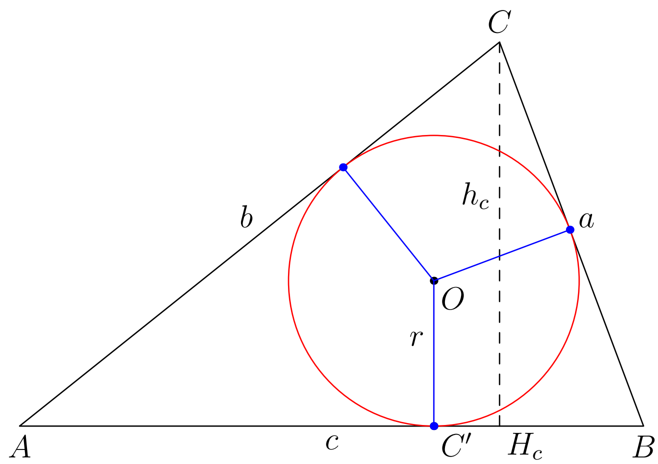

Для поиска центра вписанной окружности давайте определим его барицентрические координаты, то есть решим систему вида

$$\begin{cases} O = \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1. \end{cases}$$

Из картинки видно что

$$O = C' + (O - C') = C' + \frac{r}{h_c}(C - H_c).$$

Ясно, что существуют скаляры $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$, такие что

$$C' = \alpha' A + \beta' B, \;\; H_c = \alpha'' A + \beta'' B.$$

Таким образом,

$$O = C' + \frac{r}{h_c}(C - H_c) = \alpha''' A + \beta''' B + \frac{r}{h_c} C,$$

где α''', β''' нам совершенно не интересны. Из последней формулы видно, что $\gamma = \frac{r}{h_c} = \frac{r * c}{2S(\triangle ABC)}$, а значит $\frac{\gamma}{c} = \frac{r}{2S}$, то есть отношение барицентрической координаты вершины к длине противолежащей стороны не зависит от вершины $\begin{cases} \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{cases}$ Отсюда сразу следует ответ:

$$O = \frac{1}{a + b + c} \left(aA + bB + cC \right).$$