物理科学学院本科生 09——10 学年第一学期 理论力学 课程期末考试试卷（B 卷）

专业：　　　　　　　年级：　　　　学号：　　　　　　姓名：　　　　　成绩:

得 分

一 、（本题共 20 分，每空 2 分）

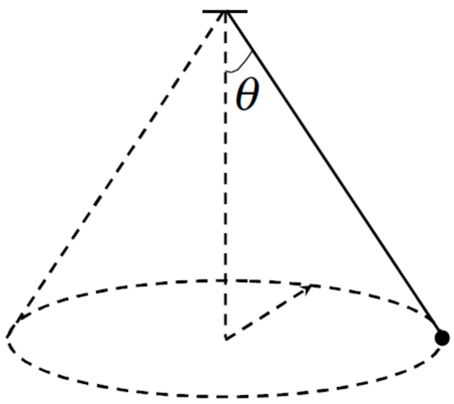
草稿区

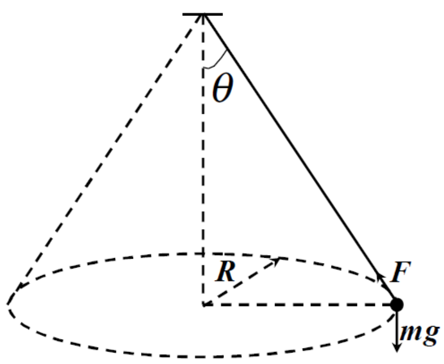
1. 质点系动量定理表明：质点系动量的变化等于体系所受到的合外力_____________；
   质点系角动量定理表明：质点系角动量的变化率等于作用在质点系上所有外力距之和；
   质点系动能定理表明：质点系动能的增加等于外力和内力所做的元功之和。
2. 关于刚体，一般情况下，自由度为__6__，平动时自由度为__3__，定轴转动时自由度为__1__，平面平行运动时自由度为__3__，定点转动时自由度为__3__。
3. 一个体系的约束方程为 $f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,t\right)=0$，其中 $\vec{r}_i$ 体系第 i 个质点的坐标，该约束被称为__完整约束______，若一个力学体系所受到的约束全部为上述约束，则该力学体系被称为__完整体系________。
4. 已知 $J=\left[f,g\right]$，若 f 和 g 都是运动积分，J 是_运动积分______。

得 分

二 、（本题 20 分）

如图所示，摆长为 l，摆球质量为 m 的圆锥摆，摆线与垂线之间的夹角为 θ，当摆球在水平面内做匀速圆周运动时，求摆球的速度和摆线的张力。





解：
依题意得：

$$F\cos\theta-mg=0$$

$$m\frac{v^2}{R}=F\sin\theta$$

解得：

$$F=\frac{mg}{\cos\theta}$$

$$v=\sqrt{\frac{Fl\sin^2\theta}{m}}$$

得 分

三 、证明题（本题 20 分）

已知$\varphi=\varphi\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)$ ， $\psi=\psi\left(p_\alpha,q_\alpha,t\right)$求证$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]$

证明：

由泊松括号

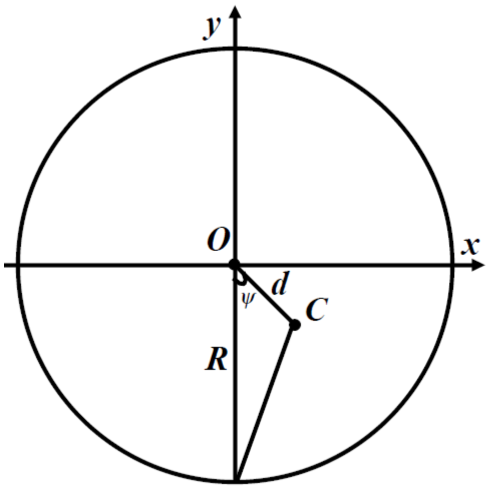
$$[\varphi,\psi]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]&=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)\\
&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)\right)\\
&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right)\\
&=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\right)\\
&\quad+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\right)\\
&=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\end{aligned}$$

得 分

四 、（本题共 20 分）

质量为m，半径为R的偏心薄圆盘，质心C距圆盘几何中心的距离为d。现使圆盘垂直于水平面，并在水平面上向右做平面平行运动（只滚动不滑动）。取水平方向为x轴，竖直方向为y轴，$t=0$时刻，圆盘的几何中心位于坐标原点处，此时C与坐标原点的连线与y轴的夹角为ψ。取广义坐标为ψ，（1）写出拉格朗日量，并由拉格朗日方程求出运动微分方程；（2）由哈密顿量的定义出发，写出由广义动量和广义坐标表示的哈密顿量；（3）由哈密顿正则方程求解运动微分方程。（绕质心的转动惯量为$I_C=m\rho_C^2$）



