0-1 线性规划模型的 MATLAB 实现及应用

管志忠[1]，吕　楠[2]

(1. 池州职业技术学院，安徽　池州　247100；2. 徐州工程学院，江苏　徐州　221008)

【摘　要】 用 MATLAB 程序实现了 0-1 线性规划问题数学模型的求解方法，并进一步通过实例模型求解方法的分析比较，证明所采用的程序方法有效快捷. 文中的程序简单明了且具有通用性，只需输入规划模型中对应的相关矩阵，立即得到最优解和最优值.

【关键词】 0-1 线性规划；数学模型；MATLAB；最优解；最优值

【中图分类号】 O221.1　【文献标识码】A　【文章编号】1673-0704(2007)12-0064-04

0 - 1 线性规划是一种特殊形式的整数规划. 0-1 规划在工厂选址问题、运输问题、投资问题、加工问题、开发新产品问题等方面有着广泛的应用，随着一些数学计算软件包如 MATLAB、LINDO 等的开发与应用，0-1 规划方法在为管理人员作决策时提供了科学的依据，是实现管理现代化的有力工具. 本文利用 MATLAB 软件对 0-1 线性规划模型实施了程序化，通过程序的应用以及与其它求解方法的分析对比可以看出，用 0-1 线性规划程序来解 0 - 1 线性规划问题比现有的隐枚举法、排序法、穷举法等方法求解要简单快捷得多.

1　0-1 线性规划的基本模型

在实际管理中，很多问题无法归结为线性规划的数学模型，但却可以通过设置逻辑变量建立起整数规划的数学模型. 例如选址决策问题：随着业务发展，某制造公司必须在甲地或乙地建立 1 至 2 个新工厂，此外还考虑建一个仓库. 若仓库与工厂设在同一地点，就可以节省运输费用(若不准备建工厂，也就不需要建任何仓库). 问题的关键是新厂建在甲地还是乙地，或同时在两地建厂，建厂同时还必须考虑建一个仓库，仓库必须建在新厂所在地. 当不考虑财务因素时，这两个地点的优劣不相上下，管理层认为应该在财务分析的基础上做出决策.

对于这样的问题事实上就是“是 - 否”或“有 - 无”问题，可借助整数规划中的 0-1 整数变量，确定目标函数，建立数学模型.

0-1 线性规划模型的基本形式是：

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t.\begin{cases} \sum a_{ij} x_j \le b_j & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

0-1 线性规划模型的解，其实质是各变量间 0 或 1 的组合. 随着变量数目的增加，组合方案数目将会很多. 目前隐枚举法和排序法求 0-1 线性规划模型的解，除了对特殊结构的 0-1 线性规划模型有较高的效率外，一般收效较慢，特别对于大规模系统，求解工作量非常大. 以下程序很好地解决了此问题.

2　模型求解的 Matlab 程序实现

收稿日期：2007-09-21

作者简介：管志忠(1965-)，男，安徽池州人，副教授，硕士，主要从事应用数学研究.

根据以上 0-1 线性规划数学模型,运用 Matlab 软件编写的程序(不妨取文件名:L01n. m)如下:

function [xmin,f] = L01n(c,A,b,N,pre) %求 0 - 1 整数规划. min f = c' * x', s.t. A * x' ≤b, 其中 N 表示前 N 个约束是等式,Pre 是等式约束的精度. 输出最优解 xmin 和最优值 f.

```
if nargin < 5, pre = 0;
if nargin < 4, N = 0; end;
end;
c = c(:); b = b(:);
[m,n] = size(A);
f = sum(abs(c));
x = zeros(1,n);
ft = 0;
while 1
jj = 0; ft = dot(c,x); t1 = ft - f;
while (t1 < = 0) &(jj < m)
jj = jj + 1; t1 = A(jj,:) * x - b(jj);
if jj > N
if t1 > 0 jj = 0; end; else
if abs(t1) > pre jj = 0; break; end; end; end
if jj = = m f = ft; xmin = x; jj = 0; end; k = 1;
while x(k) = = 1
x(k) = 0;
if k = = n return; end
k = k + 1; end
x(k) = 1; end
```

