

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра компьютерных технологий

Г. С. Ткаченко

## Параллельные алгоритмы поиска кратчайшего пути в графе

Бакалаврская работа

Научный руководитель: Г. А. Корнеев

Санкт-Петербург  
2015

# Содержание

<b>Содержание . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>5</b>
 <b>Глава 1. Решение задачи поиска кратчайшего расстояния от фиксированной вершины до всех остальных . . . . .</b>	 <b>7</b>
1.1 Обзор существующих решений . . . . .	7
1.1.1 Алгоритм Беллмана-Форда . . . . .	7
1.1.2 Обзор параллельных модификации Беллмана-Форда	9
1.2 Параллельный алгоритм Беллмана-Форда . . . . .	9
1.2.1 Параллелизация по ребрам вершины . . . . .	10
1.2.2 Параллелизация по всем ребрам . . . . .	11
1.2.3 Параллелизация BFS-версии . . . . .	13
1.2.4 Сравнение подходов . . . . .	16
1.2.5 Тестирование . . . . .	17
1.3 Выводы . . . . .	19
 <b>Глава 2. Решение задачи поиска расстояний между каждой парой вершин графа . . . . .</b>	 <b>20</b>
2.1 Обзор существующих решений . . . . .	20
2.1.1 Алгоритм Флойда . . . . .	20
2.1.2 Альтернативы . . . . .	21
2.2 Наивная параллельная версия . . . . .	21
2.3 Параллельный алгоритм для объединенного графа . . . . .	22
2.4 Параллельный алгоритм для социальных графов . . . . .	23
2.4.1 Идея алгоритма . . . . .	23
2.4.2 Работа алгоритма . . . . .	25
2.4.3 Сравнение с другими алгоритмами . . . . .	31
2.4.4 Модификации . . . . .	33
2.5 Выводы . . . . .	33

<b>Заключение . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Источники . . . . .</b>	<b>37</b>

# Введение

Алгоритмы поиска кратчайших путей на графах нашли свое применение в различных областях и сферах деятельности человека. Такие алгоритмы используются в картографических сервисах, при построении пути GPS-навигатора, для представления и анализа дорожной сети и во многих других областях.

При этом в настоящее время существует большое число алгоритмов и подходов, которые решают эту задачу. Кроме того, в большинстве своем алгоритмы можно логически разделить на два класса — алгоритмы поиска кратчайшего расстояния от одной вершины до всех остальных и алгоритмы поиска кратчайших расстояний между каждой парой вершин. Из первого класса самыми яркими представителями являются различные модификации алгоритмов Дейкстры и Беллмана-Форда. Для решения задач второго класса часто используются алгоритмы Флойда-Уоршелла и алгоритм Джонсона.

С ростом многопроцессорных архитектур мы получили мощный инструмент для эффективного расчета искомых расстояний — мы получили возможность запускать эти алгоритмы на нескольких вычислительных ядрах. При этом в контексте с параллельными алгоритмами на графах встал вопрос об эффективном использовании ресурсов системы. Эта задача, однако, не имеет такого высокого разнообразия решений, как в случае однопоточного алгоритма. Существующие же решения довольно специфичны и не всегда работают эффективно на всех графовых структурах. Именно над этой проблемой я работал — в статье освещены различные версии параллельных алгоритмов поиска кратчайшего пути в графах и области их применения. В первой главе представлены параллельные модификации ал-

горитма Беллмана-Форда. Во второй главе работы представлен параллельный алгоритм по поиску кратчайших расстояний между каждой парой вершин в общем случае и эффективная модификация для поиска расстояний в социальных графах. При этом во многих алгоритмах будет использоваться современные и высокопроизводительные структуры данных и подходы для параллельной обработки ребер графа.

Все представленные алгоритмы были реализованы на основе библиотеки для параллельных вычислений и протестированы на различных графовых структурах. При этом описанные подходы продемонстрировали высокую скорость работы на реальных графах, что подтверждает их применимость в реальной жизни.

# Глава 1. Решение задачи поиска кратчайшего расстояния от фиксированной вершины до всех остальных

В данной главе описаны алгоритмы по решению классической задачи на графах — поиску кратчайших расстояний от одной вершины до всех остальных. В первой части главы представлен обзор существующих решений задачи. Во второй части предложены разработанные мною параллельные модификации алгоритма Беллмана-Форда. В третьей части реализованные алгоритмы сравниваются и выявляются области их применимости.

## 1.1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

### 1.1.1. Алгоритм Беллмана-Форда

В контексте решения задачи поиска кратчайших расстояний от одной вершины до всех остальных существует два наиболее распространенных решения — алгоритм Дейкстры и алгоритм Беллмана-Форда. Существует множество модификации алгоритма Дейкстры, которые в зависимости от используемой структуры данных работают  $O(V^2 + E)$ ,  $O(E \log V)$  или  $O(V \log V + E)$ .<sup>12</sup> Однако такие алгоритмы не работают на графах с отрицательным весом ребер. Классический алгоритм Беллмана-Форда работает на графах с произвольным весом ребер. Важным его недостатком является асимптотика —  $O(VE)$ . Однако за счет возможности ранней остановки алгоритма и различных оптимизаций на практике на некоторых графовых структурах он может давать результаты, лучшие чем алгоритм Дейкстры. Именно по этой причине основной упор в работе делается на этот алгоритм. Также известны специализированные алгоритмы, такие

---

<sup>1</sup> $V$  — количество вершин

<sup>2</sup> $E$  — количество ребер

как алгоритм  $A^*$  и  $D^*$ , которые оперирует большими специализированными графами и используют ряд эвристик для поиска расстояний. При этом в контексте наших исследований они затронуты не будут, а сосредоточимся мы именно на алгоритме Беллмана-Форда и его модификациях.

В основе алгоритма лежит идея динамического программирования. После  $k$  итерации алгоритма утверждается, что будут корректно посчитаны и обработаны пути длиной не более  $k$ . И после  $V$  итерации расстояние до каждой из вершин посчитано корректно. Ниже приведен каноничный псевдокод алгоритма.

---

**Алгоритм 1** Классический алгоритм Беллмана-Форда

---

```

1: procedure CLASSICBELLMANFORD( $G, start$ )
2:    $dist \leftarrow \{\infty \dots \infty\}$ 
3:    $dist[start] \leftarrow 0$ 
4:   for  $i = 0$  to  $|G.vertices| - 1$  do
5:     for  $e \in G.edges$  do
6:        $dist[e.to] \leftarrow \min(dist[e.to], dist[e.from] + e.w)$ 
7:   return  $dist$ 

```

---

Кроме того, существует интересная модификация алгоритма, которая поддерживает на каждой итерации набор вершин, расстояние до которых изменилось на предыдущем шаге алгоритма. Из очевидных соображений мы имеем право рассматривать только эти и никакие другие вершины. Этот алгоритм на практике зачастую работает заметно быстрее, чем классическая версия. Однако в некоторых случаях он оказывается медленнее. Об этих особенностях подхода подробно описано в разделе, посвященном сравнению алгоритмов. Будем называть эту версию BFS-подобный Беллман-Форд (алгоритм 2).

---

**Алгоритм 2** BFS-подобный Беллман-Форд

---

```
1: procedure BFSBELLMANFORD( $G, start$ )
2:    $dist \leftarrow \{\infty \dots \infty\}$ 
3:    $dist[start] \leftarrow 0$ 
4:    $CurrentVertexSet \leftarrow \{start\}$  ▷ Набор вершин, расстояние до которых обновилось
5:    $NextVertexSet \leftarrow \emptyset$ 
6:    $step \leftarrow 0$ 
7:   while  $step < |G.vertices|$  and not  $CurrentVertexSet.empty()$  do
8:      $step \leftarrow step + 1$ 
9:      $NextVertexSet.clear()$ 
10:    for  $v \in CurrentVertexSet$  do
11:      for  $e \in G.edgesFrom[v]$  do ▷ Исходящие ребра из текущей вершины
12:        if  $dist[e.to] > dist[e.from] + e.w$  then
13:           $dist[e.to] \leftarrow dist[e.from] + e.w$ 
14:           $NextVertexSet.insert(e.to)$ 
15:     $CurrentVertexSet \leftarrow NextVertexSet$ 
16:  return  $dist$ 
```

---

### 1.1.2. Обзор параллельных модификации Беллмана-Форда

Большинство параллельных алгоритмов опираются на классическую реализацию алгоритма Беллмана-Форда и применяют различные методы для параллелизации внутреннего цикла релаксации ребер [1][2]. Кроме того, известны статьи, в которых описаны методы параллелизации BFS-подобной версии Беллмана-Форда [3]. Мною предложенная BFS-подобная версия показала лучший результат, нежели существующий аналог. При этом для параллельных модификации классической версии были обозначены области применения и их преимущества и недостатки относительно BFS-подобной версии. Однако, в силу специфичности многих существующих решений и их зависимости от библиотек, на которых они основаны, мною предложенные параллельные версии классического Беллмана-Форда сравниваться с аналогами не будут.

