

老哥带你学数模

整数规划基本原理与编程实践

微信公众号：科研交流

他日若遂凌云志，敢笑黄巢不丈夫

更多模型、代码、优秀论文等请加QQ群：1077734962，更多资料请关注微信公众号：科研交流

各位仙友请坐好扶稳，
发生意外请自行跳车！



整数规划模型（IP）

数学规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。目前所流行的求解整数规划的方法，往往只适用于整数线性规划。目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。

整数规划分类

- (1) 变量全限制为整数时，称纯（完全）整数规划。
- (2) 变量部分限制为整数的，称混合整数规划。

整数规划特点

- 1 原线性规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解出现下述情况
 - (1) 原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。
 - (2) 整数规划无可行解。
 - (3) 有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。
- 2 整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。

例1 合理下料问题

设用某型号的圆钢下零件 A_1, A_2, \dots, A_m 的毛坯。在一根圆钢上
下料的方式有 B_1, B_2, \dots, B_n 种，每种下料方式可以得到各种零件的
毛坯数以及每种零件的需要量，如表所示。问怎样安排下料方式，
使得即满足需要，所用的原材料又最少？

设： x_j 表示用 $B_j (j=1, 2, \dots, n)$ 种方式下料根数。模型：

零件 个数 /\ 方式	$B_1 \dots B_n$	零件毛 坯数
A_1	$a_{11} \dots a_{1n}$	b_1
\vdots	\vdots	\vdots
A_m	$a_{m1} \dots a_{mn}$	b_m

$$\min Z = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \text{ 且为整数} \end{cases}$$

例2 (建厂问题) 某公司计划在 m 个地点建厂，可供选择的地点有 $A_1, A_2 \dots A_m$ ，他们的生产能力分别是 $a_1, a_2, \dots a_m$ （假设生产同一产品）。第 i 个工厂的建设费用为 f_i ($i=1, 2, \dots, m$)，又有 n 个地点 B_1, B_2, \dots, B_n 需要销售这种产品，其销量分别为 b_1, b_2, \dots, b_n 。从工厂运往销地的单位运费为 C_{ij} 。试决定应在哪些地方建厂，即满足各地需要，又使总建设费用和总运输费用最省？

单 厂址 价	销地 B_1, B_2, \dots, B_n	生产 能力	建设 费用
A_1	$c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1n}$	a_1	f_1
A_2	$c_{21} \quad c_{22} \quad \cdots \quad c_{2n}$	a_2	f_2
\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$	\vdots	\vdots
A_m	$c_{m1} \quad c_{m2} \quad \cdots \quad c_{mn}$	a_m	f_m
销量	b_1, b_2, \dots, b_n		

设: x_{ij} 表示从工厂运往销地的运量 ($i=1, 2, \dots, m$ 、 $j=1, 2, \dots, n$)

又设 $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{在 } A_i \text{ 建厂} \\ 0 & \text{不在 } A_i \text{ 建厂} \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m)$

模型: $\min Z = \sum \sum c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m f_i y_i$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_{ij} \geq 0, y_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

整数规划的数学模型

一般形式

$$\max(\min) z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (=, \geq) b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0, \quad x_j \text{ 为整数 } & (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

依照决策变量取整要求的不同，整数规划可分为纯整数规划、全整数规划、混合整数规划、0—1整数规划。

纯整数规划：所有决策变量要求取非负整数（这时引进的松弛变量和剩余变量可以不要求取整数）。

全整数规划：除了所有决策变量要求取非负整数外，系数 a_{ij} 和常数 b_i 也要求取整数（这时引进的松弛变量和剩余变量也必须是整数）。

混合整数规划：只有一部分的决策变量要求取非负整数，另一部分可以取非负实数。

0—1整数规划：所有决策变量只能取 0 或 1 两个整数。

整数规划与线性规划的关系

整数规划

$$\max c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, x \text{为整数} \end{cases}$$

松弛的线性规划

$$\max c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

整数规划可行解是松弛问题可行域中的整数格点

松弛问题无可行解，则整数规划无可行解；

ILP最优值小于或等于松弛问题的最优值

松弛问题最优解满足整数要求，则该最优解为整数规划最优解；

整数线性规划的求解方法

从数学模型上看整数规划似乎是线性规划的一种特殊形式，求解只需在线性规划的基础上，通过舍入取整，寻求满足整数要求的解即可。

但实际上两者却有很大的不同，通过舍入得到的解（整数）也不一定就是最优解，有时甚至不能保证所得到的解是整数可行解。

例：设整数规划问题如下

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{且为整数} \end{cases} \end{aligned}$$

