\rho_0 A x^3}{d^2}$. luego

$$\boxed{E = \frac{\rho_0 x^3}{3\varepsilon_0 d^2}.}$$

luego cuando $x=0$, $E=0$ como se analizo originalmente, y cuando $x=d$, $E = \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}$, lo cual está de acuerdo con lo desarrollado con anterioridad.

23.1



$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -\left(k\frac{q_1 q_2}{r_B} - k\frac{q_1 q_2}{r_A} \right)$$

$$= -k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) ; \quad r_B = \sqrt{(0.250)^2 + (0.200)^2}$$

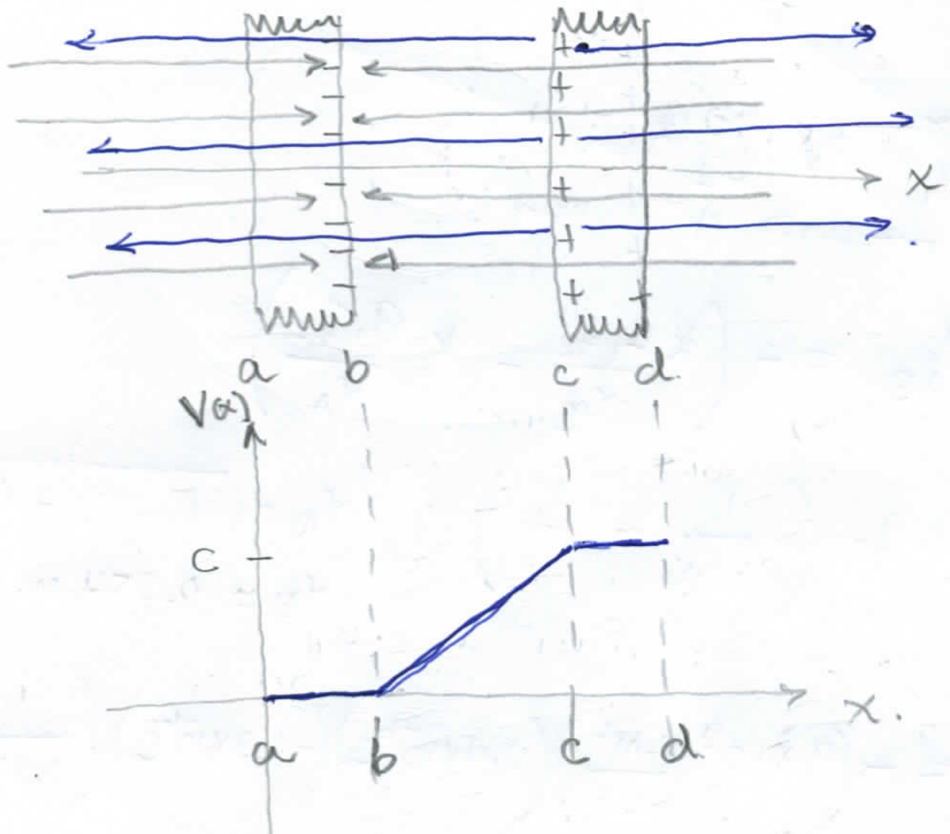
$$r_B = 0.354 \text{ m.}$$

luego $W_{AB} = -\left(9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\left(2,4 \times 10^{-6} C\right)\left(-4.3 \times 10^{-6} C\right)\left(\frac{1}{0,354} - \frac{1}{0.150}\right)$

$$W_{AB} = -0,357 \text{ Joule.}$$

23.39

Realizando un diagrama de líneas de campo del sistema, se tiene que.

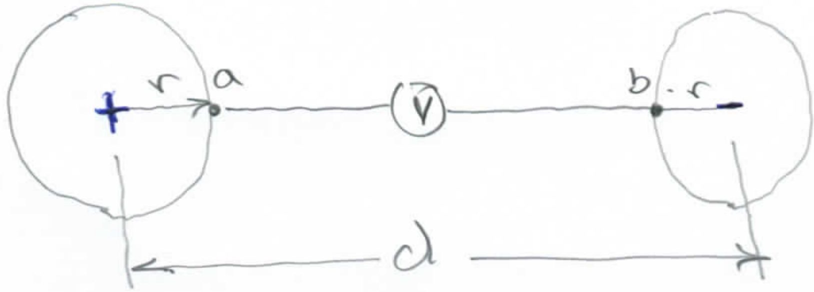


Según la configuración de líneas de campo entre a y b el campo es nulo y $V=0$. Entre b y c el campo es diferente de cero y es uniforme, luego $V = Ed$ es decir el campo y el potencial son directamente proporcionales. Entre c y d de nuevo el campo es nulo, luego.