## 1.2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ БЕЛЛМАНА-ФОРДА

В предыдущем разделе были рассмотрены классические алгоритмы поиска кратчайших путей в графе, а также существующие параллельные модификации. В этой главе будут рассмотрены мною разработанные версии



алгоритма Беллмана-Форда в контексте параллельных вычислений. Кроме того, будем использовать в каждом из алгоритмов идею ранней остановки — если на текущем шаге ни одно из значений массива расстояний не изменилось, то имеем право выйти из основного цикла. В последующих подразделах будет представлено несколько версий алгоритма, а также их последующее сравнение и рекомендации по использованию.

### 1.2.1. Параллелизация по ребрам вершины

Прежде чем приступить к описанию параллельной версии выполним небольшую модификацию алгоритма. Будем для каждой вершины перебирать не исходящие ребра, а входящие. Это ход даст нам одно важное преимущество в контексте параллельных алгоритмов — значение кратчайшего расстояния до каждой вершины теперь может изменять лишь один поток, тогда как раньше могли несколько, что увеличивало потенциальные проблемы с гонками за ресурс.

Первая версия алгоритма основана на параллельной обработке всех ребер, входящих в текущую вершины. Псевдокод, который уже использует идею из предыдущего абзаца, приведен ниже. Алгоритм, как и классическая версия, работает в худшем случае за  $O(VE)$ .

---

**Алгоритм 3** Параллельный Беллман-Форд по ребрам вершины

---

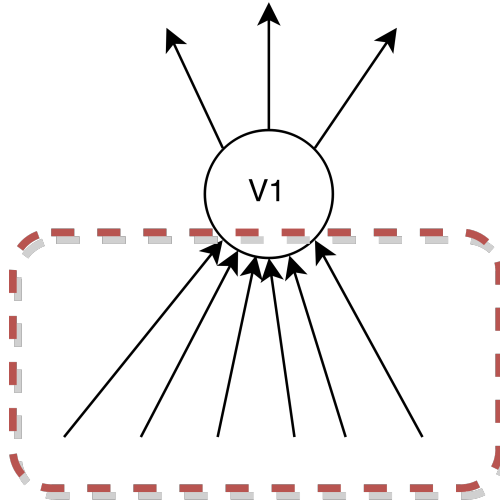
```

1: procedure BELLMANFORDPAR1( $G, start$ )
2:    $dist \leftarrow \{\infty \dots \infty\}$ 
3:    $dist[start] \leftarrow 0$ 
4:   for  $i = 0$  to  $|G.vertices| - 1$  do
5:      $changed \leftarrow \text{false}$ 
6:     for  $v \in G.vertices$  do
7:        $minDist \leftarrow dist[v]$ 
8:       parfor  $e \in G.edgesTo[v]$  do ▷ Входящие ребра в текущую вершину
9:          $minDist \leftarrow \min(minDist, dist[e.from] + e.w)$ 
10:      if  $dist[v] > minDist$  then
11:         $dist[v] \leftarrow minDist$  ▷ Атомарно
12:         $changed \leftarrow \text{true}$ 
13:      if not  $changed$  then
14:        break
15:  return  $dist$ 

```

---

Рис. 1.1: Параллелизация по ребрам вершины



### 1.2.2. Параллелизация по всем ребрам

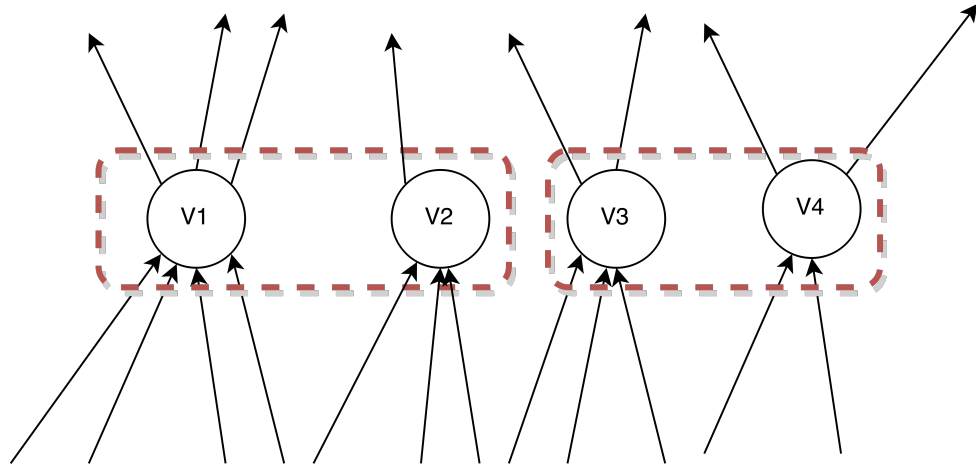
Идея второго алгоритма состоит в разбиении всего набора вершин на некоторые подмножества, каждое из которых будет обрабатываться отдельным процессором. При этом опять же, как и в предыдущем алгоритме, для каждой вершины будем рассматривать набор ребер, входящих в нее.

Рассмотрим псевдокод алгоритма. Процесс поиска расстояний разбивается на два этапа. Рассмотрим каждый из этапов по отдельности.

На первом этапе мы строим разбиение всего множества вершин на подмножества, каждое из которых будет обрабатываться последовательно. Причем необходимо выполнить разбиение таким образом, чтобы суммарное количество входящих в вершины текущего подмножества ребер было не более *threshold*. Добиться этого можно с помощью рекурсивной функции *BuildPlan*, которая на текущем шаге находит с помощью двоичного поиска такую вершину текущего отрезка, которая разбивает множество входящих в вершины ребер примерно пополам. Далее индекс такой вершины запоминается в хэш-таблицу, ключом которой является пара индексов концов текущего отрезка. Для эффективной реализации двоичного поиска предпосчитаем частичные суммы для входящих ребер — это необходимо,

чтобы мы могли в двоичном поиске получать за  $O(1)$  количество входящих ребер на некотором отрезке вершин.

Рис. 1.2: Параллелизация по всем ребрам



На втором этапе мы непосредственно вычисляем кратчайшие расстояния до вершин. Эта функция использует посчитанные ранее частичные суммы и полученную из функции *BuildPlan* хэш-таблицу. На текущем шаге функция проверяет больше ли количество входящих ребер текущего отрезка значения *threshold*. Если значение оказывается меньше, то обработка ребер выполняется последовательно. Иначе, с помощью посчитанной на первом этапе хэш-таблицы выбирается индекс середины отрезка (в смысле числа входящих ребер) и параллельно запускается обработка двух подотрезков вершин. Операция выбора середины отрезка будет выполняться за  $O(1)$  за счет хэш-таблицы.

Алгоритм также как и предыдущая версия работает в худшем случае за  $O(VE)$ , однако он имеет значительно большую практическую пользу. Эта тема будет подробно рассмотрена позднее в подразделе «Сравнение алгоритмов».

