

第一届长三角高校数学建模竞赛

题 目 基于 TSP 模型对旅行问题的多目标规划

摘 要：

本文研究的是旅游城市、景点的选取以及游玩次序的多目标规划问题。主要基于 **TSP（旅行商模型）** 进行改良，保证在若干个候选城市或景点中选出最优解。

针对问题（1），①通过大数据寻找候选城市及候选景点的评分以及评论数，利用 **TOPSIS 算法**，计算出各个城市及景点的评价系数，同时确定城市游玩时间，若评价系数高于平均数，则认为该城市更值得花更多时间游览，游览时间为 3 天，否则为 2 天；②利用 **0-1 规划建立单目标规划模型**，使得在符合时间约束条件的情况下，旅行城市的满意度之和最大。计算出最优旅行城市后利用 **TSP 模型** 对城市旅行先后顺序进行确定，得到最优城市旅行计划（杭州—>南京—>扬州—>苏州—>上海—>杭州）；③为了使小李同学此次旅行尽可能地满意，同时游览尽可能多的景点，基于 **TSP 模型建立多目标规划模型**，在满足两星期游玩时间的约束条件下，从若干个候选景点中选取使得目标函数最大若干个的景点。改良后的 TSP 模型可自动得出城市景点间的游玩顺序。

针对问题（2），利用问题（1）已知的城市及景点的评价系数对旅行地点及顺序进行分析。①依据各个城市 GDP 对各个城市游览开销进行估计，得出城市游玩预算；②同样利用 **0-1 规划** 对单目标问题进行求解，约束条件为 5000 元旅行基金，再利用 TSP 确定城市旅行顺序（杭州—>嘉兴—>上海—>扬州—>南京—>杭州）；③同样基于改良后的 **TSP 模型建立多目标规划**，得出城市景点间的游玩顺序。

针对问题（3），利用问题（1）和问题（2）的城市游玩天数及预计花费金额对双约束条件进行分析。①建立 **0-1 规划** 对单目标问题进行求解，约束条件由单条件转换为双条件，由于时间与金钱不在同一量级，无法进行比较，因此我们进行无量纲化处理，得到最优城市解，再利用 **TSP 模型** 对其进行求解确定城市旅行顺序（杭州—>嘉兴—>上海—>扬州—>南京）；②由于一些城市存在没有地铁的情况，我们将通行方式分为出租车或公交车得到新的约束条件，同样基于改良后的 **TSP 模型建立混合 0-1 多目标二次规划问题**，在双条件的约束情况下得出城市景点间的游玩顺序。

针对问题（4），由于要考虑爷爷的旅行感受，因此我们提高住宿的预算以及增加游玩后的休息时间。增加红色景点的目标函数①建立混合 **0-1 二次多目标规划**，对时间与金钱以及红色旅游城市无量纲化，由于杭州缺少红色景点，因此不被选择，但出发点和终点都为杭州，利用 **TSP 模型** 求得城市旅游顺序（杭州—>嘉兴—>上海—>无锡—>南京—>绍兴—>杭州）；②同样对城市是否有地铁的情况进行分类，在保证多目标规划问题满足约束条件的情况下得出城市景点及游玩顺序。

针对问题（5），①利用爬虫得到 bilibili 有关各个城市 vlog 的播放量以及 up 主粉丝数，利用多项式拟合得出之间的关系；②考虑到小李每日剪视频需要用到至少 1 小时，因此每日游玩时间也相对减少；③当小李和爷爷同游时考虑到爷爷的出镜会增加视频的播放量，因此我们相应提高收益度。④根据以上三个假设重做问题（2）~（4），得到游玩城市及游玩顺序。

关键词 TSP 多目标规划 TOPSIS 混合 0-1 线性规划 混合 0-1 二次规划

目录

一 问题重述.....	1
二 模型假设.....	1
三 符号说明.....	1
四 问题分析.....	2
五 模型的建立与求解.....	3
5.1 问题（1）：在时间限制下的旅行计划.....	3
5.1.1 利用 TOPSIS 构建评价体系.....	3
5.1.2 利用 0-1 规划对最优城市解的选取.....	4
5.1.3 利用 TSP 模型对最短时间的调度.....	5
5.1.4 利用多目标规划确定游玩景点.....	6
5.2 问题（2）：在金钱的限制下的旅行计划.....	9
5.2.1 重新构建 0-1 规划模型对最优城市解进行选取.....	9
5.2.2 利用 TSP 模型对最少花费的调度.....	10
5.2.3 利用多目标规划确定游玩景点.....	11
5.3 问题（3）：在金钱与时间双条件限制下的旅行计划.....	12
5.3.1 双约束条件下构建 0-1 规划模型选择最优城市解.....	12
5.3.2 利用 TSP 模型在双条件情况下求最优解.....	13
5.3.3 在双约束条件下建立多目标确定景点及游玩次序.....	14
5.4 问题（4）：双人旅行在时间金钱限制下的旅行计划.....	16
5.4.1 双条件约束下 0-1 规划模型.....	16
5.4.2 利用 TSP 在双约束条件下的求解.....	17
5.4.3 在双约束的条件下建立多目标动态规划模型.....	18
5.5 问题（5）：增加 b 站激励计划下旅行计划.....	20
5.5.1 粉丝数、城市热度与视频播放量之间的关系.....	20
5.5.2 对于第（2）问的重做.....	21
5.5.3 对于第（3）问的重做.....	23
5.5.4 对于问题（4）的重做.....	25
六 模型的评价及推广.....	27
6.1 模型的优点.....	27
6.2 模型的不足.....	27
6.3 模型的推广.....	27
参考文献.....	27

基于 TSP 模型对旅行问题的多目标规划

一 问题重述

当毕业季来临,许多同学都想拥有一场终身难忘的毕业旅行,来自浙江杭州的大学生小李同学平时认真学习,家庭条件较好。在毕业季来临之际,他希望能够拥有一个吃喝玩乐一应俱全且又令人难忘的毕业旅行,同时帮助“长三角旅游推广联盟”对长三角地区旅游资源的丰富程度以及被利用程度进行考察。

试就长三角旅游资源以及小李同学自身条件的相关情况,建立数学模型分析研究下面问题:

(1) 由于小李同学临近毕业季,时间较为紧张,只有两星期的旅行时间,请根据小李同学的时间来安排一个令他难忘的毕业旅行。

(2) 由于小李同学作为大学生,资金不够充裕,仅有 5000 元旅行基金,但时间较为充裕,请根据小李同学实际情况来规划一个令他难忘的毕业旅行。

(3) 由于小李同学临近毕业季,资金与时间都较为紧张,仅有 5000 元旅行基金和两星期的旅行时间,请你为他规划一个令他难忘的毕业旅行。

(4) 小李的爷爷是一个退伍军人,目前退休在家,对于以往的革命岁月十分怀念,在得知小李同学计划去毕业旅行后,来到杭州准备与小李同学同行,请你为他们规划一个资金不超过 1 万元,时间不超过两个星期的旅行计划。

(5) 小李同学除了大学生的身份之外,他还是一个新媒体人,在 Bilibili 拥有 52.5 万的粉丝,他希望在旅行中能够每日更新 vlog,内容为当天旅行 1 小时的内容,不仅能达到涨粉的目的,还能增加旅行经费。Bilibili 的收入仅限于创作激励,即“点赞数+收藏+投币+播放量”所带来的流量变现,且播放量与旅游景点之间密切相关,若报酬按日结算,则结算的费用可以相应地增加进旅行费用中,请重新根据(2)~(4)问的具体情况为小李同学规划令他难忘的旅行计划。

二 模型假设

- (1) 小李同学每日需满足 8 小时的睡眠时间。
- (2) 小李同学为了补充体力需满足一日三餐,且每餐用时为 1 小时。
- (3) 小李同学旅行途中天气情况良好,且不会发生意外情况。
- (4) 小李同学每到一个景点游玩都需要 2 小时休息时间。
- (5) 小李同学的旅行出发点与终点都为杭州。
- (6) 小李爷爷的旅行出发点与终点都为杭州。
- (7) 汽车的平均时速为 50km/h,公交车的平均时速为 30km/h。
- (8) 小李同学每天都会更新 vlog。

