物理科学学院本科生 08——09 学年第二学期 理论力学 课程期末考试试卷（A 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　　　姓名：　　　　　　成绩：

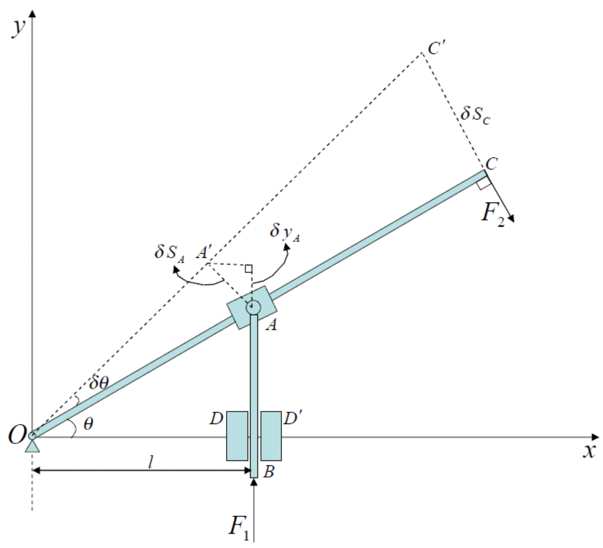
得 分

一 、（本题共 20 分，每小题 5 分）

草稿区

1. 给定点在直角坐标系下的运动规律为：$x=a\cos bt$，$y=a\sin bt$，$z=ct$，其中 a，b，c 是长量，则 $x^2+y^2=$（a^2）。速度的分量为：$v_x=$（$-ab\sin bt$），$v_z=$（c）。加速度的分量为：$a_y=$（$-ab^2\sin bt$），$a_z=$（0）。

2. 如图所示，质量不计的细杆 OC 置于平面直角坐标系中，细杆可绕固定点 O 转动，质量不计的细杆 AB 平行 y 轴且 DD' 被限制在只能沿平行 y 轴移动，A 点处的套环可以在 OC 上自由滑动。已知细杆 OC 的长度为 R，细杆 AB 到 O 点的距离为 l，现在细杆 AB 的底端加一竖直向上的力 F_1，



在细杆 OC 的 C 点加一垂直细杆向下的力 F_2，系统在细杆 OC 与 Ox 轴夹角为 θ 处保持静止。忽略所有接触处的摩擦。若假想细杆 OC 沿逆时针旋转 $\delta\theta$，细杆 AB 沿 y 轴的虚位移为 δy_B，细杆 OC 的虚位移为 δS_C。系统的虚功的表达式为 $\delta W=$（$F_1\delta y_A-F_2\delta S_C$）。根据题意有 $\delta S_A=$（$\dfrac{l}{\cos\theta}$）$\delta\theta$，且 $\delta y_B=$（$\dfrac{l}{\cos^2\theta}$）δS_A，$\delta S_C=$（R）$\delta\theta$。因此由虚功原理得 $F_1/F_2=$（$\dfrac{R}{l}\cos^2\theta$）。

3. xOy 平面内的一 V 形槽其数学表达式为 $y=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$，在槽内有一质量为 m 的质点，其重力势能为 $V(x)=\begin{cases}mgx & x\ge 0\\ -mgx & x<0\end{cases}$，势能函数对 x 求导数，有 $\dfrac{dV(x)}{dx}=\begin{cases}mg & x\ge 0\\ \text{-}mg & x<0\end{cases}$，对于 $x=0$ 点有 $\left.\dfrac{dV(x)}{dx}\right|_{x=0}=mg$，是否可以由此判断

$x=0$ 点处的质点的稳定性，其理由为（因为其数学表达式中在 $x=0$ 点处导数不存在，因此不能用此方法判断在该点处的稳定情况）。

4. 摆长为 L 的单摆，如果取摆线与竖直方向的夹角 φ 为广义坐标，则该系统的动能

$T=$（ $\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$ ），势能 $V=$（ $-mgl\cos\varphi$ ）。由

$p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$ 定义得，哈密顿函数 $H=$（ $\frac{1}{2ml^2}p_\varphi-mgl\cos\varphi$ ）（用 p_φ 和 φ 表示）。由

哈密顿正则方程得 $\frac{d\varphi}{dt}=$（ $\frac{1}{2ml^2}p_\varphi$ ）（用 p_φ 表示），$\frac{dp_\varphi}{dt}=$（ $-mgl\sin\varphi$ ）。

