Хомин Віталій, ПМІ-35. ① W

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$\begin{cases} \text{задано } \sigma = const > 0,\ f \in L^2(0,T),\ u_0 \in \mathbb{R} \\ \text{знайти } u = u(t) \text{ таку, що} \\ u'(t) + \sigma u(t) = f(t) \quad \forall t \in (0,T],\ u_0 = 0 \end{cases}$$

(задача Коші записана з упущенням просторових змінних, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, нехай f, u визначені на $\Omega \times [0;T]$, u_0 - на Ω, $\Omega \in \mathbb{R}^d$)

1. $u'(t) + \sigma u(t) = f(t)$. Помножимо на $v = v(t) \in V = \{v \in H^1(\Omega)\}$

$u'(t) \cdot v(t) + \sigma u(t) v(t) = f(t) v(t)$. Проінтегруємо

$$\int_\Omega u'(t) v(t)\, dx + \int_\Omega \sigma u(t) v(t)\, dx = \int_\Omega f(t) v(t)\, dx$$

Позначимо
$$m(u,v) = \int_\Omega uv\, dx$$
$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma uv\, dx$$
$$\langle l, v \rangle = \int_\Omega fv\, dx$$

$$m(u'(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) = \langle l(t), v(t) \rangle$$

Початкову задачу можна переформулювати у вигляді знаходження певної функції $u = u(t) \in V = \{v \in H^1(\Omega)\}$ яка задовольняє умову вище для всіх $v \in V$, а також, зважаючи на визначення $m(u,v)$, умову $m(u(0), v(t)) = m(u_0, v(t))$ $\forall v \in$

$$m(u'(t), v(t)) + a(u(t), v(t)) = \langle \ell(t), v(t) \rangle$$ ②

Припустимо, розв'язок існує. Поставимо $v = u(t)$.

$$m(u'(t), u(t)) + a(u(t), u(t)) = \langle \ell(t), u(t) \rangle$$

$$m(u'(t), u(t)) = m\left(\frac{du(t)}{dt}, u(t)\right) = \int_\Omega \frac{du(t)}{dt} u(t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\cdot u(t)\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} m(u(t), u(t)). \quad \geq 0$$

Позначимо $\|u\|_m^2 = m(u,u)$, $\|u\|_a^2 = a(u,u)$. Тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_m^2 + \|u(t)\|_a^2 = \langle \ell(t), u(t) \rangle$$

Проінтегруємо на проміжку $[0;t]$ $(0 \leq t < T < +\infty)$
і отримаємо рівняння балансу

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_m^2\, d\tau + \int_0^t \|u(\tau)\|_a^2\, d\tau = \int_0^t \langle \ell(t), u(\tau)\rangle\, d\tau$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\|u(t)\|_m^2 + \int_0^t \|u(\tau)\|_a^2\, d\tau = \frac{1}{2}\|u(0)\|_m^2 + \int_0^t \langle \ell(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau}$$

рівняння балансу задачі Коші!

Для опису рівняння балансу підходять норми $\|u\|_a$ і $\|u\|_m$, які відповідають нормі $L^2(\Omega)$, хоч $\|u\|_a$ і має коефіцієнт $\sqrt{\sigma}$ всередині $(\|u_0\|_a = \sqrt{\sigma}\,\|u\|_m)$

Доведемо єдиність розв'язку від супротивного.

Нехай u_1 і u_2 - розв'язки задачі, тобто $u_1 \neq u_2$ в певній точці t

$$m(u_1, v) + a(u_1, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]$$

$$m(u_2, v) + a(u_2, v) = \langle l, v \rangle$$

Тоді

$$m(u_1, v) - m(u_2, v) + a(u_1, v) - a(u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\cancel{m(u_1, v}\; m(u_1 - u_2, v) + a(u_1 - u_2, v) = 0$$

З властивостей підпростору,

$$u_1 \in V, \; u_2 \in V \Rightarrow u_1 - u_2 \in V. \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{m(u_1 - u_2, u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)}_{\geq 0} = 0$$

Кожен з доданків є невід'ємним, причому ~~з властивостей білінійних форм~~

$$\int_\Omega u^2 dx = 0 \iff u \equiv 0$$

Звідки $u_1 - u_2 \equiv 0$, тобто $u_1 \equiv u_2$.

Суперечність. Отже, розв'язок може бути лише один.

