Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Я.С. Гарасим, А.М. Недашковська, Б.А. Остудін

Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу

Методичний посібник для студентів
факультету прикладної математики та інформатики

Львів

2015

УДК 517.981(076.1)
ББК В162Я73-4
А Г-20

Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. – Львів: Простір-М, 2015. – 72 с.

Рекомендовано Вченою радою факультету прикладної математики та інформатики (протокол № 4/15 від 21 жовтня 2015 р.)

Збірник задач охоплює теми від лінійних просторів до спряжених операторів, містить сім розділів, у кожному з яких наведено теоретичні відомості та зразки розв'язування типових задач із відповідними поясненнями й коментарями. До кожноїй теми наведено також задачі різної складності, призначені як для аудиторного розв'язування, так і для самостійного опрацювання.

У збірнику задач наведено також приклади екзаменаційних білетів для правильної орієнтації студентів у сенсі вимог до рівня засвоєння функціонального аналізу.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають функціональний аналіз, аспірантів та наукових працівників.

Зміст

Вступ

Функціональний аналіз є одним із найважливіших розділів сучасної математики. Сьогодні мову функціонального аналізу та його методи широко застосовують у різних напрямах математичної освіти.

Ми узагальнили досвід проведення практичних занять із функціонального аналізу на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка. В цьому збірнику наведено типові задачі, що охоплюють більшість розділів лекційних курсів із функціонального аналізу, які викладають у окремих форматах студентам спеціальностей “прикладна математика”, “системний аналіз та управління”, “інформатика”.

Оскільки, функціональний аналіз як нормативну дисципліну вивчають протягом лише одного семестру студенти другого курсу, то ми мали на меті посприяти засвоєнню базових понять та оволодінню специфікою досліджень різних конструкцій, які виконують відповідними методами.

Збірник задач охоплює теми від лінійних просторів до спряжених операторів, містить сім розділів, у кожному з яких наведено теоретичні відомості та зразки розв’язування типових задач із відповідними поясненнями й коментарями. До кожноїй теми наведено також задачі різної складності, призначені як для аудиторного розв’язування, так і для самостійного опрацювання. Не претендуючи на оригінальність, ми запозичили більшість задач із відомих збірників, підручників та монографій: [2–4, 6, 8, 10] та ін.

Віддаючи належне високому професійному рівню спеціалістів з функціонального аналізу, ми намагалися адаптувати відповідні математичні строгості до рівня знань студентів, захоплених, як відомо, передусім інформаційними технологіями.

У збірнику задач наведено також приклади екзаменаційних білетів для правильної орієнтації студентів у сенсі вимог до рівня засвоєння функціонального аналізу.

Особлива вдячність нашим колегам – спеціалістам із фукціонального аналізу механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка за цінні поради й консультації.

Розділ 1

Лінійні простори

Поняття лінійного простору є одним із найважливіших у сучасній математиці. Множину всіх векторів площини чи простору та множини функцій можна схарактеризувати одними й тими ж властивостями лінійності. Головні з цих властивостей лягли в основу аксіом, що визначають загальне поняття лінійного простору.

Означення 1.1 Множину E елементів $x, y, z, \ldots$ називатимемо *лінійним простором*, якщо в ній означені дві операції:

- будь-яким двом елементам $x, y \in E$ поставлено у відповідність елемент $x + y \in E$ – їхня сума;
- кожному елементу $x \in E$ і довільному скаляру λ поставлено у відповідність елемент $\lambda x \in E$ – добуток елемента x на скаляр λ.

У цьому запровадженні операції додавання і множення на скаляр для довільних $x, y, z \in E$ і довільних скалярів λ, μ повинні задовольняти аксіоми:

1) $x + y = y + x$;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3) існує нейтральний елемент $\Theta \in E$ такий, що $x + \Theta = x$;

4) $\lambda\,(\mu x) = (\lambda\mu)\,x$;

5) $1 \cdot x = x, 0 \cdot x = \Theta$;

6) $\lambda\,(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

7) $(\lambda + \mu)\,x = \lambda x + \mu x$.

Якщо $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то E називатимемо дійсним лінійним простором, якщо ж $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то – комплексним лінійним простором.

У будь-якому лінійному просторі E для довільного елемента $x \in E$ можна визначити *протилежний* елемент $-x$, а отже, і операцію віднімання елементів $y - x$. Приймемо, що $-x = (-1)\,x$. Тоді, відповідно до аксіом 5 та 7,

$x + (-x) = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = 0 \cdot x = \Theta$, а тому $y - x = y + (-x)$.

Наслідок 1.1 Для будь-яких $x, y \in E$ та скалярів λ, μ справджуються наведені нижче твердження.

1. Нейтральний елемент єдиний.
2. Якщо $\lambda x = \mu x$, де $x \neq \Theta$, то $\lambda = \mu$.
3. Якщо $\lambda x = \lambda y$ і $\lambda \neq 0$, то $x = y$.

Зазначимо, що надалі нейтральний елемент лінійного простору для скорочення називатимемо нулем. У цьому разі в деяких лінійних просторах окремі елементи, за традицією, називають векторами (або точками), а відповідні простори – векторними.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_l$ – довільні елементи лінійного простору E. *Лінійною комбінацією* цих елементів називатимемо суму вигляду $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k$, де $a_1, a_2, \ldots, a_l$ – довільні константи.

Елементи $x_1, x_2, \ldots, x_l$ називатимемо *лінійно залежними*, якщо існує їхня лінійна комбінація $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k = \Theta$, де не всі a_k дорівнюють 0 одночасно. Якщо рівність $\sum\limits_{k=1}^{l} a_k x_k = \Theta$ можлива лише за умови, що $a_1 = a_2 = \cdots = a_l = 0$, то елементи $x_1, x_2, \ldots, x_l$ називатимемо *лінійно незалежними*.

Означення 1.2 Лінійний простір називатимемо m-вимірним, якщо в ньому існує m лінійно незалежних елементів, а будь-яка система з $m + 1$ елемента лінійно залежна.

Означення 1.3 Набір будь-яких m лінійно незалежних елементів у m-вимірному просторі E називатимемо базисом в E.

Нехай $\{e_k\}_{k=1}^m$ – базис лінійного простору E, тоді для будь-якого $x \in E$ існують скаляри $a_1, a_2, \ldots, a_m$ такі, що

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m. \tag{1.1}$$

Подання (1.1) довільного елемента m-вимірного простору E називатимемо *розкладом* елемента x за базисом $\{e_k\}_{k=1}^m$, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – *координатами* елемента x у базисі $\{e_k\}_{k=1}^m$.

Означення 1.4 Лінійний простір E називатимемо нескінченновимірним, якщо для кожного натурального n в E існує n лінійно незалежних елементів.

Означення 1.5 Множину $\tilde{E}$ в лінійному просторі E називатимемо лінійним багатовидом, якщо для будь-яких $x, y \in \tilde{E}$ і будь-яких скалярів λ, μ лінійна комбінація $\lambda x + \mu y \in \tilde{E}$.

Зазначимо, що $\tilde{E}$ теж є лінійним простором.

Нехай M – деяка множина в лінійному просторі E. Множину елементів із E вигляду $x_0 + u$, де u пробігає M, позначатимемо $x_0 + M$. Тобто

$$x_0 + M = \{x_0 + u; u \in M\}.$$

Означення 1.6 Нехай L – лінійний багатоовид у лінійному просторі E. Фіксуємо $x_0 \notin L$. Множину $x_0 + L$ називають афінним багатовидом у E. Якщо простір E скінченновимірний, то розмірність L уважають розмірністю афінного багатовиду $x_0 + L$.

Нехай E – лінійний простір. *Відрізком*, що з'єднує точки $x_1, x_2 \in E$, називатимемо сукупність усіх точок x вигляду

$$x = (1 - t)\, x_1 + t x_2, t \in [0, 1].$$

Розглянемо лінійні простори X і $\tilde{X}$; нехай кожному елементу $x \in X$ поставлений у відповідність визначений елемент $\tilde{x} \in X$, тобто задана функція $\tilde{x} = J\,(x)$ визначена скрізь на X зі значеннями в $\tilde{X}$. Говоритимемо, що простори X і $\tilde{X}$ (лінійно) ізоморфні, якщо знайдеться функція $\tilde{x} = J\,(x)$, що здійснює лінійну і взаємнооднозначну відповідність між X і $\tilde{X}$, тобто

1) $J\,(\lambda x + \mu y) = \lambda J\,(x) + \mu J\,(y)$ для будь-яких елементів $x, y \in X$ і будь-яких скалярів λ, μ;

2) якщо $J\,(x_1) = J\,(x_2)$, то $x_1 = x_2$;

3) для довільного $\tilde{x} \in \tilde{X}$ знайдеться $x \in X$ такий, що $x = J\,(x)$.

Означення 1.7 Множину W у лінійному просторі E називатимемо опуклою, якщо з умови $x_1, x_2 \in W$ випливає, що множина W також містить відрізок, який з'єднує точки x_1 і x_2.

Розглянемо тепер поняття опуклого функціонала. Нехай у лійнійному просторі E задано функцію, що ставить у відповідність кожному $x \in E$ відповідне число $p\,(x)$. У цьому випадку кажуть, що на E задано функціонал $p\,(x)$. Якщо всі значення $p\,(x)$ дійсні, то функціонал $p\,(x)$ називатимемо дійсним.

Означення 1.8 Дійсний функціонал $p(x)$ називатимемо опуклим, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in E$ і будь-яких $t \in [0, 1]$

$$p((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)p(x_1) + tp(x_2).$$

Приклад 1.1 Перевіримо правильність тверджень наслідку 1.1.

1. Припустимо, що Θ_1 і Θ_2 – нулі в E; тоді $\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_1, \Theta_2 + \Theta_1 = \Theta_2$ (відповідно до аксіоми 3). Звідси, за аксіомою 1, $\Theta_1 = \Theta_2$.

2. Якщо до обох частин рівності $\lambda x = \mu x$ додати $-\mu x$, то отримаємо $(\lambda - \mu)x = \Theta$. За умови $\lambda \neq \mu$ на підставі аксіоми 4 лінійного простору $(\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - \mu)x = x = \Theta$, що суперечить припущенню $x \neq \Theta$. Отже, $\lambda = \mu$.

3. Додавши до обох частин рівності $\lambda x = \lambda y$ вираз $-\lambda y$, отримаємо $\lambda(x - y) = \Theta$. Якщо $\lambda \neq 0$, то $x - y = \lambda^{-1}\lambda(x - y) = \Theta$, тобто $x = y$.

Приклад 1.2 Розглянемо лінійний простір $\mathbb{R}^n$ із базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$ і доведемо, що будь-який елемент $x \in \mathbb{R}^n$ можна єдиним способом звести до вигляду $x = \xi_1 \cdot e_1 + \xi_2 \cdot e_2 + \cdots + \xi_n \cdot e_n$.

Припустимо, що існує ще один набір чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ таких, що $x = \gamma_1 \cdot e_1 + \gamma_2 \cdot e_2 + \cdots + \gamma_n \cdot e_n$. Тоді, за аксіомою 7, $(\xi_1 - \gamma_1)e_1 + (\xi_2 - \gamma_2)e_2 + \cdots + (\xi_n - \gamma_n)e_n = \Theta$. Оскільки $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис у $\mathbb{R}^n$, то задана рівність виконується тоді й тільки тоді, коли $(\xi_1 - \gamma_1) = 0, (\xi_2 - \gamma_2) = 0, \ldots, (\xi_n - \gamma_n) = 0$. Звідси $\xi_1 = \gamma_1, \xi_2 = \gamma_2, \ldots, \xi_n = \gamma_n$.

Приклад 1.3 У лінійному просторі $C[0, 1]$ розглянемо систему елементів $1, t, t^2, \ldots, t^n$. Доведемо, що ця система лінійно незалежна.

Доведення побудуємо методом від протилежного. Для цього припустимо, що існують константи $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$, які не всі дорівнюють нулю одночасно, такі, що

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n = 0. \tag{1.2}$$

Рівність (1.2) для всіх t виконується тоді й тільки тоді, коли багаточлен $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n$ тотожно дорівнює нулю, тобто тоді й тільки тоді, коли $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. А це суперечить припущенню, що не всі коефіцієнти $\{a_i\}_{i=0}^n$ дорівнюють нулю одночасно.

Задачі

1. Довести, що множина $\mathbb{R}^m$ усіх можливих упорядкованих наборів (стовпців висоти m) дійсних чисел є лінійним простором.

2. Перевірити, чи є лінійним простором множина M_{mn} усіх прямокутних матриць порядку $m \times n$ зі скалярними елементами.

3. Чи є лінійним простором множина всіх дійсних, визначених на відрізку $[a, b]$, неперервних функцій? Якщо так, то запровадимо для нього позначення $C\,[a, b]$.

4. Довести, що один елемент (вектор) лінійного простору лінійно залежний тоді й тільки тоді, коли він дорівнює нулю.

5. Знайти α, за якого елементи $\mathbb{R}^3$ $(1, 2, 3)^T, (1, 1, 0)^T$ і $(\alpha, 1, 1)^T$ компланарні (за термінологією векторних лінійних просторів), тобто лінійно залежні.

6. Довести, що в $C\,[0, \pi]$ функції $1, \cos t, \cos^2 t$ лінійно незалежні, а функції $1, \cos 2t, \cos^2 t$ лінійно залежні.

7. Нехай елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лінійного простору E лінійно незалежні. Довести, що будь-які k із них, $1 \leq k < m$, також лінійно незалежні.

8. Довести, що в $\mathbb{R}^m$ будь-які $m+1$ вектори залежні. Для цього записати матрицю із координат цих векторів і скористатись тим, що її ранг не перевищує m.

9. Довести, що $C\,[a, b]$ є нескінченновимірним. Розглянути послідовність функцій $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ і довести, що $1, t, t^2, \ldots, t^n$ лінійно незалежні для будь-якого натурального n.

10. Довести, що за будь-якого $k > l \geq 0$ $C^k\,[a, b]$ є лінійним багатовидом у $C^l\,[a, b]$.

11. Покажіть, що множина всіх багаточленів степеня $\leq m$ є $m+1$-вимірним лінійним багатовидом в $C\,[a, b]$.

12. Довести, що множина розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку

$$\tfrac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\tfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\,x = y(t)$$

утворює n-вимірний афінний багатовид у С $[a, b]$. Причому коефіцієнти $a_i(t), i = 1, 2, \ldots, n$, і права частина $y(t)$ неперервні на $[a, b]$.

13. Довести, що будь-який лінійний багатовид в E є опуклою множиною.

14. Довести, що перетин довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною.

Розділ 2

Лінійні нормовані простори

У попередньому розділі розглянуто лінійні простори. Наступним кроком буде запровадження нормованих просторів. Поняття модуля дійсного числа, комплексного числа та вектора дає змогу означити відстань чи, іншими словами, метрику, на числовій осі, у комплексній площині або просторі векторів, відповідно. Наявність метрики дає змогу розглянути принципові питання збіжності послідовностей чи рядів, існування границі, неперервності і диференційовності функцій тощо.

Означення 2.1 Лінійний простір E називатимемо нормованим, якщо кожному $x \in E$ поставлено у відповідність невід'ємне число $\|x\|$ (норма x), яке задовольняє такі три властивості (аксіоми норми):

1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = \Theta$;

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для будь-якого $x \in E$ і будь-якого дійсного (комплексного) числа λ;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника) для будь-яких $x, y \in E$.

У нормованому просторі E розглянемо множину

$$S_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| < r\},$$

де $x_0 \in E$ – фіксована точка, а $r > 0$. Множину $S_r(x_0)$ називатимемо *відкритою кулею* із центром у x_0 радіуса r. Аналогічно множину $\bar{S}_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$ називатимемо *замкненою кулею* (із центром в x_0, радіуса r), а множину $\sigma_r(x_0) = \{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$ – *сферою*. Очевидно, що $\bar{S}_r(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$.

Означення 2.2 Множину $M \subset E$ називатимемо обмеженою, якщо її можна помістити в деяку кулю. Точніше, M – обмежена, якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $\|x\| \leq C$.

Розглянемо в нормованому просторі E послідовність елементів $\{x_n\}$.

Означення 2.3 Елемент $x_0 \in E$ називаємо границею послідовності $\{x_n\}$, якщо $\|x_n - x_0\| \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо x_0 є границею $\{x_n\}$, то записують $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, або $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збіжна до x_0. Околом точки x_0 називають будь-яку відкриту кулю $S_r(x_0)$.

