$$(1)\quad \begin{cases} -u''(x) + u'(x) + u(x) = x & \forall x \in \Omega = (0,1) \\ u'(0) = 2\,[u(0) - 1] & u(1) = 0 \end{cases}$$

1. Сформулювати у вигляді варіаційної задачі

Розглянемо крайову задачу, де знайдемо ф-ю $u = u(x)$, яка є розв'язком диф. рівняння:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = 10 \quad , \quad \forall x \in \Omega = (0,1)$$

і задовільняє крайові умови $u'(0) = 2(u(0) - 1)$

$u(1) = 0$.

· Домножимо вираз (1) на довільну ф-ю, зведемо крайову задачу до варіаційної.

$v(x) \in V$, де $V = H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) : v(1) = 0 \}$ та проінтегруємо по $\Omega = (0,1)$

$$x - (-(-1u')' + 1u' + 1u) = 0 \;|\cdot v$$

$$\int_0^1 [x - (-1u')' + (u') + u) \cdot v]\,dx = 0$$

$$-\int_0^1 [(u' \cdot v)]\,dx = \int_0^1 (v'u')\,dx - u'v \Big|_a^b = 0 \Rightarrow \begin{matrix} v(b) = 0 \\ v(a) - 2(u(0) - 1) \end{matrix}$$

$$= \int_0^1 [(f - u' + u) \cdot v - u'v']\,dx - 2(u(0) - 1) \cdot v(b)$$

$\forall v \in V = \{ v = v(x) : v \in H^1(\Omega) \quad v(a) = 2(u(0) - 1)$

$$a(u, v) = \int_0^1 [-u'v' + u'v + uv]\, dx +$$

$$\langle l, v \rangle = \int_0^1 x v\, dx - g v(0) \quad \forall u, v \in V$$

2. $$\begin{cases} |a(u v)| \le M \|u\| \, \|v\|_1 & \forall u, v \in V \\ \alpha \|v\|_1^2 \le a(v, u) \le \beta \|v\|_1^2 & \forall v \in V \end{cases}$$

$$\text{де } \|v\|_1^2 = \int_0^1 \{ v^2(x) + [v'(x)]^2 \} dx \quad \forall v \in V$$

Неперервність:

$$\left(\int_0^1 u'v' + u'v + uv \right)^2 = \left(\int_0^1 u'v' + \int_0^1 u'v + \int_0^1 uv \right)^2 =$$

$$= \left(\int_0^0 u'v' dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u'v dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u v dx \right)^2 +$$

$$+ g \int_0^1 u'v' dx \int_a^b u'v\, dx + 2 \int_a^1 u' v' dx \cdot \int_0^1 uv\, dx$$

$$+ 2 \int_0^1 u'v dx \int_0^1 u v dx \Rightarrow$$

$$\le 3 \left(\int_0^1 u'v' dx \right)^2 + 3 \left(\int_0^1 u' v dx \right)^2 + 3 \left(\int_0^1 u v dx \right)^2 \le$$

За Коші - Буняковського маємо:

$$\left(\int_a^b \mu u'v'dx\right)^2 \le \mu^2 \int_a^b (u')^2 dx \int_a^b (v^2)\,dx$$

$$\left(\int_a^b \beta u'v dx\right)^2 \le \beta^2 \int_a^b (u')^2 dx \int_a^b v^2 dx$$

$$\left(\int_a^b \sigma u v dx\right)^2 \le \sigma^2 \int_a^b u^2 dx \int_a^b v^2 dx$$

$$\le 3\left(\mu^2 \int_a^b (u')^2 dx \int_a^b (v')^2 dx + \beta^2 \int_a^b (u')^2 dx \int_a^b v^2 dx + \right.$$

$$\left. + \sigma^2 \int_a^b u^2 dx \cdot \int_a^b v^2 dx\right) \le$$

$$3\left(\mu^2 \int_0^1 (u')^2 dx \cdot \int_0^1 (v')^2 dx + \beta^2 \int_0^1 (u')^2 dx \cdot \int_0^1 v^2 dx + \sigma^2 \int_0^1 u^2 dx \cdot \right.$$