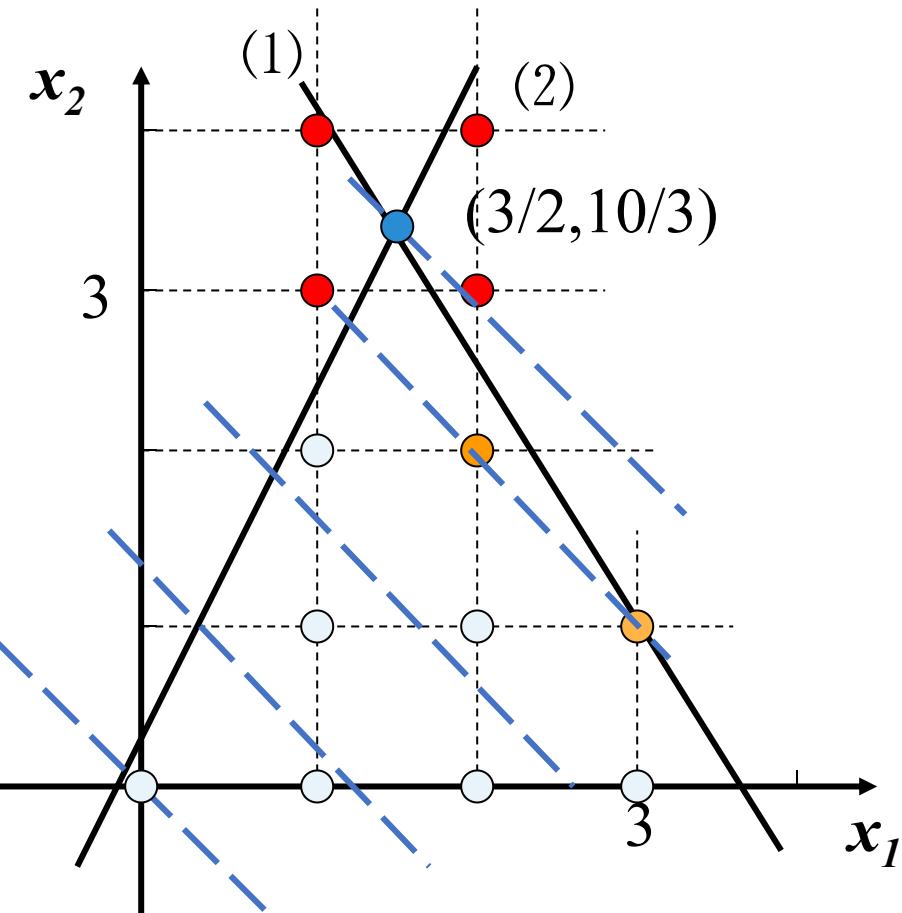
首先不考虑整数约束，得到线性规划问题（一般称为松弛问题或伴随问题）。

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \leq 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

用图解法求出最优解 $x_1 = 3/2$,
 $x_2 = 10/3$ 且有 $Z = 29/6$

现求整数解（最优解）：如用“舍入取整法”可得到4个点即(1, 3) (2, 3) (1, 4) (2, 4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解。

