物理学院本科生 06——07 学年第 二 学期理论力学课程期末考试试卷（**B** 卷）

专业：　　　　　　　　年级：　　　　　学号：　　　　　　　姓名：　　　　　　成绩:

得 分

、一 、填空（本题共 **20** 分，共 **5** 小题，每空 **2** 分，共 **10** 个空）

草稿区

1．质点系角动量的变化率等于（　　　　　　　　　　　　　　）。

2．作用在质点上的力 $\vec{F}$ 不做功或 $\vec{F}$ 为保守力，则质点的机械能（　　　）。

3．设约束方程可以写成：$f(x,y,z,t,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=0$，对于稳定约束，约束方程可以写成：（　　　　　　　　　），几何约束可以写成（　　　　　　　　　　　　）或（　　　　　　　　），系统只受到（　　　　　　　　）约束的体系成为完整体系。

4．用 $\vec{F}_i$ 表示系统第 i 个质点所受到的合外力，m_i 表示 i 个质点的质量，$\vec{r}_i$ 表示第 i 个质点的位置矢量，则达朗贝尔方程可以表示为：（　　　　　　　　），虚功原理可以表示为：（　　　　　　　　）。

5．n 个质点的自由度为（　　　），若受到 k 个约束，在完整约束的情形下，该力学体系的自由度为（　　　　　）。

得 分

、二 、证明题（本题共 **20** 分，共 **2** 小题，每小题 **10** 分）

1．　质量为 m 的带电粒子电荷量为 e，在强度为 g 的磁单极子场中运动，磁单极子可以看成有限重，位于原点的电荷受到磁单极子的作用力为 $-ge\dfrac{\dot{\vec{r}}\times\vec{r}}{r^3}$，不计重力，证明动能 $T=\dfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\bullet\dot{\vec{r}}$ 是运动积分。（提示：$\vec{a}\bullet\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\bullet\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$）

2．　平面谐振子的哈密顿量为：

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2\right)$$

角动量为：$\vec{J}=\left(xp_y-yp_x\right)\vec{k}$

由泊松括号证明：

$$\left[H, J_z\right] = mxy\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)$$

得 分

、三 、计算题（本题共 **60** 分，共 **4** 小题，每小题 **15** 分）

1．曲柄连杆机构如图所示：曲柄 OA 以匀角速度 ω 转动，$OA = r$ ，$AB = l$，当 $\lambda = \frac{r}{l}$ 比较小时，以 O 为原点，滑块 B 的运动方程近似为：

$$x = l\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) + r\left(\cos\omega t + \frac{\lambda}{4}\cos 2\omega t\right)$$

如果滑块的质量为 m ，忽略摩擦以及连杆 AB 的质量，试求当 $\varphi = \omega t = 0$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 时滑块受到的力 F

2．一个质量为 m 的粒子在一个光滑的平面上运动，它受到平面上一个固定点 P 的吸引力，力的大小与距 P 点距离的平方成反比可以写成：$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$ 其中 k 为常量。用极坐标表示该粒子的运动状态。应用拉格朗日方程，求粒子运动的微分方程。

3．已知一个系统的拉格朗日函数为 $L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2$，若 $x = A\sin t$，其中 A 为常数，在等时变分条件下有 $\delta t\big|_{t=0} = \delta t\big|_{t=\frac{\pi}{8}} = 0$ 。求作用量 $S = \int_0^{\frac{\pi}{8}} L dt$ 的变分 δS 的值？

4．已知一个系统的动能的表达式为：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 l^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$$

势能为：$V = mgl\sin\theta$，其中 x, θ 为广义坐标，m, l, g 为常量。由广义动量的定义、哈密顿函数的定义构建哈密顿函数，并由哈密顿函数和以及正则方程的定义求 $\dot{x}, \dot{p}_x, \dot{\theta}, \dot{p}_\theta$