在本程序中,整数变量的个数不受限制, 并且充分利用已经得到的计算结果来推出下一步的结果, 使得程序中只使用了加减运算,从而大大地减少了目标函数和约束条件的计算量. 运用此程序解答 0-1 线性规划问题时,根据实际问题的模型写出矩阵 c、A、b,确定模型中的约束等式数 N 和等式约束的精度 pre,然后在 Matlab 命令窗口中分别输入 c、A、b,再输入[xmin,f] = L01n(c,A,b,N,pre),立即得到该模型的最优解 X^* 和最优值 $X_0^* = f$.

3 模型程序的应用与比较

通常解 0-1 整数规划问题所采用的是人们所熟悉的隐枚举法、排序法等,隐枚举法简单地说就是每次只检查 0-1 变量组合的一部分就能确定其是否可能成为最优解的一种方法. 排序法是按目标函数中各变量系数的大小按从大到小(或从小到大)重新排列,使最优解有较早出现的可能. 它们通过列表、确定初始过滤条件、过滤、再依次计算过滤,最后找到最优解和最优值. 与此相比,本文中运用 Matlab 编写的程序求 0 - 1 整数规划模型的解就显得简单明了、方便快捷.

实例 1 求 0-1 线性规划模型:

$$\min z = 3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 8 \\ tx_1 + 3x_2 + x_4 \geq 5 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

分析一(隐枚举法):将上述模型变为规范形式

$$\max f = - z = - 3x_1 - 7x_2 - x_3 - x_4$$

$$s.t.\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+x_4\le -1 \\ -x_1+x_2-6x_3-4x_4\le -8 \\ -5x_1-3x_2-x_4\le -5 \\ x_j=0\text{或}1,j=1,2,3,4 \end{cases}$$

根据 0-1 整数规划模型设计隐枚举法计算表,并将 0-1 变量的所有组合填写在点(x_1,x_2,x_3,x_4)列中(如表 1 所示).

表 1 隐枚举法计算表

Table 1 Implicit enumeration calculation table

点 (x_1,x_2,x_3,x_4)	条件: 过滤条件	函数约束 1	函数约束 2	函数约束 3	目标函数 f	判断	过滤条件值
$(0,0,0,0)^T$	√	×				×	
$(0,0,0,1)^T$	√	×				×	
$(0,0,1,0)^T$	√	√	×			×	
$(0,0,1,1)^T$	√	×				×	
$(0,1,0,0)^T$	√	×				×	
$(0,1,0,1)^T$	√	×				×	
$(0,1,1,0)^T$	√	×				×	
$(0,1,1,1)^T$	√	×				×	
$(1,0,0,0)^T$	√	√	×			×	
$(1,0,0,1)^T$	√	√	×			×	
$(1,0,1,0)^T$	√	√	×			×	
$(1,0,1,1)^T$	√	√	√	√	-3	√	-3
$(1,1,0,0)^T$	×					×	
$(1,1,0,1)^T$	×					×	
$(1,1,1,0)^T$	×					×	
$(1,1,1,1)^T$	×					×	

通过上述的列表、计算、过滤,本例中最优解 $X^*=(1,0,1,1)^T$,最优值 $z^*=-f^*=3$.