三 符号说明

符号	说明
q_i	是否在第 i 个城市游览
q_{ij}	是否从第 i 个城市到第 j 个城市
x_i	是否在第 i 个景点游览
x_{ij}	是否从第 i 个景点到第 j 个景点
$c1_i$	对第 i 个城市的评价系数
$c2_i$	对第 i 个景点的评价系数
t_i	第 i 个景点的游玩时间

d_{ij}	第 i 个景点到第 j 个景点的距离
m_i	去第 i 个城市所花的价格
$t1_i$	第 i 个城市的游玩天数

四 问题分析

对于问题（1），为了使小李同学有一个难忘的毕业旅行，对城市和景点分别建立 TOPSIS 评价体系，得到评价分数，即该问题转化为最优化模型求解。建立 0-1 规划模型，在若干个候选城市中选出综合满意度最高且游玩时间总共不超过两个星期的若干个城市，为了节约花费在城市之间通行时间，建立 TSP 模型确定旅行城市的先后顺序。

对于城市内景点的选择采用多目标规划模型，在保证游玩时间不超过限制天数的前提下，使得游玩满意度尽量高以及尽可能多地游览景点数为了尽可能地减少通行时间，根据本题需求对 TSP 模型进行改进确定城市内景点选择以及的旅行顺序。

对于问题（2），在问题（1）的基础上进行改动。首先利用 TOPSIS 评价体系对城市和景点进行评价；建立 0-1 规划模型，对每个城市游玩预计花费进行估算，在若干个候选城市中选出综合满意度最高且总花费金额不超过 5000 的城市。建立 TSP 模型求得最少花费金额路线。

对于城市内景点同样采取多目标规划模型，在不超过旅行基金的前提下尽可能保证旅行丰富度以及景点个数，同样根据本题实际情况对 TSP 模型进行改良，以得出更理想的结论。

对于问题（3），在前两问的基础上增加了一个约束条件，即双条件约束。同样首先利用问题（1）、二中已知的评价分数利用双条件约束下的 0-1 规划模型确立选择的的城市，由于时间与金钱不为同一量级产品，因此先对时间和金钱进行无量纲化后求得其 TSP 最优路线。

对于城市内景点同样采取多目标规划，但由于本题限制因素有时间与金钱，因此在地铁发展完善的城市我们首选地铁，在地铁尚未发展的城市我们选择出租车与公交汽车相结合的方式作为我们的出行选择，尽可能以较低的价格达到较高的出行速率。确定旅游景点之后我们同样利用 TSP 模型求解出城市内旅行先后次序。

对于问题（4），我们在第三问的基础上对目标函数进行优化，加入红色的景点及城市的评判标准，为了给爷爷更好的旅行体验感，增加了住宿费用及休息时间。首先利用 0-1 规划模型确立城市。由于时间和金钱的重要程度相同，先利用无量纲化保证时间与金钱处于同一量级，再采用相同的权重对其进行赋值。

对于城市内景点的选择我们同样采取多目标规划，在目标函数更改的情况下，对城市景点进行选择，且要考虑红色景点在内。再利用 TSP 模型对城市内旅行的先后次序进行计算，得到最优路线规划。

对于问题（5），我们需要重做（2）~（4）问，因此我们对每道题进行单独分析。

针对问题（2），由于约束条件为金钱，由于此时 vlog 会给小李同学带来收益，因此我们利用大数据拟合出粉丝数与流量的关系，再根据每个城市的热度得出每个城市每天 vlog 带来的收益。因为考虑到若在一个城市待的时间太久，vlog 内容可能会相对冗赘，因此我们假定小李同学在每个城市游玩时间大约为 2~3 天，得到新的约束条件，重复问题（2）的步骤得到最优城市路线及景点路线。

针对问题（3），由于小李同学每天需要剪辑 vlog，假设为 1 小时，因此小李同学每日游玩时间减少了，结合 vlog 收益得到新的约束条件，重复问题（3）的步骤得到最优城市路线以及景点路线。

针对问题（4），由于小李同学和爷爷一起旅游，因此爷爷可以在 vlog 中出镜，根

据我们对 b 站视频的分析得出若与家人同出镜会拥有更高的热度，因此收益相较于之前会增加，重复问题（4）的步骤得到最优城市路线以及景点路线。

五 模型的建立与求解

5.1 问题（1）：在时间限制下的旅行计划

5.1.1 利用 TOPSIS 构建评价体系

首先根据享道出行《2021 长三角地区“五一”假期出行报告》^[1]筛选出 15 个热门城市作为此次游玩的候选城市，并在 15 个城市中根据携程评论数大于 300 条的条件筛选出所有候选景点。为了使评价目标与理想化目标的接近程度更大，因此我们采用 TOPSIS 对现有的候选城市与景点的优劣进行评价。

针对城市和景点来说，TOPSIS 的两个指标是评分数以及评论数（见附件 1），是极大型指标，越大越好，因此我们给出极大化指标正向化公式：

$$x_i' = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

并形成正向化、标准化的决策矩阵：

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

由于前面两个指标的量纲不同，我们对其进行标准化处理，并给评分数赋以 0.3 的权重，城市评论数赋予 0.7 的权重，由此通过计算出标准化的矩阵得出

$$\text{最大值向量 } z^+ = \{\max(z_{11}, z_{21} \dots), \max(z_{12}, z_{22} \dots)\};$$

$$\text{最小值向量 } z^- = \{\max(z_{11}, z_{21} \dots), \max(z_{12}, z_{22} \dots)\};$$

之后对数据进行归一化处理

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (z_j^+ - z_{ij})^2}$$

$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (z_j^- - z_{ij})^2}$$

由优劣解距离算法公式 $Q_i = D_i^- / D_i^+ + D_i^-$ 求出所有城市的评分，并进行归一化处理得到最终系数 $c1_i$ （保留三位小数），见表 1。

针对每个城市，若评价分数高于平均数，则安排三天的游玩时间，反之则为两天。因此我们得出各个城市游玩天数，见表 2。

表 1 15 个城市评价系数

杭州	苏州	上海	合肥	宁波
0.09	0.088	0.506	0	0.015
南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
0.115	0.083	0.031	0.046	0.016
湖州	金华	台州	温州	镇江
0.022	0.024	0.005	0.008	0.010

表 2 15 地预期游玩天数（单位：天）

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
游玩天数	3	3	3	2	2
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
游玩天数	3	3	2	2	2
	湖州	金华	温州	台州	镇江
游玩天数	2	2	2	2	2

5.1.2 利用 0-1 规划对最优城市解的选取

0-1 规划模型可以用于解决旅行线路问题，对于各个城市，只有去和不去两种情况，因此可以建立 0-1 规划模型，设 q_i 为第 i 个候选城市，则有：

$$q_i = \begin{cases} 0, & \text{不参观第 } i \text{ 个城市} \\ 1, & \text{参观第 } i \text{ 个城市} \end{cases} \quad (1)$$

$(i = 1, 2 \dots 15)$

为使小李同学在满足两个星期的游玩时间限制的条件下拥有最难忘的毕业旅行，因此我们利用评价系数来判定这个旅行是否让人难忘，将目标函数转换为旅游景点满意度之和最大，如（2）。

$$\max \sum_{i=1}^{15} c_i q_i \quad (2)$$

其中（2）表示所有去参观的城市的满意度的总和， c_i 表示各个城市的评价分数，评价分数越高，则对这个城市的满意度越高。

因问题（1）中仅对游玩时间进行限制，且从杭州出发， x_1 一定为 1。因此约束条件：

$$\sum_{i=1}^{15} t_i q_i \leq 14 \quad (3)$$

$$x_1 = 1$$

其中 t_i 为第 i 个城市的游玩天数，见表 2。

综上，实现满意度最高的城市旅行规划模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{15} c_i q_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{15} t_i q_i \leq 14 \end{aligned} \quad (4)$$

根据模型（4），结合表 1，利用 lingo 编程（程序见附录 1），可以得到最优解，见表 3。

表 3 最优城市解 1

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	1	1	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	0	0	1	0
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

因此我们选择杭州、苏州、上海、扬州、南京这五个城市为小李同学此次游玩的城市。

5.1.3 利用 TSP 模型对最短时间的调度

由于小李同学时间较为紧张，因此我们期望尽可能地缩短乘坐高铁的时间，这个优化问题的目标是五地搭乘高铁的时间之和最小，要做的决策是如何设定一条时间最短的旅行路线。首先定义 0-1 整数型变量 q_{ij} ，设 q_{ij} 为从第 i 个城市到第 j 个城市，则有：

$$q_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{不从第 } i \text{ 个城市到第 } j \text{ 个城市} \\ 1, & \text{从第 } i \text{ 个城市到第 } j \text{ 个城市} \end{cases} \quad (5)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, 5)$$