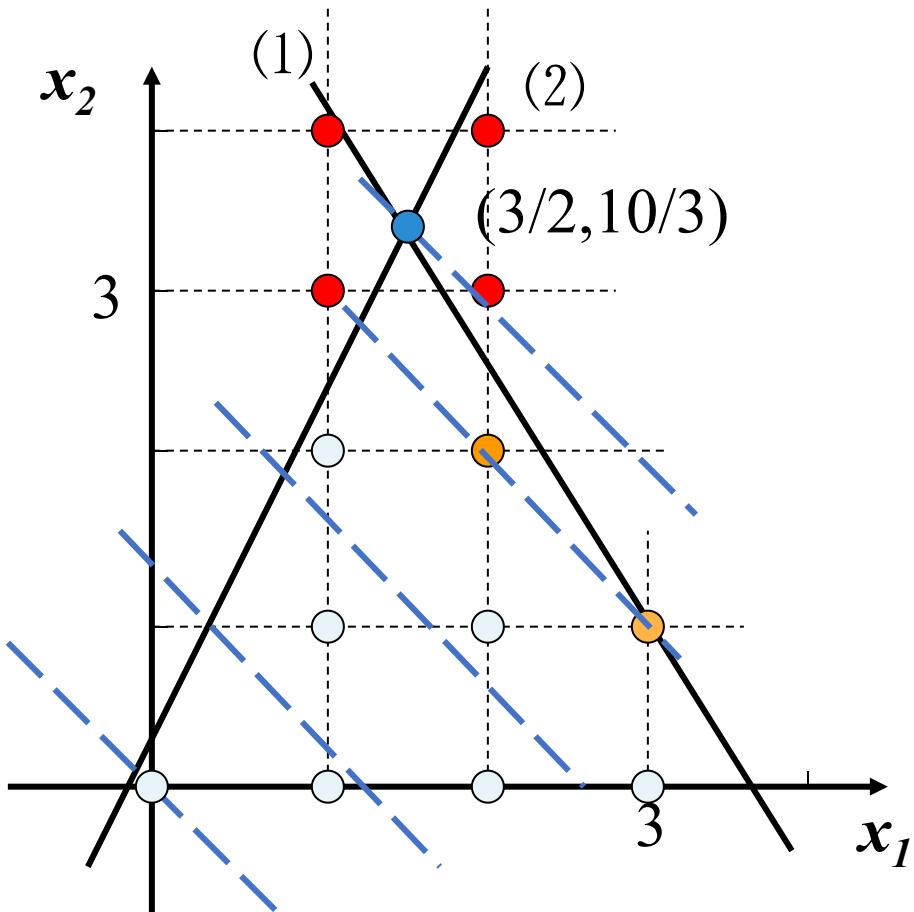
按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如图所示。



因此，可将集合内的整数点一一找出，其最大目标函数的值为最优解，此法为完全枚举法。

如上例：其中 $(2, 2)$ $(3, 1)$ 点为最大值， $Z=4$ 。

目前，常用的求解整数规划的方法有：分枝定界法和割平面法；对于特别的0-1规划问题采用隐枚举法和匈牙利法。



分枝定界法

不考虑整数限制先求出相应松弛问题的最优解，

若松弛问题无可行解，则ILP无可行解；

若求得的松弛问题最优解符合整数要求，则是ILP的最优解；

若不满足整数条件，则任选一个不满足整数条件的变量 x_i^0 来构造新的约束添加到松弛问题中形成两个子问题

$$x_i \leq \lfloor x_i^0 \rfloor; x_i \geq \lceil x_i^0 \rceil + 1$$

依次在缩小的可行域中求解新构造的线性规划的最优解，并重复上述过程，直到子问题无解或有整数最优解（被查清）。

在分支的过程中，若当前已经得到的满足整数要求的最优值为 Z_m 则该 Z_m 就可是作为一个过滤条件，对于最优值小于或等于 Z_m 的子问题无需再分支，则这样的子问题称为被剪枝。未被剪枝的子问题需继续分支。