得 分

二 、（本题共 15 分）

天文学家通过观测的数据确认了银河系中央的黑洞“人马座 A*”的质量与太阳质量的关系。研究发现，有一星体 S2 绕人马座 A*做椭圆运动，其轨道半长轴为 9.50×10^2 天文单位（地球公转轨道的半径为一个天文单位），人马座 A*就处在该椭圆的一个焦点上。观测得到 S2 星的运行周期为 15.2 年。

（1）若将 S2 星的运行轨道视为半径 $r=9.50\times10^2$ 天文单位的轨道，试估算人马座 A*的质量 M_A 与太阳质量 M_S 的多少倍（结果保留一位有效数字）；

（2）黑洞的第二宇宙速度极大，处于黑洞表面的粒子即使以光速运动，其具有的动能也不足以克服黑洞对它的引力束缚。由于引力的作用，黑洞表面处质量 m 的粒子具有的势能为 $E_p=-G\frac{Mm}{R}$（设粒子在黑洞无限远处的势能为零），式中 M 、R 分别表示黑洞的质量和半径。已知引力常量 $G=6.7\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$，光速 $c=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}$，太阳质量 $M_S=2.0\times10^{30}\ \mathrm{kg}$，太阳半径 $R_S=7.0\times10^8\ \mathrm{m}$，不考虑相对论效应，利用上问结果，在经典力学范围内求人马座 A*的半径 R_A 与太阳半径之比应小于多少（结果保留四舍五入）。

解：

（1）S2 星绕人马座 A*做圆周运动的向心力由人马座 A*对 S2 星的万有引力提供，设 S2 星的质量为 m_{S2}，角速度为 ω，周期为 T，则：

$$G\frac{M_A m_{S2}}{r^2}=m_{S2}\omega^2 r$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

设地球质量为m_E，公转轨道半径为r_E，周期为T_E，则

$$G\frac{M_S m_E}{r_E^2}=m_E\left(\frac{2\pi}{T_E}\right)^2 r_E$$

综合上式得：

$$\frac{M_A}{M_S}=\left(\frac{r}{r_E}\right)^3\left(\frac{T_E}{T}\right)^2$$

式中$T_E=1$年，$r_E=1$天文单位，带入数据得

$$\frac{M_A}{M_S}=4\times10^6$$

（2）引力对粒子作用不到的地方即为无限远，此时粒子的势能为零。“处于黑洞表面的粒子即使光速运动，其具有的动能也不足以克服黑洞对它的引力束缚”，说明了黑洞表面处以光速运动的粒子在远离黑洞的过程中克服阻力做功，粒子在到达无限远之前，其动能便较小为零，此时势能仍为负值，则其能量总和小于零。根据能量守恒定律，粒子在黑洞表面处的能量也小于零，则有

$$\frac{1}{2}mc^2-G\frac{Mm}{R}<0$$

依题意可知

$$R=R_A,\quad M=M_A$$

可得

$$R_A<\frac{2GM_A}{c^2}$$

代入数据得

$$R_A<1.2\times10^{10}\ \text{m}$$

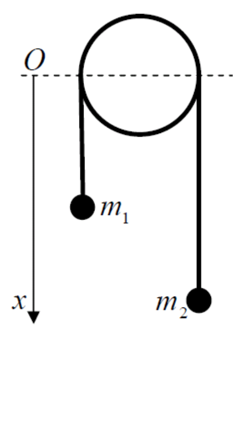
$$\frac{R_A}{R_S}<17$$

得 分

三 、（本题共 15 分）

如图所示，质量为m_1和m_2的两质点通过不可伸长的细绳跨接在轻质光滑的滑轮上，由达朗贝尔方程求两质点的加速度。

解：



设x_1和x_2是质点m_1和m_2的坐标，质点m_1所受外力为$F_1=m_1 g$，质点m_2所受外力为$F_2=m_2 g$，由于该系统为理想约束，因此，由达朗贝尔方程得，

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i\right)\bullet\delta\vec{x}_i=0$$

代入已知数据得

$$\left(\vec{F}_1-m_1\vec{a}_1\right)\bullet\delta\vec{x}_1+\left(\vec{F}_2-m_2\vec{a}_2\right)\bullet\delta\vec{x}_2=0$$

$$\left(m_1 g - m_1\ddot{x}_1\right)\delta x_1 + \left(m_2 g - m_2\ddot{x}_2\right)\delta x_2 = 0$$

由于细绳不可伸长，几何约束方程为

$$x_1 + x_2 + \pi R = \text{const}$$

其中 R 为滑轮的半径，因此，

$$\delta x_1 = -\delta x_2 \quad , \qquad \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