Тепер доведемо неперервність від вхідних даних використовуючи рівняння балансу (4)

$$\frac{1}{2}\|u\|_m^2 + \int_0^t \|u\|_a^2 d\tau = \frac{1}{2}\|u(0)\|_m^2 + \int_0^t \langle \ell(\tau), v(\tau)\rangle d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$\|u\|_m^2 + 2\int_0^t \|u\|_a^2 d\tau = \|u(0)\|_m^2 + 2\int_0^t \langle \ell(\tau), v(\tau)\rangle d\tau$$

$$\Downarrow \qquad (?)$$

$$\|u\|_m^2 + \cancel{2}\int_0^t \|u\|_a^2 d\tau = \|u(0)\|_m^2 + 2\int_0^t \langle \ell(\tau), v(\tau)\rangle - \int_0^t \|u\|_a^2 d\tau$$

$$\leq \|u(0)\|^2 + \int_0^t \|\ell(\tau)\|_*^2 d\tau$$

Звідси випливає обмеженість, а, отже, і неперервна залежність від вхідних даних

Завдання 2.

Для заданого N і сітки вузлів $t_j = j \cdot \Delta t$, $j = 0, 1, \dots, N$, $N \cdot \Delta t = T$, використаємо кусково-лінійну апроксимацію

$$u_{\Delta t}(t) = u^j [1 - \omega(t)] + u^{j+1} \omega(t) \quad , \quad \omega(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t} \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$$

Підставимо дану апроксимацію у варіаційне формулювання задачі:

$$m(u', v) + a(u, v) = \langle \ell(t), v \rangle \qquad \left(u' = \frac{du}{dt} \right)$$

$$m(u(0), v) = m(u_0, v) \qquad \forall v \in V, \ u \in V$$

$$\Downarrow$$

Позначимо

$$\dot{u}^{j+1/2} = (u_{\Delta t}(t))' = -u^j \cdot \omega'(t) + u^{j+1} \cdot \omega'(t) = \frac{u^{j+1} - u^j}{\Delta t}$$

Отримаємо:

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(u^j [1 - \omega(t)] + u^{j+1} \omega(t), v) = \langle \ell(t), v \rangle$$

Нехай $\xi(t)$ – довільна невід'ємна функція, така, що

$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t) \, dt = 1$. Домножимо рівняння на неї, проінтегруємо на $[t_j, t_{j+1}]$

Також, замінимо $\ell(t) \cong \ell(t_{j+1/2}) = \ell_{j+1/2}$

Отримаємо:

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(u^j[\cancel{1}-\omega(t)], v) + a(u^{j+1}\omega(t), v) = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} m(\dot{u}^{j+1/2}, v)\xi(t)\,dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} u^j a(1-\omega(t), v)\xi(t)\,dt$$

$$+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} u^{j+1} a(\omega(t), v)\xi(t)\,dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \langle \ell_{t+1/2}, v\rangle \xi(t)\,dt. \Longrightarrow$$

$$m(\underbrace{\dot{u}^{j+1/2}}_{\text{стала}}, v) + u^j a\left(1 - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt, v\right) + u^{j+1} a\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt, v\right)$$

$$= \langle \ell_{t+1/2}, v\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \Theta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt \right.$$

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(u^j(1-\Theta), v) + a(u^{j+1}\Theta, v) = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle \Longrightarrow$$

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(\Theta\cdot[u^{j+1}-u^j], v) = \langle \ell_{t+1/2}, v\rangle - a(u^j, v)$$

$$\dot{u}^{j+1/2} \overset{\text{def}}{=} \frac{u^{j+1}-u^j}{\Delta t} \Longrightarrow u^{j+1} - u^j = \dot{u}^{j+1/2}\cdot\Delta t \Longrightarrow$$

$$\boxed{m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \Theta\Delta t\, a(\dot{u}^{j+1/2}, v) = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle - a(u^j, v)}$$

$$\forall v \in V,\ j = 0, 1, \ldots, \quad u^{j+1} = u^j + \Delta t\cdot\dot{u}^{j+1/2}$$