Для будь-яких двох наборів комплексних чисел $\xi_1, \ldots, \xi_m$ і $\eta_1, \ldots, \eta_m$ справджуються *нерівність Гьольдера*

$$\sum_{k=1}^{m} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \text{ де } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ за умови } p, q > 1,$$

та *нерівність Мінковського*

$$\left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Означення 2.4 Нехай у лінійному просторі E запроваджено дві норми: $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$. Якщо існує константа $\beta > 0$ така, що для будь-яких $x \in E$ виконується нерівність $\|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2$, то вважатимемо, що норма $\|\cdot\|_1$ підпорядкована нормі $\|\cdot\|_2$.

Кажуть, що норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ еквівалентні, якщо існують числа $\alpha > 0, \beta > 0$ такі, що для довільних $x \in E$ виконуються такі нерівності

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

З огляду на це справджується також важливе твердження.

Теорема 2.1 У будь-якому скінченновимірному лінійному просторі всі норми еквівалентні.

Нехай E нормований простір.

Означення 2.5 Множину $M \subset E$ називаємо відкритою, якщо разом із кожною своєю точкою M містить також деякий окіл цієї точки. Тобто M є відкритою, якщо для довільного $x_0 \in M$ знайдеться $r > 0$ таке, що $S_r(x_0) \subset M$. Порожню множину $\emptyset$ вважають відкритою в E за означенням.

Означення 2.6 Точку a називаємо граничною точкою множини $M \subset E$, якщо довільний окіл a містить хоча б одну точку множини M, відмінну від a.

Важливим є і таке твердження.

Теорема 2.2 Точка a є граничною точкою множини $M \subset E$ тоді й лише тоді, коли існує деяка послідовність $\{x_n\} \subset M$, що збігається до a, при цьому $x_n \neq a, n = 1, 2, \ldots$

На підставі означення 2.6 запроваджують важливе поняття замкненої множини.

Означення 2.7 Множину $M \subset E$ називаємо замкненою, якщо вона містить усі свої граничні точки. Порожню множину $\emptyset$ завжди вважають замкненою за означенням.

Означення 2.8 Нехай $M \subset E$, а M' – множина граничних точок M. Множину $\bar{M} = M \cup M'$ називаємо замиканням M.

Означення 2.9 Нехай $M \subset E$; множину $E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\}$ називаємо доповненням до M.

Якщо $M \subset E$, то всі точки з E (щодо M) будуть одного із трьох типів: внутрішні точки M, точки межі M і зовнішні точки M. Точку $x_0 \in M$ називатимемо *внутрішньою* точкою M, якщо існує її окіл $S_r(x_0) \subset M$. Точку $x_0 \notin M$ називатимемо *зовнішньою* точкою M, якщо існує куля $S_r(x_0)$ (її окіл), що не містить точок із M (тобто $M \cap S_r(x_0) = \emptyset$). Точку $x_0 \in E$ називаємо *точкою межі* M, якщо в будь-якому околі x_0 є точки, що належать M, і точки, що M не належать.

Отже, відкритою буде множина, яка містить лише внутрішні точки.

Точки межі утворюють так звану межу ∂M множини M.

Означення 2.10 Замкнений лінійний багатовид L у нормованому просторі E називатимемо підпростором E.

Визначимо відстань $\varrho(x, L)$ від точки x до підпростору L за допомогою рівності $\varrho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\|$. Число $\varrho(x, L)$ характеризує найліпше наближення елемента x за допомогою елементів підпростору L. Якщо існує елемент $u^* \in L$ такий, що $\varrho(x, L) = \|x - u^*\|$, то u^* називатимемо *елементом найліпшого наближення* x елементами підпростору L. Елемент найліпшого наближення може виявитись не єдиним або ж не існувати взагалі. Тому важливими є такі твердження.

Теорема 2.3 Нехай L – скінченновимірний підпростір нормованого простору E. Для будь-якого $x \in E$ існує (можливо, не єдиний) такий елемент $u^* \in L$, що $\varrho(x, L) = \|x - u^*\|$.

Означення 2.11 Нормований простір E називатимемо строго нормованим, якщо в ньому рівність $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ можлива тільки за умови $y = \lambda x$, де $\lambda > 0$.

Теорема 2.4 У строго нормованому просторі E для кожного $x \in E$ і кожного підпростору L може існувати не більше одного елемента найліпшого наближення x елементами L.

Означення 2.12 Лінійний багатовид L, що належить нормованому простору E, називатимемо щільним в E, якщо за будь-якого $x \in E$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться елемент $u \in L$ такий, що $\|x - u\| < \varepsilon$.

Наведемо розв'язки деяких типових задач.

Приклад 2.1 Розглянемо лінійний простір стовпців $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^T$ висоти m. Запровадимо в цьому лінійному просторі норму за таким правилом: $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i|$. Перевіримо аксіоми норми.

1. Оскільки $|\xi_i| \ge 0$ за будь-якого $i = \overline{1,m}$, то й $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| \ge 0$. Отже, $\|x\| = 0$ при $x = \Theta$. Далі припустимо, що $\|x\| = 0$, тобто $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| = 0$. Звідки $\xi_i = 0$ за будь-якого $i = \overline{1,m}$, а тому $x = \Theta$.

2. Легко побачити, що за будь-якого $i = \overline{1,m}$ $|\lambda \xi_i| = |\lambda| \cdot |\xi_i|$. Тому $\|\lambda x\| = \max\limits_{1 \le i \le m} |\lambda \xi_i| = |\lambda| \max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| = |\lambda| \, \|x\|$.

3. Для будь-якого фіксованого i з множини $\{1, 2, \ldots, m\}$ легко отримати таку послідовність нерівностей $|\xi_i + \eta_i| \le |\xi_i| + |\eta_i| \le \max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| + \max\limits_{1 \le i \le m} |\eta_i|$, де $\eta_i \left(\overline{1,m}\right)$ – координати довільного стовпця y висоти m. Оскільки останні нерівності справджуються для будь-якого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, то $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i + \eta_i| \le \max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| + \max\limits_{1 \le i \le m} |\eta_i|$, або $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Отже, запроваджений нами об'єкт можна вважати нормою, оскільки для норми справеджуються невиродженість, однорідність та нерівність трикутника. Отриманий нормований простір, за традицією, позначають c^m. Власне тому $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| = \|x\|_{c^m}$.

Приклад 2.2 Розглянемо деяку послідовність $\{x_n\}$ нормованого простору E. Нехай $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ і $x_0 \in E$. Доведемо, що границя x_0 єдина.

Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що існують два елементи x_0 і y_0 такі, що $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x_0$ і $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y_0$, причому $x_0 \ne y_0$. Легко побачити, що

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - x_n + x_n - y_0\| \le \|x_0 - x_n\| + \|x_n - y_0\|.$$

Оскільки $\|x_0 - x_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ і $\|x_n - y_0\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, а наведена нерівність виконується за довільного n, отримуємо, що $x_0 = y_0$. Отже, границя єдина.

Приклад 2.3 Доведемо правильність нерівностей

$$\alpha_m \left\| x \right\|_{E^m} \le \left\| x \right\|_{c^m} \le \beta_m \left\| x \right\|_{E^m}$$

та знайдемо відповідні константи еквівалентності α_m та β_m.

Почнемо із першої нерівності.

Очевидно, що $\xi_i \le \max\limits_i \xi_i$ за будь-якого $i = \overline{1, m}$, однак тоді $\xi_i^2 \le \max\limits_i \xi_i^2$. Підсумуємо ці нерівності за i, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \le \sum_{i=1}^{m} \max_{1 \le i \le m} \xi_i^2 = m \cdot \max_{1 \le i \le m} \xi_i^2.$$

Звідси

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2} \le \sqrt{m \cdot \max_{1 \le i \le m} \xi_i^2},$$

або

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2} \le \cdot \max_{1 \le i \le m} |\xi_i|.$$

Отже, $\alpha_m \left\| x \right\|_{E^m} \le \left\| x \right\|_{c^m}$, де константа еквівалентності $\alpha_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Доведемо тепер правильність $\left\| x \right\|_{c^m} \le \beta_m \left\| x \right\|_{E^m}$.

Числова послідовність $\{\xi_i^2\}_{i=1}^m$ також містить $\max\limits_{1 \le i \le m} \xi_i{}^2$, тому $\max\limits_{1 \le i \le m} \xi_i^2 \le \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2$, звідки $\max\limits_{1 \le i \le m} |\xi_i| \le 1 \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i^2}$. Отже, $\left\| x \right\|_{c^m} \le \beta_m \left\| x \right\|_{E^m}$, де константа еквівалентності $\beta_m = 1$.

Приклад 2.4 Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$ у просторі $C[0, 1]$ і перевіримо, чи вона є збіжною.

Послідовність $\{x_n(t)\}$ для кожного фіксованого $t \in [0, 1]$ при $n \to \infty$ збігається до $x_0(t) \equiv 0$. Доведемо тепер, що $\{x_n(t)\}$ збігається до нуля рівномірно. Для цього розглянемо

$$\left\| x_n \right\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |x_n(t)| = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right|.$$

Знайдемо $\max\limits_{t \in [0,1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right|$. Легко побачити, що $\left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right)' = t^n - t^{n+1}$ і

$$t^n - t^{n+1} = 0 \text{ при } t_1 = 0 \text{ і } t_2 = 1.$$

Підставимо t_1 і t_2 в $\left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right)$. Максимум досягається при $t_2 = 1$: $\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Отже, ця послідовність збігається в просторі $C\,[0,1]$ рівномірно.

Приклад 2.5 Чи буде опуклою в просторі $C\,[0,1]$ множина багаточленів степеня k?

Для того, щоб це з'ясувати, запишемо два довільні багаточлени

$$x_1\,(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k \text{ та } x_2\,(t) = b_0\, t^k + b_1 t^{k-1} + \cdots + b_k$$

і розглянемо їхню лінійну комбінацію

$$x\,(t) = (1-\tau)\, x_1\,(t) + \tau x_2\,(t) =$$
$$(1-\tau)\left(a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \cdots + a_k\right) + \tau\left(b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \cdots + b_k\right).$$

Об'єднаємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$((1-\tau)\, a_0 + \tau b_0) \cdot t^k + \cdots + ((1-\tau)\, a_k + \tau b_k) \cdot 1 = x\,(t).$$

Легко побачити, що при $\tau = -\frac{a_0}{b_0 - a_0}$ $(\tau \in [0,1])$ степінь багаточлена $x\,(t)$ буде $k-1$ і $x\,(t)$ не належатиме множині багаточленів степеня k.

Приклад 2.6 Перевіримо чи є строго нормованим дійсний простір l_2.

Відомо, що для будь-яких x, y із простору зі скалярним добутком справджується нерівність Коші–Буняковського $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$. Причому рівність виконується лише у випадку, коли x, y лінійно залежні: $x = \lambda y$. Доведемо це. Справді, для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ скалярний добуток

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) = (x,x) - 2\lambda\,(x,y) + \lambda^2\,(y,y) = \lambda^2\,\|y\|^2 - 2\lambda\,(x,y) + \|x\|^2 \ge 0.$$

Це можливо тоді й тільки тоді, коли дискримінант квадратного тричлена $\lambda^2\,\|y\|^2 - 2\lambda\,(x,y) + \|x\|^2$ є меншим або дорівнює нулю. Тобто коли $4\,(x,y) - 4\,\|x\|^2\,\|y\|^2 \le 0$, звідки $|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$.

Наведені вище міркування засвідчують, що в нерівності Коші–Буняковського рівність виконується тоді й лише тоді, коли $x = \lambda y$. Як ми знаємо, за допомогою нерівності Коші–Буняковського доводять нерівність трикутника для норми в l_2. Власне тому $\|x+y\|_{l_2} = \|x\|_{l_2} + \|y\|_{l_2}$ тоді й лише тоді, коли $x = \lambda y$. Отже, простір l_2 строго нормований.

У разі першого читання цей приклад можна пропустити і повернутися до нього в ході вивчення просторів зі скалярним добутком.

Задачі

1. Чи буде збіжною в нормі простору X послідовність $\{x_n\}$?

   a) $X = C[0,1]$, $\quad x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;
   b) $X = L_2(0,1)$, $\quad x_n(t) = t^n - t^{2n}$;
   c) $X = L_2(0,1)$, $\quad x_n(t) = t^n$;
   d) $X = L_1(0,1)$, $\quad x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$;
   e) $X = C[0,1]$, $\quad x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$;
   f) $X = L_2(0,1)$, $\quad x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;
   g) $X = C[0,1]$, $\quad x_n(t) = \frac{nt}{1+n+t}$;
   h) $X = C[0,1]$, $\quad x_n(t) = \frac{2nt}{1+n^2+t^2}$;
   i) $X = L_1(0,1)$, $\quad x_n(t) = \frac{nt}{1+n+t}$;
   j) $X = L_1(0,1)$, $\quad x_n(t) = \frac{2nt}{1+n^2+t^2}$;
   k) $X = L_2(0,1)$, $\quad x_n(t) = \frac{nt}{\sqrt{n^2+1}}$.

   Зауваження щодо використаних позначень окремих нормованих просторів. Типовим позначенням простору Лебега є $L_2(0,1)$ (подібно $L_1(0,1)$). Згідно з означенням, елементами цього простору не є звичайні функції. Водночас окремі функції можна ототожнити, у деякому сенсі, з певними об'єктами названого простору. Тому запис, наприклад, $x_n(t) = t^n - t^{2n} \in L_2(0,1)$, є цілком допустимим з погляду механізму побудови $L_2(0,1)$, оскільки функція $t^n - t^{2n}$ є неперервною на інтервалі, який розглядаємо. У цьому разі норму $x_n(t)$ в $L_2(0,1)$ визначають так: $\|x_n\|_{L_2(0,1)} = \left\{\int\limits_0^1 x_n^2(t)dt\right\}^{\frac{1}{2}}$, де інтеграл розуміємо, цілком природно, у сенсі Рімана.

2. Довести, що в означенні лінійного нормованого простору першу аксіому можна замінити на таку: з умови $\|x\| = 0$ випливає, що $x = \Theta$.

3. Нехай $x_n, x, y_n, y \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), де X – нормований простір. Довести, що:

   a) якщо $x_n \to x$, то x_n – обмежена послідовність;
   b) якщо $x_n \to x, \lambda_n \to \lambda$ ($\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$), то $\lambda_n x_n \to \lambda x$;
   c) якщо $x_n \to x$, то $\|x_n\| \to \|x\|$;
   d) якщо $x_n \to x$ і $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$;

e) якщо $x_n \to x$, то $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$.

4. Довести, що відкрита куля $S_r(x_0)$ – відкрита множина, замкнена куля $\bar{S}_r(x_0)$ – замкнена множина, і замикання $S_r(x_0)$ збігається з $\bar{S}_r(x_0)$.

5. Довести, що $diam S_r(x_0) = 2r$.

6. Нехай $\bar{S}_r(a) \subset \bar{S}_R(b) \subset X$. Довести, що $r \leq R$ і $\|a - b\| \leq R - r$.

7. Довести, що для будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується нерівність $\|x\| \leq \max\{\|x - y\|, \|x + y\|\}$.

