

专业:                      年级:                      学号:                      姓名:                      成绩:

一、填空题（本题共 20 分，共 5 小题，每空 2 分，共 10 个空）

1. 质点系动量的变化率等于 ( )。
2. 质点系的动能的增加, 等于 ( )。
3. 时间的均匀性导致 ( ), 空间的均匀性导致 ( ), 空间的各项同性导致 ( )。
4. 力  $\vec{F}$  在虚位移下所作的功称为虚功, 用  $\vec{F}_{Ni}$  表示第  $i$  个质点所受到的约束力, 理想约束的定义为: ( ) 。
5. 刚体平动的自由度为 ( ), 定轴转动自由度为 ( ), 平面平行运动自由度为 ( )。刚体的一般运动自由度为 ( )。

二、证明题（本题共 20 分，共 2 小题，每小题 10 分）

$$L = \frac{1}{2}(m+m')\dot{R}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - m'g(R-l)$$

其中,  $R, \varphi$  为广义坐标,  $m, m', g, l$  为常数。由拉格朗日方程证明系统的运动微分为:  $(m+m')\ddot{R} - mR\dot{\varphi}^2 + m'g = 0$  和  $\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) = 0$

得 分

、三、计算题(本题共 60 分, 共 2 小题, 每小题 15 分)

1. 一质点无摩擦地在环形轨道上下滑, 轨道弯曲段的曲率半径为  $R$ , 该质点由高  $h$  处由静止开始下滑, 在某处质点开始和轨道脱离接触, 试分析并说明脱离接触的位置, 并计算发生这种情况的  $h$  的最小值

2. 自由落体的拉格朗日量可以表示为:  $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$ , 试根据哈密顿原理求解自由落体运动的真实规律为:  $z = \frac{1}{2}gt^2$

3. 带电粒子电磁场中运动, 以矢势  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ 、标势  $\varphi(\vec{r}, t)$ 、电荷量  $e$  和电荷的质量  $m$  等物理量表示系统的拉格朗日函数, 该拉格朗日函数可以写成:  $L = \frac{1}{2}mv^2 - e\left(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - e\left(\varphi - \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i\right)$ , 应用广义动量的定义和哈密顿函数的定义, 求解哈密顿函数的表达式。

4. 已知复摆做为振动时的拉格朗日量可以写成:

$$L = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

其中  $I$  (常量) 为复摆的转动惯量张量,  $m$  为复摆的质量,  $l$  为复摆的长度。应用哈密顿原理, 求复摆的运动微分方程。