$$\cdot \int_0^1 [u^2 + v'^2]\,dx \le$$

$$\le 3\left(Max(\mu^2, \beta^2) \cdot \int_a^b (u')^2 dx \int_0^1 [(u')^2 + v^2]\,dx + \sigma^2 \int_0^1 u^2 dx \int_0^1 [v^2 + v'^2]\,dx\right.$$

$$\le 3 \cdot Max(\sigma^2 Max(\mu^2, \beta^2)) \cdot \int_0^b [(u')^2 + u^2]\,dx \int_0^1 [(v'^2) + v^2)\,dx =$$

$$= 3 \cdot Max(1^2 Max(1^2, 1^2))\, \|u\|^2 \cdot \|v\|^2,$$

Неперервність доведено.

Еліптичність:

$$a(u\,v) = \int_a^b v^2(x) + [v'(x)]^2 dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 [v^2(x) + v'(x)^2] dx \geq \min(\mu, 1) \int_0^1 [(u')^2 + u^2] dx \geq$$

$$\geq \min(\mu, 1) \|V\|^2, \quad m = \min((u')^2, u^2)$$

3. $|\langle l, v\rangle| \leq L\|v\|,$

$$|\langle l, v\rangle| = \int_a^b |f v\, dx| \leq \sqrt{\int_a^b (f v\, dx)^2} \leq$$ {За нерівн. Коші - Буняковського, Шварца маємо}

$$\leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b v^2 dx} \leq \{\text{додамо } (v')^2\} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b v^2 + (v')^2 dx}$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx}\, \|v\|_1; \Rightarrow L = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}$$

4. За теоремою Лакса-Мільграма-Вишика варіаційна задача коректна, тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1). Білінійний функціонал — обмежений

2) Лінійний функціонал — обмежений

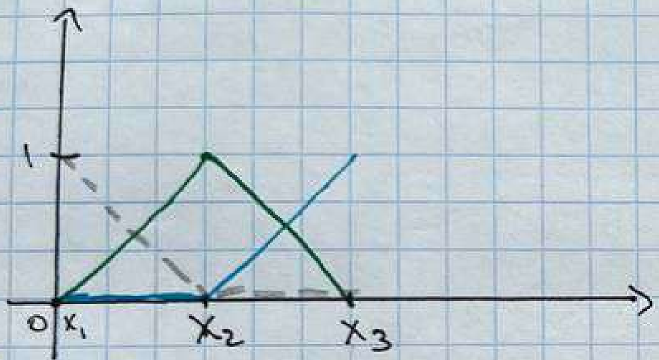
3) Білінійний функціонал — V-еліптичний.

мас, с

5. Кусково лінійні базисні функції:

$$\varphi = \begin{cases} 0, & 0 \le x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{h} & x_{i-1} < x \le x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h} & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x \le 1. \end{cases}$$

$N = 3.$



6. апроксимація $u_h = \sum_{i=0}^{n} q_i \varphi_i(x)$

$u_h = q_1 \varphi_1(x) + q_2 \varphi_2(x)$, $\quad a(u_h; \varphi_i(x)) = \langle l, \varphi_i(x) \rangle$

$a(\alpha + \beta, v) = a(\alpha, v) + a(\beta, v)$ - властивість білінійн. форми.

$$\begin{cases} a(\varphi_1, \varphi_1) q_1 + a(\varphi_2 \varphi_1) q_2 = \langle l, \varphi_1 \rangle \\ a(\varphi_1 \varphi_2) q_1 + a(\varphi_2 \varphi_2) q_2 = \langle l, \varphi_2 \rangle \end{cases}$$ $\Rightarrow a_1, a_2$ - знач. ф-ї у вузлах сітки.

7. Для $N = 3.6.$

$\|u_h\| = 0.017$

Для $N = 12$

$\|u_h\| = -0.0239$