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

luego $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{V = cte!}$

$\boxed{23.56}$



$$V_a = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{d-r} \quad \wedge \quad V_b = -\frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r}$$

luego. $\Delta V_{ab} = V_b - V_a = -\frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{d-r}.$

$$\Delta V_{ab} = kq\left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{d-r}\right) = 2kq\left(\frac{1}{d-r} - \frac{1}{r}\right).$$

$$\Delta V_{ab} = 2\left(9\times10^{9}\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(175\times10^{-6}\,C\right)\left(\frac{1}{0.75\,m} - \frac{1}{0{,}25\,m}\right).$$

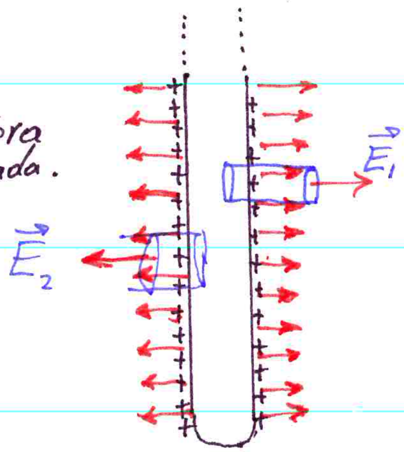
$$\Delta V_{ab} = -8{,}4\times10^{6}\,V.$$

Como $\Delta V_{ab} < 0 \Rightarrow \boxed{V_a > V_b.}$ ✓

Taller 7

2. $\boxed{22.51}$

Lámina conductora muy grande y aislada.



* Como la lámina es conductora y está cargada y aislada, ésta se encuentra en equilibrio electrostático, por tanto, las cargas se redistribuyen sobre la superficie externa de la lámina, produciendo un campo perpendicular a la lámina, por ambas caras.

* Si el campo no fuera perpendicular a las caras de la lámina, se tendría una componente perpendicular y otra paralela a las caras de la lámina, donde la fuerza paralela a la lámina haría trabajo sobre las cargas, produciendo movimiento de las cargas, y el sistema dejaría de ser estático.

* Como las cargas quedan distribuidas sobre las superficies externas de la lámina, entonces, dentro de la lámina no habrían cargas, por tanto, el campo es cero dentro de la lámina.

* Aplicando ley de Gauss sobre cada cara, ver figura, se tiene.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{nenc.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 A = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Igual para la cara 2: $E_2 A = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

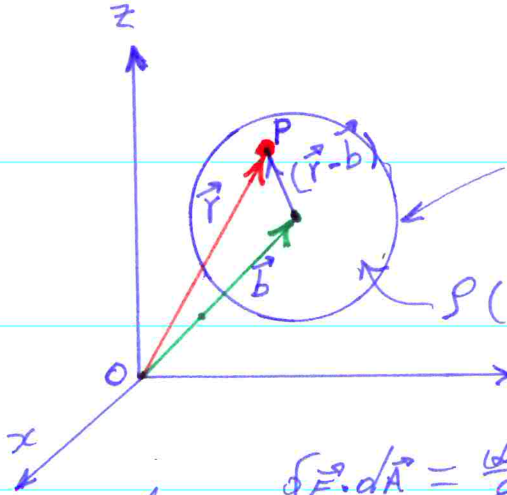
a) Si consideramos que este sistema se puede tomar como dos láminas por separado, estas tendrían un campo igual a $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ y dirigido hacia fuera de la superficie, por tanto al sumarlas daría:

$$2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

b) Al considerar dos láminas separadas, éstas generan ~~dentro~~ entre las láminas campos de igual magnitud y direcciones opuestas, por tanto, se cancelan. Esto es, que el campo dentro de las placas es cero.

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \quad \text{(Dentro de la placa).}$$

5. $\boxed{22-61}$ a)



esfera interna (No conductora)

ρ (densidad volumétrica de carga, uniforme)

* Como la esfera no conductora tiene densidad de carga uniforme, $\Rightarrow$:

$\rho = \rho' \Rightarrow \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'}$

$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r'^3}$

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q'}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$; $A = 4\pi r'^2$

R: radio de la esfera, en general.