8. Переконатися, що в наведених нижче випадках виконуються аксіоми норми, тобто норма визначена коректно. Що означає збіжність послідовності в кожному з перерахованих нижче просторів?

   a) Простір E^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m \, (x_k \in \mathbb{R}\,(x_k \in \mathbb{C}))$ з нормою $\|x\|_{E^m} = \left[\sum\limits_{k=1}^m |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

   b) Простір c^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m \, (x_k \in \mathbb{R}(x_k \in \mathbb{C}))$ з нормою $\|x\|_{c^m} = \max\limits_{1 \leq k \leq m} |x_k|$.

   c) Простір $l_p^{(m)} \, (p \geq 1)$ стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m \, (x_k \in \mathbb{R}\,(x_k \in \mathbb{C}))$ з нормою $\|x\|_{l_p^{(m)}} = \left[\sum\limits_{k=1}^m |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

   d) Простір l_2 послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)^T, (x_k \in \mathbb{R}\,(x_k \in \mathbb{C}))$, що задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$, з нормою

$$\|x\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   e) Простір $l_p \, (p > 1)$ послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)^T$, $(x_k \in \mathbb{R}\,(x_k \in \mathbb{C}))$, що задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$, з нормою $\|x\|_{l_p} = \left[\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

9. Переконатися, що виконуються аксіоми норми, тобто норма визначена коректно. Що означає збіжність послідовності у кожному з перерахованих нижче просторів?

a) Простір $C\left[a,b\right]$ неперервних на $[a,b]$ функцій з нормою

$$\|x\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

b) Простір $C^k\left[a,b\right]$ неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій з нормою $\|x\|_{C^k[a,b]} = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[a,b]} \left|x^{(i)}\left(t\right)\right|$.

c) Простір $M\left[a,b\right]$ всіх обмежених на $[a,b]$ функцій з нормою $\|x\|_{M[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} \left|x\left(t\right)\right|$.

d) Простір K неперервних на дійсній прямій фінітних функцій (дорівнюють нулю поза деяким інтервалом, своїм для кожної функції) з нормою $\|x\|_K = \max\limits_{t} \left|x\left(t\right)\right|$.

e) Простір $\tilde{L}_p\left[a,b\right]$ неперервних на $[a,b]$ функцій з нормою

$$\|x\|_{\tilde{L}_p[a,b]} = \left\{\int\limits_a^b \left|x\left(t\right)\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty.$$

<u>Важливе зауваження</u> до останнього пункту завдання 9. Далі, віддаючи належне математичній строгості, маючи лише неперервні функції, у процесі запровадження інтегральних норм для побудови різних нормованих просторів (типу $\tilde{L}_p\left[a,b\right]$) використовуватимемо подібні позначення, на відміну від позначень для просторів Лебега $(L_p\left(a,b\right))$.

10. Зобразити одиничну замкнену кулю $\bar{S}_1\left(0\right)$ в дійсних просторах E^2, $c^2, l_1^{(2)}$.

11. Довести такі нерівності для норм:

a) $\alpha_m \|x\|_{E^m} \le \|x\|_{c^m} \le \beta_m \|x\|_{E^m}$;

b) $\gamma_m \|x\|_{l_p^{(m)}} \le \|x\|_{c^m} \le \delta_m \|x\|_{l_p^{(m)}}$;

c) $\varepsilon_m \|x\|_{E^m} \le \|x\|_{l_p^{(m)}} \le \eta_m \|x\|_{E^m}$.

Назвати значення констант еквівалентності α_m, β_m, γ_m, δ_m, ε_m, η_m.

12. Чи збігається в просторі $C\left[0,1\right]$ послідовність:

a) $x_n\left(t\right) = t^n - t^{n+1}$;

b) $y_n\left(t\right) = t^n - t^{2n}$?

13. Чи збігається послідовність $x_n\left(t\right) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$ у просторі:

a) $C[0,1]$;

b) $C^1[0,1]$?

14. Нехай $x_n(t), x(t), y(t) \in C^k[a,b], x_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$. Довести, що $x_n(t)\, y(t) \to x(t)\, y(t)$ при $n \to \infty$.

15. Довести, що будь-яка послідовність, яка збіжна в просторі $C[a,b]$, буде збіжною і в просторі $\tilde{L}_2[a,b]$. Побудувати приклад послідовності, збіжної в $\tilde{L}_2[a,b]$, яка не збігається в $C[a,b]$. Означення простору $\tilde{L}_2[a,b]$ див. у прикладі 9.

16. Чи можна в лінійному просторі неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій прийняти за норму елемента $x(t)$:

    a) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

    b) $\max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

    c) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

    d) $|x(a)| + \max\limits_{t\in[a,]]} |x'(t)|$;

    e) $\int\limits_a^b |x(t)|\, dt + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$?

17. Чи буде множина всіх багаточленів у просторі С $[a,b]$

    a) відкритою;

    b) замкненою?

18. Чи буде замкненою в просторі $C^k[a,b]$ множина багаточленів степеня:

    a) $\leq k$;

    b) $= k$?

19. Довести, що в просторі $C[a,b]$ множина функцій $x(t)$ таких, що для будь-якого $t \in [a,b]$ виконується нерівність $|x(t)| < 1$, є відкритою.

20. Які з наведених нижче просторів є строго нормованими:

    a) c^2;

    b) l_2;

c) $C\,[0,1]$;

d) $\tilde{L}_2\,[0,1]$?

21. Довести, що кулі $S_r\,(x_0)$ і $\bar{S}_r\,(x_0)$ – опуклі множини. Чи буде опуклою сфера $\sigma_r\,(x_0)$?

22. Чи будуть опуклими в просторі $C\,[a,b]$ такі множини:

a) множина багаточленів степеня $= k$;

b) множина багаточленів степеня $\leq k$;

c) неперервних функцій, що задовольняють умову $\int\limits_0^1 |x\,(t)|dt \leq 1$;

d) неперервних функцій, що задовольняють умову $\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1$;

e) неперервно диференційовних функцій, що задовольняють умову $\max\limits_{t\in[0,1]} |x\,(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]]} |x'\,(t)| \leq 1$?

23. Довести, що будь-який лінійний багатовид у скінченновимірному лінійному нормованому просторі є підпростором.

24. Чи утворюють у просторі $C\,[-1,1]$ підпростір такі множини функцій:

a) монотонні функції;

b) парні функції;

c) багаточлени;

d) багаточлени степеня $\leq k$;

e) неперервно диференційовані фукції;

f) неперервні кусково-лінійні функції;

g) функції $x\,(t)$, які задовольняють умову $x\,(0) = 0$;

h) функції $x\,(t)$, які задовольняють умову $\int\limits_{-1}^1 x\,(t)dt = 0$;

i) функції які задовольняють умову Ліпшиця зі сталою, залежною від функції?

Розділ 3

Простори зі скалярним добутком

У ході вивчення аналітичної геометрії та лінійної алгебри застосовують важливі поняття скалярного добутку векторів та елементів лінійного простору. Поняття скалярного добутку дає змогу сформулювати багато важливих задач евклідової тривимірної та n-вимірної геометрії запровадженням означення ортогональності та ортогональних систем елементів. Тож далі наведемо деякі важливі означення і твердження для просторів зі скалярним добутком.

Означення 3.1 Дійсний лінійний простір E називатимемо евклідовим, якщо кожній парі його елементів x і y поставлено у відповідність дійсне число (x, y), яке називають скалярним добутком і яке має такі властивості (аксіоми):

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x = \Theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, за умови, що x, y, z – довільні елементи E, а λ – довільне дійсне число.

Будь-який евклідів простір можна перетворити в нормований, визначивши в ньому норму за формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Означення 3.2 Комплексний лінійний простір U називатимемо унітарним, якщо кожній парі його елементів x і y поставлено у відповідність комплексне число (x, y) – скалярний добуток x на y, якщо в цьому разі виконуються такі умови:

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0$ тоді й лише тоді, коли $x = \Theta$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda\,(x, y)$;

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ для довільних x, y, z із U і довільній константі $\lambda \in \mathbb{C}$.

Легко побачити, що в унітарному просторі виконуватимуться рівності $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x, y)$ та $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$. Також, як і в евклідовому, в унітарному просторі можна запровадити норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Нехай E – простір зі скалярним добутком. Якщо $(x, y) = 0$, то елементи x і y називатимемо *ортогональними* і записуватимемо $x \perp y$. Нуль простору E вважатимемо ортогональним до будь-якого елемента. Розглянемо в E елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, серед яких нема нульових. Якщо $(x_k, x_l) = 0$ при довільних $k, l = 1, 2, \ldots, m$ $(k \neq l)$, то систему елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називатимемо *ортогональною*.

Для означеної вище ортогональної системи справджується таке фундаментальне твердження.

Теорема 3.1 Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – ортогональна система; тоді елементи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ лінійно незалежні.

Якщо задана система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ така, що

$$(x_k, x_l) = \delta_{kl},\ \ k{,}l = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\delta_{kl} = 1 \text{ при } k = l, \delta_{kl} = 0 \text{ при } k \neq l$$

(тут δ_{kl} – символ Кронекера), то систему елементів $x_1, x_2, \ldots, x_m$ називатимемо *ортонормованою*.

Для будь-якої лінійно незалежної системи $\{x_k\}$ можна побудувати ортогональну систему $\{e_k\}$ та ортонормовану систему $\{f_k\}$ за допомогою процесу ортогоналізації Шмідта.

- Приймаємо $e_1 = x_1$ (відомо, що $e_1 \neq 0$, оскільки система з одного елемента x_1 є лінійно незалежною, як частина $\{x_k\}$).

- Далі e_2 шукаємо у вигляді $e_2 = x_2 - \lambda_{21} e_1$, де скаляр λ_{21} підбираємо так, щоб виконувалась умова $e_2 \perp e_1$. Звідси $0 = (x_2 - \lambda_{21} e_1, e_1)$, а $\lambda_{21} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$. Отже, $e_2 \neq 0$ знайдено.

- Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ уже побудовані. Елемент e_k шукаємо у вигляді

  $$e_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ki} e_i.$$

  Скаляри λ_{ki} на кожному кроці знаходимо з умови $e_k \perp e_l$ $\bigl(l = \overline{1, k-1}\bigr)$. Звідси $\lambda_{kl} = \frac{(x_k, e_l)}{(e_l, e_l)}$. У цьому разі $e_k \neq 0$.

Отже, отримаємо ортогональну систему e_k. Приймаємо далі $f_k = e_k / \|e_k\|$, отримаємо ортонормовану систему $\{f_k\}$.

На практиці також часто використовують такі важливі властивості скалярного добутку.

- *Неперервність скалярного добутку.* Нехай $x_n \to x, y_n \to y$ при $n \to \infty$; тоді $(x_n, y_n) \to (x, y)$ при $n \to \infty$.

- *Рівність паралелограма.* У будь-якому просторі зі скалярним добутком для кожної пари елементів x та y

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Оскільки кожний простір зі скалярним добутком є нормованим, то розглянемо питання, пов'язані з його повнотою. Це поняття є важливим у разі дослідження збіжності послідовностей та рядів. Тому розглянемо деякі необхідні для розв'язування конкретних задач означення та твердження.

Означення 3.3 Нехай X – нормований простір. Послідовність $\{x_n\} \subset X$ називаємо фундаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\epsilon)$ такий, що для довільних номерів $n > N$ і будь-яких натуральних p виконується нерівність $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Теорема 3.2 Будь-яка збіжна в X послідовність є фундаментальною.

Означення 3.4 Нормований простір називатимемо повним, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність збігається. Повний нормований простір називають банаховим.

Означення 3.5 Простір зі скалярним добутком називатимемо гільбертовим, якщо він є повним відносно норми, породженої скалярним добутком. Традиційне позначення – H

Тепер можемо сформулювати дуже важливу для обчислювальної математики задачу побудови елемента найліпшого наближення в гільбертових та банахових просторах.

Означення 3.6 Нехай X – лінійний нормований простір, L – підпростір у X, а $x \in X$. Якщо існує такий елемент $u^* \in L$, що $\varrho(x, L) = \inf\limits_{u \in L} \|x - u\| = \|x - u^*\|$, то u^* називатимемо найліпшим елементом наближення x елементами підпростору L.

Окрім того, справджуються такі твердження.

Теорема 3.3 У гільбертовому просторі існує єдиний елемент $y \in L$, що реалізує відстань від точки x до підпростору L:

$$\varrho(x, L) = \|x - y\|.$$

Теорема 3.4 Нехай $\varrho(x, L) = \|x - y\|$ тоді $x - y \perp L$.

Отже, у гільбертовому просторі H, за умови скінченновимірності L із базисом $\{h_k\}_{k=1}^{m}$, побудова елемента найліпшого наближення зводиться до ров'язування (відносно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k, h_j\right) = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.1}$$

В абстрактному банаховому просторі важко побудувати ефективний числовий алгоритм відшукання елемента найліпшого наближення. Тому замість задачі наближення в банаховому просторі зазвичай розв'язують ту ж задачу в гільбертовому просторі, що вкладається в цей банахів. Наприклад, відомо, що простір Соболєва $H^1(a, b)$ вкладається в $C[a, b]$, а тому існує таке $\beta \in \mathbb{R}\,(\beta > 0)$, що за будь-якого $x \in H^1(a, b)$ справджується нерівність $\|x\|_{C[a,b]} \leq \beta \|x\|_{H^1(a,b)}$.

Нехай $L \subset C[a, b]$ – підпростір із базисом, що містить неперервно диференційовані функції, $x \in \tilde{H}^1[a, b]$, u^*– елемент найліпшого наближення x елементами L, знайденими за допомогою системи типу (3.1), з огляду на означення скалярного добутку в $\tilde{H}^1[a, b]$. Точніше, якщо $x(t), y(t)$ – неперервно диференційовані, то

$$(x, y)_{\tilde{H}^1[a,b]} = \int_a^b [x(t) \cdot y(t) + x'(t) \cdot y'(t)]\, dt.$$

Тоді

$$\|x - u^*\|_{C[a,b]} \leq \beta \|x - u^*\|_{\tilde{H}^1[a,b]},$$

і за достатньо малої норми

$$\|x - u^*\|_{\tilde{H}^1[a,b]}$$

елемент u^* добре наближає x у просторі $C[a, b]$.

Приклад 3.1 Довести, що в просторі $C[0, 1]$ не можна запровадити скалярний добуток, що узгоджується із нормою цього простору.

Кажуть, що скалярний добуток в X узгоджується з нормою в X, якщо $(x, x) = \|x\|_X^2$.

Припустимо, що скалярний добуток у просторі $C[0, 1]$ узгоджується із $\|x\|_{C[0,1]}$:

$$(x,x) = \|x\|^2_{C[0,1]} = \left(\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\right)^2.$$

Однак тоді з аксіом скалярного добутку випливає, що

$$(x,x) = \left(\max_{0\le t\le 1}|x(t)|\right)^2 = 0 \text{ тоді й лише тоді } x(t)\equiv 0.$$

Нехай $x(t) = -t^2 \not\equiv 0$ на $[0,1]$. Знайдемо максимум цієї функції. Формально $x'(t) = -2t, -2t = 0$. Отже, ми отримали, що $x(0) = 0$ – максимум функції $x(t) = -t^2$ на $[0,1]$. Тобто $(x,x) = 0$, хоча $x(t) \not\equiv 0$, а отже, скалярний добуток простору $C[0,1]$ не узгоджується з нормою цього простору.

Приклад 3.2 Нехай послідовності $\{x_n\}, \{y_n\}$ належать одиничній кулі $\bar{S}_1(0)$ у дійсному гільбертовому просторі H і $(x_n, y_n) \to 1$ при $n\to\infty$. Доведемо, що норма різниці $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Оскільки розглядаємо простір зі скалярним добутком, то

$$\begin{gathered}0 \le \|x_n - y_n\|^2 = (x_n - y_n, x_n - y_n) = \\ \left(\|x_n\|^2 - (x_n, y_n)\right) + \left(\|y_n\|^2 - (x_n, y_n)\right).\end{gathered}$$

Врахуємо, що $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \bar{S}_1(0)$, $\|x_n\|^2 \le 1$, а $\|y_n\|^2 \le 1$. Тому при $n\to\infty$ $\|x_n\|^2 - (x_n, y_n) \le 0$ і $\|y_n\|^2 - (x_n, y_n) \le 0$. Звідси $0 \le \|x_n - y_n\|^2 \le 0$.

Отже, $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n\to\infty$.

Приклад 3.3 Знайдемо кут φ між елементами $x(t) = \sin t$ і $y(t) = t$ у просторі $\tilde{L}_2[0,\pi]$.

Оскільки $(x,y) = \|x\|\,\|y\|\cos(\hat{x,y})$, то $\cos(\hat{x,y}) = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$. Обчислимо скалярний добуток (x,y) у просторі $\tilde{L}_2[0,\pi]$:

$$(x,y) = \int_0^\pi x(t)\,y(t)dt = \int_0^\pi t\sin t dt = (\sin t - t\cos t)\,|_0^\pi = \pi.$$

Далі,

$$\|x\|_{\tilde{L}_2[0,\pi]} = \left(\int_0^\pi |x(t)|^2 dt\right)^{\frac12} = \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt\right)^{\frac12} = \left(\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2}\right)|_0^\pi\right)^{\frac12} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\|y\|_{\tilde{L}_2[0,\pi]} = \left(\int_0^\pi |y(t)|^2 dt\right)^{\frac12} = \left(\int_0^\pi t^2 dt\right)^{\frac12} = \left(\frac{t^3}{3}|_0^\pi\right)^{\frac12} = \sqrt{\frac{\pi^3}{3}}.$$

Тоді $\cos(\hat{x,y}) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$, звідки $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{\pi}$.