---

**Алгоритм 4** Параллельный Беллман-Форд по всем ребрам

---

```
1: procedure BELLMANFORDPAR2( $G, start$ )
2:    $dist \leftarrow \{\infty \dots \infty\}$ 
3:    $dist[start] \leftarrow 0$ 
4:    $prefsum \leftarrow$  prefix sum by vertices incoming degree
5:    $planMap \leftarrow$  empty map
6:   BUILDPLAN( $prefsum, 0, |G.vertices|, planMap$ )
7:   for  $i = 0$  to  $|G.vertices|$  do
8:     if not PROCESSLAYER( $G, dist, planMap, prefsum, 0, |G.vertices|$ ) then
9:       break
10:  return  $dist$ 
11:
12: procedure BUILDPLAN( $prefsum, startV, endV, resultMap$ )
13:    $edgesNumber \leftarrow prefsum[endV] - prefsum[startV]$ 
14:   if  $edgesNumber < threshold$  then
15:      $midV \leftarrow$  Бинарным поиском по массиву  $prefsum$  находим индекс вершины  $midV$ , что
16:      $prefsum[midV] - prefsum[startV] \approx prefsum[endV] - prefsum[midV]$ 
17:      $resultMap[startV][endV] \leftarrow midV$ 
18:     BUILDPLAN( $prefsum, startV, midV, resultMap$ )
19:     BUILDPLAN( $prefsum, midV, endV, resultMap$ )
20:   return  $resultMap$ 
21:
22: procedure PROCESSLAYER( $G, dist, planMap, prefsum, startV, endV$ )
23:    $edgesNumber \leftarrow prefsum[endV] - prefsum[startV]$ 
24:   if  $edgesNumber < threshold$  then
25:     return PROCESSVERTICESSEQUENTIALLY( $G, dist, startV, endV$ )
26:   else
27:      $midV \leftarrow planMap[startV][endV]$ 
28:      $changed \leftarrow \mathbf{false}$ 
29:      $changed = changed$  or PROCESSLAYER( $G, dist, planMap, prefsum, startV, midV$ )
30:      $changed = changed$  or PROCESSLAYER( $G, dist, planMap, prefsum, midV, endV$ )
31:     return  $changed$ 
32:
33: procedure PROCESSVERTICESSEQUENTIALLY( $G, dist, startV, endV$ )
34:    $changed \leftarrow \mathbf{false}$ 
35:   for  $v = startV$  to  $endV - 1$  do
36:      $minDist \leftarrow dist[v]$ 
37:     for  $e \in G.edgesTo[v]$  do ▷ Входящие ребра в текущую вершину
38:        $minDist \leftarrow \min(minDist, dist[e.from] + e.w)$ 
39:       if  $dist[v] > minDist$  then
40:          $dist[v] \leftarrow minDist$  ▷ Атомарно
41:          $changed \leftarrow \mathbf{true}$ 
42:   return  $changed$ 
```

---

### 1.2.3. Параллелизация BFS-версии

Предыдущие две версии были основаны на параллелизации классической версии Беллмана-Форда. В основе следующего алгоритма лежит BFS-подобный Беллман-Форд (алгоритм 2). В качестве основы для парал-

лельной версии такого алгоритма был взят параллельный обход в ширину, предложенный Умутом Акаром и Майком Рэйни [4].

Ключевым моментом в алгоритме является использованием структуры данных *Frontier*. Она подробно рассмотрена в статье Умута Акара и Майка Рэйни. Здесь же приведено краткое ее описание, основные принципы работы и интерфейс. *Frontier* представляет из себя некоторый набор ребер. При этом он поддерживает операции разделения множества пополам, слияния множеств, добавления ребер вершины и итерирования по ребрам. При этом операции слияния и разбиения выполняются асимптотически за  $O(\log n)$ , добавление ребер вершины происходит за константу, а итерирование за константу для каждого ребра. Такая асимптотика достигается за счет лежащей в основе *Bootstrapped Chunked Sequence* [5], которая представляет из себя последовательность, где каждому элементу сопоставляется его вес. И операций слияния и разбиения выполняются в соответствии с этими весами и выполняются за  $O(\log n)$ . Более подробное описание *Bootstrapped Chunked Sequence* приведено в указанной ранее статье.

Кроме того, в алгоритме используются важная возможность библиотеки для параллельных вычислений *PASL* [6] (является альтернативой известного решения *Cilk* [7]) — взаимодействие между несколькими потоками. А именно каждый из потоков может понимать нуждаются ли в «помощи» другие потоки. И в случае положительного ответа он может «поделиться» данными для вычислений.

Таким образом, псевдокод алгоритма представлен ниже. В основе главной функции алгоритма *HandleFrontier* лежит следующая идея. В процессе обработки текущего *CurFrontier* мы во-первых узнаем нуждается ли другой процессор в данных для вычисления. Если да, то делимся в случае достаточного количества ребер. Иначе обрабатываем некоторое константное значение ребер (*pollingCutoff*) и запускаем процесс снова. Об-

ратим внимание, что в нем использованы упомянутые ранее возможности библиотеки PASL — функции *hasIncomingQuery* и *rejectQuery*.

---

**Алгоритм 5** Параллельный BFS-подобный Беллман-Форд

---

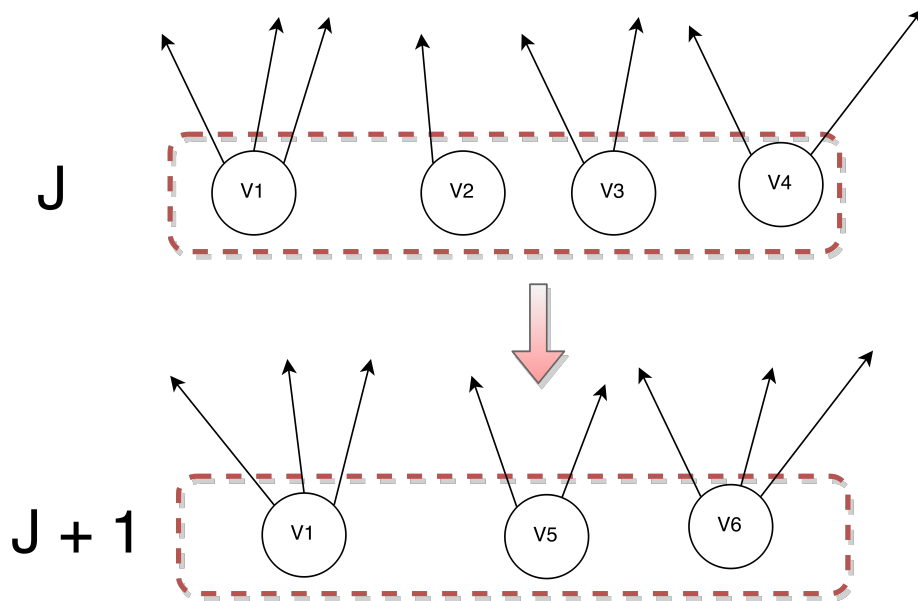
```

1: procedure BELLMANFORDPAR3( $G, start$ )
2:    $dist \leftarrow \{\infty \dots \infty\}$ 
3:    $layerForVertex \leftarrow \{-1 \dots -1\}$   $\triangleright$  Номер последнего уровня, в котором посетили вершину
4:    $dist[start] \leftarrow 0$ 
5:    $layerForVertex[start] \leftarrow 0$ 
6:    $Frontier \leftarrow \{G.edgesFrom(start)\}$   $\triangleright$  Исходящие ребра текущего множества
7:   for  $layer = 1$  to  $|G.vertices|$  do
8:      $NextFrontier \leftarrow \emptyset$ 
9:      $Frontier \leftarrow \text{HANDLEFRONTIER}(Frontier, NextFrontier, layer, dists, layerForVertex)$ 
10:    if  $Frontier.empty()$  then
11:      break
12:  return  $dist$ 
13:
14: procedure HANDLEFRONTIER( $CurFrontier, NextFrontier, layer, dists, layerForVertex$ )
15:  while not  $CurFrontier.empty()$  do
16:    if  $hasIncomingQuery()$  then
17:      if  $CurFrontier.nbEdges() \leq cutoff$  then
18:         $rejectQuery()$ 
19:      else
20:         $NewCurFrontier \leftarrow \emptyset$ 
21:         $NewNextFrontier \leftarrow \emptyset$ 
22:         $CurFrontier.split(NewCurFrontier)$ 
23:         $fork2($ 
24:           $\text{HANDLEFRONTIER}(CurFrontier, NextFrontier, layer, dists, layerForVertex),$ 
25:           $\text{HANDLEFRONTIER}(NewCurFrontier, NewNextFrontier, layer, dists, layerForVertex));$ 
26:           $NextFrontier.split(NewNextFrontier)$ 
27:         $Frontier.iterNumber(pollingCutoff, updateFunction(from, to, weight, layer, dists, layerForVertex))$ 
28:
29: procedure UPDATEFUNCTION( $from, to, weight, layer, dists, layerForVertex, NextFrontier$ )
30:  if  $\text{TRYTOUPDATEDISTANCE}(to, dists[from] + weight, dists)$  then
31:    if  $\text{TRYTOSETVISITED}(to, layer, layerForVertex)$  then
32:       $NextFrontier.pushEdgesOf(to)$ 
33:
34: procedure TRYTOSETVISITED( $vertex, layer, layerForVertex$ )
35:  if not  $layerForVertex[vertex] = layer$  then
36:    return  $cas(layerForVertex[vertex], layerForVertex[vertex], layer)$ 
37:  return false
38:
39: procedure TRYTOUPDATEDISTANCE( $vertex, candidate, dists$ )
40:  return  $writeMin(dists[vertex], candidate)$   $\triangleright$  Атомарный минимум

```

---

Рис. 1.3: Параллелизация BFS-версии



#### 1.2.4. Сравнение подходов

Несмотря на то, что все три алгоритма в худшем случае имеют одну асимптотику  $O(VE)$ , каждый из вышеизложенных подходов имеет свои особенности, что позволяет каждому из них конкурировать друг с другом на некоторых типах графов. Рассмотрим эти особенности.