解：

取广义坐标为ψ，质心的坐标为：

$$x_C=-R\psi+d\sin\psi$$
$$y_C=-d\cos\psi$$

体系的动能为：

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\dot{\psi}^2=\frac{1}{2}m\left(r_{PC}\dot{\psi}\right)^2+\frac{1}{2}m\rho_C^2\dot{\psi}^2\\&=\frac{1}{2}m\left(r_{PC}^2+\rho_C^2\right)\dot{\psi}^2\\&=\frac{1}{2}m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}^2\end{aligned}$$

势能为：

$$V=-mgd\cos\psi$$

（1）

体系的拉格朗日量为：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}^2+mgd\cos\psi$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\psi}=0$$

得：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}^2+mgd\cos\psi\right)$$

$$=m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right)=m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\ddot{\psi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi}=\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{2}m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}^2+mgd\cos\psi\right)$$

$$=-mRd\dot{\psi}^2\sin\psi-mgd\sin\psi$$

$$=-\left(R\dot{\psi}^2+g\right)md\sin\psi$$

所以：

$$\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\ddot{\psi}+\left(R\dot{\psi}^2+g\right)d\sin\psi=0$$

由广义动量定义得：

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}=m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\dot{\psi}$$

$$\dot{\psi}=\frac{p_\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

哈密顿量定义为：

$$H=p_\psi\dot{\psi}-L$$

$$=\frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}-mgd\cos\psi$$

由正则方程：

$$\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p}_\psi=-\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}}$$

得：

$$\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial p_\psi}\left(\frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)} - mgd\cos\psi\right)$$

$$= \frac{p_\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

$$\dot{p}_\psi = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)} - mgd\cos\psi\right)$$

$$= \frac{p_\psi^2}{2m}\frac{2Rd\sin\psi}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)^2} - mgd\sin\psi$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\psi} = \frac{d}{dt}\frac{p_\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

$$= \frac{\dot{p}_\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)} + \frac{p_\psi 2Rd\dot{\psi}\sin\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)^2}$$

$$= \frac{1}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}\frac{p_\psi^2}{2m}\frac{2Rd\sin\psi}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)^2}$$

$$-\frac{1}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}mgd\sin\psi$$

$$-\frac{p_\psi 2Rd\dot{\psi}\sin\psi}{m\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)^2}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{Rd\dot{\psi}^2\sin\psi}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

$$-\frac{1}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}gd\sin\psi$$

$$-\frac{2Rd\dot{\psi}^2\sin\psi}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

$$= -\frac{Rd\dot{\psi}^2\sin\psi + gd\sin\psi}{\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)}$$

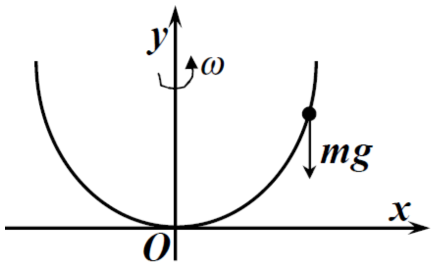
所以：

$$\left(R^2+d^2+\rho_C^2-2Rd\cos\psi\right)\ddot{\psi} + \left(R\dot{\psi}^2+g\right)d\sin\psi = 0$$

得 分

五 、（本题共 20 分）

抛物线形细丝其对称轴为竖直轴 Oy，现使该抛物线形细丝绕 Oy 轴以 ω 角速度转动，一质量为 m 的小圆环套在金属丝上，并沿金属丝无摩擦地下滑。以 x 为广义坐标，应用正则方程，求小圆环在 x 轴方向上的运动微分方程。设抛物线方程为 $y=4ax^2$，其中 $a>0$ 为常数。



解：

小圆环的等能为

$$T=\frac{1}{2}m\left[\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\omega^2x^2\right]$$

势能为：

$$V=mgy$$

由抛物线方程得：

$$y=\frac{x^2}{4a}\quad,\quad\dot{y}=\frac{x}{2a}\dot{x}$$

由上式得以 x 为广义坐标的拉格朗日方程为

$$L=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+\omega^2x^2\right]-mg\frac{x^2}{4a}$$

由广义动量定义得：

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial}{\partial\dot{x}}\left\{\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+\omega^2x^2\right]-mg\frac{x^2}{4a}\right\}$$

$$=m\dot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)$$

所以：

$$\dot{x}=\frac{p_x}{m\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)}$$

因此由广义动量表示的哈密顿量为：

$$H=p_x\dot{x}-L$$

$$=\frac{1}{2m}\left(\frac{p_x^2}{1+\frac{x^2}{4a^2}}\right)-\frac{m}{2}\omega^2+mg\frac{x^2}{4a}$$

由哈密顿正则方程

$$\dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

得

$$\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2-\omega^2x+g\frac{x}{2a}=0$$