Приклад 3.4 Проведемо ортогоналізацію елементів $x_0(t) = 1, x_1(t) = t, x_2(t) = t^2$ у просторі $\tilde{L}_2[-1,1]$.

Приймемо $e_0 = x_0(t) = 1 \neq 0$. Тоді $e_1 = x_1 - \lambda_{10}e_0$. З умови ортогональності елементів e_0 та e_1 маємо $(x_1 - \lambda_{10}e_0, e_0) = 0$, звідки $\lambda_{10} = \frac{(x_1,e_0)}{(e_0,e_0)}$. Знайдемо скалярні добутки (x_1, e_0) та (e_0, e_0):

$$(x_1, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} tdt = 0; \ (e_0, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} 1dt = 2.$$

Тоді $\lambda_{10} = 0$, а $e_1 = t$.

Знайдемо тепер $e_2 = x_2 - \lambda_{20}e_0 - \lambda_{21}e_1$. Оскільки $(e_2, e_0) = 0$ та $(e_2, e_1) = 0$, то $\lambda_{20} = \frac{(x_2,e_0)}{(e_0,e_0)}$ і $\lambda_{21} = \frac{(x_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$. Обчислимо скалярні добутки (x_2, e_0), (x_2, e_1) та (e_1, e_1):

$$(x_2, e_0) = \int\limits_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3}; \quad (x_2, e_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2 \cdot tdt = 0; \quad (e_1, e_1) = \int\limits_{-1}^{1} t^2dt = \frac{2}{3}.$$

Звідси $\lambda_{20} = \frac{1}{3}$, а $\lambda_{21} = 0$. Отже, $e_2 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Ми побудували ортогональну систему елементів $e_0{=}1, e_1{=}t, e_2{=}t^2{-}\frac{1}{3}$.

Приклад 3.5 Доведемо, що в просторі $\tilde{L}_2[0,1]$ множина

$$M = \left\{ x(t) \in \tilde{L}_2[0,1] : \int\limits_{0}^{1} x(t)dt = 0 \right\}$$

є підпростором. Опишемо підпростір $M^{\perp}$.

Множина M є підпростором у $\tilde{L}_2[0,1]$, якщо вона утворює замкнений лінійний багатовид у $\tilde{L}_2[0,1]$.

Спочатку доведемо, що M є лінійним багатовидом. Нехай $x(t), y(t)$ – два довільні елементи з множини M, а λ, μ – дві довільні дійсні сталі. Тоді

$$\int\limits_{0}^{1} (\lambda x(t) + \mu y(t))dt = \lambda \int\limits_{0}^{1} x(t)dt + \mu \int\limits_{0}^{1} y(t)dt = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lambda x(t) + \mu y(t) \in M$, тобто M – лінійний багатовид.

Доведемо тепер, що M замкнена. Розглянемо послідовність $\{x_n(t)\} \subset M$ таку, що $x_n(t) \to x_0(t)$ при $n \to \infty$ у $\tilde{L}_2[0,1]$, причому $x_0(t)$ – неперервна. Потрібно переконатися в тому, що $\int\limits_{0}^{1} x_0(t)dt = 0$. Справді,

$$0 = \int\limits_{0}^{1} x_n(t)dt = \int\limits_{0}^{1} x_n(t) \cdot 1dt \to \int\limits_{0}^{1} x_0(t)dt \text{ при } n \to \infty$$

з огляду на неперервність скалярного добутку.

Тобто множина M є замкненим лінійним багатовидом в $\tilde{L}_2\,[0,1]$, а отже, вона є підпростором $\tilde{L}_2\,[0,1]$.

Розглянемо структуру $M^{\perp}$. Очевидно, що

$$M^{\perp} = \left\{ y\,(t) \in \tilde{L}_2\,[0,1] : \ \forall x\,(t) \in M, \int\limits_0^1 x\,(t)\,y\,(t)dt = 0 \right\}.$$

Нехай існує неперервна функція $y\,(t) \not\equiv C$ така, що $y\,(t) \geq 0$ та $\int\limits_0^1 x\,(t)\,y\,(t)dt = 0$. Оскільки $x\,(t)$ – неперервна, то за теоремою про середнє значення є $\bar{t} \in [0,1]$ таке, що $\int\limits_0^1 x\,(t)\,y\,(t)dt = x\,(\bar{t}\,) \int\limits_0^1 y\,(t)dt$. З цього випливає, що $\int\limits_0^1 y\,(t)dt = 0$, тобто $y\,(t) \in M$, що суперечить означенню $M^{\perp}$. Отже, $M^{\perp} = \left\{ y\,(t) \in \tilde{L}_2\,[0,1] : y\,(t) \equiv C \right\}$.

Приклад 3.6 У просторі $\tilde{L}_2\,[0,1]$ знайдемо проекцію елемента $x\,(t) = t^3$ на підпростір L багаточленів степеня не вище другого.

Згідно з теоремою 3.4, елемент $u \in L$ є ортогональною проекцією x на підпростір L, якщо за будь-якого $v \in L$ $(x-u) \perp v$. Підпростір L породжений одночленами $h_0\,(t) = 1$, $h_1\,(t) = t$, $h_2\,(t) = t^2$, а вектор $u \in L$ має вигляд

$$u = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, \text{ де } \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \text{ – невідомі константи.}$$

Для того, щоб вектор $x-u$ був ортогональний до довільного вектора $v \in L$, необхідно і достатньо, щоб вектор $x-u$ був ортогональний до базисних векторів h_0, h_1, h_2. Отже, для знаходження вектора u потрібно розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь (відносно $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$)

$$\left(x - (\lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)\ ,\ h_k\right) = 0, \qquad k = 0,1,2. \tag{3.2}$$

Обчислимо скалярні добутки, що трапляються в цій системі:

$$(x,h_0) = \int\limits_0^1 t^3 dt = \tfrac{1}{4}, \quad (x,h_1) = \int\limits_0^1 t^4 dt = \tfrac{1}{5}, \quad (x,h_2) = \int\limits_0^1 t^5 dt = \tfrac{1}{6},$$

$$(h_0,h_0) = \int\limits_0^1 dt = 1, \quad (h_0,h_1) = \int\limits_0^1 t dt = \tfrac{1}{2}, \quad (h_0,h_2) = \int\limits_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3},$$

$$(h_1,h_1) = \int\limits_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3}, \quad (h_1,h_2) = \int\limits_0^1 t^3 dt = \tfrac{1}{4}, \quad (h_2,h_2) = \int\limits_0^1 t^4 dt = \tfrac{1}{5}.$$

Тоді система (3.2) набуває вигляду

$$\begin{cases} \lambda_0 + \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\lambda_0 + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2 = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3}\lambda_0 + \frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{1}{5}\lambda_2 = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Роз'яжемо її і знайдемо $\lambda_0 = 0,05$; $\lambda_1 = -0,6$; $\lambda_2 = 1,5$. Отже, проекцією елемента $x(t) = t^3$ на підпростір багаточленів степеня ≤ 2 є багаточлен $u(t) = 1,5t^2 - 0,6t + 0,05$.

Приклад 3.7 Нехай X – нормований простір, а $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна послідовність. Припустимо, що $\{x_{n_k}\} \subset X$ – деяка її підпослідовність, що збігається до $x_0 \in X$. Доведемо, що тоді вся послідовність $\{x_n\}$ збігається.

Для початку розглянемо норму

$$\|x_n - x_0\| = \|x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x_0\|. \qquad (3.3)$$

Другий доданок у правій частині нерівності (3.3) $\|x_{n_k} - x_0\| \to 0$ при $k \to \infty$.

За означенням фундаментальності, за будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$ таке, що для $n, m > N(\varepsilon)$ $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Приймемо $x_m = x_{n_k}$ ($n_k \to \infty$, як і m). Тоді для достатньо великого k $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. І отже, $\|x_n - x_0\| \to \varepsilon$.

Задачі

1. Знайти проекцію елемента x гільбертового простору H на підпростір L, породжений векторами a_1, a_2, a_3.

   a) $H = l_2,\ x = (2,3,2,3,0,\dots)^T,\ a_1 = \left(\frac{1}{3},0,\dots\right)^T,$
   $a_2 = (1,2,0,\dots)^T,\ a_3 = (3,1,i,0,\dots)^T;$

   b) $H = l_2,\ x = (5,4,3,2,0,\dots)^T,\ a_1 = (0,0,1,0,\dots)^T,$
   $a_2 = (0,1,i,0,\dots)^T,\ a_3 = (1,0,2,0,\dots)^T;$

   c) $H = l_2,\ x = (1,0,2,3,0,\dots)^T,\ a_1 = (i,0,1,0,\dots)^T,$
   $a_2 = (1,2,3,0,\dots)^T,\ a_3 = (0,1,1,0,\dots)^T;$

   d) $H = l_2,\ x = (1,2,0,0,3,0,\dots)^T,\ a_1 = (1,i,0,\dots)^T,$
   $a_2 = (1,2,2,0,\dots)^T,\ a_3 = (-1,2,1,0,\dots)^T;$

   e) $H = l_2,\ x = (2,0,1,2,1,0,\dots)^T,\ a_1 = (0,i,1,0,\dots)^T,$
   $a_2 = (1,3,1,0,\dots)^T,\ a_3 = (1,0,4,0,\dots)^T;$

f) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = e^t,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

g) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = \sin t,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

h) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = t^4,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

i) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = \ln(1+t)\,,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

j) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = \cos 2\pi t,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

k) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = \sin \pi t,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2;$

l) $H = \tilde{L}_2\,[0,1]\,,\ x\,(t) = e^t - 2,\ a_1\,(t) = 1,\ a_2\,(t) = t,\ a_3\,(t) = t^2.$

2. Довести, що в просторі зі скалярним добутком для довільних елементів x, y, z виконується тотожність Аполонія:

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \tfrac{x+y}{2}\right\|^2.$$

3. Довести, що в просторі зі скалярним добутком для довільних елементів x, y, z, t виконується нерівність Птоломея:

$$\|x-z\| \cdot \|y-t\| \le \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|.$$

Коли в ній реалізується рівність?

4. Довести, що в евклідовому просторі зі скалярним добутком елементи x і y ортогональні тоді й лише тоді, коли $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.

5. Довести, що в унітарному просторі зі скалярним добутком елементи x і y ортогональні тоді й лише тоді, коли $\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2$ для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

6. Нехай X – дійсний лінійний нормований простір і для будь-яких $x, y \in X$ виконується рівність паралелограма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Довести, що формула

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

визначає в X скалярний добуток, який узгоджується з нормою в X, тобто такий, що $(x,x) = \|x\|^2$.

7. Довести, що в просторі $\mathbb{C}[0,1]$ не можна визначити скалярний добуток, що узгоджується з нормою цього простору.

8. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Довести, що $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

9. Нехай $x_1, x_2, \ldots$ – ортогональна система в гільбертовому просторі H. Довести, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в просторі H тоді й лише тоді, коли збігається числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

10. Нехай $x_1, x_2, \ldots$ і $y_1, y_2, \ldots$ – такі дві системи елементів у гільбертовому просторі H, що

$$(x_i, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

(Системи $x_1, x_2, \ldots$ і $y_1, y_2, \ldots$ називатимемо біортогональними). Довести, що кожна із цих систем лінійно незалежна.

11. Довести, що система елементів гільбертового простору лінійно незалежна тоді й тільки тоді, коли її визначник Грама відмінний від нуля.

12. Довести, що гільбертів простір є строго нормованим.

13. Нехай у просторі H зі скалярним добутком для $x_1, x_2 \in H$ виконується рівність
$$Re\,(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2.$$
Довести, що $x_1 = x_2$.

14. Нехай x_n, y_n належать замкненій одиничній кулі $\bar{S}_1(0)$ в гільбертовому просторі H і $(x_n, y_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Довести, що $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

15. Довести таке: для того, щоб елемент x гільбертового простору H був ортогональний до підпростору $L \subset H$, необхідно і достатньо, щоби для будь-якого елемента $y \in L$ виконувалась нерівність $\|x\| \leq \|x - y\|$.

16. Довести, що для будь-якої множини M у гільбертовому просторі H множина $M^{\perp}$ є підпростором.

17. Довести, що для будь-якої множини M у гільбертовому просторі H виконується включення $M \subseteq \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Чи можливе тут строге включення?

18. Довести, що для множини M у гільбертовому просторі H рівність $M = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ виконується тоді й лише тоді, коли M – підпростір у H.

19. Нехай M, N – такі множини в гільбертовому просторі H, що $M \subset N$. Довести, що $M^{\perp} \supset N^{\perp}$.

20. У лінійному просторі неперервних на $[0, \infty)$ функцій $x(t)$ таких, що $\int\limits_0^\infty |x(t)|^2 e^{-t} dt$ існує, прийнято

$$(x, y) = \int\limits_0^\infty x(t)\, y(t)\, e^{-t} dt.$$

   a) Перевірити виконання аксіом скалярного добутку.
   b) Розглянемо лінійно незалежну систему $1, t, t^2, \ldots$ У наслідок її ортогоналізації отримують ортогональну систему багаточленів Чебишева–Лагерра. Знайти три її перші елементи.

21. Нехай M, N – підпростори гільбертового простору H і $M \perp N$. Довести, що $M + N$ – підпростір H.

22. Довести, що послідовність $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ $(n \in \mathbb{N})$ збігається поточково до функції $x(t) \equiv 0$ для довільного $t \geq 0$, але не збігається в просторі $\tilde{L}_2[0, 1]$.

23. У просторі $\tilde{L}_2[0, 1]$ знайти проекцію елемента $x(t) = t^3$ на підпростір багаточленів степеня $m \leq n$, якщо $n = 0, 1, 2$.

24. У просторі l_2 знайти відстань $\rho(x, L)$ від елемента $x = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)^T$ до підпростору

$$L = \left\{ x \in l_2, x = (x_1, x_2, \ldots)^T : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0 \right\}.$$

25. У просторі $\tilde{L}_2[0, 1]$ знайти відстань $\rho(x, L)$ від елемента $x(t) = t^2$ до підпростору

$$L = \left\{ x(t) \in \tilde{L}_2[0, 1] : \int\limits_0^1 x(t)\, dt = 0 \right\}.$$

26. Нехай L – одновимірний підпростір у гільбертовому просторі H, $a \in L$, $a \neq 0$. Довести, що за будь-якого $x \in H$

$$\rho\left(x, L^{\perp}\right) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

27. Нехай L – n-вимірний підпростір з базою $h_1, h_2, \ldots, h_n$ в гільбертовому просторі $H, x \in H$ – довільний елемент. Довести, що величину $\rho^2(x, L)$ можна записати у вигляді відношення двох визначників Грама:

$$\rho^2(x, L) = \frac{\Gamma(x, h_1, h_2, \ldots, h_n)}{\Gamma(h_1, h_2, \ldots, h_n)}.$$

28. У просторі $C[0,1]$ знайти відстань

    a) від елемента $x_0(t) = t^2$ до підпростору мбагаточленів нульового степеня;

    b) від елемента $x_1(t) = t$ до підпростору багаточленів степеня ≤ 1.

29. Нехай X – лінійний нормований простір, L – підпростір $X, x \in X$, $y \in L$. Довести, що $\rho(x, L) = \rho(x + y, L)$.

30. Довести, що множина

$$M = \left\{ x(t) \in \tilde{H}^1[a,b] : \int_a^b x(t)\,dt = 0 \right\}$$

є підпростором у просторі $\tilde{H}^1[a,b]$. Описати підпростір $M^{\perp}$.

31. Довести, що множина

$$M = \left\{ x(t) \in \tilde{H}^1[a,b] : x(a) = x(b) \right\}$$

є підпростором у просторі $\tilde{H}^1[a,b]$. Описати підпростір $M^{\perp}$.

32. Довести, що множина

$$M = \left\{ x(t) \in \tilde{L}_2[0,1] : \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \right\}$$

є підпростором у просторі $\tilde{L}_2[0,1]$. Описати підпростір $M^{\perp}$.