因此，

$$\left[\left(m_2 - m_1\right)g - \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_2\right]\delta x_2 = 0$$

由于 δx_2 的任意性得

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

得 分

四 、（本题共 10 分）

由泊松定理证明：在保守力场内运动的质点组，若直角坐标系中 x 和 y 方向的两分动量距为常数，则 z 方向分动量矩也一定为常数。

证明：由动量矩定义：

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$$

得，在直角坐标系中，各分量的表达式为

$$\begin{cases} J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i p_{iz} - z_i p_{iy}\right) \\ J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i p_{ix} - x_i p_{iz}\right) \\ J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i p_{iy} - y_i p_{ix}\right) \end{cases}$$

依题意：

$$\begin{cases} J_x = C_x \\ J_y = C_y \end{cases}$$

其中 C_x 和 C_y 为常数。

由泊松定理得，

$$\left[J_x, J_y\right] = C_z = \text{const}$$

而

$$\begin{aligned}\left[J_x, J_y\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial J_x}{\partial x_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{ix}} - \frac{\partial J_x}{\partial p_{ix}}\frac{\partial J_y}{\partial x_i}\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial J_x}{\partial y_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{iy}} - \frac{\partial J_x}{\partial p_{iy}}\frac{\partial J_y}{\partial y_i}\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial J_x}{\partial z_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{iz}} - \frac{\partial J_x}{\partial p_{iz}}\frac{\partial J_y}{\partial z_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i p_{iy} - y_i p_{ix}\right) \\ &= J_z\end{aligned}$$

由上式得

$$J_z = C_z = \text{const}$$

得 分

五 、（本题共 20 分）

试由哈密顿原理推到正则哈密顿方程
证明：
由哈密顿函数定义得

$$H = -L + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha$$

故有：

$$L = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H$$

由哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

得：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H\right)dt = 0$$

由于 H 是 p ， q ， t 的函数，即

$$H = H\left(p, q, t\right)$$

所以，

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t$$

由于 $\delta t = 0$，所以

$$\delta H = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$

因此，

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \delta\dot{q}_\alpha + \dot{q}_\alpha \delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\delta p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right)dt = 0$$

因为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(p_\alpha\delta\dot{q}_\alpha\right)=\sum_{\alpha=1}^{s}\left[p_\alpha\frac{d}{dt}\left(\delta q_\alpha\right)\right]=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left[p_\alpha\delta q_\alpha\right]-\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{p}_\alpha\delta q_\alpha$$

代入上式得

$$\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\delta q_\alpha\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\left(\dot{q}_\alpha-\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\right)\delta p_\alpha-\left(\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha\right)dt=0$$

上式第一项等于零，由 δp_α 和 δq_α 的任意性得

$$\begin{cases}\dot{q}_\alpha-\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}=0\\ \dot{p}_\alpha+\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}=0\end{cases}$$

所以有

$$\begin{cases}\dot{q}_\alpha=\dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}\\ \dot{p}_\alpha=-\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}\end{cases}$$

得 分

六 、（本题共 20 分）

一个系统的拉格朗日函数为 $L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2$。

（1）当 $x=A\sin t$，证明 $\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt=0$

（2）若 $x=A\left(\sin t+c\sin 8t\right)$，$c$ 为任意值，求 c 取何值时时 $\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt=0$。

（1）证明

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\delta\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\dot{x}\delta\dot{x}-x\delta x\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\delta x\right)-x\delta x\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\delta x\right)-\frac{d\dot{x}}{dt}\delta x-x\delta x\right)dt$$

$$=\dot{x}\delta x\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{8}}-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}+x\right)\delta xdt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}+x\right)\delta xdt$$

将 $x=A\sin t$ 代入上式得：

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}+x\right)\delta x dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(-A\sin t+A\sin t\right)\delta x dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}0\delta x dt=0$$

（2）将 $x=A\left(\sin t+c\sin 8t\right)$ 代入 $\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt$ 得

$$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}x^2\right)dt=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\ddot{x}+x\right)\delta x dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(-A\left(\sin t+64c\sin 8t\right)+A\left(\sin t+c\sin 8t\right)\right)\delta x dt$$

$$=-A\int_0^{\frac{\pi}{8}}63c\sin 8t\delta x dt$$

$$=-A63c\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin 8t\delta x dt$$

$$=-A\frac{63}{8}c\cos 8t\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{8}}\delta x$$

$$=-A\frac{63}{8}c(-2)\delta x$$

$$=A\frac{63}{4}c\delta x$$

所以，当 $c=0$ 时，$\delta\int_0^{\frac{\pi}{8}}Ldt=0$