

Blatt 2. Aufgabe 3

1) $(f * g) * h = f * (g * h)$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (f * g) * h(k) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (f * g)(k - j) h(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(k - (j + l)) * g(l) \right) h(j) \\
 &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} f(k - \xi) g(\xi - \kappa) h(\kappa) \\
 &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} f(k - \xi) \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} g(\xi - \kappa) h(\kappa) \right) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(k - j) (g * h)(j) = f * (g * h)(k)
 \end{aligned}$$

■

2) $f * g = g * f$.

3) $f \in \ell^p(\mathbb{Z}), g \in \ell^q(\mathbb{Z})$. Dann ist $f * g \in \ell^r(\mathbb{Z})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $p, q, r \geq 1$ und

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

4) $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{f * g}$