Física 2

Taller #9

SOLUCIONES.

- Problema 24.4

Capacitancia de un osciloscopio. Los osciloscopios tienen placas metálicas paralelas en su interior para que desvíen el haz de electrones. Estas placas se llaman placas de desviación, y es común que sean cuadradas de 3.0 cm por lado y estén separadas $5.0\,mm$, con vacío entre ellas. ¿Cuál es la capacitancia de estas placas de desviación y, por lo tanto, del osciloscopio?

La capacitancia se define como la carga por unidad de diferencia de potencial, asi:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Cuando estamos hablando de un osciloscopio, decimos que son placas separadas a una distancia. Por tanto, el carga Q, en terminos de la densidad superficial de carga se escribe como: $Q = \sigma/A$ y que el campo electrico generado por unas placas $E = \sigma/\epsilon_0$, podemos escribir la capacitancia como:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

reemplazando con los datos que propone el ejercicio, tenemos:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = 1,6 \times 10^{-12} F$$

- Ejercicio 24.29

Un capacitor tiene placas paralelas con vacío entre ellas, con área de placa igual a A, una separación x, y cargas $+Q$ y $-Q$ en cada una. El capacitor se desconecta de la fuente de carga, por lo que la carga en cada placa permanece fija.

a) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor?

$$\begin{aligned} U &= \frac{QV}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \end{aligned}$$

del punto anterio sabemos como expresar la capacitancia para una placa, entonces:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2}\frac{xQ^2}{\epsilon_0 A} \end{aligned}$$

b) Se separan las placas una distancia adicional dx. ¿Cuál es el cambio en la energía almacenada?

El cambio en la energía almacenada, se escribirá como:

$$
\begin{aligned}
dU &= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}(x+dx) - \frac{1}{2}\frac{xQ^2}{\epsilon_0 A} \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}dx
\end{aligned}
$$

c) Si F es la fuerza con la que las placas se atraen entre sí, entonces el cambio en la energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado para separar las placas. Encuentre una expresión para F.

Simplemente, como ya tenemos una expresión para dU, entonce: $dU = Fdx$

$$
\begin{aligned}
dU &= Fdx \\
\frac{dU}{dx} &= F \\
&= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\epsilon_0 A}
\end{aligned}
$$

7. El potencial de un conductor cargado es igual a $300V$. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima de un electron para poder alejarse de la supercie del conductor hasta el infinito?

Para determinar la velocidad minima, podemos escribir el potencial en terminos de la energía como:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{U}{q} \\
&= -\frac{1}{2q}mv^2
\end{aligned}
$$

esta útima expresión es así, debido a que electron se aleja de la superficie conductora hasta el infinito, despenjando:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}mv^2 \\
v &= \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \\
&= 10,27 \times 10^6\, m/s
\end{aligned}
$$

Eje. 24.27 ①

$C = 450\mu F \Rightarrow V_t = 25V$

Se conecta un alambre entre las placas

$E \rightarrow Q$

Partiendo de: $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\frac{Q}{V}} = \frac{1}{2}QV$

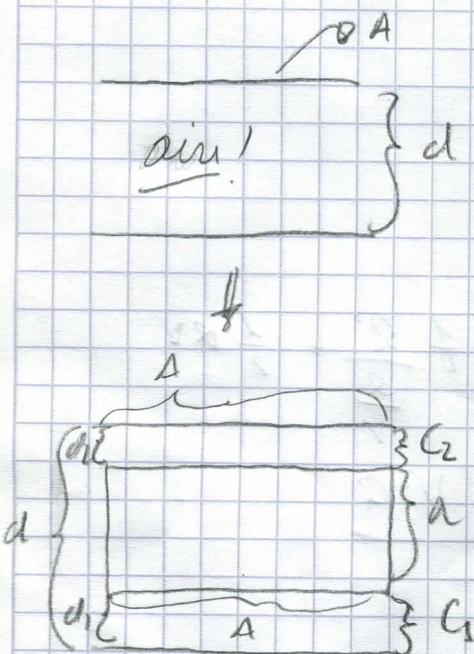
$U = \frac{1}{2}QV \Rightarrow Q = CV \Rightarrow \underline{U = \frac{1}{2}V^2C}$

$U = \frac{1}{2}V^2C \Rightarrow$ Energía de un Capacitor.

$$\left| U = \frac{1}{2}(25V)^2(450 \times 10^{-6} F) = 19.6J \right|$$

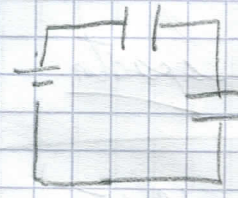
$$\left| U \rightarrow Q \Rightarrow Q = 19.6J \right|$$

Eje. 24.66



$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

⇒ Esquemáticamente se tiene!



