物理科学学院本科生 09——10 学年第一学期 理论力学 课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　　　姓名：　　　　　　成绩:

草稿区

得 分

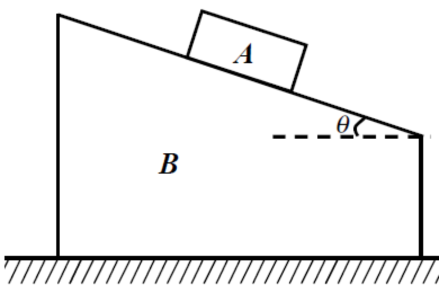
一 、（本题共 20 分，每空 2 分）

1. 时间的均匀性导致__能量______守恒；空间的均匀性导致___动量_____守恒；空间的各项同性___角动量____守恒。
2. 质点系动能定理告诉我们，质点系动能的增加等于____外力和内力所做元功之和____________________________________。
3. 对于由 n 个质点组成的质点系，达朗贝尔方程可以表示为 $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\bullet\delta\vec{r}_i = 0$，其中 $\vec{F}_i$ 表示的是_____第 i 个质点的主动力_____________________________；$\delta\vec{r}_i$ 为___第 i 个质点的虚位移_______。
4. 散射截面可以定义为 $d\sigma = \dfrac{dN}{n}$，其中 dN 的定义为__单位时间散射到 θ 到 $\theta + d\theta$ 角度内的粒子数______________________；n 的定义为 单位时间内通过垂直于粒子束前进方向的单位面积的粒子数__________________。
5. $H(p_1, p_2, \cdots, p_s, q_1, q_2, \cdots, q_s, t)$ 为正则变量 p, q 和 t 的函数，在正则变换中，$H^*(P_1, P_2, \cdots, P_s, Q_1, Q_2, \cdots, Q_s, t)$ 为新正则变量 P, Q 和 t 的函数，若母函数用 F 表示，则 H^* 与 H 和 F 的关系为___$H^* = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}$________________________。
6. 若某一力学量 $f(p, q, t)$ 不显含时间，H 为该体系的哈密顿量，应用泊松括号判断力学量 $f(p, q, t)$ 为运动积分的条件是____$[H, f] = 0$______________________。

得 分

二 、（本题 20 分）

质量为 m_1 的物块 A 置于倾角为 θ 的光滑斜面 B 上。斜面 B 置于水平面上。当斜面 B 以水平向右加速度 a_1 运动时，物块 A 沿斜面下滑。求



（1）物块 A 沿斜面下滑的加速度 a_2 和物块 A 与斜面之间的作用力 $\vec{F}$。

（2）当斜面 B 的加速度 a_1 为何值时，物块 A 相对于斜面 B 静止，此时物块 A 与斜面 B 之

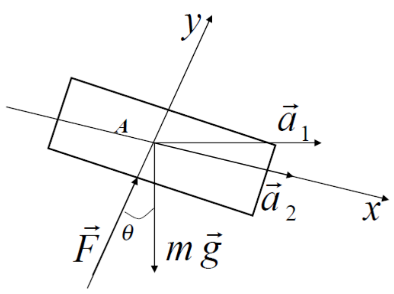
间的作用力 $\vec{F}$ 为多少。

（3）若斜面 B 的加速度 a_1 的方向水平向左，当 a_1 的大小为何值时，物块 A 与斜面 B 之间的作用力 $\vec{F}$ 为零，此时物块 A 的加速度的大小为多少。