33. Провести ортогоналізацію елементів $x_0(t) = 1,\ x_1(t) = t,\ x_2(t) = t^2,\ x_3(t) = t^3$ у просторах

    a) $\tilde{L}_2[-1, 1]$;

    b) $\tilde{L}_2[0, 1]$.

34. Знайти кути трикутника, утвореного в просторі $\tilde{L}_2[-1, 1]$ елементами $x_0(t) = 0,\ x_1(t) = 1,\ x_2(t) = t$.

35. Знайти кут φ між елементами $x(t) = \sin t,\ y(t) = t$ в просторі $\tilde{L}_2[0, \pi]$.

36. Довести, що кожна фундаментальна послідовність у лінійному нормованому просторі обмежена.

37. Нехай $\{x_n\} \subset X$ – фундаментальна послідовність і підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ збігається до $x_0 \in X$. Довести, що вся послідовність $\{x_n\}$ збігається також до x_0.

38. Нехай $\{x_n\} \subset X$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ збігається. Довести, що $\{x_n\}$ – фундаментальна послідовність. Чи правильне зворотне твердження?

39. Нехай $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ – фундаментальні послідовності. Довести, що числова послідовність $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ збігається.

40. У лінійному просторі багаточленів, які розглядають на $[a, b]$, приймемо:

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|,\ \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

    a) Перевірити аксіоми норми.

    b) Чи буде якийсь із отриманих просторів банаховим?

41. Довести, що кожний скінченновимірий лінійний нормований простір є банаховим.

42. Довести, що будь-який підпростір банахового простору є банаховим простором.

43. Нехай у лінійному нормованому просторі X задано лінійний багатовид L, який у нормі X є повним простором. Довести, що L замкнений в X, тобто є підпростором.

44. У лінійному просторі X задані дві еквівалентні норми і в одній із них X – банахів простір. Довести, що X є банаховим простором і в другій нормі.

45. Чи збігатиметься в нормованому просторі l_2 послідовність

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)^T ?$$

46. Чи збігатиметься в нормованому просторі $\tilde{L}_2\,[0,1]$ послідовність

$$\begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}t, & t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]? \end{cases}$$

47. Позначимо через $C^{\alpha}\,[a,b]$ множину всіх функцій, що задовольняють на $[a,b]$ умову Гьолдера із показником $\alpha \in (0,1]$. Нехай

$$H_{\alpha}\,(x) = \sup_{a \le t, \tau \le b\ (t \ne \tau)} \frac{|x\,(t) - x\,(\tau)|}{|t - \tau|^{\alpha}} < +\infty.$$

Довести, що $C^{\alpha}\,[a,b]$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_{\alpha} = \max_{a \le t \le b} |x\,(t)| + H_{\alpha}\,(x)\,,\ x \in C^{\alpha}\,[a,b]\,.$$

Розділ 4

Лінійні неперервні оператори

Одним із найважливіших і найліпше вивчених класів відображень лінійних нормованих просторів є клас лінійних неперервних операторів. У цьому розділі розглянемо елементи теорії таких операторів та розв'язки деяких типових задач.

Нехай X, Y – задані лінійні нормовані простори, D – підмножина X.

Означення 4.1 Відображення A множини D в Y називатимемо оператором. У цьому випадку прийнято писати $A : D \to Y, D \subseteq X$. Множину D назвемо областю визначення оператора A.

Якщо $D = X = Y$, то кажуть, що оператор діє в просторі X.

Далі область визначення оператора A позначатимемо D_A. Отже, щоб визначити оператор A, потрібно задати множину $D_A \subseteq X$ і правило, яке кожному $x \in D_A$ ставить у відповідність певне $y \in Y$. Символічно цей факт можна записати у вигляді $Ax = y$. Поряд із областю визначення оператора A розглядають також множину його значень: $R_A = \{y \in Y \colon y = Ax, x \in D_A\}$.

Означення 4.2 Нехай D_A – лінійний багатовид у дійсному (комплексному) нормованому просторі X, тобто якщо $x_1, x_2 \in D_A$, то завжди для будь-яких дійсних (комплексних) α_1, α_2 виконується включення $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in D_A$. Оператор A називаємо лінійним, якщо для будь-яких x_1, x_2 з D_A і α_1, α_2 виконується рівність

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2. \tag{4.1}$$

Отже, для того, щоб довести, що заданий оператор не є лінійним, досить визначити невиконання (4.1) за деяких x_1, x_2 з D_A та α_1, α_2.

Означення 4.3 Лінійний оператор $A : D_A \to Y,\ D_A \subseteq X$, називатимемо обмеженим, якщо існує додатна константа C така, що для всіх $x \in D_A$ справджується нерівність

$$\|Ax\|_Y \leq C \|x\|_X . \tag{4.2}$$

Тобто необмеженість A означає, що для будь-якої додатної константи C існує x_c таке, що $\|Ax_c\| > C \|x_c\|$. Це рівносильно тому, що для будь-якого натурального n знайдеться таке $x_n \in D_A$, що $\|Ax_n\|_Y > n \|x_n\|_X$.

Простір лінійних обмежених операторів, усюди визначених у X $(D_A = X)$ зі значеннями в Y позначають $\mathcal{L}(X, Y)$. Якщо ж $X = Y$, то пишуть $\mathcal{L}(X)$.

Означення 4.4 Оператор $A : D_A \to Y, D_A \subseteq X$, називатимемо неперервним, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$, що збігається до елемента $x_0 \in D_A$, справджується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0$.

Поняття неперервності та обмеженості лінійних операторів тісно пов'язані.

Теорема 4.1 Для того, щоб лінійний оператор $A : X \to Y$ був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Запровадимо також поняття норми оператора.

Означення 4.5 Нехай A – лінійний обмежений оператор. Найменшу з констант C, для якої справджується нерівність (4.2), називатимемо нормою оператора A і позначатимемо $\|A\|$.

Зазвичай норму оператора шукають у такій послідовності. Спочатку отримують нерівність (4.2) з деякою константою C, а потім намагаються довести, що знайдена константа є найменшою. Для цього достатньо за довільного $\varepsilon > 0$ визначити такий x_ε, що $Ax_\varepsilon > (C - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$. Окрім того, якщо можна назвати таке $x_0 \neq 0$, що $\|Ax_0\| = C\|x_0\|$, то очевидно, що ця константа C є найменшою. У цьому випадку лінійний обмежений оператор називають *досяжним*.

Також для знаходження норми оператора можна використовувати такі формули:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}. \tag{4.3}$$

Приклад 4.1 Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму (за умови, що оператор неперервний) оператора $A : l_1 \to l_1$, якщо $x = (x_1, x_2, \dots)^T$, причому $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i| < +\infty$, а $Ax = (0, 0, 3x_1 - 2x_4, x_5, x_2 + x_5, 0, \dots)^T$.

Лінійність оператора очевидна. Доведемо обмеженість:

$$\|Ax\|_{l_1} = |3x_1 - 2x_4| + |x_5| + |x_2 + x_5| \leq$$

$$3|x_1| + |x_2| + 2|x_4| + 2|x_5| \leq 3\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = 3\|x\|_{l_1}.$$

Отже, $\|A\| \leq 3$. Нехай $\hat{x} = (1, 0, 0, \dots)^T$. Тоді $\|\hat{x}\|_{l_1} = 1$ і $\|A\hat{x}\|_{l_1} = 3 \cdot \|\hat{x}\|_{l_1}$, тобто $\|A\| = 3$.

Приклад 4.2 Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму (за умови, що оператор неперервний) оператора $A : X \to Y$, якщо $X = Y = \tilde{L}_2[0, 1]$, а $Ax(t) = tx(t)$.

Лінійність оператора A очевидна. Перевіримо обмеженість.

$$\|Ax\| = \left(\int_0^1 |Ax(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{t \in [0,1]} |t| \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \cdot \|x\|.$$

Звідси $\|A\| \leq 1$. Доведемо, що $\|A\| = 1$. Нехай $x_n(t) = t^n\sqrt{2n+1}$. Тоді

$$\|x_n\| = \left(\int_0^1 (2n+1)t^{2n} dt\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\|Ax_n\| = \left(\int_0^1 (2n+1)t^{2n+2} dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} = \left(1 - \frac{2}{2n+3}\right)^{\frac{1}{2}} \to 1$$

при $n \to \infty$.

Отже, $\|A\| = 1$.

Приклад 4.3 Перевіримо, чи оператор $A : X \to Y$ є лінійним і неперервним, і знайдемо його норму, якщо

$$X = Y = C[-1, 1], \; Ax(t) = \int_{-1}^1 (t+s)\, x(s)\, ds.$$

Перевіримо лінійність:

$$A(\alpha x + \beta y)(t) = \int_{-1}^1 (t+s)\left[\alpha x(s) + \beta y(s)\right] ds =$$

$$\alpha \int_{-1}^1 (t+s)\, x(s)\, ds + \beta \int_{-1}^1 (t+s)\, y(s)\, ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t).$$

Далі, якщо $x \in C\,[-1,1]$, то $\|x\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x\,(t)|$. Нехай $x, y \in C[-1{,}1]$ такі, що $\|x - y\| < \varepsilon$. Тоді

$$\|Ax - Ay\| = \|A\,(x - y)\| = \max_{t\in[-1,1]} \left| \int\limits_{-1}^{1} (t + s)\,(x\,(s) - y\,(s))\,ds \right| \leq$$

$$\max_{s\in[-1,1]} |x\,(s) - y\,(s)| \max_{t\in[-1,1]} \int\limits_{-1}^{1} |t + s|\,ds < \varepsilon \cdot \mathrm{const}.$$

З останньої нерівності випливає таке: якщо $x_n \to x$ при $n \to \infty$ у просторі $C\,[-1,1]$, то $Ax_n \to Ax$ при $n \to \infty$, тобто оператор A неперервний. Неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, причому з попереднього випливає, що

$$\|A\| \leq \max_{t\in[-1,1]} \int\limits_{-1}^{1} |t + s|\,ds =$$

$$\max_{t\in[-1,1]} \left(-\int\limits_{-1}^{-t} (t + s)\,ds + \int\limits_{-t}^{1} (t + s)\,ds \right) = \max_{t\in[-1,1]} \left(1 + t^2\right) = 2.$$

Доведемо виконання рівності $\|A\| = 2$. Для цього потрібно або знайти елемент $\hat{x} \in C\,[-1,1]$, для якого $\|A\hat{x}\| = 2\,\|\hat{x}\|$, або довести, що за довільного $\varepsilon > 0$ існує $x_\varepsilon \in C\,[-1,1]$ такий, що

$$\|Ax_\varepsilon\| > (2 - \varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|\,.$$

Останнє рівносильне існуванню послідовності $\{x_n\}$, яка має таку властивість: за будь-якого n $\|x_n\| = 1$ і $\|Ax_n\| \to 2, n \to \infty$. Приймемо $x(t) \equiv 1$. Тоді $\|x\| = 1$ і

$$\|Ax\| = \max_{t\in[-1,1]} \left| \int\limits_{-1}^{1} (t + s)\,ds \right| = \max_{t\in[-1,1]} |2t| = 2.$$

Отже, $\|A\| = 2$.

Приклад 4.4 Нехай X – лінійний простір неперервно диференційованих функцій з нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x\,(t)|$. Доведемо, що оператор $A\colon X \to$

$C[0,1]$, де $Ax(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, не є неперервним, проте в цьому разі оператор A неперервно діє з простору $C^1[0,1]$ в простір $C[0,1]$. Знайдемо норму оператора A.

Нагадаємо, що норма в просторі $C^1[0,1]$ має вигляд

$$\|x\|_{C^1[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|.$$

Оскільки неперервність лінійного оператора еквівалентна його обмеженості, то в першому випадку достатньо довести, що A необмежений. Для цього можна розглянути таку послідовність $\{x_n\} \subset X$, що

$$\|x_n\| = 1 \text{ і } \|Ax_n\| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

або

$$\|x_n\| \to 0 \ \text{ і } \ \|Ax_n\| \geq C > 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Розглянемо послідовність $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$. Усі функції x_n є неперервно диференційовані і $\|x_n\| \leq \dfrac{1}{n}$, тобто $\|x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Водночас, за будь-якого n $\|Ax_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |\cos nt| = 1$. Отже, оператор A необмежений.

Нехай тепер оператор A діє з $C^1[0,1]$ в $C[0,1]$ Тоді

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| = \|x\|_{C^1[0,1]}.$$

Отже, оператор A обмежений і $\|A\| \leq 1$. Розглянемо послідовність

$$x_n(t) = \frac{1}{n+1} t^n.$$

Для таких функцій

$$\|x_n\|_{C^1[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{1}{n+1} t^n \right| + \max_{t\in[0,1]} \left| \frac{n}{n+1} t^{n-1} \right| = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

і

$$\|Ax_n\| = \frac{n}{n+1} \to 1, n \to \infty.$$

Це означає, що $\|A\| = 1$.

Приклад 4.5 Розглянемо оператор інтегрування $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ як оператор, який діє в просторі $C[0,1]$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$. Доведемо, використовуючи безпосередньо означення, що A – лінійний обмежений оператор, і знайдемо його норму.

Лінійність оператора A випливає із лінійності інтеграла Рімана. Доведемо його обмеженість:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t x(s)\, ds \right| \le \max_{t\in[0,1]} \int_0^t |x(s)|\, ds \le \max_{t\in[0,1]} |x(s)| \cdot \max_{t\in[0,1]} \int_0^t dt \le \|x\|.$$

Звідси, оператор A обмежений і $\|A\| \le 1$. Доведемо протилежну нерівність. Нехай $\hat{x}(t) \equiv 1$. За формулою (4.3)

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ge \|A\hat{x}\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^t 1\, ds = 1.$$

Отже, $\|A\| \ge 1$, а з врахуванням доведеного раніше $\|A\| = 1$.

Приклад 4.6 У просторі $L_1(0,1)$ розглянемо оператор $(Ax)(t) = t \cdot x(t)$, який називають оператором множення на незалежну змінну. Доведемо, використовуючи означення, що A – лінійний обмежений оператор, і знайдемо його норму.

Лінійність оператора A очевидна. Доведемо його обмеженість:

$$\|Ax\| = \int_0^1 |t \cdot x(t)|\, dt \le \int_0^1 |x(t)|\, dt = \|x\|, \text{тобто}, \|A\| \le 1.$$

З'ясуємо, що $\|A\| = 1$. Розглянемо послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \le t \le 1 - \frac{1}{n}, \\ n, \ 1 - \frac{1}{n} < t \le 1. \end{cases}$$

Тоді $\|x_n\| = 1$, а $\|A\| \ge \|Ax_n\| = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} t \cdot x_n(t)\, dt = 1 - \frac{1}{2n}$. Звідки $\|A\| \ge 1$, оскільки n можна вибрати скільки завгодно великим. Отже, $\|A\| = 1$.

Доведемо, що A – недосяжний оператор. Припустимо, що $\|Ax_0\| = \|x_0\|$, тобто $\int\limits_0^1 t \cdot |x_0(t)|\, dt$. Однак якщо $x_0(t) \ne 0$ і $t \ne 1$, то $t\,|x_0(t)| < |x_0(t)|$. Отже, $x_0(t) = 0$ майже скрізь ($L_1(0,1)$ – простір Лебега, відповідні інтеграли в означенні норми розуміємо в сенсі Лебега) і A не може бути досяжним. У цьому випадку якщо заданий оператор розглянути в просторі $C[0,1]$, то легко побачити, що він буде досяжним при $x_0(t) \equiv 1$.

