SLAM问题中的李群和李代数

0.动机

在探讨李群李代数之前，我们先思考一个问题。**为什么要在SLAM中引入李群和李代数？答：为了优化过程中的求导。**

先来看一下最简单的最小二乘问题：

$$\min_{x} \frac{1}{2}\|f(x)\|_2^2$$

简单来说，我们要找到一个 $\boldsymbol{x}$ ，使函数达到极值，换成SLAM的情景，就是我们要找到一个位姿，让它最“合理”，我们一般定义观测与实际数据的误差，尽量使其最小化。

还是先从简单的例子开始考虑，如果函数是像 $f(x)=x^2$ 这种很简单的形式，那么很容易通过求导数为0点，通过解析形式求出结果。然而一旦函数变得复杂，无法以解析形式求解，就需要用**迭代**的方式进行求解了：

- 先给定一个初始值 x_0
- 寻找一个增量 Δx，使$\|f\left(x_i+\Delta x\right)\|_2^2<\|f\left(x_i\right)\|_2^2$ （其实就是寻找函数降低的方向）
- 若 Δx 足够小，则停止迭代
- 否则令 $x_{i+1}=x_i+\Delta x$ ，继续迭代

问题就出在第二步上，求取函数的下降方向就需要对函数求导，回想一下导数的定义，再看看第二步做了什么，怎么都绕不开一件事 $x_{i+1}=x_i+\Delta x$ ，然而问题是，连续变换时，旋转矩阵R更新的方式是不断**左乘**新的旋转矩阵，而不是**加**。

回顾一下旋转矩阵R的性质：**它是一个行列式为1的正交矩阵。**即**它的逆就是它自身的转置** $R^{-1}=R^T$ 。一个旋转矩阵**加**另一个旋转矩阵，得到的那一坨东西并不一定还能满足旋转矩阵（特殊正交群$SO(3)$）的性质，我们管这个叫：

特殊正交群对加法不封闭，但把其映射成李代数之后，向量的加法是封闭的，从而解决求导这个问题

1. 一些概念

1.1 什么是群?

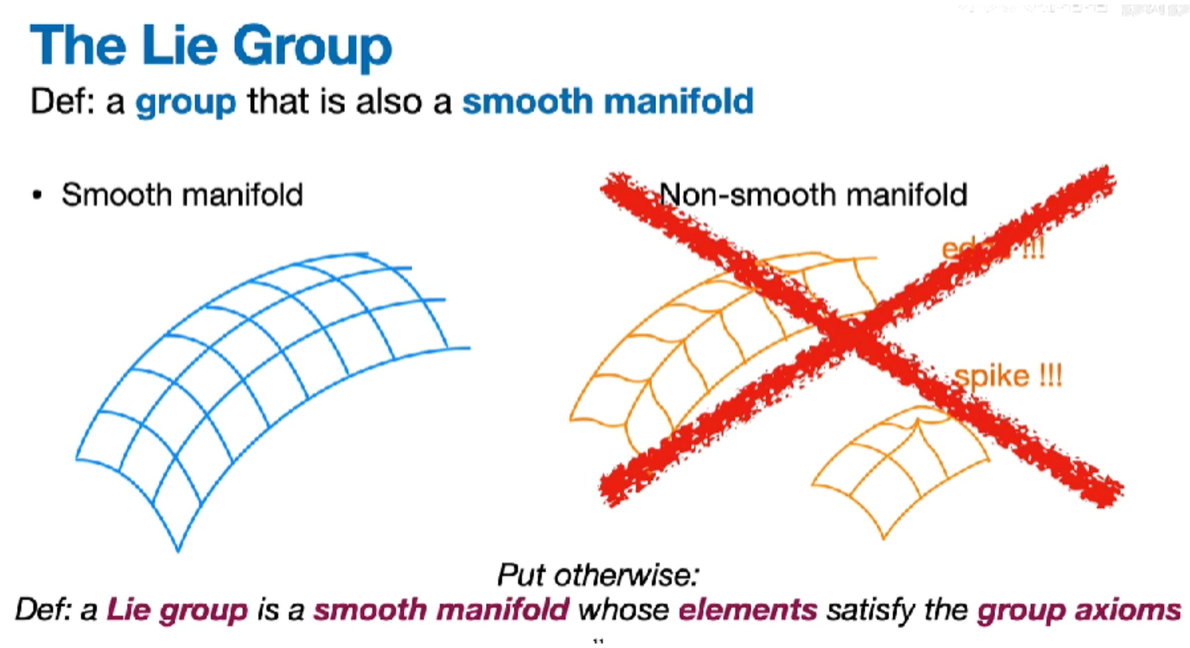
群（Group）是**一种集合**加上**一种运算**的代数结构。我们把集合记作 A，运算记作 $\cdot$，那么群可以记作 $G=(A,\cdot)$。群要求这个运算满足以下几个条件：