分析二(排序法):我们将目标函数中各变量系数的大小按从大到小重新排列,使最优解有较早出现的可能.于是将模型变为

$$\min z=7x_2+3x_1+x_4-x_3$$

$$s.t.\begin{cases} -x_2+2x_1-x_4+x_3\ge 1 \\ -x_2+x_1+4x_4+6x_3\ge 8 \\ 3x_2+5x_1+x_4\ge 5 \\ x_j=0\text{或}1,j=1,2,3,4 \end{cases}$$

计算过程见表 2:

表 2 排序法计算表

Table 2 The list of result by ranking method

点 (x_2,x_1,x_4,x_3)	条件: 约束 1	约束 2	约束 3	目标函数 z	过滤条件
$(0,0,0,0)^T$	×			0	
$(0,0,0,1)^T$	√	×		-1	
$(0,0,1,0)^T$	×			1	
$(0,0,1,1)^T$	×			0	
$(0,1,0,0)^T$	√	×		3	
$(0,1,0,1)^T$	√	×		2	
$(0,1,1,0)^T$	√	×		4	
$(0,1,1,1)^T$	√	√	√	3	$Z\le 3$
$(1,0,0,0)^T$				7	
$(1,0,0,1)^T$				6	
$(1,0,1,0)^T$				8	
$(1,0,1,1)^T$				7	
$(1,1,0,0)^T$				10	
$(1,1,0,1)^T$				9	
$(1,1,1,0)^T$				11	
$(1,1,1,1)^T$				10	

通过上述列表可得本例所求的最优解 为$(x_2, x_1, x_4, x_3)^T = (0, 1, 1, 1)^T$,即 $X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (1, 0, 1, 1)^T$,最优值 $z^* = 3$.

如果是最大化问题,则将变量按其在目标函数中的大小由小到大排列即可.

分析三(MATLAB 程序法):在 MATLAB 命令窗口中,输入

c = [3,7,-1,1]; A = [-2,1,-1,1;-1,1,-6,-4;-5,-3,0,-1]; b = [-1,-8,-5]; (回车)

[xmin,f] = L01n(c,A,b,0,0). (回车)

立即得到 xmin = $(1,0,1,1)^T$ 和 f = 3,于是原题的最优解 $X^* = (1,0,1,1)^T$ 和最优值 $z^* = 3$.

最后该说明一下将 0-1 线性规划模型程序化的必要性了. 在当今企业的生产经营活动中,最高层管理者主要关心的是企业的目标、方针和基本战略等全面性决策问题,这些问题的解决为在变化环境中指导企业提供一个骨架. 中下层管理的很多决策活动是处于操作层次的,可以编写程序,让计算机来为管理阶层提供最优解答. 一旦问题被编成程序,则可以把它们移交给一个管理信息系统. 这种运筹模型的程序化可以把管理者从日常繁琐的计算分析工作中解脱出来,以便他们能集中精力解决更为困难的战略性问题. 这种模型程序化的优越性从以上实例模型的分析比较中已经完全表现出来.所以,本文中的规划模型程序化做法是非常必要的,值得应用和推广.

参 考 文 献

[1] 牛映武.运筹学[M].西安:西安交通大学出版社,2006:118-123.

[2] 仉志余.运筹学基础[M]. 北京:中国科学技术出版社,2003:84-90.

[3] 徐玖平,胡知能.运筹学-数据·模型·决策[M].北京:科学出版社,2006:42-70.

[4] 李映红.线性 0-1 规划模型的排序解法[J].西安交通大学学报,2001,(10):468-471.

[5] 李南南等.MATLAB7 简明教程[M].北京:清华大学出版社,2006:289-342.

MATLAB Realization of the 0-1 Linear Programming Model and Its Application

GUAN-Zhi zhong[1],LüNan[2]

(1. Chizhou Professional and Technical College, Chizhou 247100, China;
2. Xuzhou Institute of Technonogy, Xuzhou 221008, China)

【Abstract】 MATLAB is employed to realize the solution of 0-1 linear programming model. And it is further proved through example model comparison that the new method is both effective and efficient. The program introduced in the paper is so simple and general that the optimal solution and value can be obtained by simply imputing relative matrix in the programming model.

【Key words】 0-1linear programming; math model; MATLAB; optimal answer; optimal value

(责任编辑 燕善俊)