Universidade Federal de Minas Gerais

Bacharel em Sistemas de Informação
Algoritmos e Estruturas de Dados 3

Trabalho Prático 1
Agosto 2017

Gabriel Silva Bastos
Matrícula: 2016058204

1 Introdução

Nubby está de volta, desta vez para organizar um campeonato de *Mortal Kontest*. Participarão $\{v_1, \ldots, v_n\}$ amigos ($1 \leq n \leq 25$), e Nubby ficará encarregado apenas da organização de todas as $n-1$ rodadas. Em cada rodada, dois amigos dos que não foram eliminados serão escolhidos aleatóriamente para o embate, e o que perder é eliminado do campeonato. Desta forma, a última rodada será entre os dois amigos restantes, e o vencedor desta é o grande campeão.

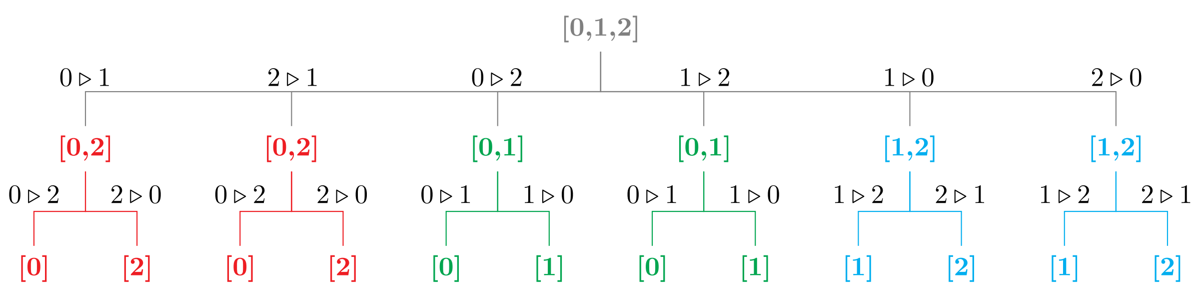
Nubby possui dados de batalhas anteriores entre seus amigos, e através destes calculou a probabilidade de cada amigo vencer os demais em um embate. Através destas probabilidades, Nubby quer calcular a probabilidade de cada um de seus amigos vencer o campeonato.

2 Visão Geral da Solução

A entrada consiste de um número n de jogadores, e uma matriz $V \in \mathbb{M}_{n \times n}$ contendo as probabilidades calculadas por Nubby. A posição i, j na matriz contém a probabilidade $V_{i,j} \in [0, 1]$ do jogador v_i vencer o jogador v_j em um embate. Além disso, todas posições da forma i, i contém o valor 0, que é a probabilidade de um jogador vencer à si mesmo, e as demais posições i, j satisfazem $V_{i,j} = 1 - V_{j,i}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & V_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n,1} & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a solução, utilizaremos um caso particular onde $n = 3$. A seguinte árvore representa os possíveis desdobramentos do campeonato neste caso:



Cada nó da árvore corresponde ao grupo G ainda presente no campeonato.

As folhas contém grupos unitários, que indicam o campeão do desdobramento descrito pelo caminho da raiz até a folha.

O rótulo $i \triangleright j$ para cada aresta indica que na rodada e configuração correspondentes os jogadores i e j foram escolhidos para o embate, e o jogador i venceu.

Cada nível de arestas corresponde à uma rodada, e cada aresta é uma possibilidade para a rodada.
O número a de escolhas de dois jogares é

$$a = \binom{|G|}{2} = \frac{|G|^2 - |G|}{2} \tag{1}$$

Portanto, o número de arestas em cada nível é $2a$, pois para cada escolha de dois jogadores há dois possíveis vencedores.

