

专业： 年级： 学号： 姓名： 成绩：

得分

一、(本题共 20 分，每小题 5 分)

草稿区

1. 给定点在直角坐标系下的运动规律为： $x = a \cos bt$, $y = a \sin bt$,

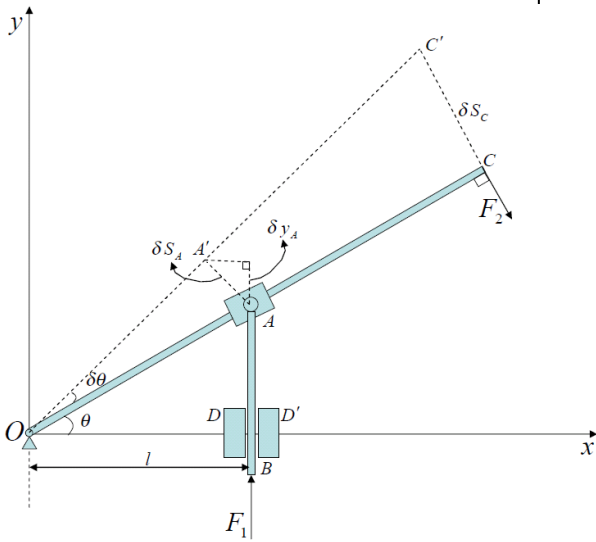
$z = ct$, 其中 a , b , c 是长量, 则 $x^2 + y^2 =$ _____。速度的分量为：

$v_x =$ _____, $v_z =$ _____。

加速度的分量为： $a_y =$ _____,

$a_z =$ _____。

2. 如图所示，质量不计的细杆 OC 置于平面直角坐标系中，细杆可绕固定点 O 转动，质量不计的细杆 AB 平行 y 轴且 DD' 被限制在只能沿平行 y 轴移动， A 点处的套环可以在 OC 上自由滑动。已知细杆 OC



的长度为 R , 细杆 AB 到 O 点的距离为 l , 现在细杆 AB 的底端加一竖直向上的力 F_1 , 在细杆 OC 的 C 点加一垂直细杆向下的力 F_2 , 系统在细杆 OC 与 Ox 轴夹角为 θ 处保持静止。忽略所有接触处的摩擦。若假想细杆 OC 沿逆时针旋转 $\delta\theta$, 细杆 AB 沿 y 轴的虚位移为 δy_B , 细杆 OC 的虚位移为 δS_C 。系统的虚功的表达式为 $\delta W =$ _____。根据题意有 $\delta S_A =$ _____ $\delta\theta$, 且 $\delta y_B =$ _____ δS_A , $\delta S_C =$ _____ $\delta\theta$ 。因此由虚功原理得 $F_1 / F_2 =$ _____。

3. xOy 平面内的一 V 形槽其数学表达式为 $y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$, 在槽内有一质量为 m 的质点，其重力势能为 $V(x) = \begin{cases} \text{_____} & x \geq 0 \\ \text{_____} & x < 0 \end{cases}$, 势能函数对 x 求导数，有 $\frac{dV(x)}{dx} = \begin{cases} \text{_____} & x \geq 0 \\ \text{_____} & x < 0 \end{cases}$, 对于 $x = 0$ 点有 $\left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=0} =$ _____ , 是否可以由此判断 $x = 0$ 点处的质点的稳定性，其理由为_____。

4. 摆长为 L 的单摆，如果取摆线与竖直方向的夹角 φ 为广义坐标，则该系统的动能

$T =$ _____, 势能 $V =$ _____。由 $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ 定义

得, 哈密顿函数 $H =$ _____ (用 p_φ 和 φ 表示)。由哈密顿正则方程得

$\frac{d\varphi}{dt} =$ _____ (用 p_φ 表示), $\frac{dp_\varphi}{dt} =$ _____。

得 分

二 、(本题共 15 分)

天文学家通过观测的数据确认了银河系中央的黑洞“人马座 A*”的质量与太阳质量的关系。研究发现, 有一星体 S2 绕人马座 A* 做椭圆运动, 其轨道半长轴为 9.50×10^2 天文单位 (地球公转轨道的半径为一个天文单位), 人马座 A* 就处在该椭圆的一个焦点上。观测得到 S2 星的运行周期为 15.2 年。

(1) 若将 S2 星的运行轨道视为半径 $r = 9.50 \times 10^2$ 天文单位的轨道, 试估算人马座 A* 的质量 M_A 与太阳质量 M_S 的多少倍 (结果保留一位有效数字);

(2) 黑洞的第二宇宙速度极大, 处于黑洞表面的粒子即使以光速运动, 其具有的动能也不足以克服黑洞对它的引力束缚。由于引力的作用, 黑洞表面处质量 m 的粒子具有的势能为 $E_p = -G \frac{Mm}{R}$ (设粒子在黑洞无限远处的势能为零), 式中 M 、 R 分别表示黑洞的质量和半径。已知引力常量 $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, 光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$, 太阳质量 $M_S = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, 太阳半径 $R_S = 7.0 \times 10^8 \text{ m}$, 不考虑相对论效应, 利用上问结果, 在经典力学范围内求人马座 A* 的半径 R_A 与太阳半径之比应小于多少 (结果保留四舍五入)。

得 分

三 、(本题共 15 分)

如图所示, 质量为 m_1 和 m_2 的两质点通过不可伸长的细绳跨接在轻质光滑的滑轮上, 由达朗贝尔方程求两质点的加速度。

得 分

四 、(本题共 10 分)

由泊松定理证明: 在保守力场内运动的质点组, 若直角坐标系中 x 和 y 方向的两分动量距为常数, 则 z 方向分动量矩也一定为常数。

得 分

五 、(本题共 20 分)

试由哈密顿原理推到正则哈密顿方程

得 分

六 、(本题共 20 分)

一个系统的拉格朗日函数为 $L = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} x^2$ 。(1) 当 $x = A \sin t$, 证明 $\delta \int_0^\pi L dt = 0$

(2) 若 $x = A(\sin t + c \sin 8t)$, c 为任意值, 求 c 取何值时 $\delta \int_0^\pi L dt = 0$ 。