Отримали рекурентну послідовність напівдискретних задач

$$\begin{cases} \text{задано } u^0 \in V,\ \Delta t = \frac{T}{N} > 0,\ \theta \in [0,1] \text{ (завдання 5)} \\ \text{знайти пари } \{\dot{u}^{j+1/2}, u^{j+1}\} \in V \times V \text{ такі, що} \\ m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + a(\dot{u}^{j+1/2}, v)\cdot\theta\Delta t = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle - a(u^j, v) \\ u^{j+1} = u^j + \Delta t\, \dot{u}^{j+1/2} \end{cases}$$

Тепер апроксимуємо $u^j \in V$ у вигляді

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^{N} q_i^j \varphi_i(x), \quad \dot{u}_h^{j+1/2} = \sum \tau^{j+1/2} \varphi_i(x)$$

де $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_б}$ - базис підпростору V_h з V, q_i^j - шукані коефіцієнти ($N_б$ - розмір базису, не плутати з N)

Отримаємо однокрокову рекурентну схему

$$\begin{cases} \text{задано } q^0 \in \mathbb{R}^{N_б},\ \Delta t = \frac{T}{N},\ \theta \in [0,1] \\ \text{знайти пару } \{\tau^{j+1/2}, q^{j+1}\} \in \mathbb{R}^{N_б} \times \mathbb{R}^{N_б} \text{ таку, що} \\ (M + \Delta t\,\theta A)\,\tau^{j+1/2} = L_{j+1/2} - A q^j \\ q^{j+1} = q^j + \Delta t \cdot \tau^{j+1/2} \end{cases}$$

$q^0 \in \mathbb{R}^{N_б}$, в залежності від базису, можна обчислити, наприклад, ~~підставивши~~ знаходячи $u_0(x_j)$ для $j = 1, 2, \ldots, N_б$ для базису у вигляді функцій Куранта

(Матриці A і M сформовані таким чином:

$$M = \begin{pmatrix} m(\varphi_1,\varphi_1) & m(\varphi_2,\varphi_1) & \dots & m(\varphi_{Ns},\varphi_1) \\ m(\varphi_2,\varphi_1) & m(\varphi_2,\varphi_2) & \dots & m(\varphi_{Ns},\varphi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m(\varphi_{Ns},\varphi_1) & m(\varphi_{Ns},\varphi_2) & \dots & m(\varphi_{Ns},\varphi_{Ns}) \end{pmatrix}$$

Аналогічно формується матриця A.

Завдання 3

Нехай дані варіаційної задачі

$$m(u',v) + a(u,v) = \langle l(t), v\rangle$$

$$m(u(0),v) = m(u_0,v) \quad \forall v \in V$$

задовольняють умови:

$$\begin{cases} f \in L^\infty(0,T;H),\ 0 < T < +\infty \\ u_0 \in V \end{cases} \quad (**)$$

Тоді одношарова рекурентна схема з параметрами Δt і θ

- безумовно стійка, якщо $\theta \geq \frac{1}{2}$

- стійка в просторах H та V, якщо $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$

і при цьому $\Delta t \leq \frac{2}{\alpha(1-2\theta)}$, де

$\alpha = const > 0$, яка задовольняє умову

$$\|v\|_V \geq \alpha \|v\|_H \quad \forall v \in V$$

Зауважимо: умову $(**)$ можна послабити при $\theta = \frac{1}{2}$, до умови $u_0 \in H$

Задача 4.

$$e_{\Delta t}(t) = u(t) - u_{\Delta t}(t)$$

$$\varepsilon^m = e_{\Delta t}(t_m) = u^m - u_{\Delta t}(t_m)$$

$$m(\dot{u}^{j+1/2}, v) + \theta \Delta t\, a(\dot{u}^{j+1/2}, v) = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle - a(u^j, v)$$

$$\Downarrow$$

$$m(\dot{\varepsilon}^{j+1/2}, v) + \theta \Delta t\, a(\dot{\varepsilon}^{j+1/2}, v) = \langle \ell_{j+1/2}, v\rangle - a(\varepsilon^j, v)$$

$$- m\left(\frac{u_{\Delta t}(t_{j+1}) - u_{\Delta t}(t_j)}{\Delta t}, v\right) - a\left(\theta u_{\Delta t}(t_{j+1}) + (1-\theta) u_{\Delta t}(t_j), v\right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \langle \gamma_j, v\rangle - a(u^j, v)$$