$r' \rightsquigarrow$ radio interior de la esfera.

$\boxed{Q' = \frac{Q\,r'^3}{R^3}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}'}$ para el caso de una esfera no conductora centrada en el origen. El campo sería radialmente hacia afuera y en la dirección de $\vec{r}'$

$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'}$ Para nuestro problema la esfera no está centrada en el origen, por tanto, elegimos un sistema de coordenadas con un origen diferente al centro de esta esfera, para hacerlo más general, ver figura.

* De la figura y del resultado del campo para un punto P dentro de la esfera, tenemos: $\boxed{\vec{E} = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)(\vec{r}-\vec{b})}$ reemplazando el vector posición $\vec{r}'$ por $(\vec{r}-\vec{b})$.

si $\vec{b} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}}$; si $\vec{r} = \vec{b} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$ que corresponde al centro de la esfera.

b) $\underline{a < b < R}$ Con un hueco en la esfera de radio R:

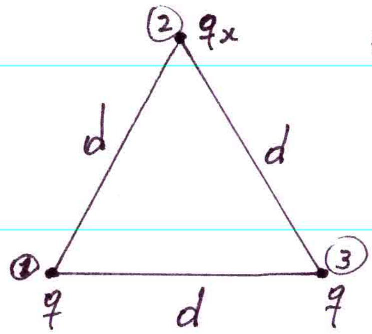
En este caso el hueco se puede modelar como una esfera de carga negativa uniforme $-\rho$, de tal manera que su carga neta, dentro del hueco sea $+\rho - \rho = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_{hueco} = -\dfrac{\rho(\vec{r}-\vec{b})}{3\varepsilon_0} \\ \vec{E}_{esfera} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \end{cases}$$; siendo $\vec{r}$ es el vector posición del centro de la esfera

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{hueco} + \vec{E}_{esfera} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{b}) + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{b}}$$

8. $\boxed{23.11}$ $W = -\Delta U = -(U - \cancel{U(\infty)}^{\,0})$

$W = W_1 + W_2 + W_3 \longrightarrow = k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$



* El trabajo que se requiere para obtener esta configuración, trayendo c/carga desde el infinito es:

$$W = k\left(\frac{q_1 q_x}{d} + \frac{q_1 q_3}{d} + \frac{q_3 q_x}{d}\right)$$

pero $q_1 = q_3 = q$

$$\Rightarrow W = k\left(\frac{q q_x}{d} + \frac{q^2}{d} + \frac{q q_x}{d}\right) = k\left(\frac{2 q q_x}{d} + \frac{q^2}{d}\right)$$

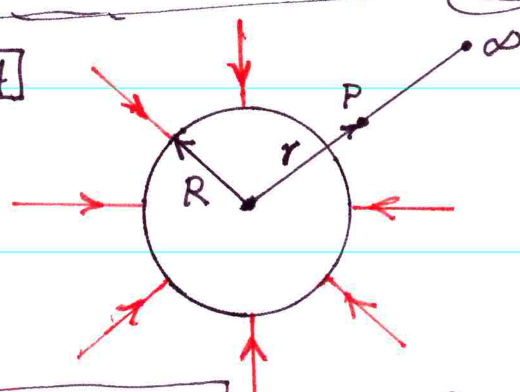
si $W = 0 \Rightarrow 0 = \frac{k}{d}\left(2 q q_x + q^2\right)$

$\Rightarrow 2 q q_x + q^2 = 0 \Rightarrow q\,(2q_x + q) = 0$ $\quad q \neq 0$

$2q_x + q = 0 \Rightarrow \boxed{q_x = -\frac{q}{2}}$ $\quad q_x < q$

---

11. $\boxed{23.44}$



$V(r) = -\oint_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \cancel{V(\infty)}^{\,0}$

$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$

$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{\infty}}^{\,0}\right]$

$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ pero $Q = -1.69\times10^{-8}\,C$

$\underline{r \geq R}$: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (de la ley de Gauss)

$\Rightarrow Q = -4\pi\varepsilon_0 E r^2 = -\frac{(3800\,N/C)(0.2m)^2}{9\times10^9\,N\cdot m^2/C^2} = -1.69\times10^{-8}\,C$

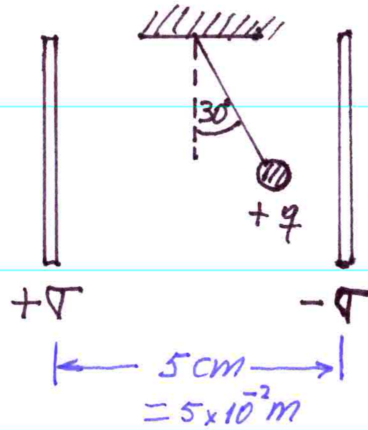
$\Rightarrow V(r) = \frac{(9\times10^9\,N\cdot m^2/C^2)(-1.69\times10^{-8}C)}{0.2\,m} \Rightarrow \boxed{V(r) = -760V}$ En la superficie de la esfera.