分支定界法的最终子问题要么被查清要么被剪枝。

$$P_1, Z_1$$

$$P_2, Z_2$$

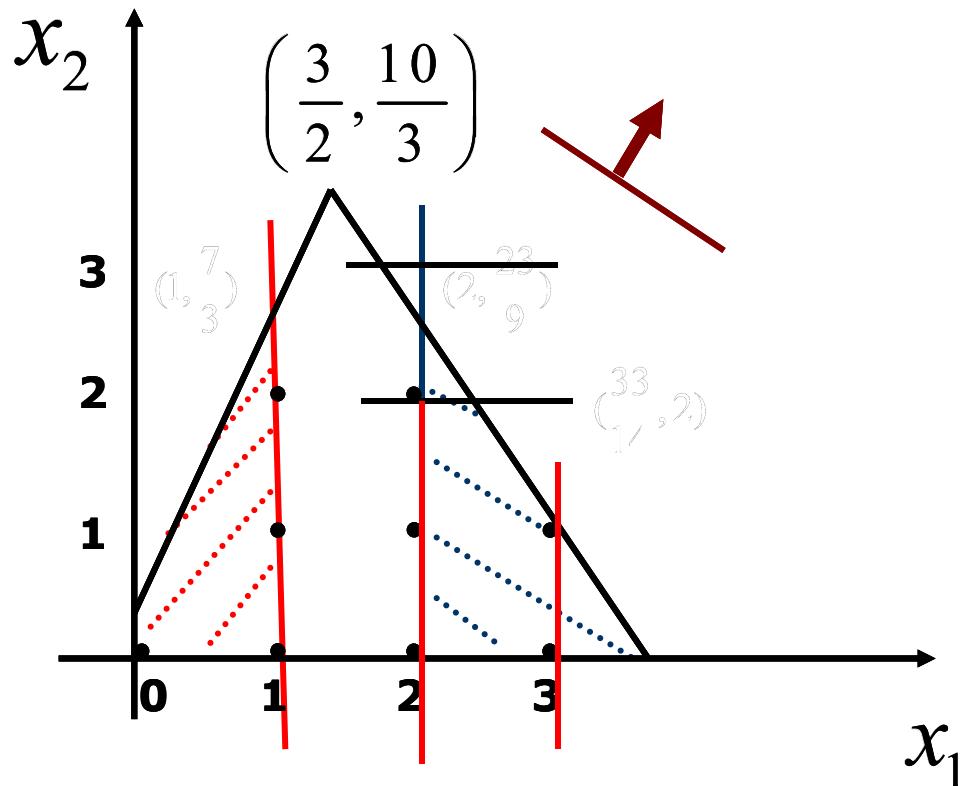
$$Z_1 < Z_2$$

应该优先选取 P_2 进行分支。

分支定界法求解举例

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + \frac{9}{14}x_2 \leq \frac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \frac{1}{3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ 且取整} \end{cases}$$



$\frac{10}{3} < 4$, 所以子问题被剪枝, ILP最优解为(2, 2)或(3, 1)最优值为4.

$LP0 :$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{10}{3}, Z = \frac{29}{6}$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1 \leq 1$$

$LP2 :$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{23}{9}, Z = \frac{41}{9}$$

$LP1 :$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{7}{3}, Z = \frac{10}{3}$$

$$\frac{41}{9} > \frac{10}{3}$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$LP4:$ 无解, 查清