⇒ Dos Capacitores en Serie

a) ⇒ $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$

b) ⇒ $C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_1}$, $C_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{d_2}$ ⇒ $d_1 + d_2 + a = d \Rightarrow d_1 = d_2$

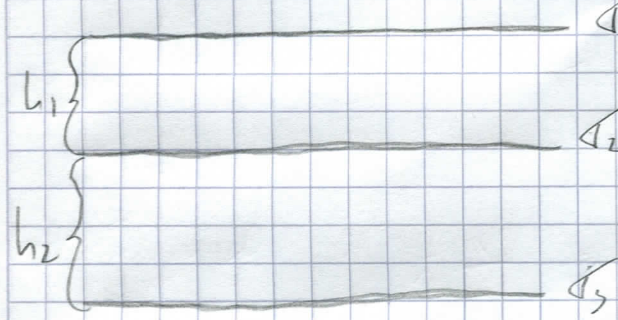
$2d_1 + a = d \Rightarrow d_1 = \frac{d-a}{2}$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d-a}\right)\left(\frac{2\varepsilon_0 A}{d-a}\right)}{\frac{2\varepsilon_0 A}{d-a} + \frac{2\varepsilon_0 A}{d-a}} = \frac{\left(\cancel{4}\frac{\varepsilon_0 A}{d-a}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\frac{\varepsilon_0 A}{\cancel{d-a}}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d-a} \times \frac{d}{d} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{d}{d-a}\right)$$

$$\boxed{C_{eq} = C_0\left(\frac{d}{d-a}\right)}$$

c) ⇒ $a \to 0 \to C_{eq} = C_0$, $a \to d \to C_{eq} = \infty$

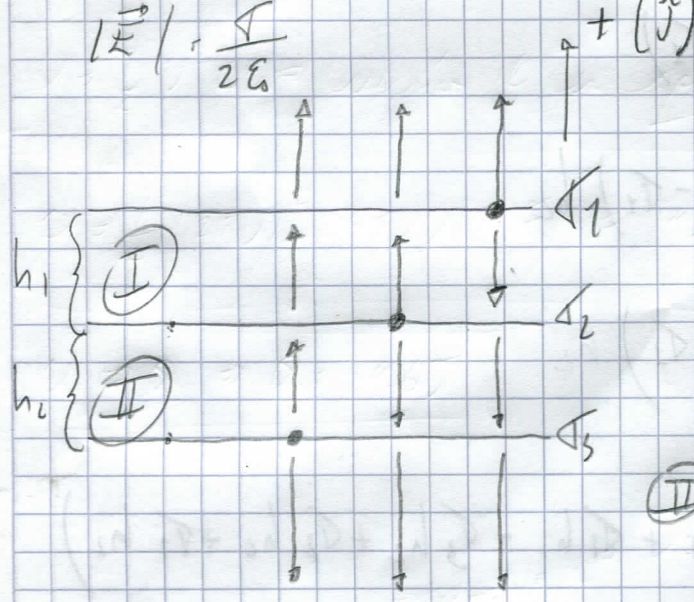
Problema 8/



diferencia de potencial entre las placas?

① Se dibujan las lineas de campo electrico, teniendo en cuenta que

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$\text{I} \Rightarrow |\vec{E}_T|_{\text{I}} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{|\vec{E}_T|_{\text{I}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1\right)}$$

$$\text{II} \Rightarrow |\vec{E}_T|_{\text{II}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma_3 - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{|\vec{E}_T|_{\text{II}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\right)}$$

② Se calcula la diferencia de potencial partiendo de:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Teniendo en cuenta

$$\vec{E}_{\text{I}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1\right)\hat{j}$$

$$\vec{E}_{\text{II}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\right)\hat{j}$$

$$d\vec{r} = dr\,\hat{j}$$

$$\Delta V_{\text{I}} = -\left|\vec{E}\right|_{\text{I}} h_1 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1\right) h_1$$

$$= \frac{h_1}{2\varepsilon_0}\left(-\sigma_2 - \sigma_3 + \sigma_1\right)$$

$$\Delta V_{\text{II}} = -\left|\vec{E}\right|_{\text{II}} h_2 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1\right) h_2$$

$$= \frac{h_2}{2\varepsilon_0}\left(-\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1\right)$$

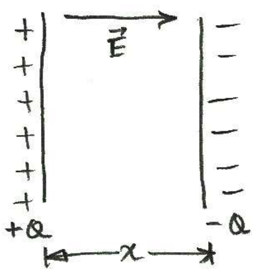
$$\Delta V_t = \Delta V_{\text{I}} + \Delta V_{\text{II}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(-\sigma_2 h_1 - \sigma_3 h_1 + \sigma_1 h_1 - \sigma_3 h_2 + \sigma_2 h_2 + \sigma_1 h_2\right)$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma_1(h_1 + h_2) - \sigma_3(h_1 + h_2) + \sigma_2(h_2 - h_1)\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left((\sigma_1 - \sigma_3)(h_1 + h_2) + \sigma_2(h_2 - h_1)\right)}$$