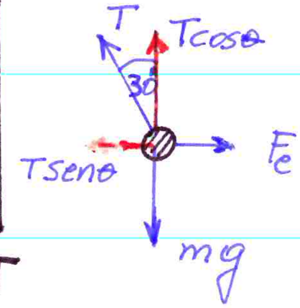
Dentro de la esfera conductora, en equilibrio electrostático $\boxed{E=0}$.

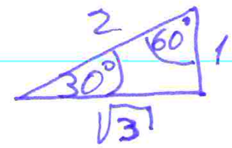
$\underline{r < R}$: $V(r) = -\oint \cancel{\vec{E}}^{\,0}\cdot d\vec{r} + V(R) = \boxed{V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = -760\,V}$

14. $\boxed{23.60}$ $m = 1.5g = 1.5\times10^{-3}Kg$

$q = 8.9\times10^{-6}C$







$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$

$T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

$\sum F_x = F_e - T\,Sen\theta = 0$

$F_e = T\,Sen\theta$

$F_e = \left(\dfrac{mg}{\cos\theta}\right) sen\theta = mg\,tg30°$

$F_e = (1.5\times10^{-3}Kg)(10\,m/s^2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

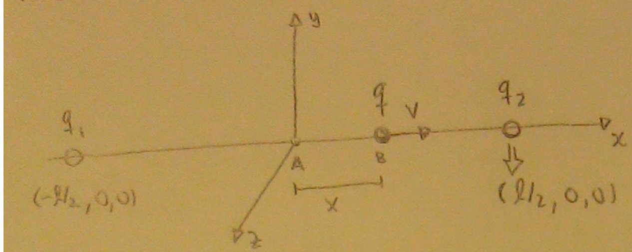
$\boxed{F_e = 8.7\times10^{-3}N}$ $\quad F_e = Eq = \dfrac{Vq}{d} \Rightarrow V = \dfrac{F_e d}{q}$

$V = Ed \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{V}{d}}$ $\quad V = \dfrac{(8.7\times10^{-3}N)(5\times10^{-2}m)}{8.9\times10^{-6}C} \approx 48.8V$

$\boxed{V = 48.8V}$ $\quad E = \dfrac{48.8V}{5\times10^{-2}m} \Rightarrow \boxed{E \approx 976\dfrac{V}{m}}$

$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = \varepsilon_0 E \approx 8.63\times10^{-9}\dfrac{C}{m^2}}$

PROBLEM 23.18



Using the work-energy theorem

$$W_{AB} = K_B - \cancel{K_A}^{\,0} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W_{AB}}{m}} \quad (1)$$

v is the speed of q. The work is

$$W_{AB} = q\,\mathcal{V}_{AB} = q(\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B) \qquad \text{where } \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$

Now $$\mathcal{V}_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0[(x+\ell/2)^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

$$\mathcal{V}_2(\vec{r}) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0[(x-\ell/2)^2+y^2+z^2]^{1/2}}$$

Hence $$\mathcal{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{(x+\ell/2)^2+y^2+z^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-\ell/2)^2+y^2+z^2}}\right)$$

Now

$$\mathcal{V}_A = \mathcal{V}(\overset{x}{0},\overset{y}{0},\overset{z}{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{(\ell/2)} + \frac{q_2}{(\ell/2)}\right] = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \ell}(q_1+q_2)$$

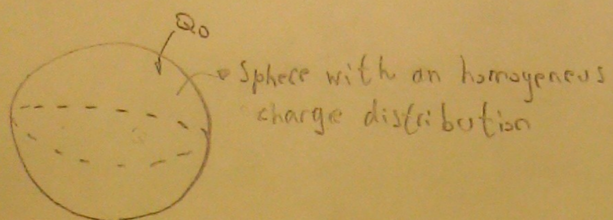
$$\mathcal{V}_B = \mathcal{V}(x,0,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x+\ell/2} + \frac{q_2}{|x-\ell/2|}\right)$$

$$\Rightarrow W_{AB} = q(\mathcal{V}_A - \mathcal{V}_B) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{x+\ell/2}\right) + q_2\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{|x-\ell/2|}\right)\right]$$