С первого взгляда может показаться, что алгоритм 3 имеет лишь одни недостатки — он наименьшим образом по сравнению с последующими задействует все процессоры и при этом асимптотически равен остальным двум. Однако рассмотрим внимательнее каноничный алгоритм Беллмана-Форда и запустим его на плотном графе, где для каждого ребра верно, что индекс вершины источника меньше индекса вершины назначения (будем называть такое ребро лексикографически отсортированным). В этом случае каноничной версии достаточно будет сделать лишь две итерации внешнего цикла, поскольку на каждой итерации внутреннего цикла значение расстояния для текущей вершины будет корректно посчитано (очевидно доказывается по принципу математической индукции). Иными словами, в

этом случае алгоритм работает за  $O(V + E)$ . Так как количество итерации третьего алгоритма в подобных графах может быть значительным и размер текущей очереди может быть большим, а второму же алгоритму на таких графах хорошая способность параллелиться будет только вредить — она будет заметно увеличивать число итераций внешнего цикла, то в таких случаях последние два алгоритма работают хуже первого.

Но, очевидно, что в большинстве случаев последние два алгоритма будут показывать лучшие результаты. Сравним эти два подхода. Алгоритм, основанный на обходе в ширину, заметно сокращает количество вершин для обработки в пределах каждой итерации, что дает заметное преимущество на разреженных графах по сравнению с алгоритмом 4, где на каждом шаге обрабатываются все ребра. Однако на плотных графах количество таких вершин значительно, что негативно сказывается на производительности алгоритма в силу множественных и трудоемких операций с памятью. То есть такой подход показывает себя не с лучшей стороны в подобных графах. Кроме того, в случае с графами с циклами отрицательного веса даже в случае разреженного графа размер текущего Frontier может быть велик. Это достигается в том случае, если количество вершин, из которых достигим цикл отрицательного веса велико. Однако провести такой анализ графа в общем случае не является простой задачей, то будем рекомендовать к использованию алгоритм 4 при наличии в графе ребер отрицательного веса.

### 1.2.5. Тестирование

Для подтверждения вышеприведенных рассуждений все вышеизложенные подходы были реализованы на основе уже ранее упомянутой библиотеки для параллельных вычислений PASL. В качестве языка программирования использовался C++. Тестирование производилось на ряде



графов на 40-ядерной машине Intel с поддержкой hyper-threading [8] с доступной оперативной памятью 256GB.

Алгоритмы тестировались на различных графовых структурах, которые перечислены в Таблице 1.1.

Таблица 1.1: Описание входных графов

<i>fraction</i> - Доля лексикографически отсортированных ребер (ребра вида $V_i \rightarrow V_{i+j}$ )			
Название	Вершины	Ребра	Описание
Complete TS	7071	24995985	Полный граф с fraction = 1 (TopSorted)
Complete +	3162	9995082	Полный граф с положительным весом ребер
Complete -	3162	9995082	Полный граф с случайным весом ребер
BalancedTree F	8388607	8388608	Сбалансированное дерево с fraction = F
SquareGrid +	2499561	4999122	Квадратная решетка с положительными ребрами
SquareGrid -	2499561	4999122	Квадратная решетка с случайными ребрами
RandomSparse 0.5+	2500000	25000000	Случайный разреженный граф с положительными ребрами и fraction = 0.5
RandomSparse 0.5-	2500000	25000000	Случайный разреженный граф с любыми ребрами и fraction = 0.5
RandomSparse 0.96+	2500000	25000000	Случайный разреженный граф с положительными ребрами и fraction = 0.96
RandomDense 0.5+	5000	25000000	Случайный плотный граф с положительными ребрами и fraction = 0.5
RandomDense 0.5-	5000	25000000	Случайный плотный граф с любыми ребрами и fraction = 0.5
RandomDense 0.96+	5000	25000000	Случайный плотный граф с положительными ребрами и fraction = 0.96

Средние значения времени исполнения каждой версии алгоритма на описанных графах представлены в таблице 1.2. В тех случаях, когда время исполнения алгоритма было сильно выше, чем у аналогов (значение  $\infty$  в таблице), выполнение алгоритма прерывалось.

Таблица 1.2: Результаты измерений производительности

Алгоритм	Complete			BalancedTree		SquareGrid		RandomSparse			RandomDense		
	TS	+	-	0.5	1	+	-	0.5+	0.5-	0.96+	0.5+	0.5-	0.96+
3	2.43	4.65	$\infty$	116.31	9.04	5.49	13.40	$\infty$	$\infty$	24.35	$\infty$	$\infty$	5.01
4	5.17	0.18	10.84	3.59	3.08	5.92	7.10	2.77	14.68	2.42	0.48	6.38	0.46
5	44.63	0.37	23.55	0.44	0.31	4.42	0.58	0.59	22.59	0.48	0.60	10.25	0.71
Ligra	49.13	0.30	26.11	0.55	0.50	8.15	1.21	0.58	25.19	0.54	1.12	14.15	1.20

### 1.3. Выводы

Из таблиц видно, что наши ожидания относительно применимости конкретных подходов оправдались. Первый из алгоритмов работает лучше на узком спектре графов с высоким *fraction* (доля лексикографически отсортированных ребер) и высокой средней степени вершины, второй хорошо работает на плотных графах и графах с отрицательным весом ребер, третий же заметно лучше остальных на разреженных графах.

Кроме того, параллельный BFS-подобный Беллмана-Форда оказался во многих ситуациях лучше аналога из библиотеки Ligma. Это прежде всего объясняется высокой производительностью работы структуры данных Frontier. Соответствующее сравнение параллельных обходов в ширину, приведенное в работе Умута Акара [4], это еще раз подтверждает, поскольку эта модификация Беллмана-Форда во многом очень похожа на классический обход в ширину.

Таким образом сделав простой анализ структуры графа мы сможем выбрать необходимый эффективный алгоритм для поиска кратчайшего пути.

# Глава 2. Решение задачи поиска расстояний между каждой парой вершин графа

В этой главе будет приведено решение задачи поиска кратчайших расстояний между каждой парой вершин. В начале главы будет краткий обзор предметной области, далее будут приведены два решения для поиска искомых расстояний, а после будет приведено решение задачи для графов социальных сетей, которое будет сочетать в себе несколько подходов и идей, изложенных в предыдущих алгоритмах.

## 2.1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

### 2.1.1. Алгоритм Флойда

Одним из наиболее известных алгоритмов, который применяется для решения данной задачи является алгоритм Флойда [9]. Этот алгоритм использует подход динамического программирования и выполняется за  $O(V^3)$ . Основная идея состоит в обновлений пути между двумя текущими вершинами выбором некоторой вершины, через которую может пройти потенциальный кратчайший путь. Псевдокод алгоритма приведен ниже.