Soluciones 9

[3] ⓐ



La energía almacenada por un condensador es

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

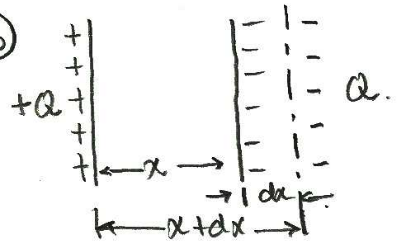
y la capacitancia para un condensador de placas paralelas de acuerdo con la geometría es

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{x}.$$

luego, de acuerdo con lo anterior la energía es.

$$U = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A}.$$ cuyas variables son conocidas de acuerdo con los datos del problema.

ⓑ



luego $U(x) = \frac{x Q^2}{2\varepsilon_0 A} \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$

$$\Rightarrow dU = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\, dx.$$

ⓒ $dU = dW = F dx \Rightarrow dU = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} dx = F dx.$

luego $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$

ⓓ El campo debido a ambas placas para un condensador está dado por $E = \sigma/\varepsilon_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$

Para una sola placa la ley de Gauss establece que

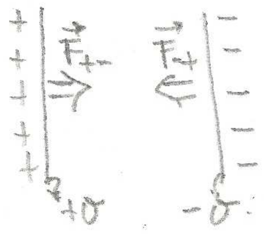
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A}, \text{ luego.}$$

$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$ puesto que $\boxed{F = QE}$

↳ La fuerza que ejerce una placa sobre la otra!

$\boxed{6}$ De acuerdo con el problema $\boxed{3}$ en la parte (d) se tiene que la fuerza que ejerce una placa sobre la otra está dada por:

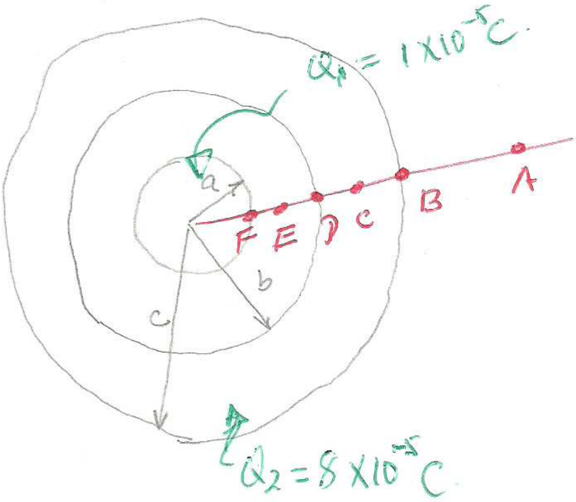
$$F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} = \frac{Q\sigma}{2\varepsilon_0}$$



$$\vec{F}_{+-} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{\imath} = +\frac{Q\sigma_-}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}.$$

$$\vec{F}_{-+} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{\imath} = -\frac{Q\sigma_+}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}.$$

9



$$V_A - V_\infty = -\int_\infty^A \frac{K(Q_1+Q_2)}{r^2}\,dr$$

$$V_A = \frac{K(Q_1+Q_2)}{r_A} = \frac{(9\times10^9)(1\times10^{-5}+8\times10^{-5})}{0.4}$$

$$V_A = 20.2\times10^5\ \text{V}.$$

Luego $V_B = \dfrac{K(Q_1+Q_2)}{r_B} = 27\times10^5$ V. con $r_B = 0.3$ m.

Ahora $V_B = V_C = V_D$, luego

$$\Delta V_{ED} = V_E - V_D = -\int_D^E \frac{KQ_1}{r^2}\,dr = \left.\frac{KQ}{r}\right|_D^E = \frac{KQ_1}{r_E} - \frac{KQ_1}{r_D}.$$

$$V_E = \frac{K(Q_1+Q_2)}{r_B} + \frac{KQ_1}{r_E} - \frac{KQ_1}{r_D} = 28.5\times10^5\ \text{V} \quad \text{con } r_E = 0.15\text{ m}$$

Luego $\Delta V_{FD} = \dfrac{KQ_1}{r_F} - \dfrac{KQ_2}{r_D} = V_F - V_D$. , luego.

$$V_F = \frac{K(Q_1+Q_2)}{r_B} + \frac{KQ_1}{r_F} - \frac{KQ_1}{r_D} = 31\times10^5\ \text{V}.$$