$LP3:$

$$x_1 = \frac{33}{14}, x_2 = 2, Z = \frac{61}{14}$$

$$\frac{61}{14} > \frac{10}{3}$$

$LP6:$

$$x_1 = 3, x_2 = 1, Z = 4, \text{ 查清}$$

$LP5:$

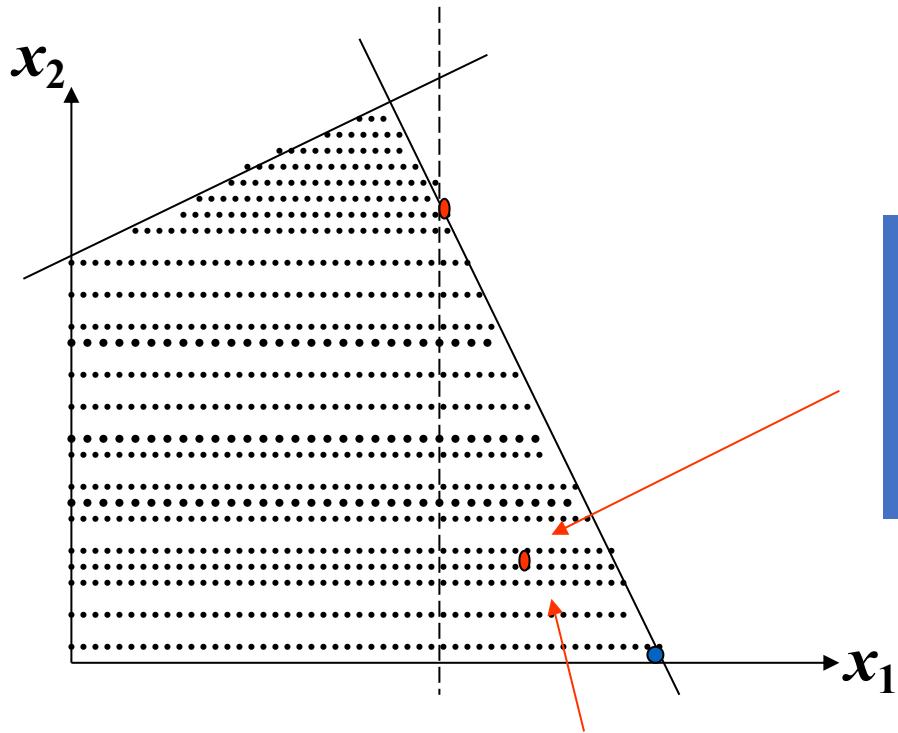
$$x_1 = 2, x_2 = 2, Z = 4, \text{ 查清}$$

$$\frac{10}{3} < 4,$$

LP1被剪枝

割平面法的基本思想

- ⑥如果松弛问题(P_0)无解，则(P)无解；
- ⑦如果(P_0)的最优解为整数向量，则也是(P)的最优解；
- ⑧如果(P_0)的解含有非整数分量，则对(P_0)增加割平面条件：即对(P_0)增加一个线性约束，将(P_0)的可行区域割掉一块，使得非整数解恰好在割掉的一块中，但又没有割掉原问题(P)的可行解，得到问题(P_1)，重复上述的过程。



可行域中割去一部分，
割去部分不含整数解，
剩余部分有一个极点正好是整数最优解

原有最优解要被割去

0-1变量的使用

例3 投资问题

有600万元投资5个项目， 收益如表， 求利润最大的方案？

项目	投资额	项目收益	约束条件
I	210	160	
II	300	210	
III	150	60	
IV	130	80	
V	260	180	

$$\begin{aligned} \max Z &= 160x_1 + 210x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 180x_5 \\ &\left\{ \begin{array}{l} 210x_1 + 300x_2 + 150x_3 + 130x_4 + 260x_5 \leq 600 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_5 \leq x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0 \text{或} 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{选中第 } j \text{ 个项目投资} \\ 0 & \text{不选中第 } j \text{ 个项目投资} \end{cases}$$

例4、互斥约束问题

例如某种工序的约束条件为:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$

企业也可以考虑一种新的加工工序:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 180$$

这两个工序只能选其一，是互相排斥的。引入0—1变量y，令

$$y = \begin{cases} 1 & \text{采用原工序} \\ 0 & \text{采用新工序} \end{cases}$$

互斥问题可由下述的条件来代替，其中M是充分大的数。

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leq 200 + (1 - y)M \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 180 + yM \end{aligned}$$

互斥约束的推广

从下述 p 个约束条件中恰好选择 q 个约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{选第 } i \text{ 个约束条件} \\ 1 & \text{不选第 } i \text{ 个约束条件} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, p)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + M y_i & (i = 1, 2, \dots, p) \\ \sum_{i=1}^p y_i = p - q \end{cases}$$

互斥约束的推广

从下述 p 个约束条件中恰好选择 q 个约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{选第 } i \text{ 个约束条件} \\ 1 & \text{不选第 } i \text{ 个约束条件} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i - M y_i \\ \sum_{i=1}^p y_i = p - q \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

例5 固定费用问题

服装公司租用生产线拟生产T恤、衬衫和裤子。

每年可用劳动力8200h，布料8800m²。

	T恤	衬衫	裤子
劳动力	3	2	6
布料	0.8	1.1	1.5
售价	250	400	600
可变成本	100	180	300
生产线租金(万)	20	15	10

假设：

$y_j=1$, 要租用生产线 j

$y_j=0$, 不租用生产线 j

第 j 种服装生产量 x_j

$$\max Z = 150x_1 + 220x_2 + 300x_3 - 200000y_1 - 150000y_2 - 100000y_3$$

$$s.t. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 8200 & x_1 \leq M_1 y_1 \\ 0.8x_1 + 1.1x_2 + 1.5x_3 \leq 8800 & x_2 \leq M_2 y_2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{且取整数} & x_3 \leq M_3 y_3 \\ y_1, y_2, y_3 = 0 \text{或} 1 \end{cases}$$

指派问题

甲乙丙丁四个人，ABCD四项工作，要求每人只能做一项工作，每项工作只由一人完成，问如何指派总时间最短？

		任务	A	B	C	D
时间	人员					
甲		3	5	8	4	
乙		6	8	5	4	
丙		2	5	8	5	
丁		9	2	5	2	

解：引入0-1变量 x_{ij} ，

$x_{ij}=1$: 第*i*人做第*j*项工作

$x_{ij}=0$: 第*i*人不做第*j*项工作

$$\begin{aligned} \min Z = & 3x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} \\ & + 2x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33} + 5x_{34} + 9x_{41} + 2x_{42} + 5x_{43} + 2x_{44} \end{aligned}$$

