1) Soit $\mathbb{Q}$ une probabilité telle que sous cette probabilité on a $E_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N$. Ainsi : $E_{\mathbb{Q}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N = \sum_{x \in \{1+h_N, 1+b_N\}} x\mathbb{Q}(T_1^{(N)} = x) = (1 + h_N)q_N + (1 + b_N)(1 - q_N)$

Ainsi, on obtient :

$$\boxed{q_N = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}}$$

On remarque que l'on a bien $q_N \in [0, 1]$.
2) Déterminons le prix de l'option $p_{(N)}$ de l'option qui paye $f(S_{t_N}^{(N)})$.

Pour $i \in \{1, .., N\}$, posons $X_i = \mathbb{1}_{T_i^{(N)} = 1+h_N}$. Il est facile de montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre q_N. Posons $Y_N = \sum_{1 \leq i \leq N} X_i$. Les variables aléatoires $(T_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N}$ étant indépendantes et identiquement distribuées, il en est de même pour les variables aléatoires $(X_i^{(N)})_{1 \leq i \leq N}$. On reconnait ainsi que Y_N est une loi binomiale de paramètres N et q_N. On remarque enfin que $P_{\mathbb{Q}}(S_{t_N}^{(N)} = s(1+h_N)^k(1+b_N)^{N-k}) = P_{\mathbb{Q}}(Y_i = k) = C_N^k q_N^k (1 - q_N)^{N-k}$. Ainsi, par le théorème de transfert :
$p_{(N)} = \frac{1}{(1+r_N)^N} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(S_{t_N}^{(N)})] = \frac{1}{(1+r_N)^N} \sum_{k=0}^{N} f(s(1 + h_N)^k(1 + b_N)^{N-k}) P_{\mathbb{Q}}(S_{t_N}^{(N)} = s(1 + h_N)^k(1 + b_N)^{N-k})$

Ce qui donne :

$$\boxed{p_{(N)} = \frac{1}{(1 + r_N)^N} = \sum_{k=0}^{N} f(s(1 + h_N)^k(1 + b_N)^{N-k}) C_N^k q_N^k (1 - q_N)^{N-k}}$$

3)

Algorithm 1 price1(N, r_N, h_N, b_N, s, f)

Ensure : $res \times sum = p_{(N)}$

$q_N \leftarrow \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}$
$res \leftarrow \frac{1}{(1+r_N)^N}$
$sum \leftarrow 0$
for k in 0 :N **do**
    $sum \leftarrow sum + f(s(1 + h_N)^k(1 + b_N)^{(N-k)}) C_N^k q_N^k (1 - q_N)^{(N-k)}$
end for

