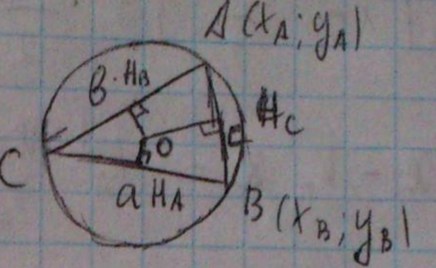
$O(x_0; y_0)$ - центр опис. окр.

№1.1.



$$H_A = \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

$$H_B = \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

$$H_C = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$$

1)

$$AC = b: y = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}(x - x_A) + y_A = k_b(x - x_A) + y_A$$

$$k_b^{\perp} = tg\left[arctg(k_B) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$OH_B: y = k_B^{\perp}(x - H_{Bx}) + H_{By} = k_B^{\perp}\left(x - \frac{x_A + x_C}{2}\right) + \frac{y_A + y_C}{2}$$

2)

$$BC = a: y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A = k_A(x - x_A) + y_A$$

$$k_A^{\perp} = tg\left[arctg(k_A) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$OH_A: y = k_A^{\perp}\left(x - \frac{x_B + x_C}{2}\right) + \frac{y_B + y_C}{2}$$

3) пересечение OH_A и OH_B

$$k_A^{\perp}\left(x-\frac{x_B+x_C}{2}\right)+\frac{y_B+y_C}{2}=k_B^{\perp}\left(x-\frac{x_A+x_C}{2}\right)+\frac{y_A+y_C}{2}$$

$$k_A^{\perp}x-k_B^{\perp}x=k_A^{\perp}\frac{x_B+x_C}{2}-k_B^{\perp}\frac{x_A+x_C}{2}+\frac{1}{2}(y_A+y_C-y_B-y_C)$$

$$x\left(k_A^{\perp}-k_B^{\perp}\right)=\frac{1}{2}\left[k_A^{\perp}(x_B+x_C)-k_B^{\perp}(x_A+x_C)+(y_A-y_B)\right]$$

$$x_0=\frac{\frac{1}{2}\left[k_A^{\perp}(x_B+x_C)-k_B^{\perp}(x_A+x_C)+(y_A-y_B)\right]}{k_A^{\perp}-k_B^{\perp}}$$

$$y_0=k_A^{\perp}\left(x_0-\frac{x_B+x_C}{2}\right)+\frac{y_B+y_C}{2}$$

Ответ: $O(x_0;\, y_0)$

Через барацентрические:

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3=\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}:\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}:\frac{S_{ABO}}{S_{ABC}}$$

$\triangle AOC=\triangle BOC$ и они равнобедренны

$\angle\beta=\angle AOC=\angle COB=(360-\alpha)/2=180-\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle OBC=\angle BCO=\angle ACO=180-\beta=\frac{\alpha}{4}\Rightarrow\angle ACB=\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot OB \cdot \sin(BOC) = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin(2\angle BAC) = \frac{R^2 \sin 2A}{2}$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{R^2 \sin 2B}{2} \qquad S_{\triangle ABO} = \frac{R^2 \sin 2C}{2}$$

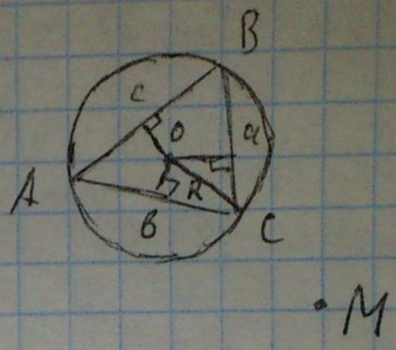
$$\frac{R^2 \sin 2A}{2 S_{ABC}} : \frac{R^2 \sin 2B}{2 S_{ABC}} : \frac{R^2 \sin 2C}{2 S_{ABC}}$$

$$\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$

Ответ: $O(\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C)$

№1.2.

$O(x_0; y_0)$ - найдены в пред. задаче



$$c = AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$b = AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$a = BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

По теореме синусов

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{2ab\sin\alpha} = \frac{abc}{4S}$$

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$OM = \sqrt{(x_0 - x_M)^2 + (y_0 - y_M)^2}$$

$(OM < R)$ - ? да - лежит внутри окр.

нет - не лежит.