Cada caminho da raiz até um nó na árvore descreve um desdobramento do campeonato, e portanto possui uma probabilidade associada para cada possível vencedor. Tais probabilidades são compostas pela combinação de dois itens:

- A probabilidade associada à rodada: Cada rodada é modelada como uma aresta para cada escolha de um vencedor e um perdedor possível. Cada aresta corresponde à equiprovável da escolha dos jogadores vezes a chance do vencedor vencer.

$$P(i \triangleright j) = \frac{1}{a} \cdot V_{i,j} = \frac{2}{|G|^2 - |G|} \cdot V_{i,j}$$

- A probabilidade associada à subárvore conectada pela aresta, que corresponde à combinação das probabilidades das subarestas.

O segundo item denota um subproblema, pois a subárvore conectada por cada aresta pode ser considerada um subcampeonato. Como é notável no diagrama, vários subcampeonatos equivalentes ocorrem quando geramos a árvore de desdobramentos. Estes foram dispostos com a mesma cor para melhor visualização.

Efetivamente, a probabilidade de um jogador vencer o campeonato é o somatório das probabilidades dos desdobramentos em que ele vence.

2.1 Estratégia de Memorização

Os subproblemas foram definidos como os subcampeonatos. Um subcampeonato é constituido pela exclusão de alguns membros do campeonato original C, devido à eliminação das rodadas passadas. Portanto, todos subcampeonatos possíveis pertencem ao conjunto potência de C.

Como todos os desdobramentos do campeonato C são necessários para a solução do problema, gerar o conjunto potência se torna necessário. Porém, os subcampeonatos com menos de 2 jogadores não são interessantes, então podemos excluí-los da memorização. Portanto, é necessário memorizar m grupos

$$\begin{aligned} m &= |\mathcal{P}(C)| - |C| - 1 \\ &= 2^n - n - 1 \end{aligned}$$

Para memorizar tais grupos, um vetor foi adotado. Também foi necessária uma forma eficiente de identificar cada grupo no vetor. Considerando que o tamanho máximo de jogadores definido por Nubby foi 25, um inteiro de largura fixa de 32 bits é utilizado para identificar cada grupo. Cada bit no corresponde à presença do jogador no grupo

$$\begin{aligned} 0 \ldots 0\, 00011010_2 &\equiv [1, 3, 4] \\ 0 \ldots 1\, 00100101_2 &\equiv [0, 2, 5, 8] \\ 0 \ldots 0\, 11111111_2 &\equiv [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] \end{aligned}$$

Para converter desta representação para um índice no vetor, é necessário descontar os grupos unitários e o grupo vazio que não foram considerados. A seguinte função realiza esta compensação em um identificador de grupo g:

$$\varphi(g) = g - \lceil \log_2 g \rceil - 1$$

3 Análise de Complexidade

3.1 Espacial

Para a matriz M, são alocados n^2 *floats*.

Para cada subcampeonato, são alocados n *floats*, correspondendo à probabilidade de cada jogador vencer. Aos jogadores não presentes no subcampeonato é atribuida probabilidade 0 de vencer.

São $2^n - n - 1$ grupos, portanto $(2^n - n - 1) \cdot n$ *floats* alocados.

A complexidade espacial final é

$$\Theta\left(n^2 + (2^n - n - 1) \cdot n\right)$$
$$\Theta\left(n^2 + n \cdot 2^n - n^2 - n\right)$$
$$\Theta\left(n \cdot 2^n\right)$$

3.2 Temporal

Todos os subcampeonatos são calculados exatamente uma vez. Portanto, as probabilidades para todos grupos do conjunto potência do campeonato, exceto os unitários e o vazio, serão calculadas.

No conjunto potência, há exatamente $\binom{n}{i}$ subconjuntos de cardinalidade i.[1] Cada um destes subconjuntos representa um subgrupo de tamanho i, nos quais a rodada imediata contém $2a$ combinações.[2] Como todos subcampeonatos de cardinalidade 2 até n serão calculados, a complexidade se resume ao somatório:

$$f(n) = 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{2}$$

Para desenvolver o somatório, utilizaremos alguns artifícios [3]

