Розглянемо задачу Коші:

$$
(1)\begin{cases} \text{задано } \sigma = const > 0,\ f \in L^2(0,T),\ u_0 \in \mathbb{R} \\ \text{знайти } u = u(t) \text{ таку, що} \\ u'(t) + \sigma u(t) = f(t) \quad \forall t \in (0,T],\ u(0) = u_0 \end{cases}
$$

1. Рівняння балансу для (1):

Варіаційне формулювання:

Спочатку ми домножимо (1) на довільну ф-ю $v = v(t)$, $v \in V$ де $V = \{u \in H^1(0,T)\}$.

а також проінтегруємо результат на $(0,T]$:

$$\int_0^T (u'(t) + \sigma u(t))\, v(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, v(t)\, dt$$

Введемо лінійний функціонал та білінійні форми:

$$
\begin{cases} m(u,v) := \int_0^T u(t)\, v(t)\, dt \\ B(u,v) := \int_0^T \sigma u(t)\, v(t)\, dt \\ \langle l, v \rangle := \int_0^T f(t)\, v(t)\, dt \end{cases}
$$

Отже, ми отримали варіаційне формулювання задачі (1):

$$
\begin{cases} \text{задано } u_0 \in H = L^2(0,T) \\ \text{знайти } u = u(t) \in V = \{v \in H^1(0,T)\} \text{ таку, що} \\ m(u'(t), v(t)) + B(u(t), v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle \quad \forall t \in (0,T] \end{cases}
$$

Підставимо у варіаційну задачу: $v = v(t)$

Отримаємо:

$$m(u'(t), v(t)) + B(u(t), v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle$$

Зауважимо, що:

$$m(u'(t), v(t)) = \int_0^T u'(t) u(t)\, dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} u^2(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} u^2 \Big|_0^T = \frac{1}{2} u^2(T) - \frac{1}{2} u^2(0).$$

Тепер підставимо цей вираз і отримаємо:

$$\frac{1}{2} u^2(T) - \frac{1}{2} u^2(0) + B(u(t); v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle$$

Тепер перенесемо другий доданок у праву частину і отримаємо таке рівняння балансу:

$$\frac{1}{2} u^2(T) + B(u(t), v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle + \frac{1}{2} u^2(0)$$

де

$$\|v\|_V^2 = B(v(t), v(t)) \ \forall v \in V$$ — це природня норма

Методом від супротивного будемо доводити єдиність розв'язку задачі (1).

Для цього припустимо, що існують два не однакові розв'язки u_1 та u_2.

Позначимо $w := u_2 - u_1 \neq 0$

Підставимо обидва розв'язки:

$$\int_0^T (u'(t) + 6u(t))\,v(t)\,dt = \int_0^T f(t)v(t)\,dt$$

і віднімемо отримані рівності. Також візьмемо $T, v = w$

Получимо наступне:

$$0 = \int_0^T (w'(t)\,w(t) + 6w^2(t))\,dt = \int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}w^2(t)\right) + \right.$$

$$\left. + 6w^2(t)\right)dt = \frac{1}{2}(w^2(T) - w^2(0)) + \int_0^T 6w^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}w^2(T) + \int_0^T 6w^2(t)\,dt = \|w\|_V^2 \Rightarrow w(t) \equiv 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Звідси $\|w\|_V^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$, це означає, що ми отримали наступну суперечність, яка не відповідає початковому припущенню.

Отже, ми довели єдиність розв'язку.

Далі ми доведемо неперервну залежність розв'язку від даних задачі.

Взявши до уваги, що $fu \leq \frac{f^2(t)}{4б} + бu^2(t)$ в рівнянні

$$m(u'(t), v(t)) + B(u(t), v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle.$$

Випливає:

$$\frac{1}{2}u^2(t) + \int_0^t 6u^2(t)\,dt \leq \frac{1}{2}u^2(0) + \int_0^t \left(\frac{f^2(t)}{4б} + бu^2(t)\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2(t) \leq \frac{1}{2б}\int_0^t f^2(t)\,dt.$$

2. Задамо N і сітка вузлів $t_j = j \cdot \Delta t$, $j = 0, 1, \ldots, N$

$N \cdot \Delta t = T$.

$$u_{\Delta t}(t) := u^j [1 - w(t)] + u^{j+1} w(t), \quad w(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t}$$

Звідси будемо мати таку лінійну апроксимацію

$$u_{\Delta t}(t) = u^j + \Delta t\, w(t) \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t} = u^j + \Delta t\, w(t) \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}$$

де $\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t}$ – визначає швидкість зміни апроксимації $u_{\Delta t}$ і наближає $u'(t)$ на $[0, T]$

Визначимо, що $u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^j + u^{j+1})$

Отримаємо апроксимацію у наступному вигляді

$$u_{\Delta t}(t) = u^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t \left(w(t) - \frac{1}{2}\right) \dot{u}^{j+\frac{1}{2}} \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$$

Підставимо апроксимацію

$$\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} + \sigma\left(u^j + \Delta t\, w(t) \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}\right) = f(t)$$

Візьмемо наближення правої частини

$$\forall t \in [t_j, t_{j+1}]\ f(t) \cong f_{j+\frac{1}{2}} = f(t_{j+\frac{1}{2}}).$$

Отримаємо остаточний вигляд:

$$\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} + \sigma\left(u^j + \Delta t\, w(t) \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}\right) = f_{j+\frac{1}{2}}$$

