Blatt 2. Aufgabe 3

Der L^p isometrisch-isomorph zum ℓ^p, d.h., dass *wesentliche* Struktur und Eigenschaften äquivalent zwischen beiden Räumen erhalten bleibt ist. Damit sollten sich die Beweise für die folgenden Eigenschaften für ℓ^1 automatisch auch auf L^1 auswirken.

1) $(f * g) * h = f * (g * h)$

   Beweis.

$$\begin{aligned}(f * g) * h(k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (f * g)(k-j)h(j)) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} f(k-(j+l) \right) * g(l))h(j) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} f(k-\xi) g(\xi-\kappa) h(\kappa) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} f(k-\xi) \left(\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} g(\xi-\kappa)h(\kappa) \right) \\ = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(k-j)(g * h)(j) = f * (g * h)(k)\end{aligned}$$

■

2) $f * g = g * f$.

3) $f \in \ell^(\mathbb{Z}), g \in \ell^q(\mathbb{Z})$. Dann ist $f * g \in \ell^r(Z)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $p, q, r \geq 1$ und

$$||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}$$

4) $\widetilde{f} * \widetilde{g} = \widetilde{f * g}$