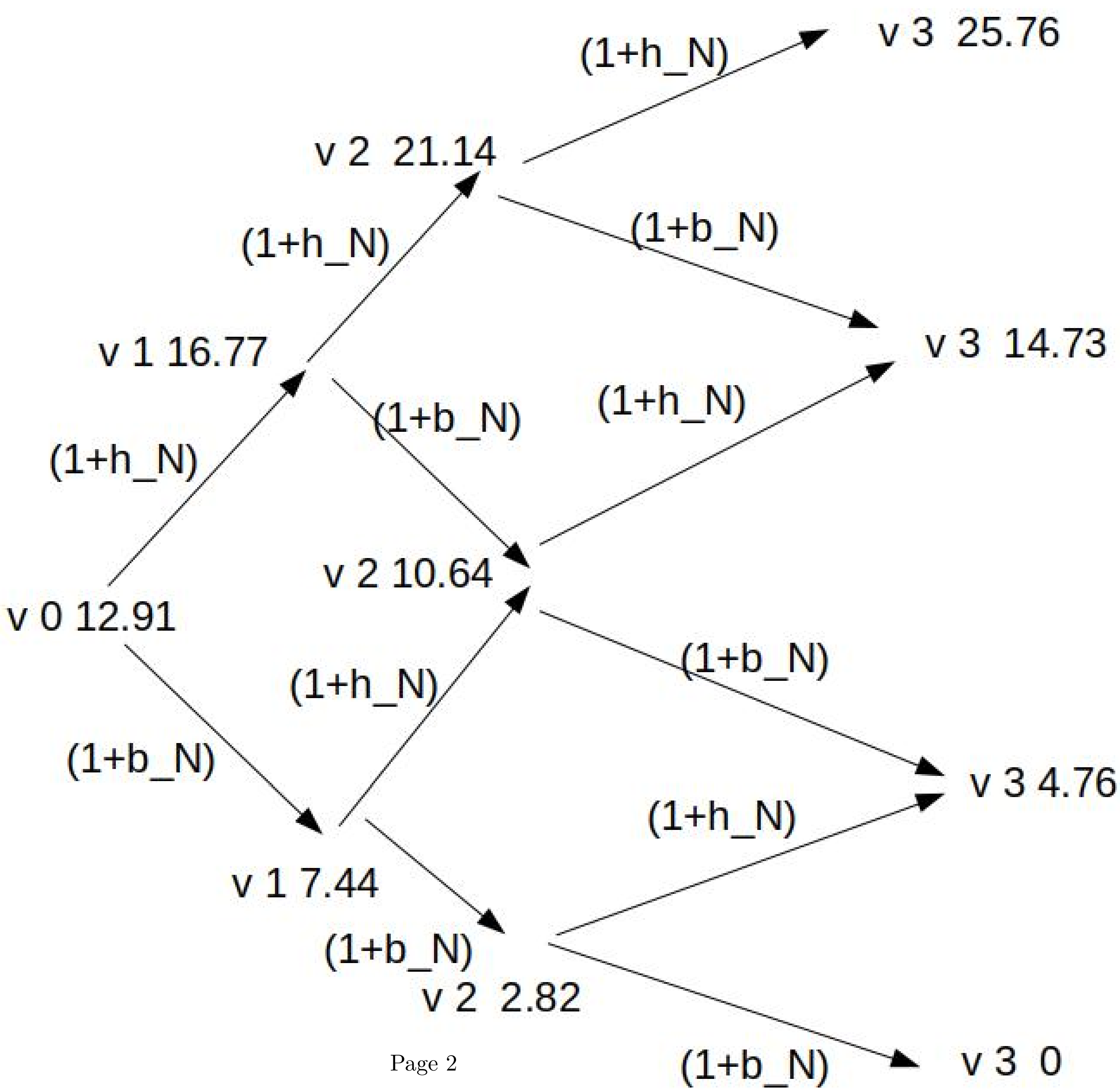
4) Voir code python.

5)On sait que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)}) | S_{t_k}^{(N)}] = v_{k+1}((1+h_N)S_{t_k}^{(N)})q_N + v_{k+1}((1+b_N)S_{t_k}^{(N)})(1-q_N)$. Ainsi, on appelle

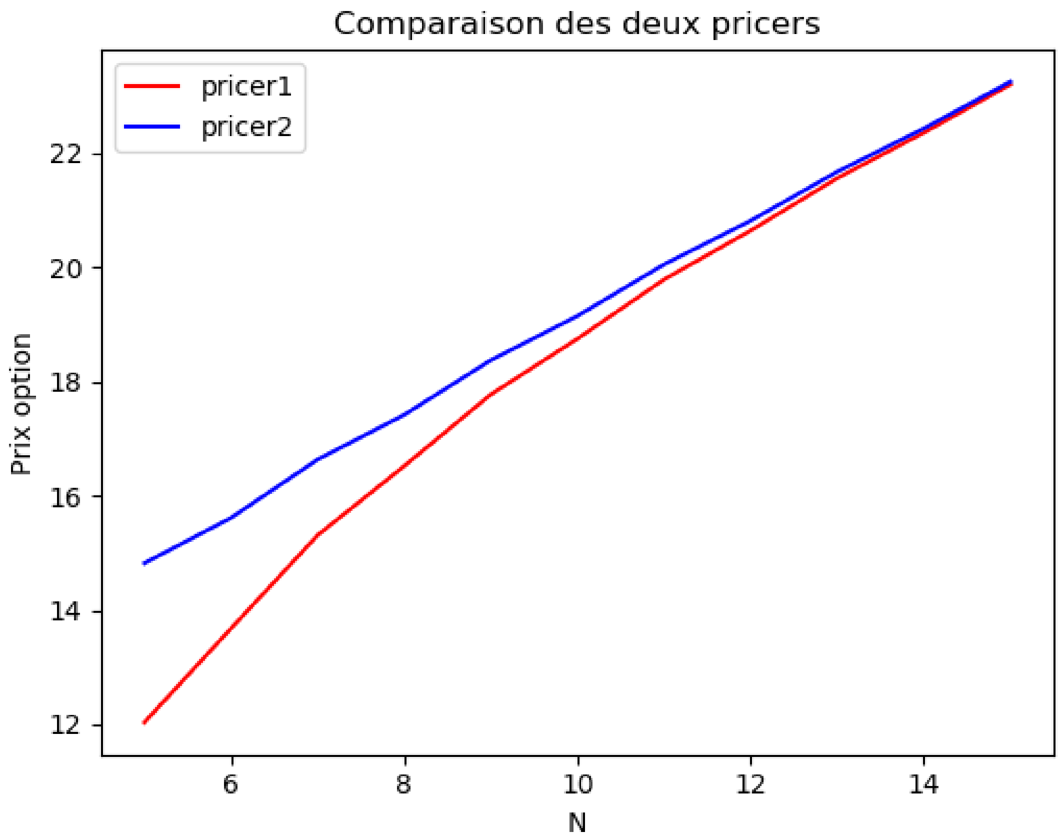
la fonction price2 avec $k = 0$:
6)