Спростимо вираз, використовуючи розвинення в ряд Тейлора

$$\begin{cases} \Delta t^{-1}\left[u_{\Delta t}(t_{j+1}) - u_{\Delta t}(t_j)\right] = u'_{\Delta t}(t_{j+1/2}) + \frac{1}{24}\Delta t^2 u'''_{\Delta t}(\xi) \\ \frac{1}{2}\left[u_{\Delta t}(t_{j+1}) + u_{\Delta t}(t_j)\right] = u_{\Delta t}(t_{j+1/2}) + \frac{1}{8}\Delta t^2 u''_{\Delta t}(\eta) \\ \theta u_{\Delta t}(t_{j+1}) + (1-\theta) u_{\Delta t}(t_j) = u_{\Delta t}(t_{j+1/2}) + (\theta - \frac{1}{2})\Delta t\, u'_{\Delta t}(t_{j+1/2}) + \\ \qquad + \frac{1}{8}\Delta t^2\left[u''_{\Delta t}(\eta) + \frac{1}{3}\Delta t(\theta - \frac{1}{2}) u'''_{\Delta t}(\xi)\right] \end{cases}$$

Унаслідок підстановки

$$\langle \gamma_j, v\rangle = \left[\langle \ell_{j+1/2}, v\rangle - m(u'_{\Delta t}, v) - a(u_{\Delta t}, v)\right]_{t=t_{j+1/2}}$$
$$-\Delta t\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a(u'_{\Delta t}(t_{j+1/2}), v)$$
$$-\Delta t^2 \langle R_j, v\rangle$$ — функціонал-залишковий член

$$= -\Delta t\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a(u'_{\Delta t}(t_{j+1/2}), v) - \Delta t^2 \langle R_j, v\rangle \quad \forall v \in V$$

Звідки рівняння визначення похибок набувають вигляду:

перенесли з правої частини

$$\begin{cases} m(\dot{\varepsilon}^{j+1/2}, v) + a(\underline{\varepsilon^j} + \Delta t\,\theta\,\dot{\varepsilon}^{j+1/2}, v) = -\Delta t\left(\theta - \frac{1}{2}\right) a(u'_{\Delta t}(t_{j+1/2}), v) - \Delta t^2\langle R_j, v\rangle \\ m(\varepsilon^0, v) = 0 \end{cases}$$

$\forall v \in V.$

Доходимо висновку, що ОРС з ~~задачі 2~~ завдання 2

має перший порядок апроксимації при $\theta \neq \frac{1}{2}$

і другий при $\theta = \frac{1}{2}$

Завдання 5.

$$\Theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt, \quad \text{де} \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\,dt = 1 \quad \circledast, \ \xi(t) \geq$$

$$\omega(t) = \frac{t - t_j}{\Delta t}, \quad \forall t \in [t_j; t_{j+1}]$$

$$t_j = j\Delta t.$$

Оскільки на проміжку $[t_j; t_{j+1}]$ $\omega(t) \geq 0$ і $\xi(t) \geq 0$,

то $\Theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt \geq \int_{t_j}^{t_{j+1}} 0\,dt = 0.$

З іншого боку, користуючись неперервністю функцій та нерівністю (знайшов в інтернеті)

$$\int_a^b |f(x)||g(x)| \leq \sup_{[a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|\,dx,$$

$$\Theta = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt \leq 1 \cdot \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\,dt = 1.$$

Отже, $0 \leq \Theta \leq 1$, що і треба було довести.

$\circledast$ $\xi(t) \geq 0$. - обов'язкова умова, інакше ~~або грат~~ нижня границя не виконуватиметься. Контрприклад:

$$\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{-16(t-t_j) + 8\Delta t}{\Delta t^2}, & t \in [t_j; t_j + \Delta t/2] \\ \dfrac{-8(t-t_j) + 4\Delta t}{\Delta t^2}, & t \in [t_j + \Delta t/2, t_{j+1}] \end{cases} \qquad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi(t)\,dt = 1, \text{ але} \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(t)\xi(t)\,dt = -\frac{1}{2}$$

Завдання 6.