1. 封闭性： $\forall a_1,a_2\in A,\quad a_1\cdot a_2\in A.$
2. 结合律： $\forall a_1,a_2,a_3\in A,\quad (a_1\cdot a_2)\cdot a_3=a_1\cdot(a_2\cdot a_3).$
3. 幺元： $\exists a_0\in A,\quad s.t.\quad \forall a\in A,\quad a_0\cdot a=a\cdot a_0=a.$
4. 逆： $\forall a\in A,\quad \exists a^{-1}\in A,\quad s.t.\quad a\cdot a^{-1}=a_0.$

旋转矩阵和乘法就构成了旋转矩阵群，但旋转矩阵和加法不能构成群，因为不满足封闭性，旋转矩阵本身具有约束$\left\{R\in\mathbb{R}^{n\times n}\middle|R\times R^T=I\middle|\det(R)=1\right\}$，两个旋转矩阵相加$R1+R2$的结果就不能满足上述约束了，但$R1*R2$可以满足，此外，旋转矩阵还满足结合律：$R1*R2=R2*R1$，还有幺元是单位矩阵$I$，也有逆矩阵满足R乘以R的逆等于幺元（单位阵）。我们在SLAM里最常说的有两个，一个是特殊正交群$SO(3)$，也就是旋转矩阵群，还有特殊欧氏群$SE(3)$，也就是变换矩阵群，3代表是三维的。

1.2 什么是李群?

李群的定义是指连续光滑的群，比如我们前面说的旋转矩阵群$SO(3)$，你可以想象你拿个杯子就可以在空间中以某个支点连续地旋转它，所以$SO(3)$它就是李群。如果你一般旋转一边移动它，也是连续的或者说光滑的运动，所以变换矩阵群$SE(3)$也是李群。



1.3 什么是李代数?

先上结论：**李代数对应李群的正切空间，它描述了李群局部的导数。**

通过一系列推导，我们可以得到旋转矩阵的微分是一个反对称矩阵左乘它本身

$$\dot{\mathbf{R}}(t)=\phi(t)^{\wedge}\mathbf{R}(t)=\begin{bmatrix}0 & -\phi_3 & \phi_2\\ \phi_3 & 0 & -\phi_1\\ -\phi_2 & \phi_1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{R}(t)$$

上式是一个关于R的微分方程，并且 $R(0)=I$，解得:

$$\boldsymbol{R}(t)=\exp\left(\phi_0^{\wedge}t\right)$$

于是我们有了一个向量 ϕ，反应了R在局部的导数关系，实际上 ϕ 正是特殊正交群 对应$SO(3)$的李代数 $\mathfrak{so}(3)$

旋转矩阵特殊正交群 $SO(3)$ 对应的李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 的元素是**实数域的三维向量**（三维反对称矩阵）

李代数的数学定义：$\mathfrak{so}(3)=\left\{\phi\in\mathbb{R}^3,\Phi=\phi^{\wedge}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\right\}$

$\mathfrak{so}(3)$ 与 $SO(3)$的关系由指数映射给定：$\boldsymbol{R}(t)=\exp\left(\phi_0^{\wedge}t\right)$

下面我们来探讨这个指数映射的含义。

2. 指数和对数映射

2.1 SO(3)上的指数映射

如何计算$\exp\left(\phi_0^{\wedge}t\right)$?

任意矩阵的指数映射可以写成一个泰勒展开,但是只有在收敛的情况下才会有结果，其结果仍是一个矩阵。比如对于矩阵 A:

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

同样的，对于旋转矩阵R:

$$R=\exp\left(\phi^{\wedge}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\phi^{\wedge}\right)^n$$