---

**Алгоритм 6** Алгоритм Флойда

---

```
1: procedure FLOYD( $G$ )
2:    $dist \leftarrow \{\{\infty \dots \infty\} \dots \{\infty \dots \infty\}\}$ 
3:   for  $e \in G.edges$  do
4:      $dist[e.from][e.to] \leftarrow e.w$ 
5:
6:   for  $i = 0$  to  $|G.vertices|$  do
7:     for  $u = 0$  to  $|G.vertices|$  do
8:       for  $v = 0$  to  $|G.vertices|$  do
9:          $dist[u][v] \leftarrow \min(dist[u][v], dist[u][i] + dist[i][v])$ 
10:  return  $dist$ 
```

---

### 2.1.2. Альтернативы

В некоторых случаях оказываются эффективны другие подходы. Например, можно для каждой вершины по отдельности запустить некоторый алгоритм поиска кратчайшего пути до всех остальных вершин. Для случая неотрицательных ребер можно применить алгоритм Дейкстры, в более общем случае может быть применен Беллман-Форд. Кроме вышеприведенных подходов также известен алгоритм Джонсона, который работает на графах без циклов отрицательного веса и находит кратчайшие расстояния за время  $O(V^2 \log(V) + VE)$ . Все эти алгоритмы оказываются эффективны в случае разреженных графов.

В последующих подходах в качестве основы для параллельного алгоритма будет использоваться именно идея подсчета расстояний либо для каждой вершины по отдельности, либо подсчета расстояний для групп вершин одновременно. И все нижеперечисленные алгоритмы, как и описанные выше альтернативы, хорошо работают на разреженных графах.

## 2.2. НАИВНАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Первая версия заключается исключительно в запуске параллельного Беллмана-Форда для каждой из вершин. При этом заметим, что так как каждый из них независим друг от друга, то можем эти запуски распараллелить между собой. Для этого разобьем множество вершин таким образом, чтобы размер каждого подмножества был не более *threshold*. Важным замечанием является то, что необходимо выбирать наиболее подходящую реализацию параллельного Беллмана-Форда в зависимости от типа графа. К примеру, в случае разреженного графа с положительными ребрами нам подойдет последняя реализация, основанная на параллельном обходе в ширину. Таким образом, псевдокод из себя представляет следующее.

---

**Алгоритм 7** Наивная параллельная версия

---

```
1: procedure ALLPAIRSPAR1( $G$ )
2:   return HANDLEVERTICES( $G, 0, |G.vertices|$ )
3:
4: procedure HANDLEVERTICES( $G, startVertex, endVertex$ )
5:   if  $endVertex - startVertex < threshold$  then
6:      $distances \leftarrow$  Запустить параллельную версию Беллмана-Форда для каждой вершины из по-
       луинтервала  $[startVertex, endVertex)$ 
7:     return  $distances$ 
8:   else
9:      $midVertex \leftarrow (startVertex + endVertex)/2$ 
10:    fork2(
      HANDLEVERTICES( $G, startVertex, midVertex$ ),
      HANDLEVERTICES( $G, midVertex, endVertex$ ));
```

---

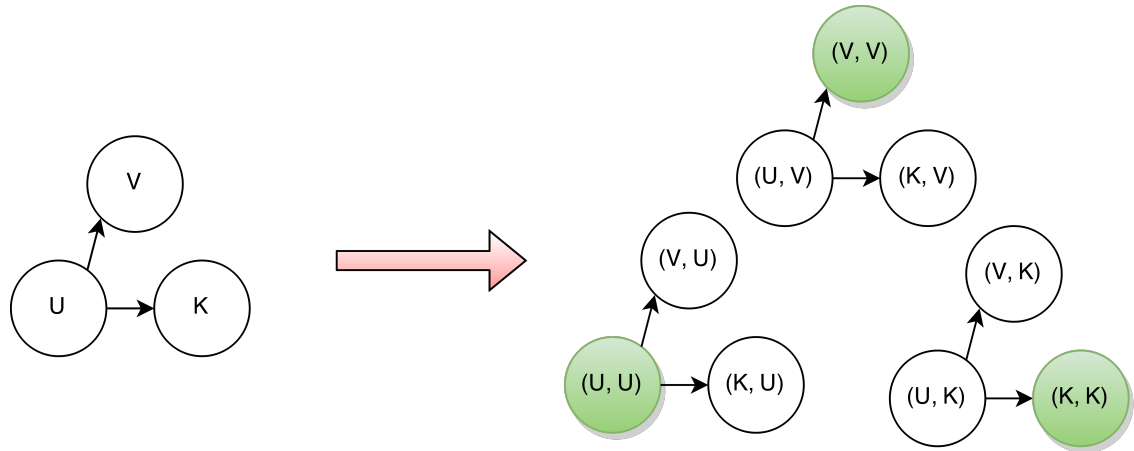
### 2.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОБЪЕДИНЕННОГО ГРАФА

Развитием предыдущей идеи является наблюдение, что для некоторого набора вершин можем построить общий граф и запустить на нем Беллмана-Форда, что потенциально может повысить производительность за счет больших размеров текущего Frontier в процессе работы алгоритма, ведь маленькие размеры Frontier, которые могут появляться при запуске алгоритма из одной вершины, значительно снижают параллелизм. Кроме того, такой подход избавит нас от выбора константы *threshold* из предыдущего подраздела, что упростит использование алгоритма.

Идея заключается в запуске алгоритма Беллмана-Форда на графе, каждой вершине которого соответствует две вершины  $i$  и  $j$  исходного графа. При этом ребро  $(i, j) \rightarrow (k, l)$  в новом графе существует тогда и только тогда, когда существует ребро между вершинами  $i$  и  $k$  в исходном графе и  $j = l$ . Пример построения такого графа представлен на рисунке 2.1. При этом если мы на получившемся графе одновременно запустим Беллмана-Форда для всех вершин вида  $(i, i)$  (положим все вершины такого вида в изначальный Frontier), то найденное кратчайшее расстояние до некоторой вершины  $(i, j)$  будет интерпретироваться как кратчайшее расстояние от

вершины  $i$  до вершины  $j$  в исходном графе.

Рис. 2.1: Пример преобразования для простейшего графа



Однако, как было показано на практике, такой подход не дал существенного выигрыша в силу высокой параллельности наивного метода, но при этом идея обработки ряда вершин одновременно легла в основу алгоритма для социальных графов.

## 2.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ СОЦИАЛЬНЫХ ГРАФОВ

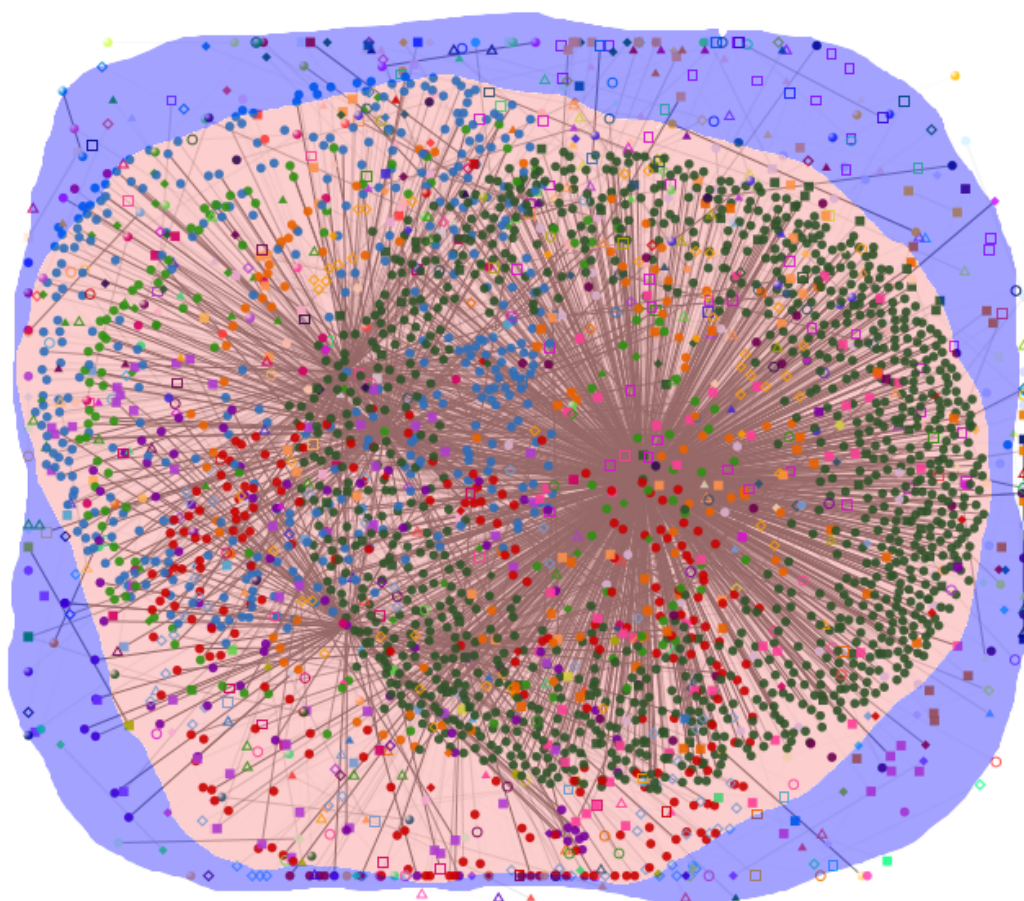
В данном разделе будет рассмотрен алгоритм поиска кратчайшего пути между каждой парой вершин для невзвешенных и неориентированных графов реальных социальных сетей. Кроме того, в этой главе будет рассмотрена производительность алгоритма на примере реальных подграфов крупных социальных сетей, таких как Twitter и Slashdot [10].

