物理学院本科生 06——07 学年第二学期理论力学课程期末考试试卷（A 卷）

专业： 年级： 学号： 姓名： 成绩:

得 分

、一 、填空题（本题共 20 分，共 5 小题，每空 2 分，共 10 个空）

草稿区

1．质点系动量的变化率等于（体系所受到的合外力）。

2．质点系的动能的增加，等于（外力和内力所作的元功之和）。

3．时间的均匀性导致（能量守恒），空间的均匀性导致（动量守恒），空间的各项同性导致（角动量守恒）。

4．力 $\vec{F}$ 在虚位移下所作的功称为虚功，用 $\vec{F}_{Ni}$ 表示第 i 个质点所受到的约束力，理想约束的定义为：（ $\sum_i \vec{F}_{Ni} \bullet \delta\vec{r} = 0$ ） 。

5．刚体平动的自由度为（**3**），定轴转动自由度为（**1**），平面平行运动自由度为（**3**）。刚体的一般运动自由度为（**6**）。

得 分

、二 、证明题（本题共 **20** 分，共 **2** 小题，每小题 **10** 分）

1. 设一质点在 x, y, z 方向的动量分量分别为 p_1, p_2, p_3。对三轴的角动量分别用 J_1, J_2, J_3 表示。应用泊松括号定义证明：

（**1**） $\left[p_\alpha, p_\beta\right] = 0$ （其中 $\alpha, \beta = 1, 2$）

（**2**） $\left[J_\alpha, p_\alpha\right] = 0$ （其中 $\alpha = 1, 2$ ）

证明：

（**1**）用 q_1, q_2, q_3 表示 x, y, z

由泊松括号：

$$[f,g]=\left(\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q_1}+\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q_2}+\frac{\partial f}{\partial p_3}\frac{\partial g}{\partial q_3}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial g}{\partial p_1}+\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial g}{\partial p_2}+\frac{\partial f}{\partial q_3}\frac{\partial g}{\partial p_3}\right)$$

得：

$$\begin{aligned}
\left[p_\alpha,p_\beta\right]&=\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_1}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_2}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_3}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_3}\right)\\
&\quad-\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_1}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_2}+\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_3}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_3}\right)\\
&=\left(\delta_{1\alpha}\times0+\delta_{2\alpha}\times0+\delta_{3\alpha}\times0\right)\\
&\quad-\left(0\times\delta_{1\beta}+0\times\delta_{2\beta}+0\times\delta_{3\beta}\right)\\
&=0
\end{aligned}$$

同理

2．有角动量定义得：

$$\begin{cases}J_1=m\dot{z}y-zm\dot{y}=p_3q_2-q_3p_2\\ J_2=m\dot{x}z-xm\dot{z}=p_1q_3-q_1p_3\\ J_3=m\dot{y}x-ym\dot{x}=p_2q_1-q_2p_1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\left[J_1,p_1\right]&=\left[\left(p_3q_2-q_3p_2\right),p_1\right]\\
&=p_3\left[q_2,p_1\right]+\left[p_3,p_1\right]q_2-q_3\left[p_2,p_1\right]-\left[q_3,p_1\right]p_2\\
&=0
\end{aligned}$$

同理：

$$\left[J_2,p_2\right]=\left[J_3,p_3\right]=0$$

所以$\left[J_\alpha,p_\alpha\right]=0$

2．已知某完整保守体系，其拉格朗日函数为：

$$L=\frac{1}{2}(m+m')\dot{R}^2+\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2-m'g\left(R-l\right)$$

其中，R,φ为广义坐标，m,m',g,l为常数。由拉格朗日方程证明系统的运动微分为：$\left(m+m'\right)\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+m'g=0$和$\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right)=0$

证明：

对于自由度 R ：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}=\left(m+m'\right)\dot{R} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}=\left(m+m'\right)\ddot{R}$$

$$\frac{\partial L}{\partial R}=mR\dot{\varphi}^2-m'g$$

由拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}-\frac{\partial L}{\partial R}=0$ 得

$$\left(m+m'\right)\ddot{R}-mR\dot{\varphi}^2+m'g=0$$

对于自由度 φ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mR^2\dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

由拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$ 得：

$$\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi}\right)=0$$

得 分

、三 、计算题（本题共 60 分，共 4 小题，每小题 15 分）

1．一质点无摩擦地在环形轨道上下滑，轨道弯曲段的曲率半径为 R，该质点由高 h 处由静止开始下滑，在某处质点开始和轨道脱离接触，试分析并说明脱离接触的位置，并计算发生这种情况的 h 的最小值。

