理论力学

§1 力学之一

一.

(1) 证明： Gell-Mann-Okubo 质量公式

$$2(M_n + M_\Xi) = 3M_\Lambda + M_\Sigma.$$

(2)Casimir 算子定义为

$$C = \sum_a T^a T^a,$$

其中 T^a 为生成元在某一表示中的矩阵表示。

(a) 利用 $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$, 证明 $[C, T^a] = 0$, 即 C 与任意一个生成元对易。

(b)Casimir 算子 C(D)（ D 为任意一个表示）有如下性质：

$\sum_a tr(T^a T^a) = dim(D)C(D)$, 其中 $dim(D)$ 为 D 表示的维数。

对 SU(3) 群， $C(D) = 8K_D$ 。 K_D 定义为 $tr(H_i H_j) = K_D \delta_{ij}$, 其中 H_i, H_j 为 Cartan 子代数中生成元。

请证明： $C(3) = \frac{4}{3} = C(\bar{3})$ 。

(c) 由于 $K_{D_1 \oplus D_2} = K_{D_1} + K_{D_2}$; $K_{D_1 \otimes D_2} = dim(D_1)K_{D_2} + dim(D_2)K_{D_1}$ 。

而且 $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$

请证明 $C(8) = 3$ 。

（提示：单态的 $K_{D_1} = 0$ ）

二. 根据李代数对 SU(3) 群

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \text{ (介子)}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \text{ (重子)}$$

在三个夸克组成的重子中为什么不存在单态（对应 1 ）和仅有一个八重态和一个十重态，而在介子中既存在单态又存在八重态。
（提示：从 $SU_f(3)\otimes SU_s(2)$ 的 Covering group SU(6) 来考虑，及 Pauli 不相容原理的作用）

三.

(a) 根据上题的结果证明：

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2}.$$

其中 μ_p 和 μ_n 为质子和中子的磁矩。

$$\mu_{p(n)} \equiv \sum_{i=1}^{3} \mu Q_i \sigma_{iz},$$

$\mu = \frac{|e|\hbar}{2m}$ (e 为电子电荷)

(b) 请简要描述一下我们如何从深度非弹实验得到部分子图象的。（不用详细写公式）

四. 标准模型为：

(a) $SU_c(3)\otimes SU_L(2)\otimes U_Y(1)$，请写出未破缺前的完整的拉氏密度。

(b) 我们知道破缺方式为： $SU_c(3)\otimes SU_L(2)\otimes U_Y(1) \longrightarrow SU_c(3)\otimes U_{em}(1)$

请导出 $M_W^2 = \frac{\sqrt{2}e^2}{8sin^2\theta_W G_F}$

其中 θ_W 是 Weinberg 角， G_F 是费米普适常数。

(c) 弱中性流是通过交换 Z 粒子的。

请计算在 $\sqrt{S}$ 很大时（ $S \equiv (p_1+p_2)^2$ ），包括弱中性流贡献与仅考虑电磁流（既交换 γ 光子）的 $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ 截面之比（忽略电子和 μ 子质量）。

（提示：顶角函数为 $\frac{ig}{4cos\theta_W}\gamma_\mu[(-1+4sin^2\theta_W)+\gamma_5]$ ）

∗ 注：此题不必算到底。

五. 利用表观发散度说明：

(a) 为什么引力场不能重整化。

(b)β 衰变的有效拉氏量为： $\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\bar{p}\gamma_\mu(1+g_A\gamma_5)n\bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu.$

(i) 为什么导致宇称不守恒。

(ii) 为什么它意味着存在很重的中间波色子，从而导致了 Weinberg-Salam 弱电模型。

部分需用的公式：

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Sigma^- & \Sigma^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

质子波函数为：

$\phi^p_{M,S}=\frac{1}{\sqrt{6}}(udu+duu-2uud)$,

$\phi^p_{M,A}=\frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)u$,

$\chi_{M,S}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow-2\uparrow\uparrow\downarrow)$,

$\chi_{M,A}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)$ 。

中子波函数依次写出。