Задачі

1. Перевірити лінійність, неперервність і знайти норму (якщо оператор лінійний і неперервний) оператора $A : X \to Y$:

a) $X = Y = C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^1 (2t - s)\, x(s)\, ds;$

b) $X = Y = C[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau;$

c) $X = Y = C\left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ Ax(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t - s)\, x(s)\, ds;$

d) $X = C[-1,1],\ Y = C[0,1],\ Ax(t) = x(t);$

e) $X = Y = C[0,1],\ Ax(t) = t^2 x(0);$

f) $X = Y = \tilde{L}_1[-1,1],\ Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (2t + 3s)\, x(s)\, ds;$

g) $X = Y = \tilde{L}_1[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^1 (2t - s)\, x(s)\, ds;$

h) $X = Y = C[0,1],\ Ax(t) = x(t^2);$

i) $X = Y = \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = (t^2 + t)\, x(t);$

j) $X = Y = C[0,1],\ Ax(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}\, x(t^2);$

k) $X = C^1[a,b],\ Y = C[a,b],\ Ax(t) = x(t);$

l) $X = Y = \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = t \int\limits_0^1 x(\tau)\, d\tau;$

m) $X = Y = \tilde{L}_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ Ax(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t - s)\, x(s)\, ds;$

n) $X = Y = \tilde{L}_2[-1,1],\ Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (2t - 3s)\, x(s)\, ds;$

o) $X = Y = C[-1,1],\ Ax(t) = \int\limits_{-1}^1 (2t + 3s)\, x(s)\, ds;$

p) $X = C[0,1],\ Y = \tilde{L}_1[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^1 (2t - s)\, x(s)\, ds;$

q) $X = Y = \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau;$

r) $X = Y = C\,[0,2],\ Ax\,(t) = (t^2+t)\,x\,(t)\,;$

s) $X = C^1\,[0,1]\,, Y = C\,[0,1],\ Ax\,(t) = (t^2-t)\,x\,(t)\,;$

t) $X = Y = \tilde{L}_2\,[0,1],\ Ax\,(t) = \int\limits_0^1 (t-s)\,x\,(s)\,ds;$

u) $X = Y = L_1\,(0,\infty),\ Ax\,(t) = \dfrac{t}{1+t^2}x\,(t^2)\,;$

v) $X = Y = \tilde{L}_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ Ax\,(t) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\,(t+s)\,x\,(s)\,ds;$

w) $X = C\,[0,1]\,, Y = C^1\,[0,1],\ Ax\,(t) = \int\limits_0^t x\,(\tau)\,d\tau;$

x) $X = Y = \tilde{L}_1\,[0,2],\ Ax\,(t) = (t^2-t)\,x\,(t)\,;$

y) $X = Y = C\,[0,\pi],\ Ax\,(t) = \int\limits_0^{\pi} \cos\,(t+s)\,x\,(s)\,ds;$

z) $X = Y = C[-1,1], Ax\,(t) = t\cdot x\,(t).$

2. Нехай X, Y – лінійні простори, $A : X \to Y$ – лінійний оператор і система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D_A$ лінійно залежна. Довести, що система елементів $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ лінійно залежна.

3. Нехай X, Y – лінійні простори, $A : X \to Y$ – лінійний оператор і система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D_A$ лінійно незалежна. Чи правильно, що система елементів $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ лінійно незалежна?

4. Нехай X, Y – лінійні простори, $A : X \to Y$ – лінійний оператор. Довести, що оператор A переводить опуклу множину із D_A в опуклу множину в просторі Y.

5. Нехай H – гільбертів простір, $A : H \to H$ – обмежений лінійний оператор з $D_A = H$. Довести, що

$$\|A\| = \sup_{x,y\in H} \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|},\ x\neq 0,\ y\neq 0.$$

6. Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, $A : X \to Y$ – лінійний оператор.

   a) Довести, що R_A – лінійний багатовид у Y.

   b) Чи завжди R_A – підпростір у Y?

7. Довести, що ядро $N(A) = \{x \in D_A : Ax = \Theta\}$ обмеженого лінійного оператора $A : X \to Y$ є підпростором простору X.

8. Розглянемо оператор $A : C[a,b] \to C[a,b], Ax(t) = \varphi(t)\,x(t)$, де $\varphi(t) \in C[a,b]$. За яких умов щодо функції $\varphi \not\equiv 0$ множина R_A є підпростором $C[a,b]$?

9. Перевірити лінійність та неперервність оператора $A : X \to Y$, знайти його норму, якщо $X = Y = l_1$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_1$, $Ax = (0, 0, 4x_1 - 2x_4, x_5, x_2 + 2x_5, 0, \dots)^T$.

10. Перевірити лінійність та обмеженість оператора $A : X \to Y$, знайти його норму, якщо $X = Y = l_1$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_1$, $Ax = (0, 5x_1 + x_3, x_4, 7x_2 - 3x_1, x_3 - x_4, 0, \dots)^T$.

11. Перевірити лінійність та неперервність оператора $A : X \to Y$, знайти його норму, якщо $X = Y = l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)^T$.

12. Перевірити лінійність та обмеженість оператора $A : X \to Y$, знайти його норму, якщо $X = Y = l_2$, $x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_2$, $Ax = (x_2, x_3, x_4, \dots)^T$.

Зазначимо, що оператори, розглянуті в задачах 11 і 12, називають операторами зсуву.

Розділ 5

Лінійні функціонали

Функціонали є частковим випадком операторів, що набувають значення в просторі дійсних чи комплексних чисел. Відповідно, всі означення, що стосуються операторів, виконуються і для функціоналів. Наведемо деякі з них.

Означення 5.1 Кажуть, що на множині D задано функціонал f, якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність деяке число $f(x)$ (дійсне чи комплексне).

Означення 5.2 Лінійний функціонал f, заданий на лінійному багатовиді D_f нормованого простору X, називатимемо обмеженим, якщо існує стала $C > 0$ така, що для всіх $x \in D_f$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C\|x\|$.

Для лінійного функціонала, визначеного на всьому просторі, поняття обмеженості і неперервності збігаються (як і для операторів). Норму лінійного неперервного функціонала можна обчислити за формулами

$$\|f\| = \sup_{x \in D_f, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \in D_f, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in D_f, \|x\|=1, \, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \quad (5.1)$$

Означення 5.3 Множину всіх лінійних неперервних функціоналів, визначених на всьому лінійному нормованому просторі X, називатимемо спряженим простором і позначатимемо X^*.

Спряжений простір X^* є нормованим простором із нормою (5.1).

Сформулюємо твердження, яке є одним із найважливіших у функціональному аналізі.

Теорема 5.1 (Гана–Банаха про продовження лінійних функціоналів). Будь-який лінійний неперервний функціонал f_0, заданий на лінійному багатовиді D нормованого простору X, можна продовжити на весь простір X зі збереженням норми, тобто знайдеться функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(x) = f_0(x)$ для всіх $x \in D$ і $\|f\| = \|f_0\|$.

Для знаходження норми того чи іншого функціонала f за формулою (5.1) достатньо знайти число $c = \sup\limits_{x \in D_f, \|x\|=1} |f(x)|$. Для його знаходження можна спочатку отримати оцінку вигляду $|f(x)| \le c_1$, що справедливджується для всіх $x \in D_f, \|x\| = 1$. Потім намагаються довести, що $c_1 = c$. Це можна зробити двома способами.

1. Спробувати знайти конкретний елемент $x_0 \in D_f$, $\|x_0\| = 1$, для якого $|f(x_0)| = c_1$ (такий елемент не завжди існує).

2. Спробувати побудувати послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f, \|x_n\| = 1$, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = c_1$.

Приклад 5.1 Нехай $X = C[0,1]$ і $x(t) \in C[0,1]$. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму функціонала $f(x) = x(0)$.

Перевіримо лінійність. Для довільних $x, y \in C[0,1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(0) = \alpha x(0) + \beta y(0) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

З очевидної нерівності $|x(0)| \le \max\limits_t |x(t)|$ за довільних $x(t)$ і $x_1(t)$з $C[0,1]$ отримаємо

$$|f(x) - f(x_1)| = |f(x - x_1)| = |(x - x_1)(0)| \le \max_t |(x - x_1)(t)| = \|x - x_1\|.$$

З'ясовано, що функціонал неперервний, оскільки за будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що з умови $\|x - x_1\| < \delta$ випливає $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon = \delta$. Далі, згідно з означенням норми функціонала f,

$$\|f\| = inf\{C : \forall x\, |f(x)| \le C\|x\|\},$$

на підставі очевидної нерівності $|f(x)| = |x(0)| \le \max\limits_t |x(t)| = 1 \cdot \|x\|$ отримуємо $\|f\| \le 1$. З іншого боку, якщо

$$x(t) \equiv 1, \text{ то } f(x) = x(0) = 1 \text{ і } \|x\| = \max_t |x(t)| = 1,$$

тобто виконується рівність $|f(x)| = \|x\|$. Отже, $\|f\| = 1$.

Приклад 5.2 Нехай $x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1$. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму функціонала $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k}$.

Лінійність цього функціонала очевидна. Для доведення неперервності достатньо показати обмеженість функціонала. Маємо за будь-якого $x \in l_1$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\|_{l_1},$$

тобто функціонал обмежений, причому $\|f\| \leq 1$.

Як і в попередньому прикладі, доведемо, що для деякого елемента x із l_1 $|f(x)| = \|x\|_{l_1}$. Справді, нехай $x = (1, 0, 0, \dots)^T$. Тоді

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| = 1 = 1 \cdot \|x\|_{l_1}.$$

Отже, $\|f\| = 1$.

Приклад 5.3 Нехай $x(t) \in \tilde{L}_2[0,1]$. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму функціонала $f(x) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\, dt$.

Перевіримо лінійність: за будь-яких $x(t), y(t)$ із $\tilde{L}_2[0,1]$ і α, β із $\mathbb{C}$

$$f(\alpha x + \beta y) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (\alpha x(t) + \beta y(t))\, dt =$$

$$\alpha \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\, dt + \beta \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} y(t)\, dt = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Далі, використовуючи нерівність Коші–Буняковського, отримаємо

$$|f(x)| = \left| \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\, dt \right| \leq \left(\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\, \|x\|,$$

тобто $\|f\| \leq \sqrt{3}$.

Якщо $\hat{x}(t) = t^{-\frac{1}{3}}$, то

$$\|\hat{x}\| = \left(\int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad |f(\hat{x})| = \left| \int\limits_0^1 t^{-\frac{2}{3}} dt \right| = 3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \|\hat{x}\|.$$

Отже, $\|f\| = \sqrt{3}$.

Приклад 5.4 Нехай $x(t) \in C[0,1]$. Перевіримо лінійність, неперервність і знайдемо норму функціонала $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}\, x\big(\frac{1}{2^k}\big)$.

Перевіримо лінійність:

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\, (\alpha x + \beta y)\left(\frac{1}{2^k}\right) =$$

$$\alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right) + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Доведемо обмеженість: за будь-якого $x \in C[0,1]$

$$|f(x)| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} x\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \left|x\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \le$$

$$\le \max_t |x(t)| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 \cdot \|x\|.$$

Отже, функціонал обмежений і $\|f\| \le 2$. З іншого боку, якщо $\hat{x}(t) \equiv 1$, то $|f(\hat{x})| = 2$. Тому $\|f\| = 2$.

Приклад 5.5 Розглянемо X – лінійний простір неперервних на $[0,1]$ функцій $x(t)$ з нормою $\|x\| = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$. Чи буде неперервним функціонал $f(x) = x(0)$ у такому нормованому просторі?

Цей функціонал не буде неперервний, що можна довести двома способами.

1. Доведемо, що функціонал необмежений, тобто за будь-якого натурального n існує елемент x_n такий, що
$$|f(x_n)| > n \|x_n\|.$$
Приймемо
$$x_n(t) = \begin{cases} n(1-nt), & 0 \le t \le \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$
Очевидно, що функції $x_n(t)$ неперервні і
$$\|x_n\| = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n(1-nt)\, dt = \frac{1}{2}.$$
Водночас,
$$|f(x_n)| = |x_n(0)| = n > \frac{n}{2} = n\|x_n\|.$$

2. Заперечення неперервності функціонала означає, що існує така послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $\|x_n\| \to 0$ (тобто $x_n \to 0$) і $f(x_n) \not\to 0$. Такою буде, наприклад, послідовність функцій
$$x_n(t) = \begin{cases} 1-nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Справді, $\|x_n\| = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\, dt = \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty$. Однак у цьому разі $f(x_n) = x_n(0) = 1$ для всіх n, тобто $f(x_n) \not\to 0$.

Приклад 5.6 Доведемо, що функціонал $f(x) = x(-1) - 2x(0) + x(1)$ у просторі $C[-1,1]$ є лінійним неперервним, і знайдемо його норму.

Лінійність функціонала випливає з лінійності значення функції у точці. Для лінійного функціонала неперервність і обмеженість еквівалентні. У цьому випадку легше перевірити обмеженість

$$|f(x)| = |x(-1) - 2x(0) + x(1)| \le |x(-1)| + 2|x(0)| + |x(1)| \le \\ 4 \cdot \max_{t \in [-1,1]} |x(t)| = 4\|x\|.$$

Звідки випливає оцінка $\|f\| \le 4$. Для доведення протилежної нерівності розглянемо кусково-лінійну функцію $\hat{x}(t) = 2|t| - 1$; тоді $\|\hat{x}\| = 1$, $f(\hat{x}) = 4$; за формулою (5.1) $\|f\| \ge 4$, тому $\|f\| = 4$.

Задачі

Перевірити лінійність, неперервність і знайти норми таких функціоналів.

1. $X = C[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 t x(t)\, dt$.

2. $X = l_2$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k}$.

3. $X = \tilde{L}_2[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t) \operatorname{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$.

4. $X = l_2$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{\sqrt{k(k+1)}}$.

5. $X = \tilde{L}_2[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^1 x(t) \cos \pi t\, dt$.

6. $X = l_2$, $f(x) = x_5 - x_4$.

7. $X = \tilde{L}_2[0,1]$, $f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t}\, x(t^2)\, dt$.

8. $X = l_1$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k^2}$.

9. $X = C\,[0,1],\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt.$

10. $X = \tilde{L}_2\,[0,1],\ f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt.$

11. $X = C\,[-1,1],\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 x(t)\,\mathrm{sign}\,t\ dt.$

12. $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$

13. $X = \tilde{L}_1\,[-1,1],\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 tx(t)\,dt.$

14. $X = C\,[0,1],\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\cos\pi t\ dt.$

15. $X = l_1,\ f(x) = x_3 + x_4.$

16. $X = C\,[0,1],\ f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt - x(0)\,.$

17. $X = \tilde{L}_2\,[-1,1],\ f(x) = \int\limits_{-1}^1 tx(t)\,dt.$

18. $X = l_1,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k(k+1)}.$

19. $X = \tilde{L}_2\,(0,1),\ f(x) = \int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{4}} x(t)\,dt.$

20. $X = l_1,\ f(x) = 2x_1 - 3x_3.$

21. $X = C\,[0,1],\ f(x) = \int\limits_0^1 (1-2t)\,x(t)\,dt.$

22. $X = l_2,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\sqrt{k\,(k+1)}}.$

23. $X = l_1, f(x) = x_1 + x_2 + 12x_3.$

24. $X = C\,[-1,1]\,, f(x) = \int\limits_{-1}^1 x(t)\,dt - x(1)\,.$

25. $X = C[-1, 1], f(x) = \frac{1}{4}[x(-1) + x(1)]$.

26. $X = l_2, f(x) = x_1 + x_2$.

27. $X = l_2, f(x) = x_5 - x_3$.

Розділ 6

Оборотність лінійних операторів

Системи лінійних алгебричних рівнянь, інтегральні рівняння, різноманітні задачі для звичайних диференціальних рівнянь, а також рівнянь із частинними похідними часто можна записати у вигляді лінійного рівняння $Ax = y$. Такий підхід дає змогу зосередити увагу на загальних закономірностях, а не на специфічних і часткових проблемах кожної конкретної задачі. Якщо існує обернений оператор A^{-1}, то розв'язок задачі можна записати у явному вигляді $x = A^{-1}y$. Важливого значення набуває тепер з'ясування умов, у разі виконання яких обернений оператор існує і має ті чи інші властивості. У цьому розділі розглянуто найважливіші означення та теореми, пов'язані з оборотністю операторів, і наведено розв'язки деяких типових задач.

Нехай A – довільний (не обов'язково лінійний) оператор із областю визначення D_A з простору X і областю значень R_A з простору Y.

Означення 6.1 Якщо оператор A виконує взаємно однозначне відображення D_A на R_A, то зворотне відображення R_A на D_A називають оберненим оператором і позначають A^{-1}. Іншими словами, для $y \in R_A$ приймають $A^{-1}y = x$, де x – елемент із D_A, для якого $Ax = y$.

Запроваджене поняття можна записати й інакше – мовою операторних рівнянь. Для заданого $y \in R_A$ розглянемо рівняння

$$Ax = y, \tag{6.1}$$

де x – невідомий елемент із D_A.

Означення 6.2 Якщо для довільного $y \in R_A$ рівняння (6.1) має єдиний розв'язок $x \in D_A$, то кажуть, що в оператора A існує обернений оператор A^{-1} і в цьому разі $A^{-1}y = x$.