У випадку, коли $f(t)=0$, $\sigma=1$, матимемо:

$$\langle \ell_{j+1/2}, v\rangle \equiv 0$$

$$a(u,v)=m(u,v)\overset{def}{=}\int_\Omega uv\,dx \Longrightarrow A=M$$

Звідки однокрокова рекурентна задача набуде вигляду

$$\begin{cases} (A+\theta\Delta t A)\,\tau^{j+\frac{1}{2}} = -A q^j \\ q^{j+1} = q^j + \Delta t\,\tau^{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \tau^{j+\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{1+\theta\Delta t}\,q^j \\ q^{j+1} = q^j + \Delta t\,\tau^{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$q^{j+1} = q^j - \frac{\Delta t}{1+\theta\Delta t}\,q^j = q^j\cdot\left(\frac{1+\theta\Delta t-\Delta t}{1+\theta\Delta t}\right)$$

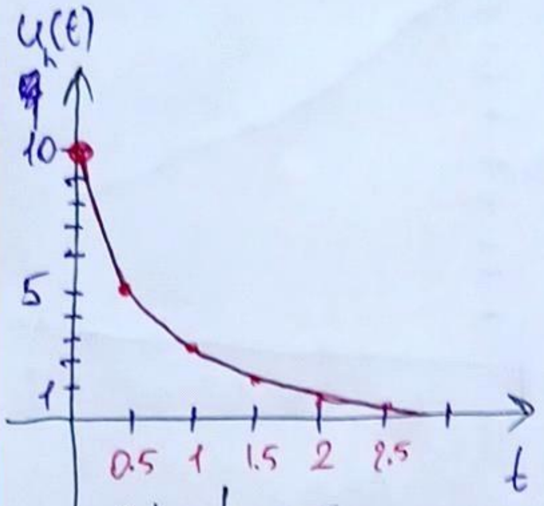
$$\boxed{q^{j+1} = \left(\frac{1-\Delta t+\theta\Delta t}{1+\theta\Delta t}\right) q^j}$$

При $u_0=10$, $\underline{q^0=10}$ (враховуючи, що вектор q скл. з однакових значень, позначатимемо його як скаляр)

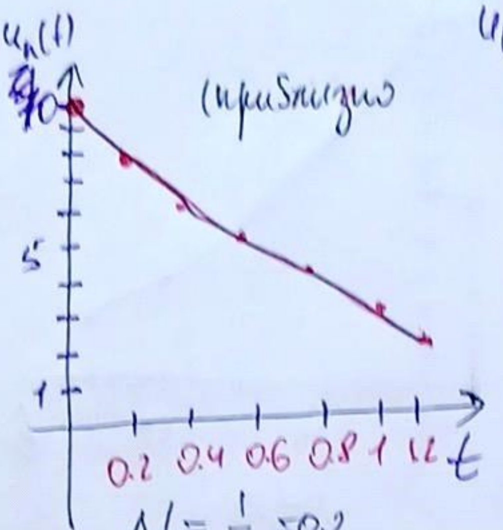
Випадок 1: $\Theta = 0$

$\Rightarrow q^0 = 10, \quad q^{j+1} = (1-\Delta t)\, q^j \Rightarrow q^j = 10\cdot(1-\Delta t)^j$

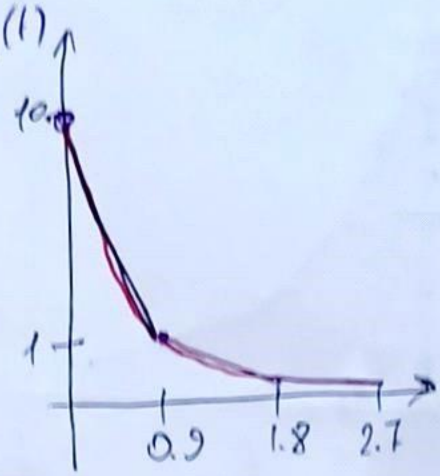
Поведінка залежить від вибору Δt, і при $\Delta t \geq 1$ може бути нестабільним