由于所经过的城市已知，因此我们可以根据 TSP 模型得出城市游玩次序，模型如下：

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 t_{ij} q_{ij}$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^5 q_{ij} = 1 & (j = 1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^5 q_{ij} = 1 & (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 & (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \quad (6)$$

其中 t_{ij} 为第 i 个城市到第 j 个城市搭乘高铁所需花费的时间，见表 4。 u_i ($i = 1, \dots, 5$) 为实数，由于 TSP 可能形成子圈，为了防止子圈的形成，因此我们加入辅助变量 u_i ($i = 1, \dots, 5$)，确保无子圈的形成。

表 4 五地搭乘高铁时间（单位：分钟）

	上海	扬州	苏州	杭州	南京
上海	0	103	37	46	80
扬州	105	0	72	174	49
苏州	34	67	0	97	90
杭州	54	169	81	0	91
南京	90	46	87	94	0

根据模型（6），结合表 4，利用 lingo 编程（程序见附录 2），得到最优城市旅行次序解，小李同学城市旅行路线为一个互不交叉的连接图（见图 1），满足 TSP 模型求解，因此解是有效解。小李同学城市游玩次序为：杭州—>南京—>扬州—>苏州—>上海—>杭州。



图 1 五地游玩次序图 1

5.1.4 利用多目标规划确定游玩景点

对于五个城市来说,每个城市都拥有十个及以上的候选城市,因此利用 5.1.1 TOPSIS 评价体系来评估这五个城市所有景点的评价系数（保留三位小数），评价系数代表第 i 地美食与风景的综合评价，见表 5。

表 5 五地景点评价系数

杭州		苏州		上海		扬州		南京	
西湖	0.269	寒山寺	0.082	东方明珠	0.193	瘦西湖	0.652	夫子庙-秦淮	0.096
宋城	0.174	拙政园	0.489	黄浦江游船	0.110	个园	0.138	中山陵	0.162
灵隐寺	0.109	太湖	0.004	豫园	0.036	何园	0.086	栖霞山	0.019
千岛湖	0.067	苏州博物馆	0.014	田子坊	0.004	大明寺	0.050	总统府	0.451
西溪	0.198	平江路	0.011	上海野生动物园	0.133	文昌阁	0.001	玄武湖	0.035
河坊街	0.016	留园	0.075	南京路步行街	0.031	茱萸湾风景区	0.022	南京博物馆	0.010
六和	0.010	山塘	0.029	上海	0.043	扬州	0.009	牛首	0.059

塔		街		科技馆		双博馆		山文化旅游区	
九溪烟树	0.003	同里古镇	0.103	威尼斯小镇	0.004	扬州古运河	0.026	瞻园	0.026
垂云通天河	0.034	天平山	0.035	人民广场	0.003	汉广陵王墓	0.011	雨花台	0
湘湖	0.003	观前街	0	新天地	0.003			南京大屠杀纪念馆	0.011
杭州野生动物园	0.072	金鸡路	0.008	城隍庙	0.009			鸡鸣寺	0.002
太子湾公园	0.003	周庄	0.130	上海海洋水族馆	0.037			明孝陵	0.086
浙西大峡谷	0.006	木渎古镇	0.014	上海环球金融中心	0.035				
大明山	0.029			世纪公园	0.015				
				金茂大厦	0.010				
				上海迪士尼度假村	0.327				

同时建立多目标规划模型，保证其满意度最大、尽可能去更多的景点。假设 $c2_i$ 为第 i 个景点的评价系数，由于 $c2_i$ 在数据处理时已经被归一化，因此我们也要让 x_i 保证归一化。因此目标函数为：

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c2_i x_i \\ \max \sum_{i=1}^n x_i / n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

由于许多景点在夜间并不开放，因此我们假设小李同学一天的游玩时间为 9:00~19:00，具体每个景点所需游玩时间（见附件 2）。若该城市评价系数大于平均数，则该城

市游玩时间为 3 天，反之为 2 天。且小李同学每游玩一个景点需要 2 小时的休息时间。并且由于每个城市的出发点与终点都为火车站，因此我们以 TSP 模型为基础对本题的具体问题进行优化，同时结合表 2 得到每个城市游玩天数。因此我们得到约束条件为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (t_i + 2)x_i + \sum_{i=1}^n t_{ij}x_{ij} \leq 10 \times t1_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \quad (8)$$

由于希望给小李一个令人难忘的回忆，因此我们认为小李对景点的满意度的重要程度与景点个数丰富度一致，所以对满意度的目标规划赋权值为 0.5，对景点个数的目标规划赋权值为 0.5。最后得到单目标规划模型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.5 * \sum_{i=1}^n c2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n (t_i + 2)x_i + \sum_{i=1}^n t_{ij}x_{ij} \leq 10 \times t1_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

根据模型 (9)，结合表 1，考虑到为了节约出行时间，在不考虑经济的前提下，每次出行都选择打车，根据每个城市不同景点之间的驾车距离（见附件 3）。由于考虑到交通堵塞以及红绿灯等待时间的问题，假设车速为 50km/h，利用 lingo 进行求解（程序见附录 3），得到每个城市最优景点选择以及旅行次序解，见表 6。同时得出每个城市游玩天数及景点个数，见表 7。Lingo 求得结果（见附件 5）。

表 6 城市最优景点选择及旅行次序 1

杭州	杭州东站—>河坊街—>灵隐寺—>宋城—>九溪烟树—>六和塔—>西湖—>杭州东站
苏州	苏州站—>留园—>寒山寺—>木渎古镇—>山塘街—>平江路—>苏州博物馆—>苏州站
上海	上海虹桥火车站—>上海科技馆—>黄浦江游船—>南京路步行街—>东方明珠—>上海野生动物园—>田子坊—>上海虹桥火车站
南京	南京站—>玄武湖—>中山陵—>明孝陵—>总统府—>侵华日军纪念馆—>夫子庙-秦淮河风景带—>南京站
扬州	扬州站—>瘦西湖—>何园—>个园—>大明寺—>扬州站

表 7 游玩天数及景点个数

	游玩天数	游玩景点个数	日均游玩景点个数
杭州	3	6	2
苏州	3	6	2
上海	3	6	2
南京	3	6	2
扬州	2	4	2

5.2 问题（2）：在金钱的限制下的旅行计划

5.2.1 重新构建 0-1 规划模型对最优城市解进行选取

在第（1）问的基础上对模型的约束条件进行更改。为使小李同学在 5000 元旅行资金的情况下拥有最难忘的毕业旅行，我们利用表 1 各个城市的评价系数对最优旅行城市计划进行求解。

由于第（2）问的约束条件由时间变为金钱，我们根据“凤凰网”《2021 年，最新 TOP40 数据排行榜》^[2]内数据对 $m_i (i = 1, 2, \dots, 15)$ 进行确定，见表 8。

表 8 15 地旅游预算

杭州	苏州	上海	合肥	宁波
1100	1100	1200	900	1000
南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
1100	1000	700	800	700
湖州	金华	台州	温州	镇江
700	700	700	900	700

综合问题（1）中 5.1.2 的 0-1 规划模型，本题实现满意度最高的城市旅行规划模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{15} c_1 q_i \\ \sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq & 5000 \end{aligned} \quad (10)$$

根据模型（10），结合表 1 及表 8 数据，利用 lingo 运行（程序详见附录 4），可以得到最优解，见表 9。

表 9 最优城市解 2

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	1	0	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	0	1	1	0
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

5.2.2 利用 TSP 模型对最少花费的调度

由于小李同学仅有 5000 元的旅行基金，因此我们期望尽可能地减少乘坐高铁所花费的价格，这个优化问题的目标是金额之和最小，要做的决策是如何设定一条金钱花费最少的旅行路线。定义 0-1 整数型变量 q_{ij} ， $m_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 5)$ 为第 i 个城市到第 j 个城市乘坐高铁所需的花费。根据 TSP 建立城市游玩次序模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 m_{ij} q_{ij} \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 \quad (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 m_{ij} 为第 i 个城市到第 j 个城市搭乘高铁所需花费的金钱，见表 9。为了防止 TSP 模型形成子圈，因此我们加入辅助变量 u_i ($i = 1, \dots, 5$)。 u_i ($i = 1, \dots, 5$) 为实数。