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i && \text{pelo teorema binomial}\\
n(n-1)(1+x)^{n-2} &= \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \cdot i(i-1) \cdot x^i && \text{derivando ambos lados duas vezes}\\
n(n-1) \cdot 2^{n-2} &= \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \cdot i(i-1) && \text{substituindo } x \text{ por } 1\\
n(n-1) \cdot 2^{n-2} &= 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \cdot \frac{i(i-1)}{2} && \text{multiplicando o lado direito por } \frac{2}{2}\text{, reorganizando}\\
n(n-1) \cdot 2^{n-2} &= 2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{2} && \text{pela definição de } \binom{i}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, a complexidade obtida é

$$\Theta\left(n(n-1) \cdot 2^{n-2}\right)$$
$$\Theta\left(n^2 - n\right) \cdot \Theta\left(2^{n-2}\right)$$
$$\Theta\left(n^2\right) \cdot \Theta\left(2^n\right)$$
$$\Theta\left(n^2 \cdot 2^n\right)$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Power_set#Relation_to_binomial_theorem
[2] Equação 1
[3] https://math.stackexchange.com/questions/2472972/prove-that-sum-i-2n-binomni-binomi2-2n-3-cdot-nn-1

4 Análise Experimental

A análise experimental da implementação é mostrada pela figura 1. Para realizar os experimentos, foi feito um gerador de entradas. Para um valor n, é gerada uma entrada contendo um vetor de tamanho n, e $n/2$ operações de busca e atualização intercaladas. O intervalo em cada operação é aleatório, mas a largura do intervalo é fixa em $n/3$. Para medir o tempo de execução do código, foi utilizada a informação de uso de recursos fornecida pelo sistema operacional linux. Os valores n foram escolhidos estrategicamente para cada teste. A razão inicial é verificar, de forma geral, o comportamento dos algoritmos para casos genéricos.

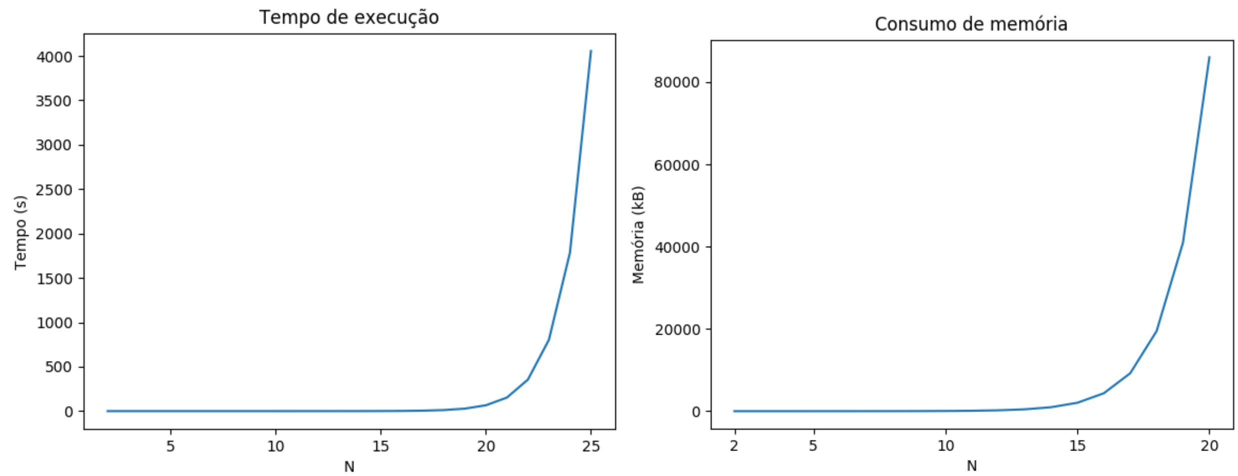


Figura 1: Teste experimental

Nos gráficos da figura 1 é notável o ganho em eficiência da árvore de segmentos sobre a matriz.

5 Conclusão

O objetivo do trabalho foi atingido ao demonstrar as diferenças na eficiência das soluções propostas, tanto teoricamente quanto experimentalmente. Tornou-se evidente o grande ganho obtido na performance ao se utilizar uma estruturação de dados adequada.