$\Delta t = \frac{1}{2} = 0.5$



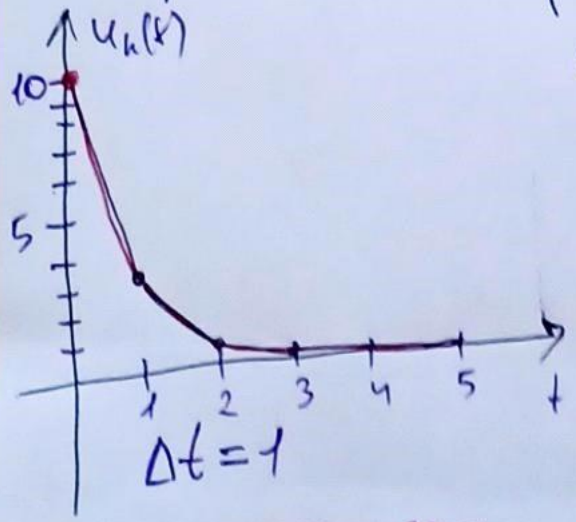
$\Delta t = \frac{1}{5} = 0.2$



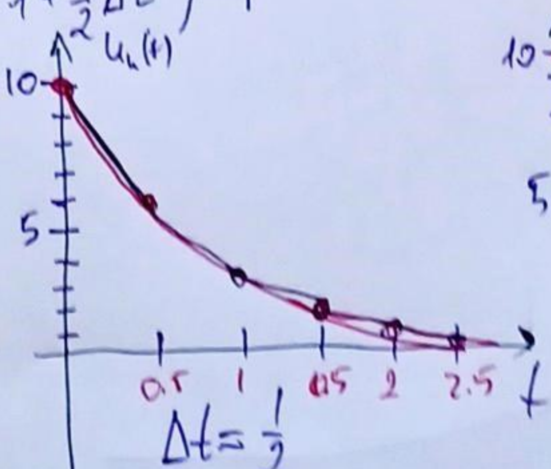
$\Delta t = 0.9$

Випадок 2: $\Theta = \frac{1}{2}$

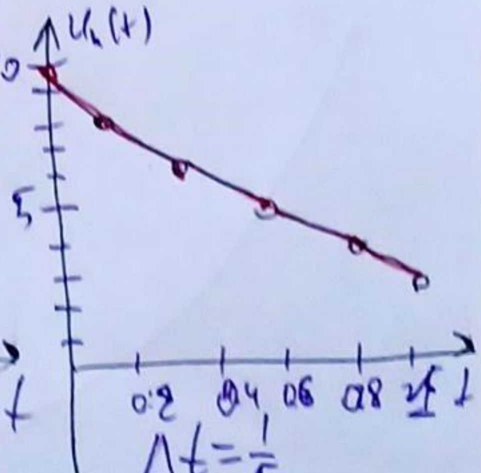
$\Rightarrow q^0 = 10, \quad q^{j+1} = \left(\frac{1-\frac{1}{2}\Delta t}{1+\frac{1}{2}\Delta t}\right) q^j$



$\Delta t = 1$



$\Delta t = \frac{1}{2}$



$\Delta t = \frac{1}{5}$

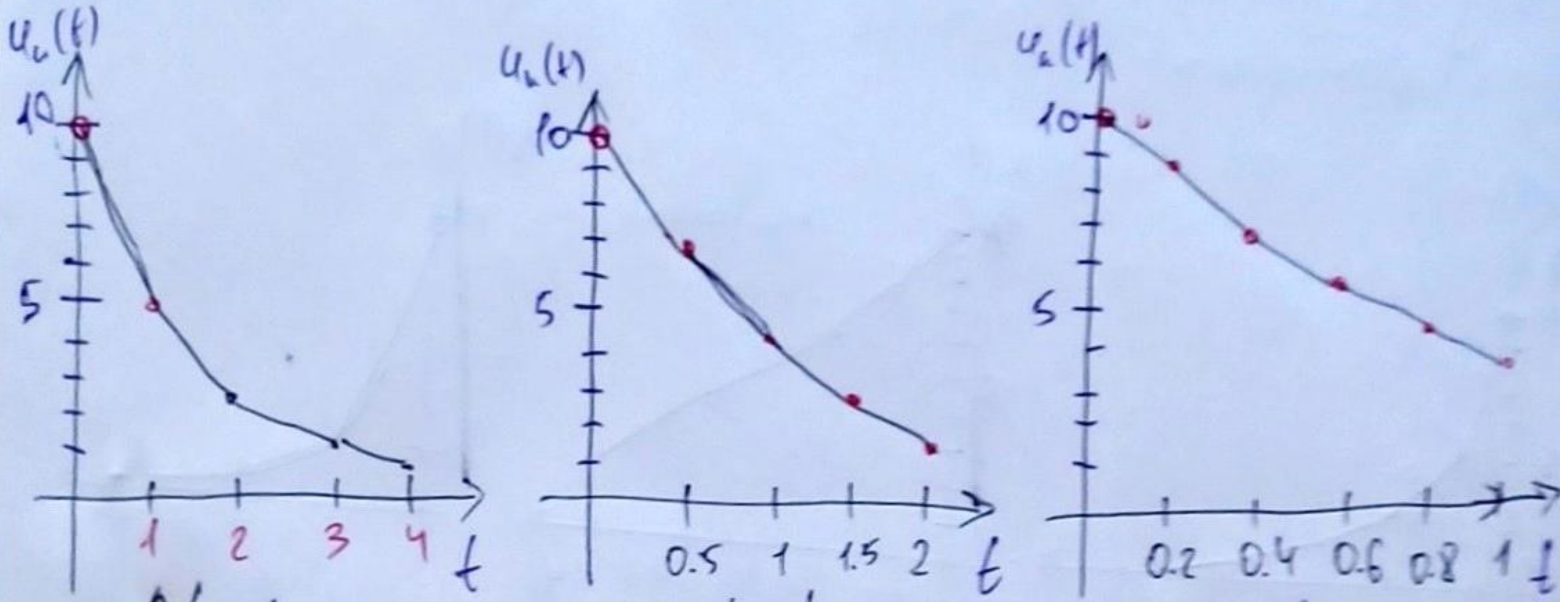
(кожен раз крок часу ділиться на 3)