由于 ϕ 是一个三维向量，我们可以用它的模长 θ，和表示方向的单位向量 a来表示，即 $\phi=\theta a$，并且会有下面两个性质:

$$a^{\wedge}a^{\wedge}=aa^T-I$$
$$a^{\wedge}a^{\wedge}a^{\wedge}=-a^{\wedge}$$

这两个式子提供了处理$a^{\wedge}$高阶项的方法，于是上面的指数映射可以写成

$$\begin{aligned}
\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)=\exp\left(\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)^n\\
&=\boldsymbol{I}+\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}+\frac{1}{2!}\theta^2\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}+\frac{1}{3!}\theta^3\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}+\frac{1}{4!}\theta^4\left(\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)^4+\ldots\\
&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}+\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}+\frac{1}{2!}\theta^2\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}-\frac{1}{3!}\theta^3\boldsymbol{a}^{\wedge}-\frac{1}{4!}\theta^4\left(\boldsymbol{a}^{\wedge}\right)^2+\ldots\\
&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\ldots\right)\boldsymbol{a}^{\wedge}-\left(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\ldots\right)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\\
&=\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}+\boldsymbol{I}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}-\cos\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}\\
&=(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{a}^{\wedge}+\boldsymbol{I}+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}\\
&=\cos\theta\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T+\sin\theta\boldsymbol{a}^{\wedge}.
\end{aligned}$$

最后推导出的结果和罗德里格斯公式一模一样，这下就全说通了， 旋转矩阵特殊正交群 $SO(3)$ 对应的李代数 就$\mathfrak{so}(3)$ 是**旋转向量**组成的空间。如果把旋转角度固定在$\pm\pi$之间，那么$SO(3)$和$\mathfrak{so}(3)$ 的元素是一一对应的。旋转矩阵的导数可以由旋转向量指定，指导着如何在旋转矩阵中进行微积分运算。

2.2 SE(3)上的指数映射

建议直接看十四讲。

三维旋转

李群		李代数
$SO(3)$	$\exp(\theta a^\wedge) = \cos\theta I + (1-\cos\theta) a a^T + \sin\theta a^\wedge$ 指数映射 ←	$\mathfrak{so}(3)$
$R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$	→ 对数映射 $\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$ $\quad Ra = a$	$\phi \in \mathbb{R}^3$
$RR^T = I$ $\det(R) = 1$		$\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$

三维变换

李群		李代数
$SE(3)$	$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi^\wedge) & J\rho \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$	$\mathfrak{se}(3)$
$T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$	$J = \frac{\sin\theta}{\theta} I + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right) a a^T + \frac{1-\cos\theta}{\theta} a^\wedge$ 指数映射 ←	$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$
$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$	→ 对数映射 $\theta = \arccos\frac{tr(R)-1}{2}$ $\quad Ra = a \quad t = J\rho$	$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$

3. 李代数求导与扰动模型

SO(3)上的李代数求导，扰动模型左乘的推导都比较简单，看书自己慢慢推就行，这里我给出SE(3)上的李代数求导的详细推导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\boldsymbol{Tp})}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{\boxed{\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&\approx \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{\boxed{(\boldsymbol{I}+\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{\delta\boldsymbol{\xi}^\wedge \exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^\wedge & \delta\boldsymbol{\rho} \\ \boldsymbol{0}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t} \\ 1 \end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\xi}\to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi}^\wedge(\boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t}) + \delta\boldsymbol{\rho} \\ 0 \end{bmatrix}}{\delta\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{Rp}+\boldsymbol{t})^\wedge \\ \boldsymbol{0}^T & \boldsymbol{0}^T \end{bmatrix} \triangleq (\boldsymbol{Tp})^\odot.
\end{aligned}$$

$$e^x \approx \underbrace{1 + x}_{} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\exp(\delta\xi^\wedge) \approx I + \delta\xi^\wedge$$

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \delta\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \delta\phi^\wedge & \delta\rho \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\xi^\wedge)p = Tp = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rp+t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a^\wedge b = -b^\wedge a$$

$$= \lim_{\delta\xi\to 0} \frac{\begin{bmatrix} \delta\phi^\wedge(Rp+t)+\delta\rho \\ 0 \end{bmatrix}}{[\delta\rho \ \ \delta\phi]^T} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{\delta\xi\to 0}\frac{\delta\phi^\wedge(Rp+t)+\delta\rho}{\delta\rho} & \underbrace{\lim\limits_{\delta\xi\to 0}\frac{\delta\phi^\wedge(Rp+t)+\delta\rho}{\delta\phi}}_{} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\delta\xi\to 0} = \frac{-(Rp+t)^\wedge\delta\phi + \delta\rho}{\delta\phi} = -(Rp+t)^\wedge$$

$$= \begin{bmatrix} I & -(Rp+t)^\wedge \\ 0^T & 0^T \end{bmatrix}$$

参考资料：

> 从零开始一起学习SLAM | 为啥需要李群与李代数？https://www.sohu.com/a/270402234_100007727
>
> 菠萝包包包, "李群和李代数 —— 名字听起来很猛其实也没那么复杂"