表 10 五地搭乘高铁金钱（单位：元）

	上海	南京	杭州	扬州	嘉兴
上海	0	122	73	133	38.5
南京	135	0	117.5	37.5	173.5
杭州	73	117.5	0	206	34.5
扬州	133	37.5	203	0	171.5
嘉兴	37.5	173.5	34.5	174.5	0

根据模型 (11)，结合表 10，利用 lingo 编程（程序见附件 5），可以得到在金钱约束条件下城市旅行次序最优解，小李同学的城市游玩次序为：杭州—>嘉兴—>上海—>扬州—>南京—>杭州。见图 2。

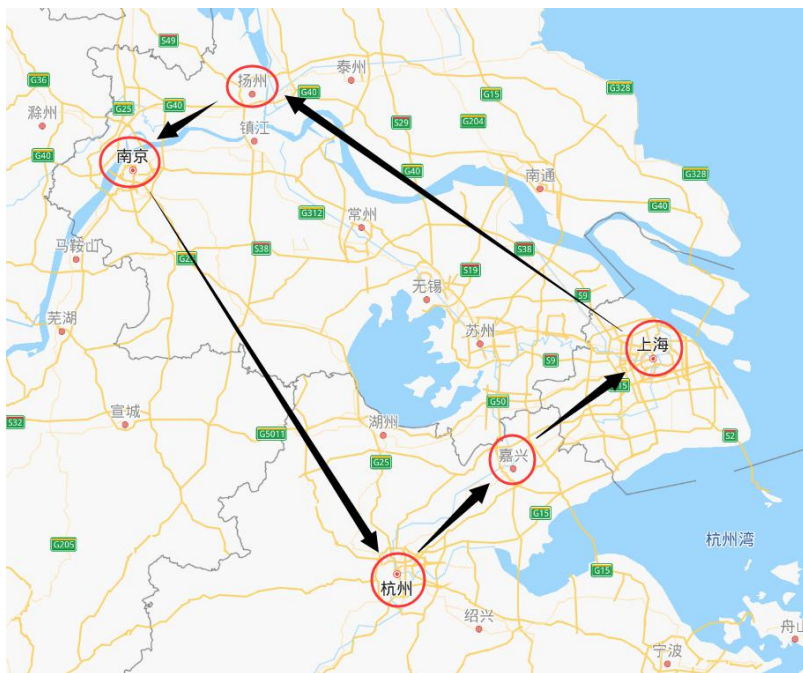


图 2 五地游玩次序图 2

5.2.3 利用多目标规划确定游玩景点

对于最优城市解的五个城市来说，每个城市至少拥有八个及以上的候选景点，由于约束条件为价格，目标函数为尽可能地增加旅行满意度以及游览尽可能多的景点，因此我们需要对旅行中存在的费用进行分析，尽可能地减少旅行中不必要的开销：

(1) 交通：由于扬州、嘉兴两个城市地铁尚未布局完善，因此我们在这两个城市选择的交通工具为公共汽车，价格为 2 元/次。对于杭州、上海、苏州这三个城市，由于地铁布局完善，根据地铁计算标准：起始价格为 2 元，4~12 公里内每增加 4 公里，价格增加 1 元；12~24 公里内每增加 6 公里，价格增加 1 元；大于 24 公里，每增加 8 公里，价格增加 1 元。根据以上计算价格准则，我们得出杭州、上海、苏州这三个城市每两个景点间所需花费的交通价格，见附件 4。对于两个城市之间的交通我们首选高铁，价格详见表 9。假设第 i 个景点到第 j 个景点所需的价格为 s_{ij} 。

$$s_{ij} = \begin{cases} 2, 0 \leq d \leq 4 \\ 2 + d/4, 4 < d \leq 12 \\ 4 + d/6, 12 < d \leq 24 \\ 6 + d/8, d > 24 \end{cases}$$

(2) 住宿：由表 7 可得小李同学日均约可游玩 2 个景点，因此我们假设小李同学每游玩 2 个景点就需要一日的的时间，由于小李同学想体验青旅的住宿体验，因此每日仅需要住宿费 50 元。在建模时每个城市需减去始发站与终到站的值 1。

(3) 三餐：由于每个城市中都存在以美食为主导的景点，因此在这些景点内，将一日三餐的花费金额提高至 120/日，在其余不以美食为主导的景点一日三餐的花费金额为 60 元/日。

(4) 门票：假设第 i 个景点所需的门票价格为 a_i ，价格详见附件 1。

我们根据旅行中目标函数进行构造：

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c 2_i x_i \\ \max \sum_{i=1}^n x_i / n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

由于更高的旅行评价分数能提高小李同学游览的满意度，更多的游览城市能提升小李同学的游览范围，因此我们认为这两个目标函数重要性一致，因此根据归一化，两目标函数的权重分别为 0.5, 0.5，便可将多目标函数转化为单目标函数。

假设 f_i 为 0-1 变量，若该地有美食，则为 1，否则为 0。

因此根据金额的限制以及始发点与终到站都为火车站的约束条件建立一下模型

$$\begin{aligned} & \max 0.5 * \sum_{i=1}^n c 2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \\ s.t. & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i / 2 - 1 \right) + 50 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i / 2 - 1 \right) \leq m_i - m_{ij} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

根据模型 (13)，结合表 1，考虑到旅行经费限制的情况下，利用 lingo 求解（见附录 6）得出最优景点选择及次序解，见表 11。Lingo 求得结果（见附件 5）。

表 11 城市最优景点选择及旅行次序

上海	上海虹桥站—>上海科技馆—>东方明珠—>上海野生动物园—>迪士尼度假村—>上海虹桥站
南京	南京站—>夫子庙-秦淮河观光带—>南京博物馆—>明孝陵—>中山陵—>栖霞山—>玄武湖—>总统府—>瞻园—>南京站
扬州	扬州站—>大明寺—>瘦西湖—>扬州古运河—>何园—>个园—>扬州站
杭州	杭州东站—>宋城—>杭州野生动物园—>千岛湖—>灵隐寺—>西湖—>西溪—>杭州东站
嘉兴	嘉兴站—>乌镇—>西塘风景区—>西栅—>茅盾故居—>嘉兴站

可以看出在南京游览的景点最多，在上海与嘉兴游览的景点最少，主要原因是乌镇与迪士尼度假村占据了很大一部分旅行的时间。

5.3 问题（3）：在金钱与时间双条件限制下的旅行计划

5.3.1 双约束条件下构建 0-1 规划模型选择最优城市解

本题结合了前两题的约束条件，即在金钱与时间的双条件约束情况下对选择最优城

市解。结合表 1，表 7，表 2 以及双约束条件：总钱数小于 5000，总天数小于 14。建立以下 0-1 规划模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{15} c1_i q_i \\ \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^{15} t1_i q_i \leq 14 \\ & \sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq 5000 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (14)$$

根据模型（14），利用 lingo 求解（见附录 7）得出最优城市解，见表 12。

表 12 城市最优解 3

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	1	0	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	0	1	1	0
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

因此我们选择杭州、上海、南京、嘉兴、扬州这五个城市作为小李同学旅行的城市。

同时根据表 2 与表 12 进行研究可知杭州游玩天数为 3 天，上海为 3 天，南京为 3 天，嘉兴为 2 天，扬州为 2 天，设第 i 个景点游玩天数为 $t1_i$

5.3.2 利用 TSP 模型在双条件下求最优解

由于本题的约束条件有时间和金钱，已知时间与金钱无法进行比较，因此我们利用公式 $z_{ij} = \frac{z_{ij} - b_i}{a_i - b_i}$ 对金钱与时间进行无量纲化。 a_i b_i ($i = 1, 2$) 分别为 $z1_{ij}q_{ij}$ 、 $z2_{ij}q_{ij}$ 最大值与最小值。

则原目标需做如下无量纲化处理：

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 z1_{ij} q_{ij} + z2_{ij} q_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{z1_{ij} q_{ij} - b_1}{a_1 - b_1} + \frac{z2_{ij} q_{ij} - b_2}{a_2 - b_2} \end{aligned}$$

我们依据无量纲化后的数据在双约束条件的情况下对最优城市旅行次序搭建 TSP 模型求解，具体模型为：

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{z1_{ij}q_{ij} - b_1}{a_1 - b_1} + \frac{z2_{ij}q_{ij} - b_2}{a_2 - b_2}$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^5 q_{ij} = 1 & (j=1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^5 q_{ij} = 1 & (i=1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 & (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \quad (15)$$