Це трактування свідчить про важливість поняття оберненого оператора, оскільки якщо A^{-1} відомий, то це означає, що ми вміємо розв'язувати рівняння (6.1). І навпаки, знаходження A^{-1} фактично зводиться до розв'язування рівняння (6.1) відносно x.

Для випадку лінійного оператора A можна навести простий і зручний для використання критерій існування оберненого оператора.

Теорема 6.1 Якщо A – лінійний оператор, то для існування A^{-1} необхідно і достатньо, щоб рівняння $Ax = \Theta$ мало лише тривіальний розв'язок.

Зазначимо також, що область визначення оберненого оператора зазвичай не збігається з Y. До того ж обернений оператор A^{-1} може виявитися необмеженим, навіть якщо початковий оператор A є обмеженим.

Нехай X і Y – нормовані простори. Розглянемо критерій обмеженості оператора A^{-1}.

Теорема 6.2 Оператор A^{-1} існує і обмежений на R_A тоді й тільки тоді, коли для деякої сталої $m > 0$ і будь-якого $x \in D_A$ виконується нерівність (умова стійкості)

$$\|Ax\|_Y \geq m \cdot \|x\|_X . \tag{6.2}$$

Розглянемо таке важливе поняття.

Означення 6.3 Лінійний оператор $A : X \to Y$ називатимемо неперервно оборотним, якщо $R_A = Y$, обернений оператор A^{-1} існує і $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

З урахуванням теореми (6.2) можемо сформулювати таке твердження.

Теорема 6.3 Оператор $A : X \to Y$ неперервно оборотний тоді й тільки тоді, коли $R_A = Y$, для деякої сталої $m > 0$ і для всіх $x \in D_A$ виконується нерівність (6.2).

Сформулюємо також теорему Банаха.

Теорема 6.4 Нехай X, Y – банахові простори, $A : X \to Y$ – обмежений лінійний оператор, що здійснює взаємо однозначне відображення X на Y, тоді обернений оператор A^{-1} обмежений.

Іншими словами, якщо $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, де X і Y – банахові, $R_A = Y$ і A – оборотний, то A – неперервно оборотний.

Розглянемо ці твердження в контексті дослідження розв'язності лінійного рівняння

$$Ax = y. \tag{6.3}$$

Якщо A – неперервно оборотний, то рівняння (6.3) має єдиний розв'язок $x = A^{-1}y$ для будь-якої правої частини y. Нехай $\hat{x} = A^{-1}\hat{y}$ – розв'язок цього ж рівняння з правою частиною $\hat{y}$, тоді $\|x - \hat{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|y - \hat{y}\|$. Тобто в разі малої зміни правої частини рівняння (6.3) y розв'язок x зміниться мало, а отже, задача (6.3) коректно розв'язна.

Припустимо, що $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Означення 6.4 Оператор $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ називатимемо правим оберненим до A оператором, якщо $AU = I_Y$, де I_Y – тотожний у просторі Y оператор.

Означення 6.5 Оператор $V \in \mathcal{L}(Y, X)$ називатимемо лівим оберненим до A оператором, якщо $VA = I_X$, де I_X – тотожний у просторі X оператор.

Оператор U прийнято позначати A_r^{-1}, а V – A_l^{-1}.

Розглянемо ці означення з погляду існування і єдиності розв'язку рівняння (6.3).

Лема 6.1 Якщо існує правий обернений A_r^{-1} до A, то рівняння (6.3) має розв'язок $x = A_r^{-1}y$. Якщо ж існує лівий обернений A_l^{-1} до A, то рівняння (6.3) може мати не більше одного розв'язку.

Зауваження 6.1 У першому випадку говоритимемо, що для рівняння (6.3) справджується теорема існування, а в другому – теорема єдиності.

Нехай $N_A = \{x \in D_A : Ax = \Theta\}$ – множина нулів оператора A. Множина N_A не є порожньою, оскільки $\Theta \in N_A$.

Зауваження 6.2 Якщо існує A_r^{-1}, то $R_A = Y$. Якщо існує A_l^{-1}, то $N_A = \{\Theta\}$.

У загальному випадку не можна говорити про єдиність правого і лівого обернених операторів. Незважаючи на це, справджується така лема.

Лема 6.2 Нехай для оператора $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ існують A_r^{-1} і A_l^{-1}. Тоді існує оператор A^{-1}, обернений до A, і

1) $A^{-1} = A_r^{-1} = A_l^{-1}$;

2) $D_{A^{-1}} = Y, R_{A^{-1}} = X$;

3) правий обернений до A і лівий обернений до A єдині.

Лема 6.3 Нехай $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ і нехай існує оператор $U \in \mathcal{L}(Y, X)$ такий, що $UA = I_X, AU = I_Y$, тоді A неперервно оборотний і $A^{-1} = U$.

Наведемо приклади розв'язування деяких задач, що пов'язанні з поняттям оберненого оператора.

Приклад 6.1 У просторі l_1 розгянемо оператор

$$Ax = (2x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)^T \text{, де } x = (x_1, x_2, \dots)^T \in l_1.$$

Чи існує обернений до оператора A оператор? Якщо так, то знайдемо його.

Скористаємось теоремою 6.1 і перевіримо, чи відповідне однорідне рівняння $Ax = 0$ має лише тривіальний розв'язок:

$$(2x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)^T = 0,$$

або

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ -4x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ \dots. \end{cases}$$

Тобто $Ax = 0$ має лише тривіальний розв'язок, а тому обернений до оператора A існує.

Розглянемо рівняння $Ax = y$, або

$$(2x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)^T = y, \text{ де } y \in l_1.$$

Звідси, відносно $x_1, x_2, \dots$, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = y_1, \\ x_1 + x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4, \\ \dots, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ x_2 = -\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4, \\ \dots. \end{cases}$$

Отже, знайдено єдиний розв'язок

$$x = A^{-1}y = \left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2, -\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{2}y_2, y_3, y_4, \dots\right)^T.$$

Приклад 6.2 Розглянемо оператор A, що діє у просторі $C[0,1]$:

$$(Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau.$$

Чи існує обернений до A оператор? Якщо так, знайдемо його.

Цей оператор A – лінійний, тому можна використати теорему 6.1 і розглянути однорідне рівняння

$$x(t) - \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau = 0. \tag{6.4}$$

Нехай $x_0(t)$ – розв'язок рівняння (6.4), тобто

$$x_0(t) - \int\limits_0^1 x_0(\tau)d\tau \equiv 0.$$

Звідси випливає, що $x_0(t) \equiv C$ – деяка константа, однак тоді, підставивши $x_0(t)$ у рівняння (6.4), отримаємо

$$C - \int\limits_0^1 Cd\tau = 0, \text{ або } C - C = 0.$$

Тобто рівняння (6.4) матиме безліч розв'язків, а отже, оператора оберненого до A не існує.

Приклад 6.3 У просторі $C[0,1]$ задано оператор

$$(Ax)(t) = x(t) - t\int\limits_0^1 \tau x(\tau)d\tau.$$

Чи існує обернений до A оператор? Якщо так, знайдемо його.

Цей оператор A – лінійний, тому можна використати теорему 6.1 і розглянути однорідне рівняння

$$(Ax)(t) = x(t) - t\int\limits_0^1 \tau x(\tau)d\tau = 0. \tag{6.5}$$

Нехай $x_0\left(t\right)$ – розв'язок рівняння (6.5), тобто

$$x_0\left(t\right) - t\int\limits_0^1 \tau x_0\left(\tau\right) d\tau \equiv 0.$$

Звідси випливає, що $x_0\left(t\right)$ має вигляд $x_0\left(t\right) = Ct$, де C – деяка константа. Підставимо цей вираз у початкове рівняння (6.5):

$$Ct - t\int\limits_0^1 \tau C\tau d\tau = 0. \tag{6.6}$$

Рівність (6.6) повинна виконуватись для всіх $t \in [0,1]$. Тому

$$C = C\int\limits_0^! \tau^2 d\tau.$$

Звідси С $= 0$ і $x_0\left(t\right) \equiv 0$. Відповідно, A^{-1} існує.

Для знаходження A^{-1} розглянемо рівняння

$$x\left(t\right) - t\int\limits_0^1 \tau x\left(\tau\right) d\tau = f\left(t\right), \tag{6.7}$$

де $f\left(t\right)$ – довільна фіксована функція з $C\left[0,1\right]$. Нехай $x_0\left(t\right)$ – розв'язок задачі (6.7), тобто

$$x_0\left(t\right) - t\int\limits_0^1 \tau x_0\left(\tau\right) d\tau \equiv f\left(t\right).$$

Звідси $x_0\left(t\right) = \mathrm{C}t + f\left(t\right)$. Знайдемо C підстановкою $x_0\left(t\right)$ в (6.7):

$$Ct + f\left(t\right) - t\int\limits_0^1 \tau\left(C\tau + f\left(\tau\right)\right) d\tau = f\left(t\right).$$

Тобто

$$C = \tfrac{3}{2}\int\limits_0^1 \tau f\left(\tau\right) d\tau \text{ і } x_0\left(t\right) = f\left(t\right) + \tfrac{3}{2}t\int\limits_0^1 \tau f\left(\tau\right) d\tau.$$

Отже,

$$\left(A^{-1}f\right)(t) = f(t) + \frac{3}{2}t\int\limits_0^1 \tau f(\tau)\,d\tau.$$

Приклад 6.4 Нехай $X = \{x(t) \in C^1[0,1]\}$ з нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)|$. Оператор $A : X \to C[0,1]$ визначений формулою $Ax(t) = x'(t) - 2tx(t),\, t \in [0,1]$. Доведемо, що оператор A – неперервно оборотний.

Задача знаходження оператора A^{-1} зводиться до знаходження розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння.

$$\begin{cases} Ax \equiv x'(t) - 2tx(t) = y, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння $x' - 2tx(t) = 0$. Це рівняння з розділеними змінними, а отже, його розв'язок $x(t) = e^{t^2}$.

Розв'язок задачі (6.8) $x(t) = \mathrm{C}(t)\,e^{t^2}$ шукатимемо методом варіації сталої з рівняння $C'(t)\,e^{t^2} = y(t)$. Враховуючи початкову умову, знайдемо розв'язок задачі (6.8):

$$x(t) = e^{t^2}\int\limits_0^t e^{-s^2} y(s)ds = \int\limits_0^t e^{t^2-s^2} y(s)ds.$$

Отже, $A^{-1}y(t) = \int\limits_0^t e^{t^2-s^2} y(s)ds$.

Оскільки ядро $e^{t^2-s^2}$ цього інтегрального оператора є неперервним на $[0,1]\times[0,1]$, то оператор A^{-1} обмежений, а отже, оператор A – неперервно оборотний.

Приклад 6.5 Доведемо, що оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t} x(s)ds$ неперервно оборотний, і знайдемо A^{-1}.

Нехай $y \in C[0,1]$. Розглянемо рівняння $Ax = y$. Зазначимо, що $x(t) = y(t) - Ce^t$, де $C = \int\limits_0^1 e^s x(s)\,ds$. Проінтегруємо рівність $e^t x(t) = e^t y(t) - Ce^{2t}$ на $[0,1]$, знайдемо $C = \frac{2}{e^2+1}\int\limits_0^1 e^t y(t)\,dt$. Тому для довільної функції

$y \in C[0,1]$ розв'язок рівняння має вигляд

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1} \int\limits_0^1 e^{t+s} y(s)\, ds \equiv \left(A^{-1}y\right)(t).$$

Звідси випливає неперервність оператора A^{-1}.

Задачі

Чи існує обернений до оператора $A : X \to Y$, чи буде A^{-1} обмеженим? Оцінити норму операторів A, A^{-1} (якщо він обмежений).

1. $X = Y = C[0,1], \quad Ax(t) = (t^2+t)\, x(t).$
2. $X = Y = l_2, \quad Ax(t) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right).$
3. $X = Y = l_2, \quad Ax = (x_1 + x_2, x_2, 2x_3 - x_2, x_4, \ldots)^T.$
4. $X = Y = \tilde{L}_2[0,1], \quad Ax(t) = x(t) + t\int\limits_0^1 x(s)\, ds.$
5. $X = C^1[0,1], Y = C[0,1], \quad Ax(t) = (1-t)\, x(t).$
6. $X = Y = l_1, \quad Ax = \left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n, \ldots\right)^T.$
7. $X = Y = L_2(0,\infty), \quad Ax(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}\, x(t).$
8. $X = Y = l_2, \quad Ax = \left(-x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n, \ldots\right)^T.$
9. $X = C[0,1], Y = C[1,2], \quad Ax(t) = tx(t-1).$
10. $X = Y = l_1, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n, \ldots\right)^T.$
11. $X = Y = \tilde{L}_1[0,1], \quad Ax(t) = 2x(t) + (t-1)\int\limits_0^1 x(s)\, ds.$
12. $X = C^1[0,1], Y = C[0,1], \quad x(t) = (t^2 - t)\, x(t).$
13. $X = Y = l_2, \quad Ax = (x_1, 2x_1 + x_2, x_1 + x_4, x_4 + x_5, x_5, \ldots)^T.$
14. $X = Y = C[0,1], \quad Ax(t) = t^2 x(0) + x(t^2).$
15. $X = Y = \tilde{L}_2[0,1], \quad Ax(t) = (1+t)^{-1}\, x\left(\sqrt{t}\right).$

16. $X = Y = l_2, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, \dots\right)^T.$

17. $X = Y = C\,[0,1], \quad Ax\,(t) = x\,(t) + \frac{1}{2}t\int\limits_0^1 x\,(s)\,ds.$

18. $X = Y = l_1, \quad Ax = (2x_1, x_1 - x_2, x_3 + x_4, 2x_4, x_5, \dots)^T.$

19. $X = C^1\,[0,1]\,, Y = C\,[0,1], \quad Ax\,(t) = (1+t)^{-1}\,x\left(\sqrt{t}\right).$

20. $X = Y = L_2\,(-\infty, \infty)\,, \quad Ax\,(t) = (1+t^2)^{-1}\,x\,(t^2)\,.$

21. $X = Y = l_2, \quad Ax = \left(2x_1, \frac{3}{2}x_2, ..., \left(1 + \frac{1}{n}\right)x_n, \dots\right)^T.$

22. $X = Y = \tilde{L}_2\,[0,1], \quad Ax\,(t) = 2x\,(t) + t\int\limits_0^1 x\,(s)\,ds.$

23. $X = Y = C\,[0,1], \quad Ax\,(t) = x\,(t) + (1-t)\int\limits_0^1 x\,(s)\,ds.$

24. $X = Y = \tilde{L}_2\,[0,1], \quad Ax\,(t) = tx\,(1-t)\,.$

25. $X = Y = l_2, \quad Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n, \dots\right)^T.$

26. $X = Y = L_1\,(0, \infty), \quad Ax\,(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}x\,(t)\,.$

27. $X = Y = l_2, \quad Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - 2x_1, x_4, x_5, \dots)^T.$

28. $X = Y = C\,[0,1], \quad Ax\,(t) = x\,(t) - 2t\int\limits_0^1 x\,(s)\,ds.$

29. $X = Y = l_1, \quad Ax = \left(-x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., (-1)^n\,\frac{1}{n}x_n, \dots\right)^T.$

30. $X = Y = C\,[0,1],\ Ax\,(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{1+t^2}x\,(t^2)\,.$

31. Нехай X, Y – лінійні простори; $A : X \to Y$ – лінійний оператор, у якого існує обернений. Довести, що системи елементів $x_1, x_2, ..., x_n$ і $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_n$, де $x_1, x_2, ..., x_n \in D_A$, одночасно або лінійно залежні, або лінійно незалежні.

32. Нехай X – лінійний простір; $A : X \to X$ – лінійний оператор, який за деяких $\lambda_k \in \mathbb{R}\,(k = 1, 2, \dots, n)$ задовольняє співвідношення

$$I + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_n A^n = 0.$$

Довести, що оператор A^{-1} існує.

33. Нехай X – лінійний простір; $A, B : X \to X$ – лінійні оператори з $D_A = D_B = X$ і існують оператори $(AB)^{-1}, (BA)^{-1}$. Чи випливає звідси, що існують також A^{-1}, B^{-1}?