кожен крок часу множиться на 3/5

$\times \frac{9}{11}$

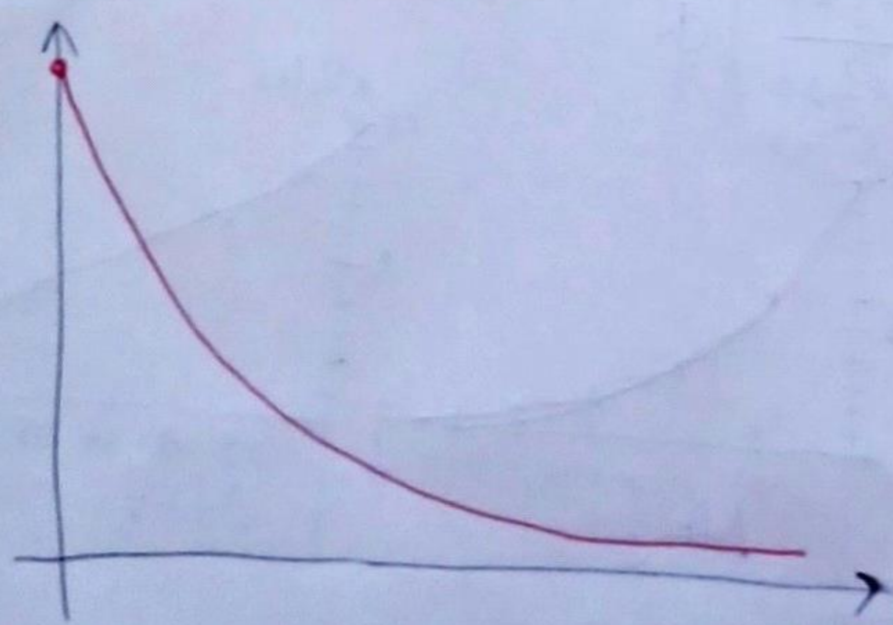
Випадок 3: $\Theta = 1 \Rightarrow$

$$q^0 = 10, \quad q^{j+1} = \frac{q^j}{1+\Delta t}$$



$\Delta t = 1$ $\qquad$ $\Delta t = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\Delta t = \frac{1}{5}$

Загалом, при $\Delta t = 1$ або близько до 1, графік виглядає $\pm$ так



Завдання 7

$$\begin{cases} u'(t) + \sigma u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ \sigma = 1,\ f(t) = 0,\ u_0 = 10 \end{cases}$$ – задача Коші

$$u'(t) + u(t) = 0$$

$$\frac{du}{dt} = -u \Rightarrow \frac{du}{u} = -dt \Rightarrow \ln|u| = -t + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |u| = e^{-t+C} = e^{C} e^{-t} = |k| e^{-t},\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = ke^{-t}}$$ – загальний розв'язок

$$u(0) = u_0 = 10 = ke^{-0} = k \Rightarrow k = 10.$$

Отже, $\boxed{u(t) = 10e^{-t}}$ – розв'язок задачі Коші (1)