8) Le système à la date t_N vaut :

$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}} + \beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})S^0_{t_N} = f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})$ [1]

$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}} + \beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})S^0_{t_N} = f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})$ [2]

[1] − [2] donne :

$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}}) = \frac{f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}) - f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})}{(h_N-b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}}$

$(1+h_N)[1] - (1+b_N)[2]$ donne :

$\beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}}) = \frac{1}{S^0_{t_N}(h_N-b_N)}(f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+h_N) - f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+b_N))$

9) Le système pour les autres dates t_k vaut :

$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+h_N)S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_k} = v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})$ [1]

$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+b_N)S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_k} = v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})$ [2]

Ce qui donne, par un raisonnement analogue :

$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}}) = \frac{v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}) - v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})}{(h_N-b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}}$

$\beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}}) = \frac{1}{S^0_{t_k}(h_N-b_N)}(v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}(1+h_N) - v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}(1+b_N))$

10)

11) En appliquant la formule d'Ito à $ln(S_t)$, on obtient :

$dln(S_t) = \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2(-\frac{1}{S_t^2})dt$

$\iff$ $\mathrm{dln(S}_t) = (rdt + \sigma dB_t) - \frac{\sigma^2}{2}dt$ car $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$

$\iff$ $\mathrm{dln(S}_t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t$

$\iff$ $\mathrm{lnS}_t - lns = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t$ car $B_0 = 0$

Soit au final :

$$\boxed{S_t = s\exp\left(\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\right)}$$

12)

13)

14) Posons pour $1 \leq i \leq n, X_i = e^{-rT} f(s \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\epsilon_i)$. Pour montrer que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

converge presque sûrement vers p, il suffit de montrer que E$[X_0]$=p. En effet, les $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ étant indépendantes et identiquement distribuées, il en de même pour les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. E$[X_0]$=$p < +\infty$ permet de conclure, d'après la loi forte des grands nombres, que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers p.

Or d'après les propriétés 1 et 2 du mouvement brownien énoncées dans le sujet, on sait que $B_t \sim N(0, t)$, donc que $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim N(0, 1)$. On en déduit qu'il existe $\varepsilon^{'} \sim N(0, 1)$ tel que pour tout T, on a $B_T = \sqrt{T}\varepsilon^{'}$. $\varepsilon^{'}$ et les $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ étant de même loi, on en déduit que E$[X_0]$=p.

15)

16)

17)

18)

19)

20)