34. Нехай X – лінійний простір; $A, B : X \to X$ – лінійні оператори з $D_A = D_B = X$ і існує оператор $(I - AB)^{-1}$. Довести, що існує також оператор $(I - BA)^{-1}$.

35. Нехай X – лінійний простір; $A, B : X \to X$ – лінійні оператори з $D_A = D_B = X$, що задовольняють співвідношення

$$AB + A + I = 0, \ BA + A + I = 0.$$

Довести, що існує оператор A^{-1}.

36. Нехай X – лінійний нормований простір; $A, B : X \to X$ – лінійні оператори з $D_A = D_B = X$ такі, що $AB = BA$.

a) Нехай існує A^{-1}. Довести, що $A^{-1}B = BA^{-1}$.

b) Нехай $A, B \in \mathcal{L}(X)$ і B неперервно оборотний. Довести, що

$$\|AB\| \leq \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}.$$

37. Нехай X – лінійний нормований простір; $A, A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ і $k = \|A\| \|A^{-1}\|$ – число зумовленості оператора A. Розглянемо рівняння $Ax = y$, де $y \in X$, $y \neq \Theta$. Нехай $\overline{x} \in X$ – його наближений розв'язок. Довести, що його відносну похибку можна оцінити за формулою

$$\frac{1}{k} \frac{\|A\overline{x} - y\|}{\|y\|} \leq \frac{\|\overline{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\overline{x} - y\|}{\|y\|}.$$

38. Нехай X – лінійний простір; $A : X \to X$ – лінійний оператор і в X існує така послідовність $\{x_n\} \subset D_A$ $(n \in \mathbb{N})$, що $\|x_n\| = 1$, $Ax_n \to \Theta$ при $n \to \infty$. Довести, що для оператора A не існує обмеженого оберненого.

39. У просторі l_2 розглянемо оператори A, B, що переводять елемент $x = (x_1, x_2, \dots)^T$ в елементи $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)^T, Bx = (x_2, x_3, \dots)^T$. Які з операторів $A^{-1}, B^{-1}, A_r^{-1}, B_r^{-1}, A_l^{-1}, B_l^{-1}$ існують?

40. Довести, що оператор $A : C^1[0, 1] \to C[0, 1]$, $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$ має правий обернений, але не має лівого оберненого.

41. Розглянемо оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau$.

a) Що таке його множина значень R_A?

b) Чи існує на R_A обернений оператор A^{-1} і чи він обмежений?

42. Розглянемо оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau + x(t)$.

a) Довести, що $N(A) = 0$, так що в разі довільного $y \in C[0,1]$ рівняння $Ax = y$ не може мати більше одного розв'язку.

b) Довести, що A – неперервно оборотний, і знайти A^{-1}.

Розділ 7

Спряжені оператори

У лінійній алгебрі вивчають спряжені й самоспряжені лінійні оператори в евклідових і унітарних просторах. У нескінченновимірному випадку ці поняття набувають нового змісту. Тож наведемо означення та важливі твердження теорії самоспряжених операторів.

Нехай X, Y – лінійні нормовані простори, оператор $A : X \to Y$ – лінійний, можливо необмежений, із областю визначення D_A щільною в X. Розглянемо множину $D^* \subset Y^*$ таких $f \in Y^*$, для яких при $\varphi \in X^*$ справджується рівність $\langle Ax, f\rangle = \langle x, \varphi\rangle$. Оператор A^* такий, що $A^* f = \varphi$ з областю визначення $D_{A^*} = D^* \subset Y^*$ і зі значеннями в X^*, називатимемо *спряженим* до оператора A. Отже, $\langle Ax, f\rangle = \langle x, A^* f\rangle$ для будь-якого x з D_A і будь-якого f із D_{A^*}.

Теорема 7.1 A^* – замкнений лінійний оператор.

Теорема 7.2 Рівність $D_{A^*} = Y^*$ справджується тоді і тільки тоді, коли A обмежений на D_A. У цьому випадку $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*), \|A^*\| = \|A\|$.

Із теореми (7.2) випливає, що для $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $\|A^*\| = \|A\|$.

У випадку, коли $X = Y = H$, де H – гільбертів простір, на підставі теореми Рісса про загальний вигляд лінійних обмежених функціоналів, що діють у H, означення спряженого оператора пов'язуємо з рівністю $(Ax, y) = (x, A^* y)$ для будь-яких x і y з H.

Приклад 7.1 Нехай $A : l_2 \to l_2,\ Ax = (0, 2x_1 + ix_2, x_1 - x_3, 0, \dots)^T$, де $x = (x_1, x_2, \dots,)^T$. Знайдемо A^*.

Нехай $x, y \in l_2$. Тоді

$$(Ax, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (Ax)_n \, \overline{y}_n = (2x_1 + ix_2)\, \overline{y}_2 + (x_1 - x_3)\, \overline{y}_3.$$

Згідно з означенням спряженого оператора, останній вираз

$$(x, A^* y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{(A^* y)}_n.$$

Перегрупуємо доданки, отримаємо

$$(x, A^*y) = x_1 \left(2\overline{y_2} + \overline{y_3}\right) + x_2 \left(\overline{iy_2}\right) + x_3 \left(-\overline{y_3}\right).$$

Оскільки ця рівність справджується для всіх $x \in l_2$, то

$$A^*y = (2y_2 + y_3, -iy_2, -y_3, 0, \dots)^T.$$

Приклад 7.2 Знайдемо спряжений до оператора $A : \tilde{L}_2 [0, 1] \to \tilde{L}_2 [0, 1]$, якщо $Ax(t) = \int\limits_0^1 tx(t)dt$.

Розглянемо скалярний добуток

$$(Ax, y) = \int\limits_0^1 (Ax)(\tau)\,\overline{y(\tau)}d\tau = \int\limits_0^1 \overline{y(\tau)} \int\limits_0^1 tx(t)dt\ d\tau. \tag{7.1}$$

Оскільки $\int\limits_0^1 tx(t)dt$ не залежить від τ, то вираз (7.1) можна переписати інакше:

$$\int\limits_0^1 \overline{y(\tau)} \int\limits_0^1 tx(t)dt\ d\tau = \int\limits_0^1 tx(t)dt \int\limits_0^1 \overline{y(\tau)}d\tau = \int\limits_0^1 x(t)\, t \int\limits_0^1 \overline{y(\tau)}d\tau dt = \int\limits_0^1 x(t)\,\overline{z(t)}dt = (x, z),$$

де $z(t) = t \int\limits_0^1 y(\tau)d\tau$. Отже, $(A^*y)(t) = t \int\limits_0^1 y(\tau)d\tau$.

Задачі

Знайти спряжений до оператора $A : l_2 \to l_2$, оцінити $\|A\|$, $\|A^*\|$.

1. $Ax = (0, x_1, 0, 3x_2 + x_1, 0, x_4 - ix_2, 0, \dots)^T$.
2. $Ax = (x_2, x_3 - x_2, x_4 - x_3, 0, \dots)^T$.
3. $Ax = (0, 0, x_1, ix_5, 0, 3x_2 - x_1, 0, \dots)^T$.
4. $Ax = (2x - x_3, ix_2, 0, x_3, 0, \dots)^T$.
5. $Ax = (x_4 - x_2, x_3 - ix_1, 0, \dots)^T$.
6. $Ax = (0, 0, x_5, 2ix_1, 0, \dots)^T$.

7. $Ax = (3x_1, 2x_2 - ix_5, 0, x_1 - x_2, 0, \dots)^T$.

8. $Ax = (x_5 + x_6, x_1 - x_2, 0, 3ix_4, 0, \dots)^T$.

9. $Ax = (2x_1, x_5, x_3, 0, \dots)^T$.

10. $Ax = (x_2, x_1 - x_3, 0, \dots)^T$.

11. $Ax = (0, 0, x_1, 2x_8, 3x_2 - x_1, 0, \dots)^T$.

12. $Ax = (x_4 - 2ix_1, x_2, x_1 + x_2, 0, \dots)^T$.

13. $Ax = (0, 3x_2 - x_3, 2x_1 + ix_3, 0, \dots)^T$.

14. $Ax = (x_2 + x_1, x_2 - x_4, 0, \dots)^T$.

15. $Ax = (0, 4x_2, 0, 2x_1 + ix_2, 0, \dots)^T$.

16. $Ax = (2x_4 - x_2, 2ix_1, x_1 - x_3, 0, \dots)^T$.
    Знайти $A^*, (A^*)^{-1}, (A^{-1})^*$.

17. $A : \tilde{L}_2[-1,1] \to \tilde{L}_2[-1,1],\ Ax(t) = x(t) + \int\limits_{-1}^{1} 2tsx(s)\,ds.$

18. $A : \tilde{L}_2[0,1] \to \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = 2x(t) + \int\limits_{0}^{1} t^2sx(s)\,ds.$

19. $A : \tilde{L}_2[-1,1] \to \tilde{L}_2[-1,1],\ Ax(t) = ix(t) - \int\limits_{-1}^{1} ts^2x(s)\,ds.$

20. $A : \tilde{L}_2[0,2] \to \tilde{L}_2[0,2],\ Ax(t) = x(t) + \int\limits_{0}^{2} t^2s^2x(s)\,ds.$

21. $A : \tilde{L}_2[0,1] \to \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = 3x(t) - \int\limits_{0}^{1} tsx(s)\,ds.$

22. $A : \tilde{L}_2[0,1] \to \tilde{L}_2[0,1],\ Ax(t) = \int\limits_{0}^{t} x(\tau)\,d\tau.$

23. $A : \tilde{L}_2[-1,1] \to \tilde{L}_2[-1,1],\ Ax(t) = x(t) + 2i\int\limits_{-1}^{1} t^2sx(s)\,ds.$

24. $A : \tilde{L}_2[0,\pi] \to \tilde{L}_2[0,\pi],\ Ax(t) = 2x(t) - \int\limits_{0}^{\pi} \sin tx(s)\,ds.$

25. $A : \tilde{L}_2\,[0,2] \to \tilde{L}_2\,[0,2],\; Ax\,(t) = ix\,(t) + \int\limits_0^2 3ts^2 x\,(s)\,ds.$

Зразки екзаменаційних білетів

Львівський національний університет імені Івана Франка

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Галузь знань 0403 – системні науки та кібернетика
Напрям підготовки 6.040303 системний аналіз
Спеціальність системний аналіз
Дисципліна Функціональний аналіз

Семестр 4

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №1

1. Нехай $x_n, x, y_n, y \in X$ $(n \in N)$. Довести таке: якщо $x_n \to x$ і $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$. (4 бали)

2. Записати нерівність трикутника для норми в просторі $\tilde{L}_p\,[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій $x\,(t)$ і $y\,(t)$. (3 бали)

3. На підставі якої класичної нерівності можна отримати нерівність Мінковського для інтегралів? (3 бали)

4. Чи можна стверджувати, що кожна збіжна послідовність елементів нормованого простору є фундаментальною?(3 бали)

5. Чи справджується рівність паралелограма в просторі $\tilde{L}_2\,[a,b]$ неперервних на $[a,b]$ функцій? (3 бали)

6. Які умови існування оберненого оператора знаєте? (3 бали)

7. Записати співвідношення, яке відіграє роль теореми Піфагора в абстрактному гільбертовому просторі. (4 бали)

8. Чи потрібно перевіряти неперервність лінійного оператора в кожній точці його області визначення? (3 бали)

9. Записати умову ортогональності двох елементів у просторі $l_2^{(m)}$. (3 бали)

10. Нехай $A_1^l \to l_1;\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_1;\ Ax = (5x_4 + 6x_5, 0, 3x_1 - 2x_4, x_5, x_2 - 13x_5, 0, \dots)^T$. Перевірити лінійність, обмеженість і знайти норму оператора. (4 бали)

11. Нехай $A : l_2 \to l_2$; $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_2$; $Ax = (x_4 - x_2, x_3 - ix_1, 5x_4 - 24\,ix_2, 0, \dots)^T$. Знайти оператор A^*, спряжений до A. (4 бали)

12. Як ортогональну систему елементів у просторі зі скалярним добутком перетворити в ортонормовану? Чи буде ортонормована система лінійно незалежною? (3 бали)

13. Чи є простір $\tilde{L}_2\,[a, b]$ банаховим? (3 бали)

14. Нехай $A : l_2 \to l_2$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)^T \in l_2$, $Ax = (x_1 + x_2, x_2, 2x_3 - x_2, x_4, \dots)^T$. Чи існує оператор A^{-1}? (4 бали)

15. Чи можна в лінійному просторі неперервно диференційованих на $[a, b]$ функцій прийняти за норму елемента $x(t)$: $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'\,(t)|$? (3 бали)

Затверджено на засіданні кафедри обчислювальної математики
Протокол № 9 від 7 травня 2013 р.
Завідувач кафедри ________________ Екзаменатор ________________

Львівський національний університет імені Івана Франка

Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Галузь знань 0403 – системні науки та кібернетика
Напрям підготовки 6.040301 прикладна математика
Спеціальність прикладна математика
Дисципліна Функціональний аналіз

Семестр 4

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ №1

1. Записати нерівність трикутника для норми в просторі $\tilde{L}_p\left(\bar{G}\right)$. (3 бали)
2. Навести приклад замкненої множини в абстрактному нормованому просторі X. (3 бали)
3. Чому простір зі скалярним добутком можна вважати нормованим простором? (3 бали)
4. Чому кожна збіжна послідовність елементів нормованого простору є фундаментальною? (3 бали)
5. Яку систему елементів у гільбертовому просторі H називають повною? (3 бали)
6. У якому просторі кожний абсолютно збіжний ряд збігається? (3 бали)
7. Яку властивість має множина значень будь-якого лінійного оператора? (3 бали)
8. Яку роль відіграє умова стійкості в означенні неперервно оборотного оператора? (4 бали)
9. Який простір називають спряженим? Чи існують самоспряжені простори? (4 бали)
10. Чому оператор ортогонального проектування є лінійним? (3 бали)
11. Нехай $A \in L\left(H\right)$. Довести, що $N\left(AA^*\right) = N\left(A^*\right)$. (3 бали)
12. Чи є простір $\tilde{L}_1\left[-1, 1\right]$ банаховим?(3 бали)

13. Нехай $A \in L(X, Y)$, де X, Y – банахові простори. Довести, що $N(A)$ є підпростором у просторі X. (4 бали)

14. Нехай $A \in L(H)$. Довести, що $(R(A))^{\perp} = N(A^{*})$. (4 бали)

15. Чому нормований простір $C[0, 1]$ не є строго нормованим? (4 бали)

Затверджено на засіданні кафедри обчислювальної математики
Протокол № 9 від 7 травня 2013 р.
Завідувач кафедри __________________ Екзаменатор __________________

Бібліографія

[1] *Вагін П.П., Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.* Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 140с.

[2] *Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.Л.* Методы решения задач по функциональному анализу.–Киев: Высш.шк., 1990. – 479с.

[3] *Гуревич А.П., Корнев В.В., Хромов А.П.* Сборник задач по функциональному анализу: Учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2012. – 192с.

[4] *Дерр В.Я.* Функциональный анализ: лекции и упражнения: учеб. пособие. – М.: Кнорус, 2013. – 464с.

[5] *Колмогоров А.Н. Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624с.

[6] *Микитюк Я.В., Чуйко Г.І., Федик М.М.* Методичні вказівки для проведення лабораторних робіт з функціонального аналізу. – Львів: ЛДУ, 1988. – 40с.

[7] *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Физматлит, 2002. – 240с.

[8] *Треногин В.А.* Функциональный анализ.– М.: Физматлит, 2002. – 488с.

[9] *Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.* Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці: Навчальний посібник. – Львів: Світ поліграфія, 1998. – 184с.

[10] *Stanislaw Prus, Adam Stachura.* Analiza funkcjonalna w zadaniach. – Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWNSA, 2007. – 311s.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Гарасим Ярослав Степанович
Недашковська Анастасія Миколаївна
Остудін Борис Анатолійович

Методи розв'язування типових задач функціонального аналізу

Методичний посібник для студентів
факультету прикладної математики та інформатики

Підп. до друку 28.10.2015. Формат 60x84/16.
Папір друк. Друк офсетний. Умовн.друк.арк.4,35.
Обл.-вид.арк.4,2. Наклад 100 прим.

ТзОВ «Простір-М»
Свідоцтво ДК № 2167 від 21.04.2005 р.
79000, м. Львів, вул. Чайковського, 8
Тел.: (032) 261-09-05, e-mail: prostir@litech.net