Blatt 3. Aufgabe 2

1. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist $\hat{f}$ beschränkt und stetig.

   Beweis. Für die Beschränkheit gilt es zu zeigen:

   $$\sup_{z\in\mathbb{R}^d} |\hat{f}(z)| < \infty$$

   Schreibt man dies aus sieht man:

   $$\begin{aligned} |\hat{f}(z)| &= C|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle z,x\rangle}dx| \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\underbrace{|e^{i\langle z,x\rangle}|}_{=1}dx \\ &= C\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = C\,||f||_1 < \infty \end{aligned}$$

   Nun zur Stetigkeit. Es muss gezeigt werden, dass für $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(z_n) = \hat{f}(z)$$
   $$\lim_{n\to\infty} C\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle z_n,x\rangle}dx = C\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle z,x\rangle}dx$$

   Dies ist gerade die Aussage des „Satz von Lesbegue“ (wenn auch etwas versteckt):
   Es seien $\phi_n, \phi : S \to Y$ μ-messbar und $g \in \mathrm{L}(\mu;\mathbb{R})$. ($S$ beliebige Menge, Y Banachraum)
   Gilt

   (1) $\phi_n \to \phi$ μ-fast überall $\quad n \to \infty$
   (2) $|\phi_n| \leq g$ μ-fast überall $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Dann sind $\phi_n, \phi \in \mathrm{L}(\mu, \mathbb{R})$ und es konvergiert

   $$\lim_{n\to\infty}\int |\phi_n|d\mu = \int |\phi|d\mu$$

   Vorbereitung:
   Definiere: $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $(x,z) \mapsto Cf(x)e^{-i\langle z,x\rangle}$
   Wir wollen dann soetwas haben:

   $$\lim_{n\to\infty}\int |\phi_n(x)|d\mu(x) = \int |\phi(x)|d\mu(x)$$

   Damit definieren wir: $\phi_n(x) := \phi_{z_n}(x) := \phi(x, z_n)$ mit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$
   Dann brauchen wir um den obrigen Satz anwenden zu können:

   (1) ϕ_n, ϕ_z
   (2) Stetigkeit von $\phi_z(x)$

   ■

2. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Es sei $g(x) := f(cx)$. Es gilt: $\hat{g}(z) = \frac{1}{|c|^d}\hat{f}(\frac{z}{c})$.

3. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Es sei $g(x) := \overline{f(x)}$. Es gilt: $\hat{g}(z) = \overline{\hat{f}(-z)}$.

4. Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $g(x) := f(x+a)$ für ein $a \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt $\hat{g}(z) = e^{i\langle a,z\rangle}\hat{f}(z)$.

Blatt 3. Aufgabe 3. Gaußkern

Nur eindimensionalen Fall betrachet ... $G_{\sqrt{2t}} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}}(x) = \Delta G_{\sqrt{2t}}(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} G_{\sqrt{2t}}(x) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(2\pi \cdot 2t)^{\frac{d}{2}}} \cdot exp(\frac{-|x|^2}{4t}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \right) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\
&= \frac{-\frac{d}{2} 4\pi}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}-1}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{-|x|^2}{4t} \right) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \frac{-2d\pi}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}-1}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}} + \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot \left(\frac{|x|^2}{4t^2} \right) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \left(\frac{-2d\pi}{(4\pi t)^{\frac{d-2}{2}}} + \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \left(\frac{-2d\pi}{\sqrt{(4\pi t)^2}} \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} + \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \left(\frac{-d}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta G_{\sqrt{2t}}(x) &= \Delta \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \cdot e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \Delta e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{i \in \{1,..,d\}} \partial_i \left((\partial_i \frac{-|x|^2}{4t}) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{i \in \{1,..,d\}} \partial_i \left((\frac{-2x_i}{4t}) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{i \in \{1,..,d\}} \left((\partial_i \frac{-2x_i}{4t}) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} + (\frac{-x_i}{2t}) \partial_i e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{i \in \{1,..,d\}} \left((\frac{-1}{2t}) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} + (\frac{-x_i}{2t})(\frac{-x_i}{2t}) e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \sum_{i \in \{1,..,d\}} \left(\frac{-1}{2t} + \frac{x_i^2}{(2t)^2} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \left(\left(\sum_{i \in \{1,..,d\}} \frac{-1}{2t} \right) + \frac{|x|^2}{(2t)^2} \right) \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \left(\frac{-d}{2t} + \frac{|x|^2}{(2t)^2} \right)
\end{aligned}$$

Für Interessiert

Es sei $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \lim_{t \searrow 0} (G_{\sqrt{2t}} * f)(x) = f(x)$$

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{\frac{-|z-x|^2}{4t}} f(z) dz = f(x)$$