物理学院本科生 06——07 学年第 二 学期理论力学课程期末考试试卷（B 卷）

专业：　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　成绩：

得 分

、一 、填空（本题共 20 分，共 5 小题，每空 2 分，共 10 个空）

草稿区

1．质点系角动量的变化率等于（作用在质点系上所有外力矩之和）。

2．作用在质点上的力 $\vec{F}$ 不做功或 $\vec{F}$ 为保守力，则质点的机械能（守恒）。

3．设约束方程可以写成：$f(x,y,z,t,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=0$，对于稳定约束，约束方程可以写成：（$f(x,y,z)=0$），几何约束可以写成（$f(x,y,z)=0$）或（$f(x,y,z,t)=0$），系统只受到（完整（或几何））约束的体系成为完整体系。

4．用 $\vec{F}_i$ 表示系统第 i 个质点所受到的合外力，m_i 表示 i 个质点的质量，$\vec{r}_i$ 表示第 i 个质点的位置矢量，则达朗贝尔方程可以表示为：（$\sum_i\left(\vec{F}_i-m_i\ddot{\vec{r}}\right)\bullet\delta\vec{r}_i=0$），虚功原理可以表示为：（$\sum_i\vec{F}_i\bullet\delta\vec{r}_i=0$）。

5．n 个质点的自由度为（$3n$），若受到 k 个约束，在完整约束的情形下，该力学体系的自由度为（$3n-k$）。

得 分

、二 、证明题（本题共 20 分，共 2 小题，每小题 10 分）

1．　质量为 m 的带电粒子电荷量为 e，在强度为 g 的磁单极子场中运动，磁单极子可以看成有限重，位于原点的电荷受到磁单极子的作用力为 $-ge\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}$，不计重力，证明动能 $T=\dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\bullet\dot{\vec{r}}$ 是运动积分。

（提示：$\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$）

证明：

由牛顿第二定律得：

$$m\ddot{\vec{r}}=-ge\frac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\bullet\dot{\vec{r}}\right)\\&=m\dot{\vec{r}}\bullet\ddot{\vec{r}}\\&=\dot{\vec{r}}\bullet\left(-ge\frac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}\right)\\&=-ge\frac{\dot{\vec{r}}\bullet\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{r}\right)}{r^3}\\&=0\end{aligned}$$

所以动能$T=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\bullet\dot{\vec{r}}$是运动积分。

2. 平面谐振子的哈密顿量为：

3. $$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2\right)$$

角动量为：

$$\vec{J}=\left(xp_y-yp_x\right)\vec{k}$$

由泊松括号证明：

$$\left[H,J_z\right]=mxy\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)$$

证明：

由泊松括号得：

$$\begin{aligned}\left[H,J_z\right]&=\left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial J_z}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial J_z}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial J_z}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial J_z}{\partial p_y}\right)\\&=mxy\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\end{aligned}$$

草稿区

得 分

、三 、**计算题（本题共 60 分，共 4 小题，每小题 15 分）**

草稿区

1．曲柄连杆机构如图所示：

曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动，$OA=r$ ，$AB=l$ ，当 $\lambda=\frac{r}{l}$ 比较小时，以 O 为原点，滑块 B 的运动方程近似为：

$$x=l\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)+r\left(\cos\omega t+\frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right)$$

如果滑块的质量为 m ，忽略摩擦以及连杆 AB 的质量，试求当 $\varphi=\omega t=0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时滑块受到的力 F

解：

由牛顿第二定律得：

$$F\cos\beta=ma_x$$

其中：

$$a_x=\frac{dx^2}{dt^2}=-r\omega^2\left(\cos\omega t+\lambda\cos 2\omega t\right)$$

