物理学院本科生 07——08 学年第 2 学期理论力学课程期末考试试卷（B 卷）

专业：　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　成绩:

得 分

一 、填空题（本题共 20 分，每空 5 分）

草稿区

1. 一质点沿矢径以及垂直于矢径的速度分别为 λr 和 $\mu\theta$，其中 λ 和 μ 为常数。则质点沿矢径以及垂直于矢径的加速度分别为：$a_r = \left(\lambda^2 r - \dfrac{\mu^2\theta^2}{r}\right)$；$a_\theta = \left(\mu\theta\lambda + \dfrac{\mu^2\theta}{r}\right)$。

2. 根据汤川理论，中子和质子之间的吸引势能可以表示为 $V(r) = \dfrac{ke^{-\alpha r}}{r}$ 式中 $k<0$，质子与中子之间的吸引力 $F = \left(\dfrac{ke^{-\alpha r}(\alpha r+1)}{r^2}\right)$，设质子与中子的质量近似为 m，质子与中子相互以对方为圆心做圆周运动，轨道半径为 a，则，角动量 $J = \sqrt{-make^{-\alpha a}(\alpha a+1)}$；总能量 $E = \dfrac{ke^{-\alpha a}(1-\alpha a)}{2a}$。

得 分

二 、计算题（本题共 80 分，每小题 20 分）

1．有一质点在势能为 $V=\frac{1}{2}kr^2$ 的有心力场中运动（$k>0$），试应用有效势能确定指点作圆周运动的条件，并计算运周运动的频率。

解：

有心力为保守力，机械能守恒：$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V=E$

又因为动量距守恒，有 $r^2\dot{\theta}=h=Rv$（常数），代入上式得：

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}+V=E$$

上式中 $\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}+V$ 称为等效势能，记为：$V'=\frac{1}{2}\frac{mh^2}{r^2}+V$

质点作圆周运动的条件为 $\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r=R}=0$

根据题意 $V=\frac{1}{2}kr^2$，注意：$h=Rv$ 由上述条件得：

$$-\frac{mv^2}{R}+kR=0 \quad \text{或} \quad \frac{v^2}{R^2}=\frac{k}{m}$$

由 $v=\omega R$ 立即可以求得：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2．如图所示，质量为 m_1 及 m_2 的两个滑块，分别穿于两平行的水平光滑杆上，两杆之间的距离为 d 。现用劲度系数为 k ，自然长度为 L 的轻质弹簧连接两滑块。设开始时 m_1 位于 $x_1=0$ ， m_2 位于 $x_2=L$ ，且两物块速度为零。求释放后两物块的最大速度。

解:初始时刻系统的总动量为零，由 x 方向动量守恒有

$$m_1v_1+m_2v_2=0$$

由题给条件，初始时刻弹簧的伸长为 $\sqrt{L^2+d^2}-d$ ，因而其弹性势能为

$$V=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2+d^2}-d^2\right)^2$$

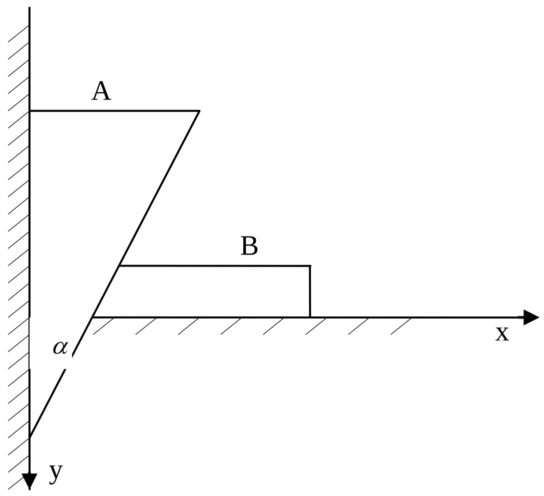
当弹性势能全部转化为动能时，两滑块的速度最大，即

$$\frac{1}{2}m_1v_{1\max}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\max}^2=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{L^2+d^2}-d^2\right)^2$$

求解上面各式得：

$$\begin{cases} v_{1\max}=\dfrac{km_2}{m_1^2+m_1m_2}\left(\sqrt{L^2+d^2}-d^2\right)^2 \\ v_{2\max}=\dfrac{km_1}{m_2^2+m_1m_2}\left(\sqrt{L^2+d^2}-d^2\right)^2 \end{cases}$$

3．如图，尖角为α 质量为m_1的物块A一面靠在光滑的墙壁上，另一端与质量为m_2的光滑棱柱B相接触，B可沿光滑水平面滑动，设除重力外不受其他外力的作用，应用拉格朗日方程求A、B的加速度。



解：建立如图所示的坐标系，以y_A和x_B分别标记A和B的尖端的y和x坐标。如图可知$x = \tan\alpha$ ，故系统的自由度为 1。取广义坐标$q = y_A$ ，系统的动能和势能分别为：

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_A^2 + \frac{1}{2}m_2 x_B^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\tan^2\alpha\right)q^2$$

$$V = -m_1 g y_A = -m_1 g q$$

拉格朗日函数为：

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\tan^2\alpha\right)q^2 + m_1 g q$$

代入保守体系拉格朗日方程得：

$$\left(m_1 + m_2\tan^2\alpha\right)\ddot{q} - m_1 g = 0$$

物体A和B的加速度为：

$$a_A = \ddot{y}_A = \ddot{q} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2\tan^2\alpha}$$

$$a_B = \ddot{x}_B = \ddot{q}\tan\alpha = \frac{m_1 g\tan\alpha}{m_1 + m_2\tan^2\alpha}$$

4．已知一质点对 x 轴及 y 轴角动量守恒，应用泊松括号以及泊松定理，求证这个质点对 z 轴的角动量也守恒。

证明：

设 J_x、J_y、J_z 分别表示质点对 x 轴、y 轴和 z 轴的角动量，其具体表达式为：

$$\begin{cases} J_x = my\dot{z} - mz\dot{y} \\ J_y = mz\dot{x} - mx\dot{z} \end{cases}$$

令：

$$x, y, z \Rightarrow q_1, q_2, q_3$$
$$m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z} \Rightarrow p_1, p_2, p_3$$

则：

$$\begin{cases} J_x = f = p_3 q_2 - q_3 p_2 \\ J_y = g = p_1 q_3 - q_1 p_3 \end{cases}$$

应用泊松括号：

$$\left[f, g\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial g}{\partial q_3}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2} + \frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial g}{\partial p_3}\right)$$

解得：

$$\left[f, g\right] = q_2 p_1 - \left(-p_2\right)\left(-q_1\right) = -J_z$$

即：

$$\left[J_x, J_y\right] = -J_z$$

因此若 J_x、J_y 是守恒量，则 J_z 也一定是守恒量。