- 一项任务只由一个人完成

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

- 一人只能完成一项任务

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

指派问题的标准形式

有 n 个人和 n 项工作，已知第 i 个人做第 j 项工作的代价为 c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$)，要求每项工作只能交与其中一人完成，每个人只能完成其中一项工作，问如何分配可使总代价最少？

$$C = (c_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

指派问题的系数矩阵

i 行元素—第 i 个人完成各项工作的代价

j 列元素—各人完成第 j 项工作的代价

指派问题的数学模型

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 项工作} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 个人不做第 } j \text{ 项工作} \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$X = (x_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

指派问题的解矩阵

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ s.t. &\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 (i = 1, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 (j = 1, \dots, n) \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 (i, j = 1, \dots, n) \end{array} \right. \end{aligned}$$

指派问题可行解中，每列每行有且仅有一个1

非标准形式的指派问题

1、最大化指派问题

$C = (c_{ij})_{n \times n}$ 中最大元素为 m , 令 $B = (b_{ij})_{n \times n} = (m - c_{ij})_{n \times n}$

2、人数和工作数不等

人少工作多：添加虚拟的“人”，代价都为0

人多工作少：添加虚拟的工作，代价都为0

3、一个人可做多件工作

该人可化为几个相同的“人”

4、某工作一定不能由某人做

该人做该工作的相应代价取足够大M

指派问题的匈牙利解法的一般步骤

第一步：变换指派问题的系数(也称效率)矩阵(c_{ij}) 为(b_{ij})，使在(b_{ij}) 的各行各列中都出现0元素，即

(1) 从 (c_{ij}) 的每行元素都减去该行的最小元素；

(2) 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

第二步：进行试指派，以寻求最优解。

在 (b_{ij}) 中找尽可能多的独立0元素，若能找出 n 个独立0元素，就以这 n 个独立0元素对应解矩阵 (x_{ij}) 中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。找独立0元素，常用的步骤为：

(1)从只有一个0元素的行(列)开始，给这个0元素加圈，记作 \circledcirc 。然后划去 \circledcirc 所在列(行)的其它0元素，记作 \emptyset ；这表示这列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。

(2)给只有一个0元素的列(行)中的0元素加圈，记作 \circledcirc ；然后划去 \circledcirc 所在行的0元素，记作 \emptyset 。

(3)反复进行(1), (2)两步，直到尽可能多的0元素都被圈出和划掉为止。

(4)若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个，则从剩有0元素最少的行(列)开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少的那列的这个0元素加圈(表示选择性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其它0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。

(5) 若 \odot 元素的数目 m 等于矩阵的阶数 n ，那么这指派问题的最优解已得到。若 $m < n$ ，则转入下一步。

第三步：作最少的直线覆盖所有0元素。

- (1)对没有 \odot 的行打√号；
- (2)对已打√号的行中所有含0元素的列打√号；
- (3)再对打有√号的列中含 \odot 元素的行打√号；

- (4)重复(2), (3)直到得不出新的打√号的行、列为止;
- (5)对没有打√号的行画横线, 有打√号的列画纵线, 这就得到覆盖所有0元素的最少直线数 l 。 l 应等于 m , 若不相等, 说明试指派过程有误, 回到第二步(4), 另行试指派; 若 $l=m < n$, 须再变换当前的系数矩阵, 以找到 n 个独立的0元素, 为此转第四步。

第四步: 变换矩阵(b_{ij})以增加0元素。

在没有被直线覆盖的所有元素中找出最小元素, 然后打√各行都减去这最小元素; 打√各列都加上这最小元素 (以保证系数矩阵中不出现负元素)。新系数矩阵的最优解和原问题仍相同。转回第二步。

匈牙利解法的实例

人员 \ 任务	A	B	C	D
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

第一步：变换指派问题的系数矩阵 (c_{ij}) 为 (b_{ij})，使在 (b_{ij}) 的各行各列中都出现0元素，即

- (1) 从 (c_{ij}) 的每行元素都减去该行的最小元素；
- (2) 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4 -2} \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第二步：进行试指派，以寻求最优解。

在 (b_{ij}) 中找尽可能多的独立0元素，若能找出 n 个独立0元素，就以这 n 个独立0元素对应解矩阵 (x_{ij}) 中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。找独立0元素，常用的步骤为：

(1)从只有一个0元素的行(列)开始，给这个0元素加圈，记作 \circledcirc 。然后划去 \circledcirc 所在列(行)的其它0元素，记作 \emptyset ；这表示这列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。