Algorithm 2 price2$(N, r_N, h_N, b_N, s, f, k)$

Ensure : res $= p_{(N)}$
  if $k = N$ **then**
    $res \leftarrow f(s)$
  else
    $q_N \leftarrow \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}$
    $esp \leftarrow price2(N, r_N, h_N, b_N, s(1+h_N), f, k+1)q_N + price2(N, r_N, h_N, b_N, s(1+b_N), f, k+1)(1-q_N)$
    $res \leftarrow \frac{esp}{1+r_N}$
  end if



7)



8) Le système à la date t_N vaut :

$$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}} + \beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})S^0_{t_N} = f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}) \qquad [1]$$

$$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}} + \beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}})S^0_{t_N} = f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}) \qquad [2]$$

$[1]-[2]$ donne :

$$\alpha_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}}) = \frac{f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})-f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})}{(h_N-b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}}}$$

$(1+h_N)[1]-(1+b_N)[2]$ donne :

$$\beta_{N-1}(S^{(N)}_{t_{N-1}}) = \frac{1}{S^0_{t_N}(h_N-b_N)}(f((1+b_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+h_N) - f((1+h_N)S^{(N)}_{t_{N-1}})(1+b_N))$$

9) Le système pour les autres dates t_k vaut :

$$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+h_N)S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_k} = v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}) \qquad [1]$$

$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})(1+b_N)S_{t_{k-1}} + \beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}})S^0_{t_k} = v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})$ [2]

Ce qui donne, par un raisonnement analogue :

$\alpha_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}}) = \frac{v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})-v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}})}{(h_N-b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}}$

$\beta_{k-1}(S^{(N)}_{t_{k-1}}) = \frac{1}{S^0_{t_k}(h_N-b_N)}(v_k((1+b_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}(1+h_N) - v_k((1+h_N)S^{(N)}_{t_{k-1}}(1+b_N))$

10) Voir code pyton.

11) En appliquant la formule d'Ito à $ln(S_t)$, on obtient :

$dln(S_t) = \frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{2}(\sigma S_t)^2(-\frac{1}{S_t^2})dt$

$\iff \quad \mathrm{dln(S}_t) = (rdt + \sigma dB_t) - \frac{\sigma^2}{2}dt \qquad \text{car} \qquad dS_t = S_t(rdt+\sigma dB_t)$

$\iff \quad \mathrm{dln(S}_t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB_t$

$\iff \quad \mathrm{lnS}_t - lns = (r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \qquad \text{car } B_0 = 0$