Using (1)

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left\{q_1\left[\frac{1}{\ell} - \frac{1}{(x+\ell/2)}\right] + q_2\left[\frac{1}{\ell} - \frac{1}{(x-\ell/2)}\right]\right\}}}$$

22.53



$$\rho(r) = \frac{dQ}{d\mathcal{V}} = \frac{Q_0}{\mathcal{V}} = \frac{Q_0}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \rho_0$$

$$dQ = \frac{Q_0}{4\pi R^3/3}\, d\mathcal{V}$$

$$\boxed{Q_{int}(r) = Q_0\left(\frac{r}{R}\right)^3} \quad \Leftarrow \quad Q_{int}(r) = \int_{\substack{\text{Sphere}\\ \text{of radius } r}} \rho_0\, d\mathcal{V} = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

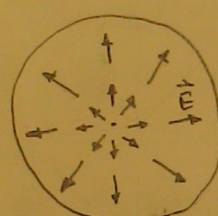
(1)

Now

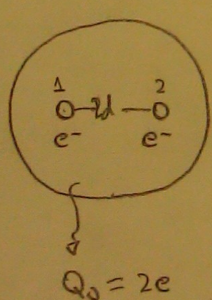
$$\oint_{S(r)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad \text{for } r < R$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\hat{r}}$$

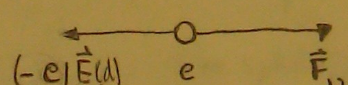
field inside the sphere



Thomson's Model



the force on the electron of the right hand is



Hence

$$|(-e)\,E(d)| = |F_{12}|$$

$$e\,\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(d)}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2d)^2}$$

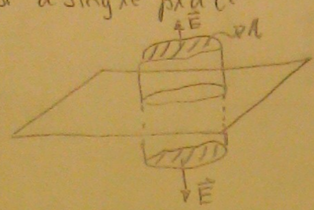
$$2\frac{d}{R^3} = \frac{1}{4d^2} \Rightarrow \frac{d^3}{R^3} = \frac{1}{8}$$

finally

$$\boxed{d = \frac{R}{2}}$$

PROBLEM 23.64

for a single plate

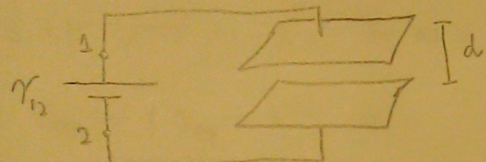


Using the Gauss-law

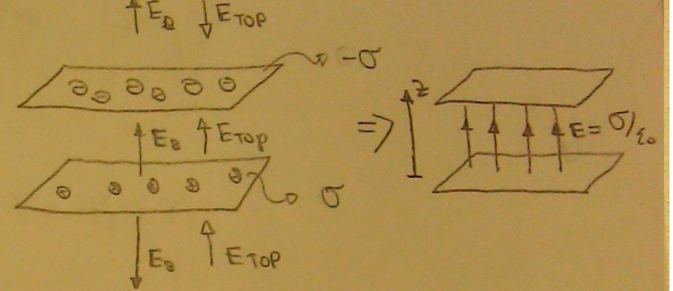
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

consider a capacitor



$\Rightarrow$



the field cancels outside the capacitor, but inside it is $E = \sigma/\varepsilon_0$ = constant

Now

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \sigma/\varepsilon_0 \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + \text{CONST} \Rightarrow V_{12} = V(z=0) - V(z=d) = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

or $V_{12} = \dfrac{Qd}{A\varepsilon_0}$ with A the area of the plates. Finally, the charge is

$$\boxed{Q = \frac{V_{12} A \varepsilon_0}{d}}$$

Solution (a)

the electric field is $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0} = \dfrac{1}{A\varepsilon_0}\left(\dfrac{V_{12} A \varepsilon_0}{d}\right) \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{V_{12}}{d}}$

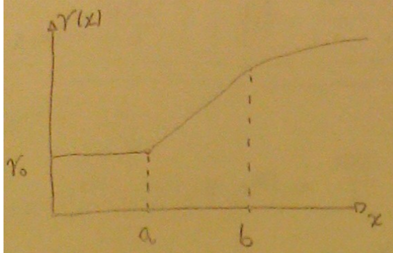
Solution (b)