### 2.4.1. Идея алгоритма

В графах для социальных сетей известна одна эвристика, которая называется «Теория шести рукопожатий». В ее основе лежит тот факт, что практически любые два человека на земле знакомы не более, чем через пятерых промежуточных людей. Таким образом, выбрав некоторую

случайную вершину, мы сможем добраться от нее до большинства других вершин не более, чем за 6 ребер. Воспользуемся этой эвристикой в нашем алгоритме и выберем вершину наибольшей степени в качестве базовой. И рассмотрим два множества — вершины, которые находятся на расстоянии не более 6 от базовой («большее» множество) и все остальные вершины («меньшее» множество). Кроме того, будем обрабатывать эти два множества различным образом — для меньшего будем запускать параллельного Беллмана-Форда для каждой вершины, для большого — воспользуемся методом динамического программирования для подсчета ответа. Пример разбиения социального графа на два эти множества проиллюстрирован на рисунке 2.2. Рассмотрим более подробно принцип работы алгоритма.

Рис. 2.2: Пример разбиение социального графа на 2 множества



## 2.4.2. Работа алгоритма

Как уже было отмечено ранее, работа алгоритма разбивается на три этапа, которые в дальнейшем будут рассмотрены по отдельности.

- Анализ графа и выбор базовой вершины;
- Обработка меньшего множества параллельным Беллманом-Фордом;
- Обработка большего множества методом динамического программирования.

Первый и самый простой этап состоит в выборе базовой вершины. В качестве нее будет выбрана вершина с наибольшей степенью. После этого из этой вершины будет запущен обход в ширину, который найдет все вершины, отстоящие не более, чем на  $K$  (в случае классической теорий шести рукопожатий  $K = 6$ ). Таким образом, все такие вершины попадают в большее множество *handleByBaseVertexSet*, которое будет обработано на третьем этапе алгоритма. Все остальные вершины попадают в меньшее множество *otherVertexSet*. Псевдокод этого этапа выглядит следующим образом

---

**Алгоритм 8** Первая фаза алгоритма

---

```
1: procedure CONSTRUCTSETS( $G$ )
2:    $baseVertex \leftarrow$  Вершина максимальной степени
3:    $dist \leftarrow$  Запустить обход в ширину из  $baseVertex$ 
4:    $handleByBaseVertexSet \leftarrow \emptyset$ 
5:   parfor  $i = 0$  to  $|G.vertices| - 1$  do
6:     if  $dist[i] \leq K$  then
7:        $handleByBaseVertexSet.add(i)$ 
8:    $otherVertexSet \leftarrow G.vertices \setminus handleByBaseVertexSet$ 
9:    $otherVertexSet \leftarrow otherVertexSet \cup \{baseVertex\}$ 
10:  return  $baseVertex, handleByBaseVertexSet, otherVertexSet$ 
```

---

В качестве алгоритма для обработки второго множества запустим параллельный обход в ширину (он же Беллман-Форд) для каждой из вершин этого множества. Иными словами, мы просто воспользуемся алгоритмом 7 для множества вершин (для *otherVertexSet*). При этом исходя из



наших эвристик мы предполагаем небольшие размеры множества, что позволяет думать об этом этапе как о значительно менее затратным по времени по сравнению с последним. Кроме того, значения расстояния, посчитанные обходом в ширину из базовой вершины нам помогут на третьем этапе, поэтому добавим в множество *otherVertexSet* базовую вершину (чтобы в дальнейшем при обращении к глобальному массиву *dist* в нем содержались корректные расстояния от базовой вершины).

Для поиска искомого значения для вершин множества *handleByBaseVertexSet* воспользуемся методом динамического программирования. Но сперва обсудим основные принципы построения алгоритма и доказательство его корректности.

Рассмотрим некоторую вершину, которая находится на расстоянии  $d$  от базовой вершины ( $d \leq K$ ). То какие вершины для нее могут находиться на расстоянии  $i$ ? Это могут быть только те вершины, которые находятся на расстоянии  $[i - d, i + d]$  от базовой. Иначе бы не выполнялось свойство, что путь кратчайший. С другой стороны, если рассмотреть некоторую вершину, расстояние до которой от базовой равняется  $i$ , то для всех вершин из множества *handleByBaseVertexSet* верно, что кратчайшее расстояние от них до нее варьируется в промежутке  $[i - K, i + K]$ .

Предположим, что мы запустили обход в ширину из всех вершин большого множества. То какие вершины могут быть в слое с номером  $i$ ? Ответ вытекает из рассуждений предыдущего абзаца - только вершины, расстояние от которых до базовой варьируется в промежутке  $[i - K, i + K]$ . То есть каждая из вершин будет принимать участие в не более, чем  $2K + 1$  слоях. То построим для каждого слоя обхода в ширину множество возможных вершин на этом слое. Это избавит нас от построения таких множеств в процессе работы алгоритма. И при этом общее количество вершин во всех слоях будет пропорционально числу вершин в графе (если учитывать, что  $K$  - небольшое число, меньше 7). После того, как мы построили набор вер-

шин для каждого из слоев, мы можем воспользоваться структурой данных Frontier для эффективного распараллеливания процесса обработки ребер, исходящих из этих вершин.

При этом в процессе обработки будем поддерживать две следующие динамики.

- $mask[u][i]$  — набор вершин, расстояние от которых до  $u$  равно  $i$ ;
- $calc[u][i]$  — набор вершин, расстояние от которых до  $u$  меньше  $i$ .

Обратим внимание, что динамика оперирует понятием набор вершин. Это реализуется за счет специальной структуры данных — битового вектора. Она представляет из себя некоторую структуру, где каждый из битов соответствует вершине из множества *handleByBaseVertexSet*. Кроме того, битовый вектор должен поддерживать битовые логические операции (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание) и стандартные методы установки соответствующего бита и его получение.

Рассмотрим процесс пересчета значений динамики. Для подсчета текущего значения  $mask[v][i]$  воспользуемся формулой (2.1). Суть формулы состоит в переборе всех ребер графа, входящих в текущую вершину, и применении операции битовое «или» для соответствующих масок. При этом мы не должны учитывать данные для тех вершин, расстояние до которых уже посчитано (эта информация хранится в массиве *calc*). Это реализуется за счет выполнения операции логического отрицания с соответствующим битовым вектором.

$$mask[v][i] = \neg calc[v][i - 1] \wedge \bigvee_{\exists(u,v) \in E} mask[u][i - 1] \quad (2.1)$$

В свою очередь *calc* пересчитывается согласно (2.2)

$$calc[v][i] = calc[v][i - 1] \vee mask[v][i] \quad (2.2)$$

Псевдокод пересчета значений динамики представлен ниже. Обратим внимание, что для каждой вершины нам достаточно хранить всего  $2K + 1$  битовых векторов. Однако для упрощения понимания псевдокода будем обращаться к  $i$  слою вершины  $u$  просто как  $mask[u][i]$ , при этом имея в виду эту значительную оптимизацию по памяти. Кроме того, другим важным замечанием является то, что когда нам необходимо посчитать значения динамики для слоя  $i$ , то нам необходимо обрабатывать предыдущий слой. Таким образом, в последнем цикле алгоритма для обработки  $layerToCalc$  мы используем  $frontierLayer \leftarrow layerToCalc - 1$ .

