物理学院本科生 07——08 学年第 2 学期理论力学课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　　　姓名：　　　　　　成绩:

得 分

一 、填空题（本题共 20 分，每空 5 分）

草稿区

1．一直线以等角速度 ω 在固定平面内绕 O 点转动。当 $t=0$ 时此直线与 Ox 轴重合，动点 A 从原点出发沿直线运动，若此动点的绝对速度值为定值 v_0，在平面极坐标下，该动点的轨迹 $r=\left(\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right)$。径向和横向加速度的大小分别为

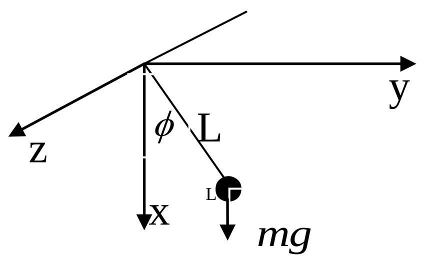
$a_r=\left(-2\omega v_0\sin\omega t\right)$；$a_\theta=\left(2\omega v_0\cos\omega t\right)$。

2．质点沿半径为 r 的圆周运动，其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变。设质点初始速度为 v_0，质点的速度为 $v=\left(\dfrac{v_0 r}{r-v_0 t\cot\alpha}\right)$。

得 分

二 、计算题（本题共 80 分，每小题 20 分）

1．应用动量距定理推导单摆的运动微分方程



解：设单摆摆锤的质量为 m，速度为 $\vec{v}$ 轻绳长为 L，摆锤对原点 O 的力矩为：

$$\vec{M}=\vec{L}\times m\vec{g}=\left(-mgL\sin\phi\right)\vec{k}$$

角动量为：$\vec{J}=\vec{L}\times m\vec{v}=\left(mlv\right)\vec{k}$

由角动量定理 $\dfrac{d\vec{J}}{dt}=\vec{M}$ 得：$\left(mL^2\ddot{\phi}\right)\vec{k}=\left(-mgl\sin\phi\right)\vec{k}$

单摆的运动微分方程为：$\ddot{\phi}+\dfrac{g}{L}\sin\phi=0$

2．质量为 m 的质点在有心斥力场 $\frac{mc}{r^3}$ 中运动，式中 r 为质点到力心 O 的距离，c 为常数。当质点距离 O 很远时，质点的速度为 v_0，而其渐进线与 O 的垂直距离（瞄准距离）为 ρ，试求质点与 O 的最近距离 a。

解：取无穷远点处势能为零，则势能：$V = -\int F dr = \frac{mc}{2r^2}$

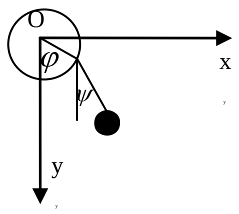
在无穷远点和最近距离处机械能守恒，则：$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mc}{2a^2}$

由角动量守恒定律得：$v_0\rho = va$,

由上述两式得：$a^2 = \frac{c}{v_0^2} + \rho^2$

所以：$a = \sqrt{\frac{c}{v_0^2} + \rho^2}$

3．质量为 M 半径为 R 的均匀质量的圆盘，可绕通过盘心的水平轴 O 无摩擦地转动。在圆盘上以长为 L 的轻绳悬一质量为 m 的质点。设除重力外系统不受其他力的作用，应用拉格朗日方程求质点的运动微分方程。已知圆盘绕盘心水平轴 O 的转动惯量 $I=\dfrac{1}{2}mR^2$ 。



解：体系的自由度为 2，选取 φ 和 ψ 为广义坐标，对于质点

$$\begin{cases} x = L\sin\psi + R\sin\varphi \\ y = L\cos\psi + R\cos\varphi \end{cases}$$

系统的动能为：$T=\dfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)$

系统的势能为：$V=-mgy$

系统的拉格朗日方程为：

$$L=\frac{1}{4}MR^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\varphi}^2+L^2\dot{\psi}^2+2LR\dot{\varphi}\dot{\psi}\right)\cos\left(\varphi-\psi\right)$$
$$+mg\left(L\cos\psi+R\cos\varphi\right)$$

应用拉格朗日方程，对于广义坐标 φ 有：

$$\left(\frac{M}{2}+m\right)R^2\ddot{\varphi}+mLR\cos\left(\varphi-\psi\right)\ddot{\psi}+mLR\sin\left(\varphi-\psi\right)\dot{\psi}^2$$
$$+mgR\sin\varphi=0$$

对于广义坐标 ψ 有：

$$mL^2\ddot{\psi}+mLR\cos\left(\varphi-\psi\right)\ddot{\varphi}-mLR\sin\left(\varphi-\psi\right)\dot{\varphi}^2$$
$$+mgL\sin\psi=0$$

4．一维简谐振子的哈密顿函数为 $H=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}kq^2$ ，取母函数 $F=\frac{1}{2}m\omega q^2\cot Q$，其中 $\omega^2=\frac{k}{m}$，请用哈密顿正则变换求其运动规律。

解：由母函数的表达式知，该类母函数为第一类母函数，因此有

$$p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\quad;\quad P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}\quad;\quad H^*=H+\frac{\partial F}{\partial t}$$

依题意该振动为一维振动所以 $\alpha=1$，因此：

$$p=m\omega q\cot Q\quad;\quad P=\frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}\quad;\quad H^*=H$$

解得：

$$\begin{cases}p=\sqrt{2m\omega P}\cos Q\\ q=\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\\ H^*=\frac{1}{2m}\left(2m\omega P\cos^2 Q\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q\right)=\omega P\end{cases}$$

由正则方程得：

$$\begin{cases}\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial P}=\omega\\ \dot{P}=-\frac{\partial H^*}{\partial Q}=0\end{cases}$$

积分上式得：

$$\begin{cases}Q=\omega t+Q_0\\ \dot{P}=P_0\end{cases}$$

式中 P_0 和 Q_0 为积分常数，将上式代入变换方程中得：

$$q=\sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\sin\left(\omega t+Q_0\right)$$