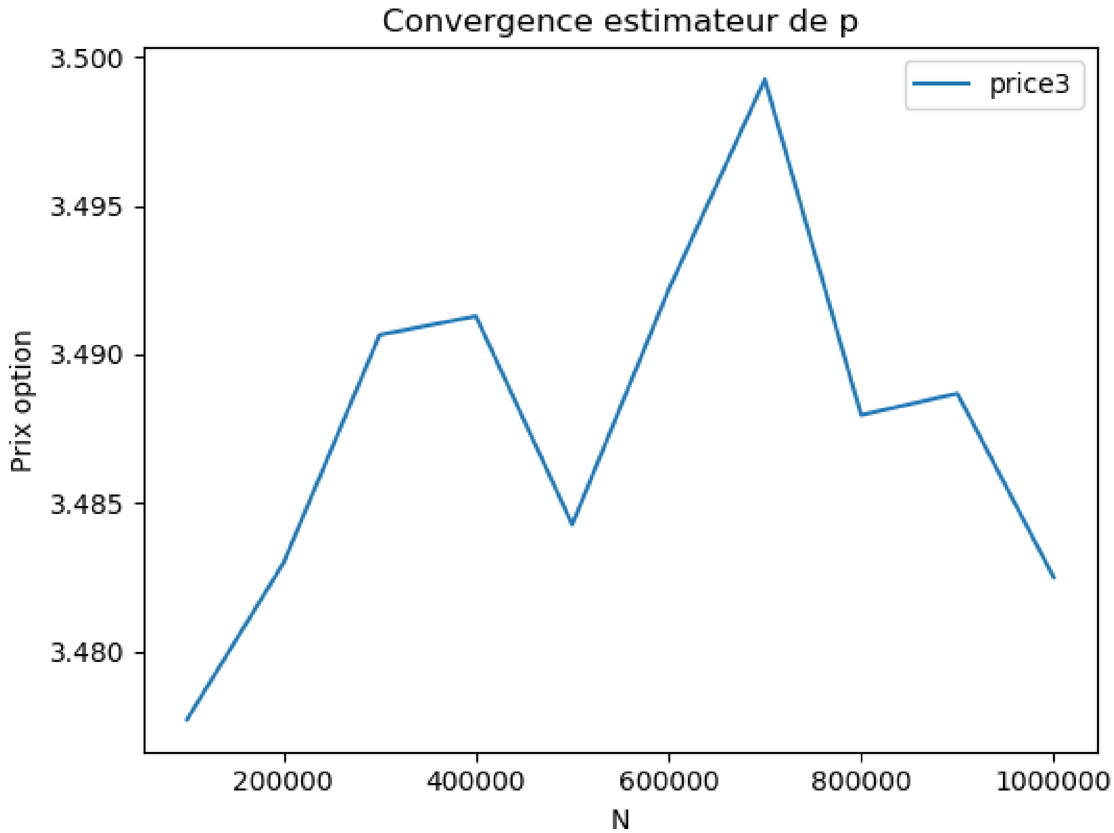
Soit au final :

$$\boxed{S_t = s\exp\left(\sigma B_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t\right)}$$

12)

Algorithm 3 price3(n, s, r, σ, T, f)

Ensure : res = $\hat{p_{(n)}}$
 $sum \leftarrow 0$
 for i in 1 : n **do**
  $sum \leftarrow sum + exp(-rT)f(s\exp((r-\frac{sigma^2}{2})T + sigma\sqrt{T} * np.random.normal()))$
  $res \leftarrow \frac{sum}{n}$
 end for



13)

14) Posons pour $1 \leq i \leq n, X_i = e^{-rT} f(s\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\epsilon_i)$. Pour montrer que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

converge presque sûrement vers p, il suffit de montrer que E$[X_0]$=p. En effet, les $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ étant indépendantes et identiquement distribuées, il en de même pour les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. E$[X_0]$=$p < +\infty$ permet de conclure, d'après la loi forte des grands nombres, que la suite $(\hat{p}_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers p.

Or d'après les propriétés 1 et 2 du mouvement brownien énoncées dans le sujet, on sait que $B_t \sim N(0,t)$, donc que $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$. On en déduit qu'il existe $\varepsilon^{'} \sim N(0,1)$ tel que pour tout T, on a $B_T = \sqrt{T}\varepsilon^{'}$. $\varepsilon^{'}$ et les $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ étant de même loi, on en déduit que E$[X_0]$=p.

15)

Algorithm 4 put(s, r, σ, T, K)