根据模型（15），结合表 12，利用 lingo（见附录 8）进行求解，解得具体路线见图 3。

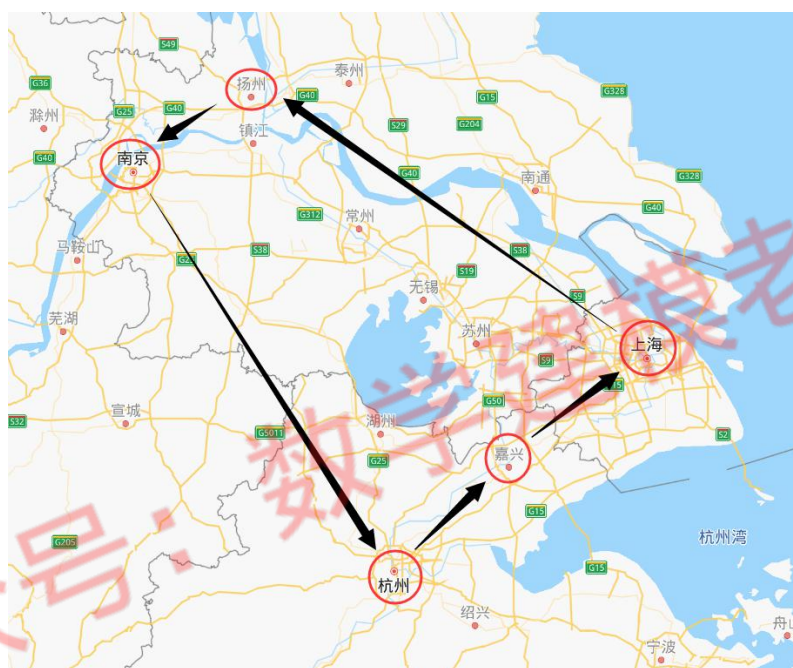


图 3 五地游玩次序图 3

则在双条件约束的情况下最优的城市旅行路线依然为杭州—>嘉兴—>上海—>扬州—>南京。

5.3.3 在双约束条件下建立多目标确定景点及游玩次序

由于本题存在双条件的情况，因此我们需要增加约束条件，目标函数仍为满意度最大以及尽可能满足多的景点。若 $q_i = 1$ ，则 $t1_i$ 为在该城市旅行所需花费的时间，见表 2。结合问题（1）与问题（2）的模型构造，我们得出本题具体的构造模型：

对于地铁规划良好的三个城市：杭州、上海、南京，建立以下模型。

$$\begin{aligned}
& \max 0.5 * \sum_{i=1}^n c 2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \\
& s.t \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2) x_i + \sum_{i=1}^n t_{ij} x_{ij} \leq 10 \times t 1_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{array} \right. \quad (15)
\end{aligned}$$

对于没有地铁的两个城市嘉兴与苏州，我们对交通工具进行选则，选项方案有 2 种：

(1) 出租车——Y(1) 50km/h (2) 公交车——Y(2) 30km/h

对于方案 (1)，当距离小于 3km 时价格为 10 元，大于 3km 时价格为 4+3*x 元。
对于方案 (2) 选择的交通工具为公共汽车，价格为 2 元/次。假设第 i 个景点到第 j 个景点所需的价格为 s_{ij} 。

$$S_{ij}(x) = \begin{cases} 10, & 0 < x \leq 3 \\ 4 + 3x, & x > 3 \end{cases}$$

因此我们建立下面模型：

$$\begin{aligned}
& \max 0.5 * \sum_{i=1}^n c 2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \\
& s.t \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij}(d_{ij}) x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2) x_i + \sum_{i=1}^n (d_{ij}/50) x_{ij} Y(1) + \sum_{i=1}^n (d_{ij}/30) x_{ij} Y(0) \leq 10 \times t 1_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Y(1) + Y(0) = 1 \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{array} \right. \quad (16)
\end{aligned}$$

根据模型 (15)，结合表 1，利用 lingo 进行求解（见附录 9）得出最优景点选择以及最优旅行次序，见表 13。Lingo 求得结果（见附件 5）。

表 13 城市最优景点选择及旅行次序 2

上海	上海虹桥站—>田子坊—>上海野生动物园—>东方明珠—>南京路步行街—>黄浦江游船—>上海科技馆—>上海虹桥站
南京	南京站—>玄武湖—>明孝陵—>中山陵—>总统府—>侵华日军南京大屠杀纪念馆—>夫子庙-秦淮河观光带—>南京站
扬州	扬州站—>大明寺—>瘦西湖—>个园—>何园—>扬州站
杭州	杭州东站—>西湖—>九溪烟树—>灵隐寺—>宋城—>六和塔—>河坊街—>杭州东站
嘉兴	嘉兴站—>西栅镇—>乌镇—>南北湖—>嘉兴站

5.4 问题（4）：双人旅行在时间金钱限制下的旅行计划

对于问题（4），由于小李同学在游玩时是与爷爷同游，因此我们考虑到爷爷的身体情况，对模型的假设提出更改：

（1）由于问题（2）、（3）存在金额的限制，因此小李同学选择的住宿为 50 元/晚的青年旅舍。但因爷爷年纪较大，不适宜居住在青年旅舍，为了提升爷爷旅行舒适度，增加住宿预算，提高至 150 元/天。

（2）由于爷爷年龄较大，因此每次游玩后的休息时间应适当增加，由原先的 2h/次增至 2.5h/次。

（3）由于爷爷是一个退伍军人，对于以往的峥嵘岁月十分怀念，因此我们在目标函数上增加对红色景点的选择。

根据以上假设的更改在问题（3）的基础上对本题的模型进行优化。

5.4.1 双条件约束下 0-1 规划模型

由于本题要考虑城市内是否存在红色景点，因此我们假设 0-1 变量 s_i 为第 i 个城市是否有红色景点，若该城市有红色景点，则 s_i 为 1，反之 s_i 为 0， s_i 取值具体取值见表 14。

表 14 红色景点城市

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
s_i	0	0	0	1	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
s_i	1	1	1	0	1
	湖州	金华	温州	台州	镇江
s_i	0	0	0	0	0

根据假设我们得出新的 0-1 规划模型，目标函数为城市满意度之和最高，得出以下模型：

$$\max \sum_{i=1}^{15} c1_i q_i + \left(\sum_{i=1}^{15} s_i q_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{15} s_i \right)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{15} t1_i q_i \leq 14 \\ \sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq 5000 \end{cases} \quad (17)$$

根据模型（17），利用 lingo 进行求解（见附录 10）得出最优城市解，见表 15

表 15 最优城市解 4

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	0	0	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	1	1	0	1
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

因此我们选择上海、南京、无锡、嘉兴、绍兴为旅行城市。由于爷爷希望游览红色景点，可以看出无锡、嘉兴、绍兴、南京都有一定的红色旅行景点，因此我们认为该解为有效解。

5.4.2 利用 TSP 在双约束条件下的求解

由于本题增加了红色景点，导致在城市选择时杭州没有考虑在内，但小李同学与爷爷的出发站与终到站皆为杭州，因此我们在利用 TSP 模型求解最优路线时增加杭州进行求解，由于金钱与时间不为同一量级，因此加入无量纲化的考虑，具体模型见（18）：

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{z1_{ij} q_{ij} - b_1}{a_1 - b_1} + \frac{z2_{ij} q_{ij} - b_2}{a_2 - b_2}$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^6 q_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^6 q_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 \quad (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \quad (18)$$

a_i b_i ($i=1,2$) 分别为 $z1_{ij}q_{ij}$ 、 $z2_{ij}q_{ij}$ 最大值与最小值。根据模型（18），结合表 15，利用 lingo 求解（见附录 11），得出最优城市旅行次序图，见表 3。