解：开始与轨道脱离接触的位置是拐点 A，在到达 A 点以前要脱离轨道，需要轨道的支持力为零，可这支持力不为零，因此，到达 A 点以前不可能脱离轨道。另一方面，，如果在 A 点未脱离轨道，则在 A 到 B 的过程中，因速率减小，而重力的法向分量增大，轨道的支持力必然增大，自然是不能脱离轨道的，过 B 点以后，直到 A 同样高度处，根据对称性考虑，也和 A 到 B 的过程一样，不能脱离轨道。再以后，脱离轨道是可能的。问题是发生脱离轨道的最小的 h 多大？开始脱离轨道的位置是在 A 店还是在别处？

首先考虑在 **A** 点开始脱离轨道需要的最小的高度 **h**，由向心力公式得：

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos 60^\circ = \frac{1}{2}mg$$

则：

$$v^2 = \frac{1}{2}gR$$

由机械能守恒定律，

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin 30^\circ = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}gR\right) + mgR\sin 30^\circ$$

所以：

$$h = \frac{3}{4}R$$

要越过轨道高度的极大值 **B** 点，**h** 必须大于 **R**，因此，发生脱离轨道的最小值应为 $\frac{3}{4}R$，开始脱离轨道的位置只能在 **A** 点。

2．自由落体的拉格朗日量可以表示为：$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$，试根据哈密顿原理求解自由落体运动的真实规律为： $z = \frac{1}{2}gt^2$

解：

根据哈密顿原理：

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\dot{z}^2+mgz\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[m\dot{z}\delta\dot{z}+mg\delta z\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\delta z\right)-\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\right)\delta z+mg\delta z\right]dt \\
&= \left(m\dot{z}\delta z\right)\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[mg\left(g-\ddot{z}\right)\right]\delta z dt \\
&= 0 \\
&\left(\delta z\big|_{t_1}=\delta z\big|_{t_2}=0\right)
\end{aligned}
$$

因为 δz 是任意的不为零的量，所以：

$$mg\left(g-\ddot{z}\right)=0$$

所以：

$$g=\ddot{z}$$

积分得：

$$dz=gtdt$$

再积分得：

$$z=\frac{1}{2}gt^2$$

3．带电粒子电磁场中运动，以失势 $\vec{A}(\vec{r},t)$、标势 $\varphi\left(\vec{r},t\right)$、电荷量 e 和电荷的质量 m 等物理量表示系统的拉格朗日函数，该拉格朗日函数可以写成：$L=\frac{1}{2}mv^2-e\left(\varphi-\vec{v}\bullet\vec{A}\right)=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2-e\left(\varphi-\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_iA_i\right)$，应用广义动量的定义和哈密顿函数的定义，求解哈密顿函数的表达式。

解：应用广义动量的定义：$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=m\dot{x}_i+eA_i$

由上式得：

$$\dot{x}_i=\frac{\left(p_i-eA_i\right)}{m}$$

应用哈密顿函数定义：$H=\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i-L$

得：

$$\begin{aligned}H&=\sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i-L\\&=\sum_{i=1}^{3}p_i\frac{p_i-eA_i}{m}-\left[\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(p_i-eA_i\right)^2}{m^2}-e\left(\varphi-\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i-eA_i}{m}A_i\right)\right]\\&=\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(p_i-eA_i\right)^2}{2m}+e\varphi\\&=\frac{1}{2}mv^2+e\varphi\end{aligned}$$

4．已知复摆做为振动时的拉格朗日量可以写成：

$$L=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mgl\left(1-\cos\theta\right)\approx\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

其中 I （常量）为复摆的转动惯量张量，m 为复摆的质量，l 为复摆的长度。应用哈密顿原理，求复摆的运动微分方程。

解：

$$\begin{aligned}S\left[\theta\left(t\right)\right]&=\int_{t_0}^{t_1}Ldt\\&=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2\right)dt\end{aligned}$$

由哈密顿原理：

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1}\left(I\dot{\theta}\delta\dot{\theta} - mgl\theta\delta\theta\right)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left(I\dot{\theta}\frac{d}{dt}\delta\theta - mgl\theta\delta\theta\right)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\delta\theta\right) - \left(\frac{d}{dt}\left(I\dot{\theta}\right) + mgl\theta\right)\delta\theta\right)dt \\
&= I\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left(I\ddot{\theta} + mgl\theta\right)\delta\theta dt \\
&= -\int_{t_0}^{t_1}\left(I\ddot{\theta} + mgl\theta\right)\delta\theta dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以运动微分方程为：

$$I\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$