Using the work-energy theorem

$$W_{12} = K_2 - \cancel{K_1}^{\,0} \Rightarrow qV_{12} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2qV_{12}}{m}}}$$

Solution (c)

PROBLEM 23.52



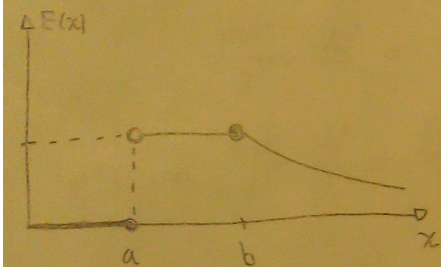
the electric field E is

$$E = -\frac{dV}{dx} \quad \text{if } E \text{ is stationary}$$

where

$$V(x) \begin{cases} = V_0 & \text{if } x < a \\ \approx \dfrac{V(b) - V(a)}{b-a} \cdot x + V_0 & \text{if } x \in [a, b] \\ \text{another function} & \text{if } x > b \end{cases}$$

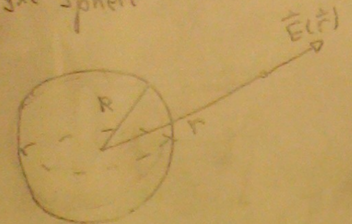
$$E = \begin{cases} = 0 & \text{if } x < a \\ \approx \dfrac{V(b) - V(a)}{b-a} & \text{if } a < x < b \\ = -\dfrac{dV}{dx} \lesssim 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$



where $\boxed{E_0 \cong \dfrac{V(b) - V(a)}{b-a}}$

PROBLEM 22.63

Single sphere



According to the Gauss law

$$\oint_{\text{Sphere}} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{Q_{in}(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}(\vec{r})}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad E(r) = \frac{Q_{in}(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

The charge density is

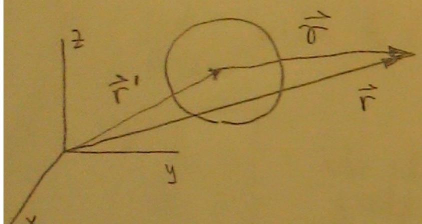
$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi R^3} & \text{if } r = R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

this is $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - R\hat{r})\, Q$

$$\Rightarrow Q_{in}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{V}(r)} \rho(\vec{r}')\, d\vec{r}' = Q \int_{\mathcal{V}(r)} \delta(\vec{r}' - R\hat{r})\, d\vec{r}' = \begin{cases} Q & \text{if } r > R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{if } r > R \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}} \qquad (1)$$

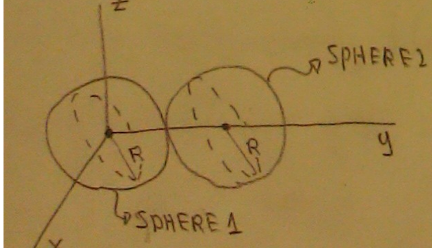
If the sphere is not in the origing



$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \mathscr{r}^2}\, \hat{\mathscr{r}} & \text{if } \mathscr{r} > R \\ 0 & \text{if } \mathscr{r} < R \end{cases}$$

where $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$ $\quad \mathscr{r} = |\vec{r} - \vec{r}'|$ $\quad \hat{\mathscr{r}} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Now the current problem involves two spheres



the sphere 1 is placed at the origin. Hence, its field is given by (1). On the other hand, the sphere 2 is at $\vec{r}' = 2R\hat{y}$, hence

$$\vec{E}_{sphere_2}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - 2R\hat{y}|^2} \frac{(\vec{r} - 2R\hat{y})}{|\vec{r} - 2R\hat{y}|}$$

$$\vec{E}_{sphere_2}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\hat{x} + (y-2R)\hat{y} + z\hat{z}}{[x^2 + (y-2R)^2 + z^2]^{3/2}} \quad \text{And} \quad \vec{E}_{sphere_1}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

The field of both spheres is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{sphere_1} + \vec{E}_{sphere_2} =$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{1}{[x^2+(y-2R)^2+z^2]^{3/2}}\right]-\frac{2R\hat{y}}{[x^2+(y-2R)^2+z^2]^{3/2}}\right\}}$$