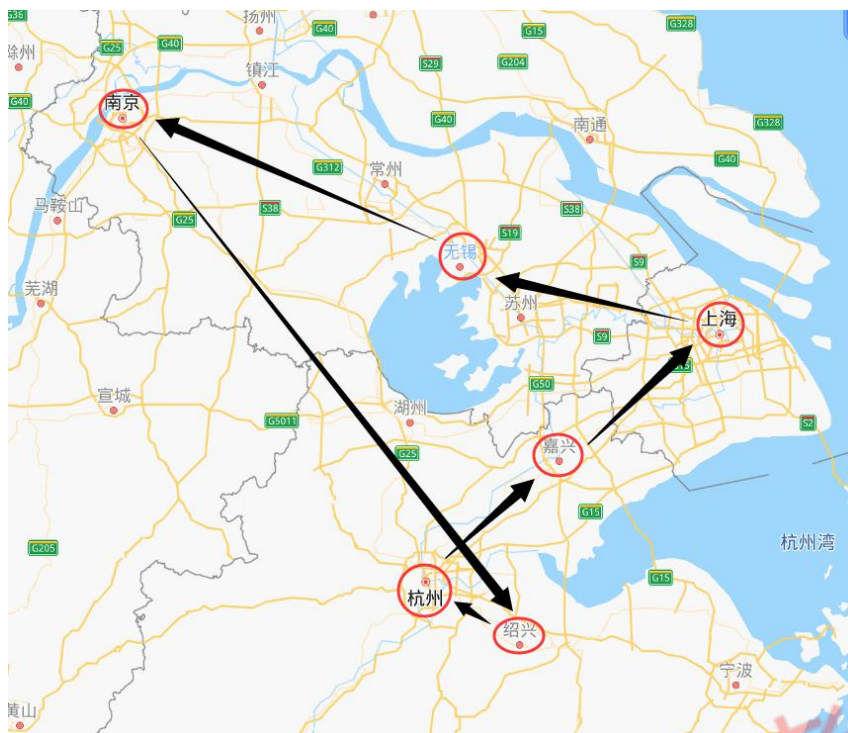


图 3 六地旅行次序图 3

由于绍兴到嘉兴没有直达的高铁线路，大部分都需经过杭州，因此我们认为该路线图时有效路线图，旅行次序为杭州—>嘉兴—>上海—>无锡—>南京—>绍兴—>杭州。

5.4.3 在双约束的条件下建立多目标动态规划模型

由于本题的重点在于红色旅游景点，因此在进行最优目标函数规划时需增加红色旅游景点的考量，假设 0-1 变量 r_i ，若有红色景点则为 1，反之为 0。因此我们得到目标函数为：

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n c_{2i} x_i \\ \max \sum_{i=1}^n x_i / n \\ \max \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

在旅行的五个城市中，杭州、上海、无锡这三个城市地铁规划较为完善，出行搭乘地铁较为方便，因此我们假设小李同学和爷爷在这三个城市的出行都搭乘地铁，根据铁路交通部门的定价以及动态规划模型得出以下构造模型：

$$S_{ij} = \begin{cases} 2, 0 \leq d \leq 4 \\ 2 + d|4, 4 < d \leq 12 \\ 4 + d|6, 12 < d \leq 24 \\ 6 + d|8, d < 24 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_2 x_i + \sum_{i=1}^n x_i/n + \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n r_i \right) \\ s.t \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2.5) x_i + \sum_{i=1}^n t_{ij} x_{ij} \leq 10 \times t_{1_i} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

在绍兴、嘉兴两个城市我们选择双出行方式，分别为公交车和出租车，根据交通部门的定价准则以及动态规划模型我们得出以下模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_2 x_i + \sum_{i=1}^n x_i/n + \left(\sum_{i=1}^{15} s_i q_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{15} s_i \right) \\ s.t \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} (d_{ij}) x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2) x_i + \sum_{i=1}^n (d_{ij}/50) x_{ij} Y(1) + \sum_{i=1}^n (d_{ij}/30) x_{ij} Y(0) \leq 10 \times t_{1_i} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Y(1) + Y(0) = 1 \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

根据 (20) (21) 模型我们求解出最优旅行景点及次序，利用 lingo 求解程序（见附录 12），结果见表 16。Lingo 求得结果（见附件 5）。

表 16 城市最优景点选择及旅行次序 3

上海	上海虹桥站—>上海野生动物园—>上海环球金融中心—>东方明珠—>黄浦江游船—>南京路步行街—>上海虹桥站
南京	南京站—>总体府—>侵华日军南京大屠杀纪念馆—>明孝陵—>夫子庙-秦淮河观光带—>中山陵—>南京站
绍兴	绍兴站—>鲁迅故里景区—>周恩来纪念馆—>绍兴柯岩风景区—>绍兴站
无锡	无锡站—>鼋头渚—>蠡园—>三国城—>灵山大佛—>梅园—>无锡站
嘉兴	嘉兴站—>茅盾故居—>乌镇—>嘉兴站

由于小李和爷爷同游需要考虑到爷爷的身体因素，因此旅行时间安排较为弹性，可以让爷爷得到更好的休息，尽管在景点数量上有一定程度的减少，但是满足了爷爷忆往昔的愿望，共有 6 个红色景点，能够让爷爷有一个轻松且美好的旅行。

5.5 问题（5）：增加 b 站激励计划下旅行计划

5.5.1 粉丝数、城市热度与视频播放量之间的关系

由于本题增加了“激励计划”，因此旅行经费不仅仅局限于 5000 元旅行基金，还包括额外的视频收入，为了得到粉丝数与视频播放量之间的关系，我们利用爬虫对 b 站以“旅游 vlog”为关键词的视频的数据进行获取，详见附件 6。利用多项式函数对粉丝数与视频播放量之间的关系进行拟合，采用三次多项式进行拟合得到的关系见图 4。

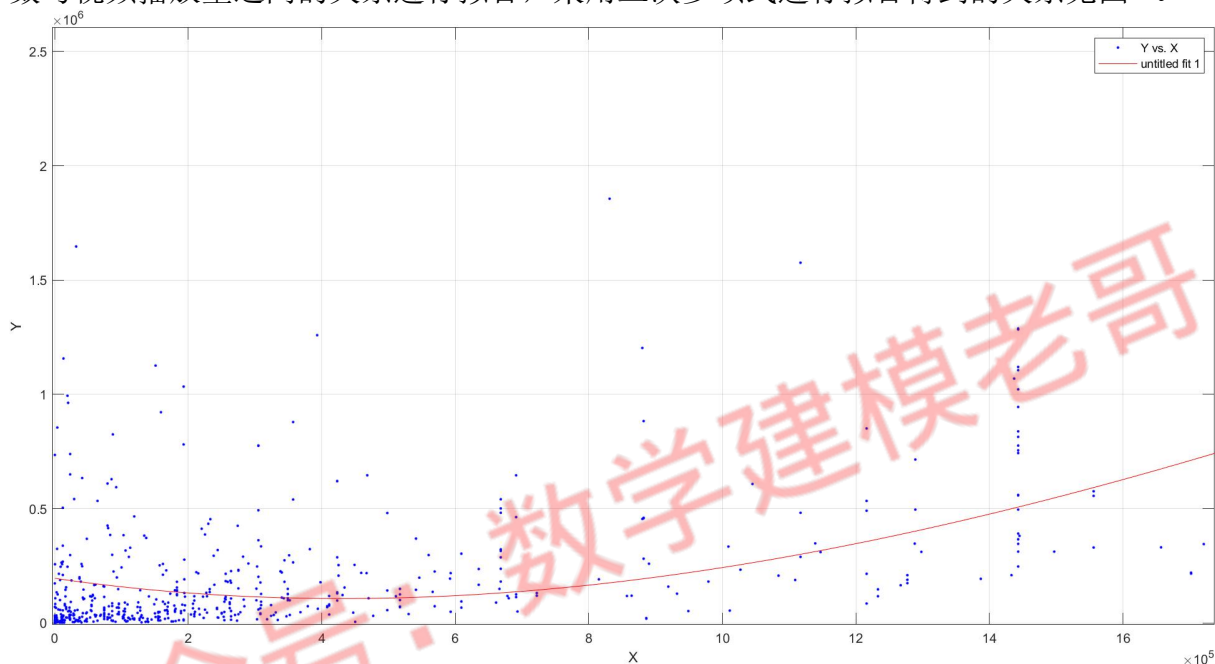


图 4 粉丝数与播放量的三次多项式拟合

根据图中数据得到当粉丝数为 $52.5w$ 时，总体播放量约为 110706，根据 b 站“激励计划”的规则，大约 1000 播放量可以得到 3 元，假设小李同学可以一次性获得该视频大部分的收益，因此我们估计小李同学一个 vlog 可获取的收益约为 332 元。