解：

（1）物块 A 沿斜面 B 下滑，斜面 B 在水平面上运动，因此物块 A 可视为质点。

设物块 A 相对于水平面的加速度为 $\vec{a}$，则：



$$\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2$$

物块 A 受重力 $m\vec{g}$ 和垂直于斜面向上的约束力 $\vec{F}$ 。建立坐标系如图：

$$m_A\left(a_2+a_1\cos\theta\right)=m_A g\sin\theta$$

$$m_A a_1\sin\theta=F-m_A g\cos\theta$$

由上述两式解得：

$$a_2=g\sin\theta-a_1\cos\theta$$

$$F=m_A\left(a_1\sin\theta+g\cos\theta\right)$$

（2）由上式得：

当 $a_1=g\tan\theta$ 时，物块 A 相对于斜面 B 的加速度为零。此时

$$F=m_A g/\cos\theta$$

（3）$F=m_A\left(a_1\sin\theta+g\cos\theta\right)$ 得，当斜面 B 水平向左的加速度 $a_1=g\cot\theta$ 时，$F=0$ 。此时物块 A 的加速度 $a_2=g$ 。

得 分

三 、证明题（本题 20 分）

在直角坐标系内，$\vec{p}$ 为动量，$\vec{J}$ 为角动量。由泊松括号证明:

(1) $\left[J_x, p_x\right]=0$；(2) $\left[J_x, p_y\right]=-p_z$；(3) $\left[J_x, p_z\right]=p_y$

证明:

动量 $\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k}$

角动量 $\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=\left(yp_z-zp_y\right)\vec{i}+\left(zp_x-xp_z\right)\vec{j}+\left(xp_y-yp_x\right)\vec{k}$

$$J_x=\left(yp_z-zp_y\right)$$
$$J_y=\left(zp_x-xp_z\right)$$
$$J_z=\left(xp_y-yp_x\right)$$

若 $f=f\left(p,q,t\right)$ ，$g=g\left(p,q,t\right)$，则泊松括号为:

$$\left[f,g\right]=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right)$$

（1）

$$\begin{aligned}\left[J_x, p_x\right]&=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_x}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_x}{\partial p_\alpha}\right)\\
&=\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z}-\frac{\partial J_x}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right)\\
&=\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial x}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial x}\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\right)\\
&\quad+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_y}\frac{\partial p_x}{\partial y}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial y}\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\right)\\
&\quad+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_z}\frac{\partial p_x}{\partial z}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial z}\frac{\partial p_x}{\partial p_z}\right)\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\partial q_\alpha}{\partial q_\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ ，$\dfrac{\partial q_\alpha}{\partial p_\beta}=0$ ，$\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}=\delta_{\alpha\beta}$ ，$\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial q_\beta}=0$ 得:

$$\left[J_x, p_x\right]=0$$

（2）

$$\left[J_x,p_y\right]=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_y}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_y}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_x}\frac{\partial p_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial x}\frac{\partial p_y}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_y}\frac{\partial p_y}{\partial y}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\frac{\partial p_y}{\partial p_y}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_z}\frac{\partial p_y}{\partial z}-\frac{\partial J_x}{\partial z}\frac{\partial p_y}{\partial p_z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_x}\frac{\partial p_y}{\partial x}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial x}\frac{\partial p_y}{\partial p_x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_y}\frac{\partial p_y}{\partial y}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial y}\frac{\partial p_y}{\partial p_y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_z}\frac{\partial p_y}{\partial z}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial z}\frac{\partial p_y}{\partial p_z}\right)$$

$$\left[J_x,p_y\right]=-p_z$$

（3）

$$\left[J_x,p_z\right]=\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_z}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_z}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_x}\frac{\partial p_z}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial x}\frac{\partial p_z}{\partial p_x}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_y}\frac{\partial p_z}{\partial y}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\frac{\partial p_z}{\partial p_y}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial p_z}\frac{\partial p_z}{\partial z}-\frac{\partial J_x}{\partial z}\frac{\partial p_z}{\partial p_z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_x}\frac{\partial p_z}{\partial x}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial x}\frac{\partial p_z}{\partial p_x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_y}\frac{\partial p_z}{\partial y}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial y}\frac{\partial p_z}{\partial p_y}\right)$$

