

# 粒子物理博士生入学考试

一.

(1) 证明: Gell-Mann-Okubo 质量公式

$$2(M_n + M_{\Xi}) = 3M_{\Lambda} + M_{\Sigma}.$$

(2) Casimir 算子定义为

$$C = \sum_a T^a T^a,$$

其中  $T^a$  为生成元在某一表示中的矩阵表示。

(a) 利用  $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ , 证明  $[C, T^a] = 0$ , 即  $C$  与任意一个生成元对易。

(b) Casimir 算子  $C(D)$  ( $D$  为任意一个表示) 有如下性质:

$$\sum_a \text{tr}(T^a T^a) = \dim(D)C(D), \text{ 其中 } \dim(D) \text{ 为 } D \text{ 表示的维数.}$$

对  $SU(3)$  群,  $C(D) = 8K_D$ .  $K_D$  定义为  $\text{tr}(H_i H_j) = K_D \delta_{ij}$ , 其中  $H_i, H_j$  为 Cartan 子代数中生成元。

$$\text{请证明: } C(3) = \frac{4}{3} = C(\bar{3}).$$

(c) 由于  $K_{D_1 \oplus D_2} = K_{D_1} + K_{D_2}$ ;  $K_{D_1 \otimes D_2} = \dim(D_1)K_{D_2} + \dim(D_2)K_{D_1}$ .

$$\text{而且 } 3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

$$\text{请证明 } C(8) = 3.$$

(提示: 单态的  $K_{D_1} = 0$ )

二. 根据李代数对  $SU(3)$  群

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \text{ (介子)}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \text{ (重子)}$$

在三个夸克组成的重子中为什么不存在单态 (对应 1) 和仅有一个八重态和一个十重态, 而在介子中既存在单态又存在八重态。

(提示: 从  $SU_f(3) \otimes SU_s(2)$  的 Covering group  $SU(6)$  来考虑, 及 Pauli 不相容原理的作用)

三.

(a) 根据上题的结果证明:

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2}.$$

其中  $\mu_p$  和  $\mu_n$  为质子和中子的磁矩。

$$\mu_{p(n)} \equiv \sum_{i=1}^3 \mu Q_i \sigma_{iz},$$

$$\mu = \frac{|e|\hbar}{2m} \text{ (e 为电子电荷)}$$

(b) 请简要描述一下我们如何从深度非弹实验得到部分子图象的。(不用详细写公式)

四. 标准模型为:

(a)  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$ , 请写出未破缺前的完整的拉氏密度。

(b) 我们知道破缺方式为:  $SU_c(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1) \rightarrow SU_c(3) \otimes U_{em}(1)$

$$\text{请导出 } M_W^2 = \frac{\sqrt{2}e^2}{8\sin^2\theta_W G_F}$$

其中  $\theta_W$  是 Weinberg 角,  $G_F$  是费米普适常数。

(c) 弱中性流是通过交换 Z 粒子的。

请计算在  $\sqrt{S}$  很大时 ( $S \equiv (p_1 + p_2)^2$ ), 包括弱中性流贡献与仅考虑电磁流 (既交换  $\gamma$  光子) 的  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  截面之比 (忽略电子和  $\mu$  子质量)。

(提示: 顶角函数为  $\frac{iq}{4\cos\theta_W} \gamma_\mu [(-1 + 4\sin^2\theta_W) + \gamma_5]$  )

\* 注: 此题不必算到底。

五. 利用表观发散度说明:

(a) 为什么引力场不能重整化。

(b)  $\beta$  衰变的有效拉氏量为:  $\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{p} \gamma_\mu (1 + g_A \gamma_5) n \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu$ .

(i) 为什么导致宇称不守恒。

(ii) 为什么它意味着存在很重的中间波色子, 从而导致了 Weinberg-Salam 弱电模型。

部分需用的公式:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Sigma^- & \Sigma^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

质子波函数为:

$$\phi_{M,S}^p = \frac{1}{\sqrt{6}}(udu + duu - 2uud),$$

$$\phi_{M,A}^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u,$$

$$\chi_{M,S} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow),$$

$$\chi_{M,A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) .$$

中子波函数依次写出。