但由于不同的城市视频播放量的热度不同，因此我们利用附件 1 中各城市各景点评论人数对城市的热门度进行一个估计。假设该城市热度为 h_i ，该城市所有景点评论数为 w_i 我们对评论数进行无量纲化，公式为 $h'_i = 0.2 + \frac{w_i - w_{\min}}{w_{\max} - w_{\min}}$ ，得到城市热度，由于考虑到一个城市若拍摄天数过多，则会导致视频内容太过冗赘，因此我们规定一个城市游玩天数约为 2 天，得到每个城市拍摄 vlog 大致的收入为 $h_i = h'_i \times 332 \times 2$ ，得到每个城市大致的收入，见表 17。

表 17 15 城视频播放收入量

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
视频收益	722	723	920	672	680
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
视频收益	743	737	709	712	688
	湖州	金华	温州	台州	镇江
视频收益	693	698	674	672	681

5.5.2 对于第（2）问的重做

首先我们建立 0-1 规划模型，考虑到拍摄 vlog 产生的收入，得到单目标模型为：

$$\max \sum_{i=1}^{15} c1_i q_i \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq 5000 + \sum_{i=1}^{15} h_i q_i$$

根据模型（22），结合表 1、表 8 及表 17 的数据，利用 lingo 进行求解（见附录 13），得到表 18。

表 18 最优城市解 4

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	0	0	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	1	1	1	0
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	1	0	0	0

接着利用 TSP 模型得出花费尽可能少的路线图，模型详见（23）

$$\min \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 m_{ij} q_{ij}$$
$$s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (j=1,2,3,4,5) \\ \sum_{j=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (i=1,2,3,4,5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 \quad (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \tag{23}$$

在考虑 TSP 模型时需加入出发站与终点站杭州，利用表 18，表 10 对（23）利用 lingo（见附录 14）进行求解，得到最优城市旅行顺序为杭州—>嘉兴—>上海—>无锡—>扬州—>南京—>金华—>杭州，见图 5

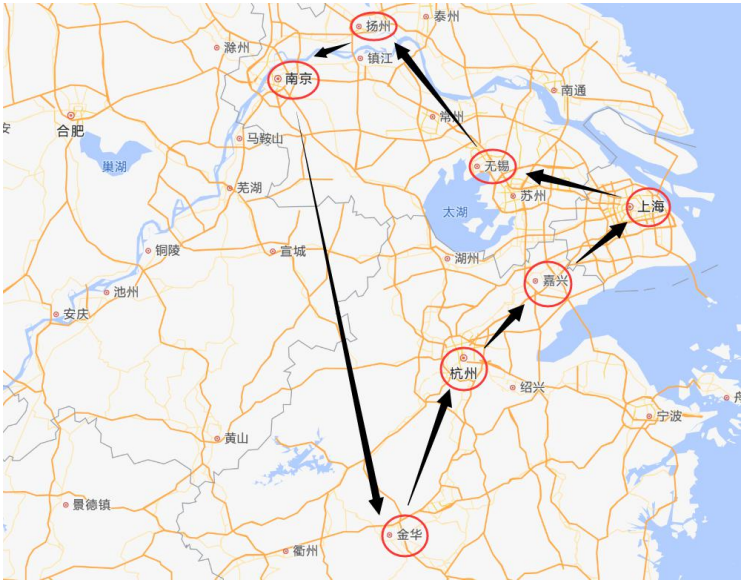


图 5 六地旅行次序图 4

对于最优城市解，我们同 5.2.3 一样建立多目标规划模型来确定游玩景点次序，考虑到有些城市地铁交通欠发达，因此我们将城市分类为地铁发达城市以及地铁不发达城市，对于地铁不发达城市，我们考虑出行交通为公交车或出租车，构建以下模型：

地铁交通发达城市：

$$S_{ij} = \begin{cases} 2, 0 \leq d \leq 4 \\ 2 + d|4, 4 < d \leq 12 \\ 4 + d|6, 12 < d \leq 24 \\ 6 + d|8, d < 24 \end{cases}$$

地铁交通稍欠发达城市：

$$S_{ij}(x) = \begin{cases} 10, 0 < x \leq 3 \\ 4 + 3x, x > 3 \end{cases}$$

对于不同的城市我们选择不同的 s_{ij} ，代入模型（25）

$$\begin{aligned} & \max 0.5 * \sum_{i=1}^n c 2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \\ & s.t \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i / 2 - 1 \right) + 50 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i / 2 - 1 \right) \leq m_i - m_{ij} + h_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

结合模型（25）、表 1，考虑到旅行经费限制的情况下，利用 lingo 求解（见附录 15）

表 19 城市最优景点选择及旅行次序 4

上海	上海虹桥站—>东方明珠—>上海科技馆—>世纪公园—>迪士尼度假村—>上海野生动物园—>黄浦江游船—>南京路步行街—>豫园—>人民广场—>上海虹桥站
南京	南京站—>明孝陵—>牛首山文化旅游区—>南京大屠杀纪念馆—>瞻园—>玄武湖—>雨花台—>总统府—>中山陵—>鸡鸣寺—>夫子庙-秦淮河观光带—>栖霞山—>南京博物馆—>南京站
扬州	扬州站—>瘦西湖—>大明寺—>何园—>茱萸湾风景区—>个园—>汉广陵王墓—>扬州古运河—>扬州站
无锡	无锡站—>梅园—>拈花湾—>宜兴竹海—>锡惠花园—>灵山胜境—>灵山大佛—>鼋头渚—>三国城—>蠡园—>无锡站
嘉兴	嘉兴站—>西塘风景区—>乌镇—>西栅—>茅盾故居—>嘉兴站
金华	金华站—>横店影视城—>江南第一家—>金华站

5.5.3 对于第（3）问的重做

对于第三问来说，综合考虑了时间和金钱双约束条件，因为小李同学每日都需产出 vlog，因此每日游玩时间相应地减少，为了使小李同学在十四天内尽可能地体验到满意度更高的旅行计划，因此我们需要对城市及景点的选择进行规划。

由于本题需要满足（1）初始金额为 5000 元；（2）旅行时间为 2 周的约束条件，因此我们建立 0-1 混合线性规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{15} c1_i q_i \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{15} t1_i q_i \leq 14 \\ \sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq 5000 + \sum_{i=1}^{15} h_i q_i \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

根据模型（26），结合表 1、表 2 及表 7 的数据利用 lingo 求解（见附录 16），最优城市解见表 20。

表 20 最优城市解 5

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	1	1	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	0	0	1	0
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

因此我们选择杭州、苏州、南京、扬州、上海这五个城市为小李同学旅行的城市。

由于本题存在双约束条件，且金钱与时间不在同一量级上，因此我们需要将时间与金钱进行无量纲化，利用公式 $z_{ij} = \frac{z_{ij} - b_i}{a_i - b_i}$ 进行无量纲化，具体模型见（27）

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{z1_{ij} q_{ij} - b_1}{a_1 - b_1} + \frac{z2_{ij} q_{ij} - b_2}{a_2 - b_2} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^5 q_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 \quad (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

依据模型（26），结合表 12 数据，利用 lingo（见附录 17）进行求解，具体路线图见图 6。

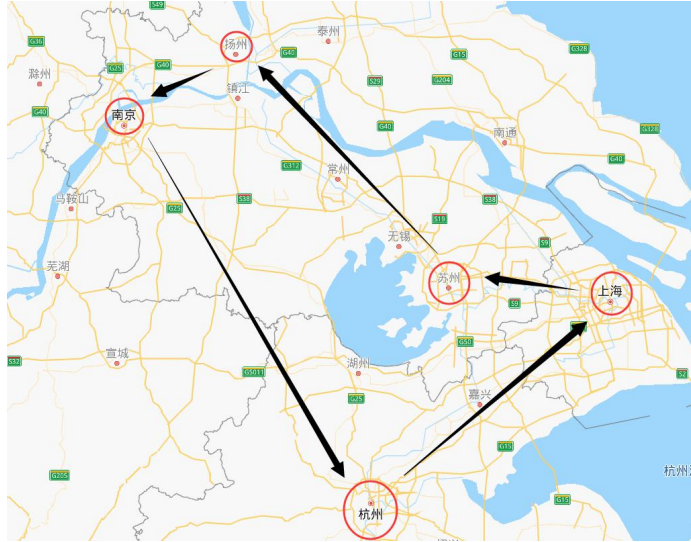


图 6 五地旅行次序图 5

因此我们得到最优城市旅行路线为杭州—>上海—>苏州—>扬州—>南京。

同样由于城市交通问题，我们将城市分为地铁交通较为完善的城市与地铁交通稍欠发达城市，根据（24）中对地铁价格的划分以及出租车价格的划分，得到模型（28）

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.5 * \sum_{i=1}^n c2_i x_i + 0.5 * \sum_{i=1}^n x_i / n \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} + \sum_{i=1}^{15} h_i q_i \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2) x_i + \sum_{i=1}^n (d_{ij} / 50) x_{ij} Y(1) + \sum_{i=1}^n (d_{ij} / 30) x_{ij} Y(0) \leq 10 \times t1_i \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Y(1) + Y(0) = 1 \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