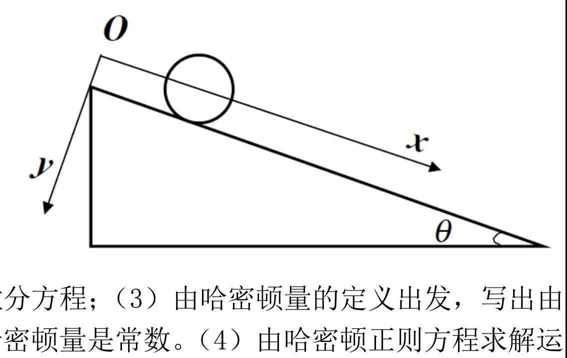
$$+\left(\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial p_z}\frac{\partial p_z}{\partial z}-\frac{\partial\left(yp_z-zp_y\right)}{\partial z}\frac{\partial p_z}{\partial p_z}\right)$$

$$\left[J_x,p_z\right]=p_y$$

得 分

四 、（本题共 20 分）

如图所示，倾角为θ的斜面固定在水平桌面上，质量为m，半径为R的均匀实心圆柱体自斜面顶端坐标原点O处，由静止开始沿斜面滚下（运动过程中无滑动）。（1）写出体系的拉格朗日量；（2）由拉格朗日方程求出圆柱体的运动微分方程；（3）由哈密顿量的定义出发，写出由广义动量和广义坐标表示的哈密顿量，并证明哈密顿量是常数。（4）由哈密顿正则方程求解运动微分方程。（实心圆柱体绕轴心的转动惯量为$I_C=\dfrac{1}{2}mR^2$）



解：

设圆柱体的圆心为C，其坐标为：

$$x_C = R\psi$$

$$y_C = 0$$

其中ψ为圆柱体由静止开始滚动的角度。

圆柱体的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2$$

取势能为：

$$V = -mgx_C\sin\theta$$

（1）体系的拉格朗日量为

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2 + mgx_C\sin\theta = \frac{3}{4}m\dot{x}_C^2 + mgx_C\sin\theta$$

（2）由拉格朗日方程得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_C} = 0$$

将拉格朗日量代入上式得：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = \frac{3}{2}m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_C} = mg\sin\theta$$

运动微分方程为：

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3}\mathrm{g}\sin\theta$$

（3）由广义动量的定义得：

$$p_{x_C} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = \frac{3}{2}m\dot{x}_C$$

由哈密顿量定义得：

$$H = p_{x_C}\dot{x}_C - L = \frac{3}{2}m\dot{x}_C^2 - (\frac{3}{4}m\dot{x}_C^2 + mgx_C\sin\theta) = \frac{3}{4}m\dot{x}_C^2 - mgx_C\sin\theta$$

所以：

$$H = \frac{1}{3}\frac{p_{x_C}^2}{m} - mgx_C\sin\theta$$

因为哈密顿量不显含时间，因此有

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

由

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

得，体系的哈密顿量是守恒的。

（4）由正则方程得：

$$\dot{x}_C=\frac{\partial H}{\partial p_{x_C}}=\frac{2}{3}\frac{p_{x_C}}{m}$$

$$\dot{p}_{x_C}=-\frac{\partial H}{\partial x_C}=mg\sin\theta$$

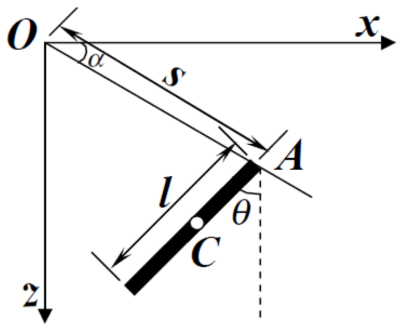
所以有：

$$\ddot{x}_C=\frac{2}{3}\mathrm{g}\sin\theta$$

得 分

五 、（本题共 20 分）

长为 l，质量为 m 的均匀细棒在竖直面 Oxz 内运动，其一端 A 始终限制在直线 $z=x\tan\alpha$ 上运动（该直线与 Ox 轴的夹角为 α ）。以 s 和 θ 为广义坐标，应用哈密顿原理，求运动微分方程。（已知细棒绕 A 点的转动惯量 $I=\frac{1}{12}ml^2$ ）



