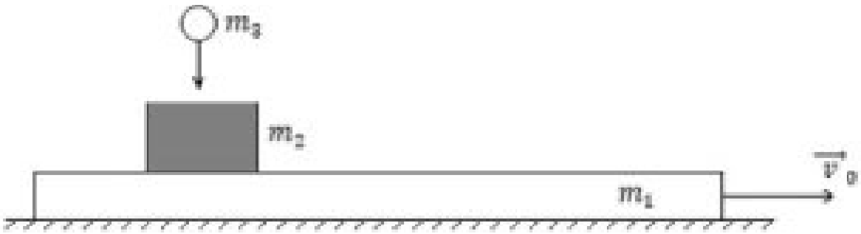
2014-2015 学年第一学期理论力学期末考试(颜瑞民整理)

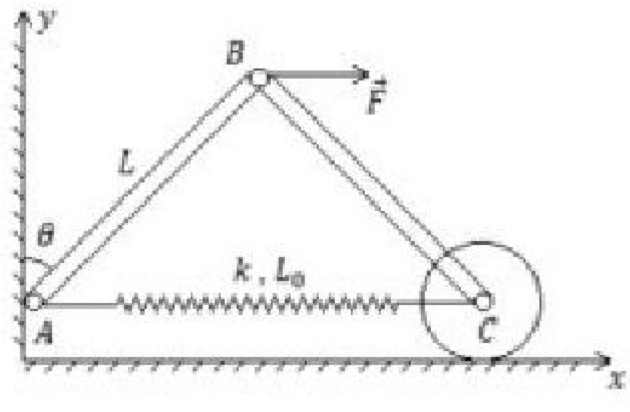
命题人：刘玉斌

一、填空（22 分）

1.如下图所示，质量为 m_1 的模板在光滑的水平面上以速度 $\vec{v}_0$ 向右运动，上面放有一个装满沙子的箱子，沙子和箱子的质量为 m_2，现有一个质量为 m_3 的小球竖直落入箱子.若箱子与木板不发生相对滑动（小球与沙子的作用时间极短），则小球落入箱子后木板的速度为_______.若箱子与木板发生相对滑动，且在 Δt 时间内木板的速度变化为 $\Delta\vec{v}$，则该时间段内平均摩擦力的大小等于___________,摩擦力的方向为_________________（填“向左”或“向右”）.



2.如下图所示的连杆结构中，AB 和 BC 均为长度为 L 的轻杆，AB 与墙壁的夹角为 θ，A 和 B 为光滑的铰链，A 和轮子的中心 C 以原长为 L_0，弹性系数为 k 的轻弹簧连接，现有水平作用力 $\vec{F}$ 作用于 B 点，系统处于静止状态，弹簧处于伸长状态.用虚功原理分析系统的状态，解除弹簧的约束，A 和 C 分别受到作用力 $\vec{F}_T'$ 和 $\vec{F}_T$, 则 $\vec{F}_T'$ 的方向为_______________（填“沿 x 轴正方向”或“沿 x 轴负方向”），$\vec{F}_T$ 的方向为_______________（填“沿 x 轴正方向”或“沿 x 轴负方向”），$\vec{F}_T'$ 和 $\vec{F}_T$ 的大小关系为_______________（填“$\vec{F}_T' > \vec{F}_T$”或“$\vec{F}_T' = \vec{F}_T$” 或“$\vec{F}_T' < \vec{F}_T$”）.设 B 和 C 在 x 和 y 方向上的虚位移分别为 $\delta x_B, \delta y_B, \delta x_c, \delta y_c$, 则虚功原理可以表示为（用 $\delta x_B, \delta y_B, \delta x_c, \delta y_c, \left|\vec{F}\right|, \left|\vec{F}_T\right|$ 表示），用 L 和 θ 表示 $\delta x_B, \delta x_c$：___________,_______________.因此 $\delta x_B, \delta x_c$ 的关系为___________, $\left|\vec{F}\right|, \left|\vec{F}_T\right|$ 的关系为________________,由胡克定律有 $\left|\vec{F}_T\right| =$______________，最后得到 $\sin\theta$ 的表达式___________________.



二、（18 分）

设某单自由度力学体系的哈密顿函数为 $H = \dfrac{p^2}{2m}$.现有某力学量 $F = x - \dfrac{p}{m}t$.其中 x, p 分别为广义坐标及其共轭广义动量，利用 $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial t} + \left[H, F\right]$ 证明：

（1）F 为运动积分；

（2）$\frac{\partial F}{\partial t}$ 为运动积分.

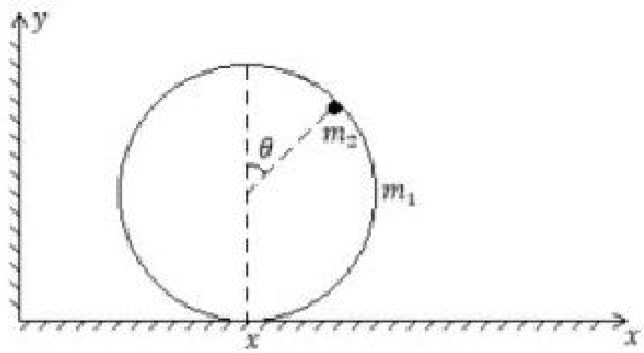
三、（20 分）

如下图所示，质量为 m_1 的圆环半径为 a，内圈光滑.现有一个质量为 m_2 的质点紧贴圆环.

（1） 写出系统的拉格朗日函数；

（2） 求质点由圆环正上方运动到圆环底部的运动微分方程.

提示：质量为 m，半径为 a 的圆环的转动惯量 $I = ma^2$，系统自由度为 2，取 x, θ 为系统的广义坐标.



四、（20 分）

设粒子在下列电磁场中运动（柱坐标下表示）：$\mathbf{E} = \frac{E_0}{r}\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{B} = B_0\mathbf{e}_z$, 系统的拉格朗日函数 $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + qE_0 \ln r + \frac{1}{2} qB_0 r^2 \dot{\varphi}.$ 试利用哈密顿正则方程，求解系统的运动微分方程.

五、（20 分）

设某力学的拉格朗日函数 $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \cdots$ 试利用哈密顿原理，求解系统的运动微分方程.