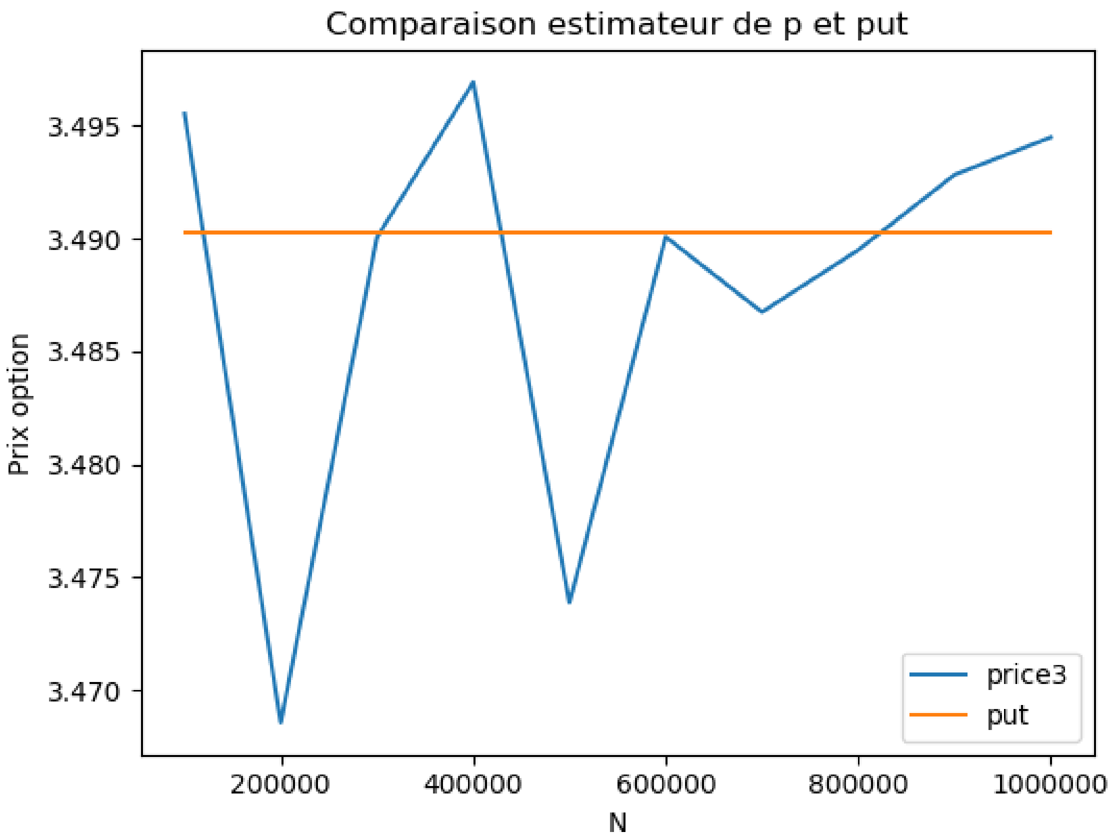
Ensure : res $= p$

$d \leftarrow (log(\frac{s}{K}) + (r + \frac{sigma^2}{2})T)/(sigma\sqrt{T})$

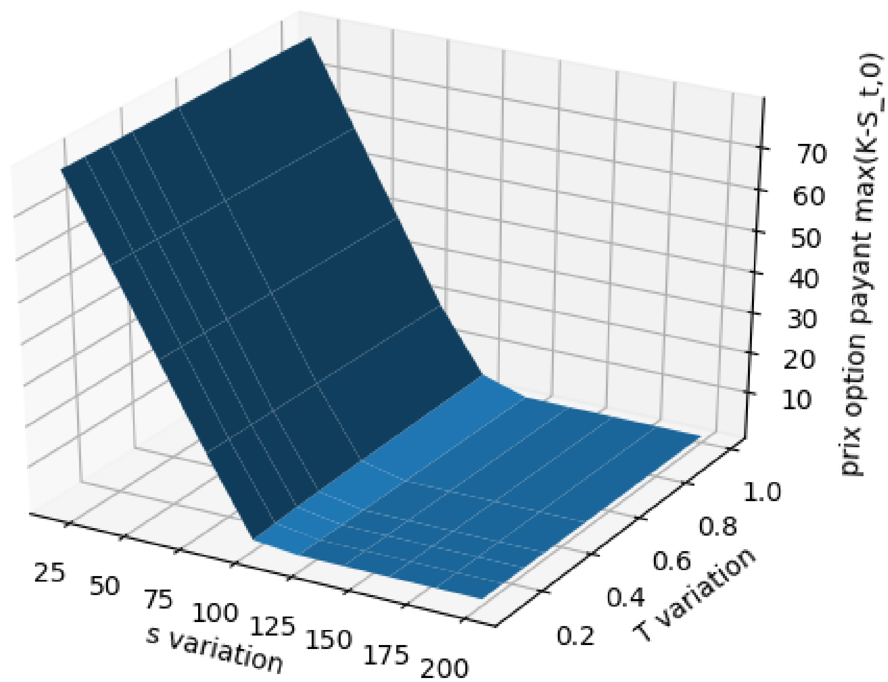
$p \leftarrow -s * norm.cdf(-d) + K\exp(-rT) * norm.cdf(-d + sigma\sqrt{T})$

$res \leftarrow p$

16) Voir code python.


Comparaison estimateur de p et put
3.495
3.490
3.485
3.480
3.475
3.470
Prix option
200000
400000
600000
800000
1000000
N
price3
put

17)



prix option payant max(K-S_t,0)
70
60
50
40
30
20
10
25
50
75
100
125
150
175
200
s variation
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
T variation

18)

19)

20)