(2)给只有一个0元素的列(行)中的0元素加圈，记作 \circledcirc ；然后划去 \circledcirc 所在行的0元素，记作 \emptyset 。

(3)反复进行(1), (2)两步，直到尽可能多的0元素都被圈出和划掉为止。

$$\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \emptyset & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \emptyset & 1 & \circledcirc & \emptyset \end{bmatrix}$$

- (4) 若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个，则从剩有0元素最少的行(列)开始，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少的那列的这个0元素加圈(表示选择性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其它0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。
- (5) 若◎元素的数目m等于矩阵的阶数n，那么这指派问题的最优解已得到。

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc} \emptyset & 13 & 7 & \textcolor{violet}{\bigcirc} \\ 6 & \textcolor{violet}{\bigcirc} & 6 & 9 \\ \textcolor{violet}{\bigcirc} & 5 & 3 & 2 \\ \emptyset & 1 & \textcolor{violet}{\bigcirc} & \emptyset \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

◎ 元素的数目m等于矩阵的阶数n，那么这指派问题的最优值: $4+4+9+11$.

例7 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作A、B、C、D。现有甲、乙、丙、丁四人，他们将中文说明书译成不同语种的说明书所需时间如下表所示，问如何分派任务，可使总时间最少？

任务 人员\任务	A	B	C	D
甲	6	7	11	2
乙	4	5	9	8
丙	3	1	10	4
丁	5	9	8	2

求解过程如下：

第一步，变换系数矩阵：

$$(c_{ij}) = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 11 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 10 & 4 \\ 5 & 9 & 8 & 2 \end{bmatrix} - 2 \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5

第二步，试指派：

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & \circledcirc \\ \circledcirc & 1 & 0 & 4 \\ 2 & \circledcirc & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

找到3个独立零元素
但 $m=3 < n=4$

第三步：作最少的直线覆盖所有0元素。

- (1) 对没有◎的行打√号；
- (2) 对已打√号的行中所有含0元素的列打√号；
- (3) 再对打有√号的列中含◎元素的行打√号；
- (4) 重复(2),(3)直到得不出新的打√号的行、列为止；
- (5) 对没有打√号的行画横线，有打√号的列画纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数 l 。 l 应等于 m ，若不相等，说明试指派过程有误，回到第二步(4)，另行试指派；若 $l=m < n$ ，须再变换当前的系数矩阵，以找到 n 个独立的0元素，为此转第四步。

4	5	4	◎	√
◎	1	0	4	
2	◎	4	3	
3	7	1	0	√

独立零元素的个数
 m 等于最少直线数 l ，
即 $l=m=3 < n=4$ ；

第四步，变换矩阵(b_{ij})以增加0元素：没有被直线覆盖的所有元素中的最小元素为1，然后打√各行都减去1；打√各列都加上1，得如下矩阵，并转第二步进行试指派：

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc} 4 & 5 & 4 & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 4 \\ 2 & \textcircled{1} & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\checkmark -1 \\ +1}} \\
 \left[\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 5 \\ 2 & \textcircled{1} & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \\
 \left[\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & \textcircled{1} \\ \textcircled{1} & 1 & 0 & 5 \\ 2 & \textcircled{1} & 4 & 4 \\ 2 & 6 & \textcircled{1} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

指派问题的计算机解法

- 整数规划问题的求解可以使用Lingo等专用软件。对于一般的整数规划问题，无法直接利用Matlab的函数，必须利用Matlab编程实现分枝定界解法和割平面解法。但对于指派问题等特殊的整数规划问题有时可以直接利用Matlab的函数linprog。

- 例：求解下列指派问题，已知指派矩阵为
- 解：编写Matlab程序如下：
- `c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5; 8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];`
- `c=c(:); %把矩阵c转化为向量`
- `a=zeros(10,25);`
- `for i=1:5 %实现循环运算`
- `a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;`
- `a(5+i,i:5:25)=1;`
- `end %此循环把指派问题转化为线性规划问题`
- `b=ones(10,1);`
- `[x,y]=linprog(c,[],[],a,b,zeros(25,1),ones(25,1));`
- `X=reshape(x,5,5)`
- `opt=y`
- 求得最优指派方案为

3	8	2	10	3
8	7	2	9	7
6	4	2	7	5
8	4	2	3	5
9	10	6	9	10

，最优值为21。

$$x_{15} = x_{23} = x_{32} = x_{44} = x_{51} = 1$$

THE END