根据模型（28），结合表 1，利用 lingo 进行求解（见附录 18）得出最优景点以及景点旅行顺序，见表 21。

表 21 城市最优景点选择及旅行次序 5

上海	上海虹桥站—>南京路步行街—>上海海洋水族馆—>黄浦江游船—>南东方明珠—>上海野生动物园—>上海虹桥站
南京	南京站—>玄武湖—>中山陵—>明孝陵—>总统府—>夫子庙-秦淮河观光带—>南京站
扬州	扬州站—>大明寺—>瘦西湖—>个园—>何园—>扬州站

杭州	杭州东站—>河坊街—>西湖—>灵隐寺—>宋城—>六和塔—>杭州东站
苏州	苏州站—>留园—>寒山寺—>山塘街—>观前街—>平江路—>苏州博物馆—>苏州站

5.5.4 对于问题（4）的重做

由于问题（4），由于和爷爷同游，除了同问题（4）要考虑爷爷的生活习惯以及舒适度外，还需考虑 b 站“激励计划”。爷爷可以在 vlog 中出镜，由于爷爷的出镜，视频的热度或小幅提升，因此播放量也会相应地增加，所以相对应城市播放量也应有相同程度的提升，约为原先的 1.2 倍。

根据问题（4）原先的假设我们可以得到 0-1 线性规划模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{15} c1_i q_i + \left(\sum_{i=1}^{15} s_i q_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{15} s_i \right) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^{15} t1_i q_i \leq 14 \\ \sum_{i=1}^{15} m_i q_i \leq 5000 + \sum_{i=1}^{15} h_i q_i \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

根据模型（29），利用 lingo 进行求解（见附录 19）得出最优城市解，见表 22。

表 22 最优城市解 6

	杭州	苏州	上海	合肥	宁波
结果	0	0	1	0	0
	南京	无锡	嘉兴	扬州	绍兴
结果	1	1	1	0	1
	湖州	金华	温州	台州	镇江
结果	0	0	0	0	0

因此我们选择上海、南京、无锡、嘉兴、绍兴为旅行城市，除上海外都有红色景点，满足了爷爷想回忆峥嵘岁月的愿望。

由于本题没有将杭州选为旅游城市，因此利用 TSP 模型时需加入杭州作为起始点与终点，同样对数据进行无量纲化，具体模型见（30）。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{z1_{ij} q_{ij} - b_1}{a_1 - b_1} + \frac{z2_{ij} q_{ij} - b_2}{a_2 - b_2} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^6 q_{ij} = 1 \quad (j=1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^6 q_{ij} = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \\ u_i - u_j + 5q_{ij} \leq 4 \quad (1 \leq i \neq j \leq 5) \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

a_i b_i ($i=1,2$) 分别为 $z1_{ij} q_{ij}$ 、 $z2_{ij} q_{ij}$ 最大值与最小值。根据模型（30），结合表 15，利用 lingo 求解（见附录 20），得出最优城市旅行次序图，见表 7。

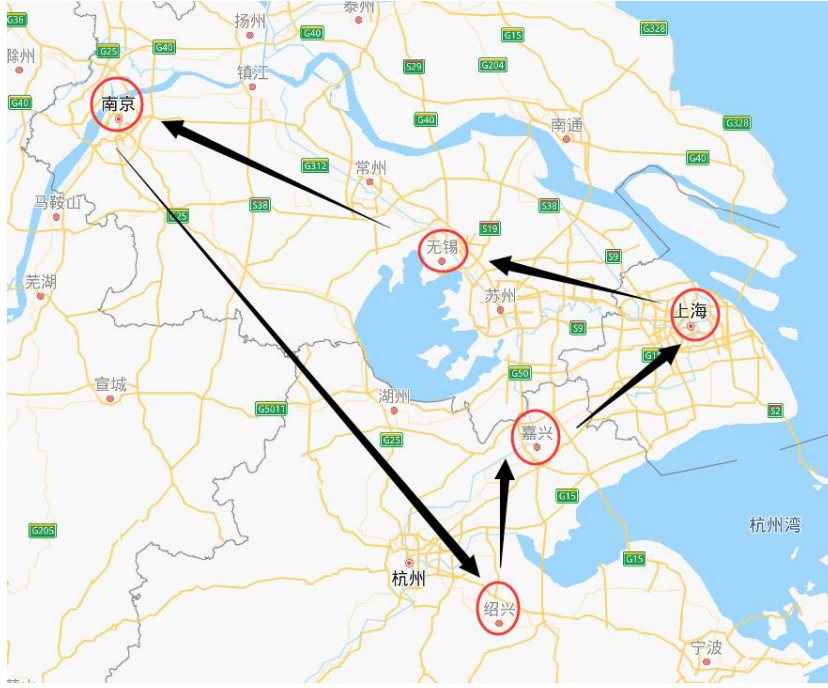


图 7 五地旅行次序图 6

同问题（4）的考量，需对目标函数进行改进，同样需要将城市分类为是否拥有地铁，因此我们结合问题（4）以及（24）中对交通工具的划分得到模型（31）：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_2 x_i + \sum_{i=1}^n x_i / n + \left(\sum_{i=1}^{15} s_i q_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{15} s_i \right) \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n s_{ij} (d_{ij}) x_{ij} + (f_i + 1) \cdot 60 \cdot 14 + 50 \cdot 14 \leq m_i - m_{ij} + \sum_{i=1}^{15} h_i q_i \\ \sum_{i=1}^n (t_i + 2) x_i + \sum_{i=1}^n (d_{ij} / 50) x_{ij} Y(1) + \sum_{i=1}^n (d_{ij} / 30) x_{ij} Y(0) \leq 10 \times t_{1_i} \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ Y(1) + Y(0) = 1 \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

根据（31）我们求解出最优旅行景点及次序，利用 lingo（见附录 31）对其进行求解，结果见表 23。

表 23 城市最优景点选择及旅行次序 6

上海	上海虹桥站—>田子坊—>上海野生动物园—>东方明珠—>南京路步行街—>黄浦江游船—>上海科技馆—>上海虹桥站
----	--

南京	南京站—>夫子庙-秦淮河观光带—>侵华日军南京大屠杀纪念馆—>总统府—>中山陵—>南京站
绍兴	绍兴站—>周恩来纪念馆—>绍兴柯岩风景区—>沈园—>绍兴站
无锡	无锡站—>灵山大佛—>三国城—>鼋头渚—>蠡园—>无锡站
嘉兴	嘉兴站—>茅盾故居—>乌镇—>嘉兴站

六 模型的评价及推广

6.1 模型的优点

(1) 分层建模的思想使建模层次分明，且便于求解，以城市为基本单位再对候选景点进行选取，大大减少了工作量。

(2) 本文结合实际情况对问题进行求解，能够达到全局最优解，并且结果是可靠且有效的。

(3) 对于模型系数的选取都有大量的数据作为支撑，保证了模型的可信度。

6.2 模型的不足

(1) 对于问题(1)来说，没有将金钱作为目标函数之一，可以对其进行优化。

(2) 求解的结果不如完整模型精确，存在一定量的小误差。

6.3 模型的推广

本文中用到了 0-1 规划模型、TSP 模型以及 TOPSIS 算法，便于计算机求解，且适用于工厂选址、解决生产进度等问题，有较高的推广性。

参考文献

[1] 享道出行数据研究院，《2021 长三角地区“五一”假期出行报告》
<https://www.saicmobility.com/news.html?id=39>, (2021.5.22)。

[2] 凯风，《2021 年，最新 TOP40 城市 GDP 排行榜》
<https://finance.ifeng.com/c/85y48RBylbE>, (2021.5.22)

[3] 司守奎，《数学建模算法与应用》，国防工业出版社，2011。

[4] 姜启源，《数学模型（第三版）》，高等教育出版社，2003。

[5] 谢金星、薛毅，《优化建模与 LINDO/LINGO 软件》，清华大学出版社，2011。