解：

体系的动能：

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_C^2+\dot{z}_C^2\right)+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

势能

$$V=mgz_C$$

由几何关系得：

$$x_C=s\cos\alpha-\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$z_C=s\sin\alpha+\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\dot{x}_C=\dot{s}\cos\alpha-\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{z}_C=\dot{s}\sin\alpha-\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

所以拉格朗日量为

$$L=\frac{1}{2}m\left[\dot{s}^2+\frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2-l\dot{s}\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right]+mg\left(s\sin\alpha+\frac{1}{2}l\cos\theta\right)$$

由哈密顿原理得：

$$\begin{aligned}
\delta S&=\delta\int_{t_0}^{t}Ldt\\
&=\delta\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[\dot{s}^2+\frac{1}{3}l^2\dot{\theta}^2-l\dot{s}\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right]+mg\left(s\sin\alpha+\frac{1}{2}l\cos\theta\right)\right\}dt\\
&=\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[2\dot{s}\delta\dot{s}+\frac{2}{3}l^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}-l\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\delta\dot{s}\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[-l\dot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)\delta\dot{\theta}+l\dot{s}\dot{\theta}\sin\left(\theta-\alpha\right)\delta\theta\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{mg\left(\sin\alpha\delta s-\frac{1}{2}l\sin\theta\delta\theta\right)\right\}dt\\
&=\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[\left(2\dot{s}-l\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta\dot{s}+\left(\frac{2}{3}l^2\dot{\theta}-l\dot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta\dot{\theta}\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\left(mg\sin\alpha\delta s+\frac{1}{2}m\left(l\dot{s}\dot{\theta}\sin\left(\theta-\alpha\right)-g\sin\theta\right)\delta\theta\right)\right\}dt\\
&=\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(\left(2\dot{s}-l\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta s\right)\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[-\left(2\ddot{s}-l\ddot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)+l\dot{\theta}^2\sin\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta s\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{2}{3}l^2\dot{\theta}-l\dot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta\theta\right)\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[-\left(\frac{2}{3}l^2\ddot{\theta}-l\ddot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)+l\dot{s}\dot{\theta}\sin\left(\theta-\alpha\right)\right)\delta\theta\right]\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\left(mg\sin\alpha\delta s+\frac{1}{2}m\left(l\dot{s}\dot{\theta}\sin\left(\theta-\alpha\right)-gl\sin\theta\right)\delta\theta\right)\right\}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta S&=\frac{1}{2}m\left[2\dot{s}-l\dot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right]\delta s\Big|_{t_0}^{t}+\frac{1}{2}m\left[\frac{2}{3}l^2\dot{\theta}-l\dot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)\right]\delta\theta\Big|_{t_0}^{t}\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[-\left(2\ddot{s}-l\ddot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)+l\dot{\theta}^2\sin\left(\theta-\alpha\right)-g\sin\alpha\right)\right]\delta s\right\}dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{2}m\left[-\left(\frac{2}{3}l^2\ddot{\theta}-l\ddot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)+l\dot{s}\dot{\theta}\sin\left(\theta-\alpha\right)+gl\sin\theta\right)\right]\delta\theta\right\}dt\\
&=0
\end{aligned}$$

所以：

$$\ddot{s}-\frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\left(\theta-\alpha\right)+\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2\sin\left(\theta-\alpha\right)-g\sin\alpha=0$$

$$\frac{1}{3}l^2\ddot{\theta}-\frac{1}{2}l\ddot{s}\cos\left(\theta-\alpha\right)+\frac{1}{2}gl\sin\theta=0$$