Щоб позбутися залежності від часу в лівій частині, візьмемо довільну функцію $\xi(t)$ таку, що $\xi(t) > 0$ $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\, dt = 1$, домножимо і проінтегруємо на $[t_j, t_{j+1}]$

Отже маємо таке дискретизоване рівняння:

$$\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} + 6\left(u^j + \Delta t\, \Theta \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}\right) = f_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{де}$$

$$\Theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t) \xi(t)\, dt \in [0,1)$$

ОРС:

1. Задано $u^0 \in V$, $j=0$
2. Знайти розв'язок $\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} \in V$ задачі $\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} + 6(u_j + \Delta t \Theta \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}) = f_{j+\frac{1}{2}}$
3. Обчислити $u^{j+1} = u^j + \Delta t \dot{u}^{j+\frac{1}{2}}$
4. Збільшити $j = j+1$
5. Якщо $j < N$, то повернутися до кроку 2, інакше — стоп.

3. Якщо розв'язок залежить від початкових умов на кожному кроці дискретизації, то задача є стійкою на кожному кроці і розв'язок буде визначатися однозначно і незалежно від моменту часу.

4. $e_{\Delta t}(t) = u(t) - u_{\Delta t}(t)$ Оцінити величину похибки

$$u^{j+\frac{1}{2}} = \frac{u^{j+1}+u^{j}}{2} = \frac{u(t_{j+1})+u(t_j)}{2} - \frac{e^{j+1}-e^{j}}{2} =$$

$$= \frac{u(t_{j+1})+u(t_j)}{2} - e^{j+\frac{1}{2}}$$

Подібно

$$\dot{u}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{\Delta t} - \dot{e}^{j+\frac{1}{2}}$$

Скористаємося розвиненням Тейлора:

$$\begin{cases} u(t_{j+1}) = u(t_{j+\frac{1}{2}}) + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \cdot u''(t_{j+\frac{1}{2}}) + \ldots \\ u(t_j) = u(t_{j+\frac{1}{2}}) - \left(\frac{\Delta t}{2}\right) u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u''(t_{j+\frac{1}{2}}) + \ldots \end{cases}$$

Звідси:

$$\frac{u(t_{j+1})+u(t_j)}{2} = u(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 u''(t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^4)$$

$$\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{\Delta t} = u'(t_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\frac{\Delta t^2}{8} u'''(t_{j+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t$$

Підстановка цього до ОРС приводить до рівняння для похибок вигляду:

Знайти $\{\dot{e}^{j+\frac{1}{2}}, e^{j+1}\} \in V^2$ такі, що

$$m(\dot{e}^{j+\frac{1}{2}}, u) + B(e^{j+\frac{1}{2}} + \Delta t(\theta - \tfrac{1}{2})\dot{e}^{j+\frac{1}{2}}, v)$$

$$= \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}), v\rangle - m(u'(t_{j+\frac{1}{2}}), v) - B(u(t_{j+\frac{1}{2}}), v)$$

$$\frac{1}{8}\Delta t^2 \langle R_{j+\frac{1}{2}}(u), v\rangle \quad j = 0, 1 \ldots \quad \forall v \in V =$$

$$= \frac{1}{8}\Delta t^2 \langle R_{j+\frac{1}{2}}(u), v\rangle \quad \forall v \in V \quad j = 0, 1 \ldots$$

Оскільки

$$\begin{cases} u = u(t) \text{ задовольняє варіаційне рівняння} \\ m(u'(t), v) + B(u(t), v) = \langle l(t), v\rangle \\ \forall t \in [0, T], \forall v \in V \end{cases}$$

Тепер, щоб оцінити похибку повернемося до рівняння балансу. Підставимо:

$v = e^{j+\frac{1}{2}}$ і обчислимо

$$\frac{1}{2}\|e^{m+1}\|_H^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m} \|e^{j+\frac{1}{2}}\|_V^2 + \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \tfrac{1}{2})\|e^{m+1}\|_V^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\|e^0\|_H^2 + \Delta t \frac{\Delta t^2}{8} \sum_{j=0}^{m} \langle R_{j+\frac{1}{2}}(u) e^{j+1/2}\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta t(\theta - \tfrac{1}{2})\|e^0\|_V^2$$

7. Знайти точний розв'язок $f(t)=0$

$u_0 = 10$

$\sigma = 1$.

Щоб знайти точний розв'язок, потрібно розв'язати диференціальне рівняння:

$u' + u = 0$

, $u_0 = 10$

$u' + u = 0$ - лін. диф. р-ня.

Характеристичне рівняння:

$\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -1$ - дійсний корінь.

Загальний розв'язок лінійного однорідного р-ня матиме такий вигляд:

$u(t) = ce^{\lambda t} = ce^{-t}$

Методом варіації сталих ми знайдемо частковий розв'язок неоднорідного р-ня, де

$\hat{u} = at + b$ $\quad$ a, b - невідомі коеф.

$\hat{u}' = a$

Підставимо.

$a + (at + b) = 0$

$a + b + at = 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -1$$

$$\tilde{u} = t - 1$$

Отже, отримано такий загальний розв'язок:

$$u(t) = ce^{-t} + t - 1$$

$$u(0) = ce^{0} + 0 - 1 = c - 1 = 10.$$

$$c = 10 + 1 = 11.$$

Розв'язок задачі Коші:

$$u(t) = 11e^{-t} + t - 1.$$

б.