---

**Алгоритм 9** Пересчет динамики

---

```

1:  $K \leftarrow 6$  ▷ Максимальная глубина до базовой вершины. . .
2:
3: procedure CALCULATEDISTANCESFORBIGSET( $G, baseVertex, handleByBaseVertexSet$ )
4:    $maxLayer \leftarrow$  calculate max distance from baseVertex
5:    $Frontiers \leftarrow \{Frontier_0 \dots Frontier_{maxLayer+K}\}$  ▷ Фронтир для каждого уровня обхода
6:    $VertexSets \leftarrow \{VertexSet_0 \dots VertexSet_{maxLayer+K}\}$  ▷ Набор вершин для каждого уровня
7:    $mask \leftarrow \{\{bitVector(0) \dots bitVector(0)\} \dots \{bitVector(0) \dots bitVector(0)\}\}$ 
8:    $calc \leftarrow \{\{bitVector(0) \dots bitVector(0)\} \dots \{bitVector(0) \dots bitVector(0)\}\}$ 
9:
10:  for  $i = 0$  to  $maxLayer + K$  do
11:    for  $j = dist[baseVertex][i] - K$  to  $dist[baseVertex][i] + K$  do
12:       $Frontiers[j].pushEdgesOf(i)$ 
13:       $VertexSets[j].addVertex(i)$ 
14:
15:  for  $v \in handleByBaseVertexSet$  do
16:     $mask[v][0] \leftarrow bitVector(bitNum(v))$  ▷ Будем считать, что существует функция bitNum,
    которая по номеру вершины возвращает соответствующий ей бит
17:
18:  for  $layerToCalc = 1$  to  $maxLayer + K$  do
19:     $frontierLayer \leftarrow layerToCalc - 1$ 
20:     $PROCESSLAYERLAZY(G, Frontiers[frontierLayer], mask, layerToCalc)$ 
21:    parfor  $v \in VertexSets[layerToCalc]$  do
22:       $calc[v][layerToCalc] \leftarrow mask[v][layerToCalc]$ 
23:      if  $layerToCalc$  is not first layer for vertex  $v$  then
24:         $calc[v][layerToCalc - 1] \leftarrow \neg calc[v][layerToCalc - 1]$ 
25:         $mask[v][layerToCalc] \leftarrow mask[v][layerToCalc] \wedge calc[v][layerToCalc - 1]$ 
26:         $calc[v][layerToCalc - 1] \leftarrow \neg calc[v][layerToCalc - 1]$ 
27:         $calc[v][layerToCalc] \leftarrow calc[v][layerToCalc] \vee calc[v][layerToCalc - 1]$ 

```

---

Для полноты алгоритма осталось описать обработку текущего Frontier. Псевдокод этого этапа представлен ниже. В этом алгоритме мы снова (как и в алгоритмах из первой главы) пользуемся интерфейсом,

который предоставляет библиотека для параллельных вычислений PASL. Напомню, что для взаимодействия между рабочими потоками существуют служебные функции, дающие понять потокам необходимость разбиения Frontier для обработки на других ядрах или же понять обратное.

---

**Алгоритм 10** Обработка Фронттира

---

```

1: procedure PROCESSLAYERLAZY( $G, Frontier, mask, layer, dists, baseVertex$ )
2:   while not  $Frontier.empty()$  do
3:     if  $hasIncomingQuery()$  then
4:       if  $Frontier.nbEdges() \leq cutoff$  then
5:          $rejectQuery()$ 
6:       else
7:          $NewFrontier \leftarrow \emptyset$ 
8:          $Frontier.split(NewFrontier)$ 
9:          $fork2($ 
            $PROCESSLAYERLAZY(G, Frontier, mask, layer, dists, baseVertex),$ 
            $PROCESSLAYERLAZY(G, NewFrontier, mask, layer, dists, baseVertex));$ 
10:       $Frontier.iterNumber(pollingCutoff, updateFunction(mask, from, to, layer, dists, baseVertex))$ 
11:
12: procedure UPDATEFUNCTION( $mask, from, to, layer, dists, baseV$ )
13:   if  $HaveOnLayer(layer - 1, from, dists, baseV)$  and  $HaveOnLayer(layer, to, dists, baseV)$  then
14:      $mask[to][layer] \leftarrow mask[to][layer] \vee mask[from][layer - 1]$  ▷ Атомарно
15:
16: procedure HAVEONLAYER( $layer, vertex, dists, baseV$ )
17:   return  $|layer - dists[baseV][vertex]| \leq K$ 

```

---

Наконец, как по имеющимся данным динамики восстановить ответ? Для каждого значения  $mask[u][i]$  найдем единичные биты в маске. Установленный в единицу бит  $j$  говорит о том, что расстояние от вершины из «большого» множества, которой соответствует бит  $j$ , до вершины  $u$  равно  $i$ . Таким образом, мы сможем полностью восстановить ответ для каждой вершины.

Важным замечанием к коду является последовательность выполнения циклов в последней части алгоритма. Рассмотрим на примере как происходит обращение к памяти в двух различных вариантах (алгоритм 11 и алгоритм 12), при этом выполняющих совершенно одно и то же. Заметим, что в этих алгоритмах отличается порядок параллельных циклов.

---

**Алгоритм 11** Заполнение массива ответа по динамика (1 вариант)

---

```
1: procedure FILLDISTANCES1( $G, dist, mask, baseVertex, handleByBaseVertexSet$ )
2:   parfor  $v = 0$  to  $|G.vertices|$  do
3:     for  $j = dist[baseVertex][i] - K$  to  $dist[baseVertex][i] + K$  do
4:       parfor  $u \in handleByBaseVertexSet$  do
5:         if  $mask[v][j].getBit(bitNum(u)) = 1$  then
6:            $dist[u][v] = j$ 
```

---

---

**Алгоритм 12** Заполнение массива ответа по динамика (2 вариант)

---

```
1: procedure FILLDISTANCES2( $G, dist, mask, baseVertex, handleByBaseVertexSet$ )
2:   parfor  $u \in handleByBaseVertexSet$  do
3:     for  $j = dist[baseVertex][i] - K$  to  $dist[baseVertex][i] + K$  do
4:       parfor  $v = 0$  to  $|G.vertices|$  do
5:         if  $mask[v][j].getBit(bitNum(u)) = 1$  then
6:            $dist[u][v] = j$ 
```

---

Так как некоторый  $mask[i][j]$  представляет из себя область последовательной памяти, то в случае первого варианта процессор будет работать при вызове методов *getBit* именно с последовательной памятью, в то время как вторая версия будет обращаться к различным элементам матрицы *mask* и тем самым к разным участками памяти, что заметно медленнее в силу специфик устройства вычислительной машины. Это замечание было подтверждено и на практике — алгоритм со второй реализаций работает (на той же машине, которая упоминалась в контексте тестирования параллельного Беллмана-Форда) в среднем в 1.5 раза дольше, чем с первым вариантом.

Итого, псевдокод алгоритма выглядит следующим образом.

---

**Алгоритм 13** Параллельная версия для социальных графов

---

```
1: procedure ALLPAIRS SOCIALPAR( $G$ )
2:    $dist \leftarrow \{\{\infty \dots \infty\} \dots \{\infty \dots \infty\}\}$ 
3:    $baseVertex, handleByBaseVertexSet, otherVertexSet \leftarrow ConstructSets(G)$ 
4:   ALLPAIRSPAR1( $G, otherVertexSet, dist$ ) ▷ Наивный алгоритм для множества вершин
5:   CALCULATEDISTANCESFORBIGSET( $G, baseVertex, otherVertexSet, dist$ )
6:   FILLDISTANCES1( $G, dist, mask, baseVertex, handleByBaseVertexSet$ )
7:   return  $dist$ 
```

---

### 2.4.3. Сравнение с другими алгоритмами

В контексте задачи поиска кратчайших расстояний между каждой парой вершин существует множество подходов. Однако заметим, что для социальных графов наш алгоритм дает асимптотически наилучшее время. Поскольку он работает за  $O(VE)$ , а в графе социальной сети, как видно в таблице 2.1, средняя степень вершины ограничена константой около 200, то можем считать, что количество ребер в графе асимптотически равно  $O(V)$ . Таким образом, наш алгоритм будет работать за  $O(V^2)$ . Таким образом, множественные подходы, которые опираются на перемножение матриц (например, предложенный Рэймондом Сейделем [11]) и имеют в своей асимптотике некоторую степенную функцию от количества вершин, будут асимптотически хуже нашего алгоритма. Обратим внимание, однако, что наивная версия алгоритма, представленная в начале главы, будет асимптотически эквивалентна параллельному алгоритму для социальных графов. Однако, алгоритм для социальных графов имеет ряд преимуществ по сравнению с наивной версией.