当 $\varphi=\omega t=0$ 时：

$$a_x=-r\omega^2\left(1+\lambda\right)\qquad \beta=0$$

所以：

$$F=mr\omega^2\left(1+\lambda\right)$$

当 $\varphi=\omega t=\frac{\pi}{2}$ 时：

$$a_x=r\omega^2\lambda\qquad \cos\beta=\frac{1}{l}\sqrt{l^2-r^2}$$

所以：

$$F=-\frac{1}{\sqrt{l^2-r^2}}mr^2\omega^2$$

2．一个质量为 m 的粒子在一个光滑的平面上运动，它受到平面上一个固定点 P 的吸引力，力的大小与距 P 点距离的平方成反比可以写成：$\vec{F}=-\frac{k}{r^3}\vec{r}$ 其中 k 为常量。用极坐标表示该粒子的运动状态。应用拉格朗日方程，求粒子运动的微分方程。

解：

系统的动能：

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

取无穷远点处的势能为零,则系统的势能为：

$$V=-\int_\infty^r\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_r^\infty\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_r^\infty\left(-\frac{k}{r^2}\right)dr=-\frac{k}{r}$$

拉格朗日量可以写成：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{k}{r}$$

应用拉格朗日方程：

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$　　得　　$m\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)+\frac{k}{r^2}=0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$　　得　　$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)=0$

3．已知一个系统的拉格朗日函数为 $L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2$，若 $x=A\sin t$，其中 A 为常数，在等时变分条件下有 $\delta t\big|_{t=0}=\delta t\big|_{t=\frac{\pi}{8}}=0$。求作用量 $S=\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt$ 的变分 δS 的值？

解：

$$\delta S=\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt=\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\dot{x}\delta\dot{x}-x\delta x\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\delta x-x\delta x\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\delta x\right)-\frac{d\dot{x}}{dt}\delta x-x\delta x\right)dt$$

$$=\left(\dot{x}\delta x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}\delta x+x\delta x\right)dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}+x\right)\delta xdt$$

代入 $x=A\sin t$ 得

$$\ddot{x}+x=-A\sin t+A\sin t=0$$

所以：

$$\delta S=0$$

4．已知一个系统的动能的表达式为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{\theta}^2l^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

势能为：$V=mgl\sin\theta$，其中 x,θ 为广义坐标，m,l,g 为常量。由广义动量的定义、哈密顿函数的定义构建哈密顿函数，并由哈密顿函数和以及正则方程的定义求 $\dot{x},\dot{p}_x,\dot{\theta},\dot{p}_\theta$

解：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{\theta}^2l^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)-mgl\sin\theta$$

由广义动量的定义：

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2m\dot{x}+ml\dot{\theta}\sin\theta$$

$$p_\theta=ml^2\dot{\theta}+ml\dot{x}\sin\theta$$

联立上述方程：

$$\dot{x}=\frac{lp_x-\sin\theta p_\theta}{ml\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

$$\dot{\theta}=\frac{2p_\theta-l\sin\theta p_x}{ml^2\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

由哈密顿函数的定义：

$$\begin{aligned}H&=\sum_{\alpha=1}^{S}p_\alpha\dot{q}_\alpha-L=\sum_{\alpha=1}^{S}p_\alpha\dot{q}_\alpha-T+V\\&=\frac{1}{2ml^2\left(1+\cos^2\theta\right)}\left[l^2p_x^2-2l\sin\theta p_xp_\theta+2p_\theta^2\right]+mgl\sin\theta\end{aligned}$$

由正则方程得：

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{lp_x-\sin\theta p_\theta}{ml\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{2p_\theta-l\sin\theta p_x}{ml^2\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta=&\frac{\left(2+\sin^2\theta\right)\cos\theta}{ml\left(1+\cos^2\theta\right)^2}p_xp_\theta-\frac{\sin2\theta}{2m\left(1+\cos^2\theta\right)^2}p_x^2\\&-\frac{\sin2\theta}{ml^2\left(1+\cos^2\theta\right)^2}p_\theta^2+mgl\cos\theta\end{aligned}$$