- Пересчет расстояний для группы вершин выполняется быстрее за счет битовых операций. Хотя это и не сказывается на асимптотику, но на практике дает заметный выигрыш;
- Все битовые операции выполняются без выделения дополнительной памяти. При этом изменяются уже созданные поля в массиве для подсчета динамики;
- Так как каждый из фронтиров уже построен, то нам не приходится строить следующий фронт по предыдущему в процессе обработки;
- Каждый из получившихся фронтиров довольно большой, что увеличивает его способность к параллелизации;
- Все остальные этапы также хорошо параллеляются.

Таблица 2.1: Среднее число друзей в социальных сетях

Социальная сеть	Средняя степень вершины
Facebook	190
Twitter	208
Вконтакте	190
Одноклассники	96
Slashdot	25

Данные взяты из неофициальных источников

Таким образом мы имеем полные основания предполагать, что этот алгоритм на практике покажет заметно лучшие результаты по сравнению с предыдущими версиями.

Для подтверждения этих гипотез все алгоритмы были реализованы и протестированы на той же машине, о которой шла речь в предыдущей главе в контексте Беллмана-Форда.

В качестве графов для тестирования были взяты подграф социальной сети Twitter и граф научной социальной сети Slashdot (описание графов приведены в таблице 2.2). При этом каждое из ребер графов считалось неориентированным.

Таблица 2.2: Описание социальных графов

Граф	Вершины	Ребра
Twitter	81306	4841532
Slashdot	82168	877286

Для сравнения производительности были взяты два алгоритма — наивная параллельная версия и последний описанный алгоритм. Усредненные результаты запусков приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3: Сравнение алгоритмов

Алгоритм	Twitter	Slashdot
Наивная параллельная версия	427.217	254.567
Алгоритм для социальных графов	191.232	169.393

Как мы видим мы получили значительный прирост производительности в обоих случаях, что подтверждает наши ожидания относительно

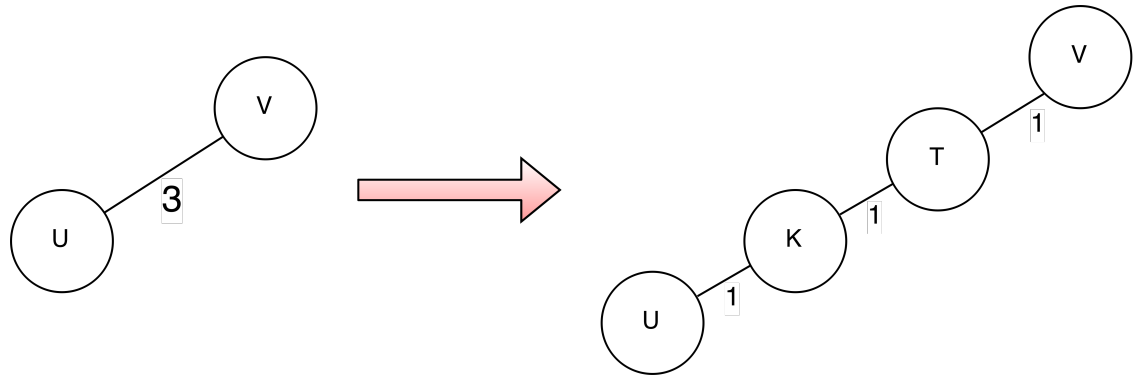
эффективности последнего подхода.

#### 2.4.4. Модификации

Данный алгоритм специализирован для неориентированных невзвешенных графов социальных сетей. Однако существует небольшая модификация алгоритма, которая позволяет без значительных изменений применять алгоритм для взвешенных графов социальных сетей, в которых веса ребер ограничены небольшой константой  $c$ .

Идея заключается в представлении каждого ребра с весом  $d$  в виде цепочки из  $d$  ребер. Пример такого преобразования представлен на рисунке 2.3. После такого преобразования граф может быть обработан нашим алгоритмом.

Рис. 2.3: Пример преобразования ребра



В этой модификации алгоритм в худшем случае будет работать за  $O(c VE)$  за счет увеличения числа ребер в  $c$  раз.

## 2.5. Выводы

Таким образом в этой главе мы описали алгоритм для поиска кратчайшего расстояния на разреженных графах в общем случае (наивная версия) и для частного случая для социальных графов. При этом последний алгоритм является как и асимптотически оптимальным для поиска иско-



мых расстояний в социальных графах, так он и показывает свою высокую эффективность на практике на реальных графах социальных сетей, что подтверждает его применимость в реальной жизни.

# Заключение

Как было показано в данной работе, задача определение кратчайшего расстояния как от одной вершины, так и от множества может быть эффективна решена на нескольких вычислительных ядрах. Было предложено множество алгоритмов для нахождения расстояний, причем каждый из них имеет свои специфические особенности и рекомендации к применению на конкретных графах.

Параллельные алгоритмы из первой главы основаны на алгоритме Беллмана-Форда, который может быть использован в тех случаях, когда в графе присутствуют отрицательные ребра, циклы отрицательного веса или же когда заранее известно, что количество итерации будет невелико (как, например, в случае неориентированного невзвешенного графа алгоритм будет работать всего за  $O(V + E)$ ). При этом, каждая из модификации оказалась лучше других на некоторых типа графах, что говорит о том, что после некоторого простого анализа входного графа мы можем выбрать наиболее оптимальный алгоритм для нашей ситуации.

В контексте параллельных алгоритмов поиска кратчайшего расстояния между каждой парой вершин был предложен алгоритм, идея которого состоит в параллельном запуске Беллмана-Форда из каждой вершины (наивный алгоритм), а также предложен разработанный мною алгоритм для поиска расстояний на реальных социальных графах. Этот алгоритм оказался значительно быстрее наивной версии и может быть широко использован в подобных графов крупных социальных сетей, таких как Twitter, Facebook или V Kontakte.

В предложенных алгоритмах использовались современные подходы и структуры данных для параллельных вычислений на графах (такие как Frontier), которые показали свою состоятельность и оказались заметно бо-

лее эффективными по сравнению с предшествующими аналогами [3]. Таким образом, есть все основания полагать, что подобные алгоритмы могут служить отличным эффективным решением для многопроцессорных архитектур с высоким количеством ядер.

# Источники

- [1] David Cohen M. D. Implementation of Parallel Path Finding in a Shared Memory Architecture. 2010.
- [2] Gaurav Hajela M. P. Parallel Implementations for Solving Shortest Path Problem using Bellman-Ford // International Journal of Computer Applications. 2014.
- [3] Julian Shun G. E. B. Ligra: A Lightweight Graph Processing Framework for Shared Memory // ACM SIGPLAN Notices. 2013.
- [4] Umut Acar Arthur Charguerard M. R. Fast Parallel Graph-Search with Splittable and Catenable Frontiers. 2015.
- [5] Umut Acar Arthur Charguerard M. R. Theory and Practice of Chunked Sequences // Algorithms-ESA 2014. 2014.
- [6] Parallel Algorithm Scheduling Library. URL: <http://deepsea.inria.fr/pasl/>.
- [7] Intel. Cilk Plus. URL: <http://www.cilkplus.org/>.
- [8] Intel Hyper-Threading Technology. URL: <http://www.intel.com/content/www/us/en/architecture-and-technology/hyper-threading/hyper-threading-technology.html>.
- [9] Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson R. L. R. C. S. Introduction to algorithms, third edition. The MIT Press, 2009. P. 693–700.
- [10] Stanford large network dataset collection. URL: <http://snap.stanford.edu/>.
- [11] Seidel R. On the All-Pairs-Shortest-Path Problem in Unweighted Undirected Graphs // Journal of computer and system sciences. 1995. Vol. 51. P. 400–403.