

PID 第一次作业报告

夏添 SA24001106

2024 年 9 月 25 日

1 图像的伸缩、旋转、平移变换

1.1 数学原理

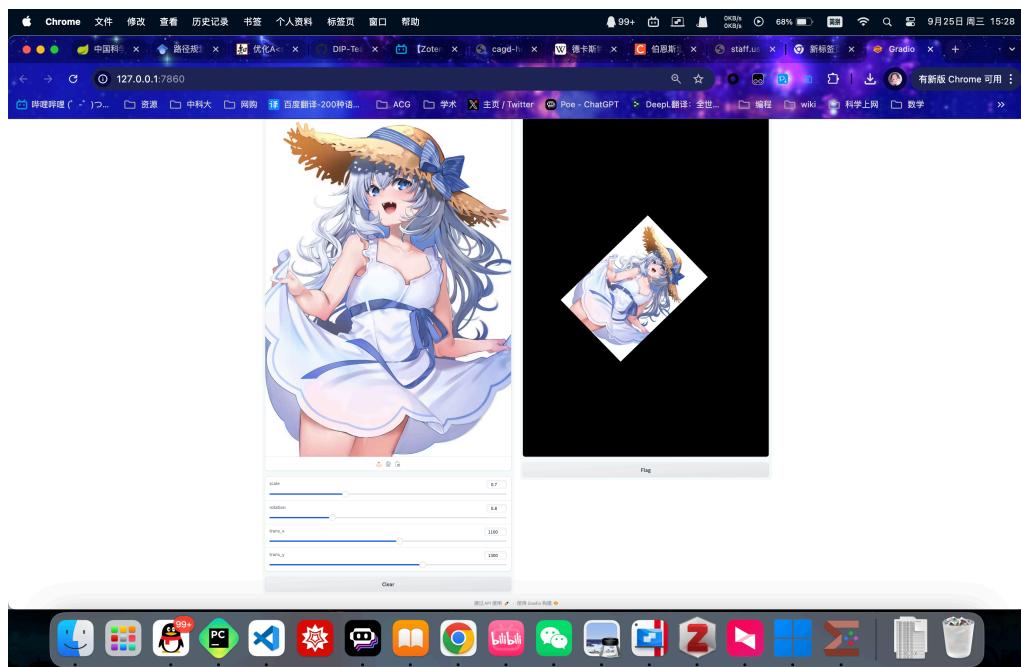
图像的变换实际上就是像素点的坐标变换，设一个像素点的坐标是 (x, y) ，那么当它进行变换后的坐标可以表示为

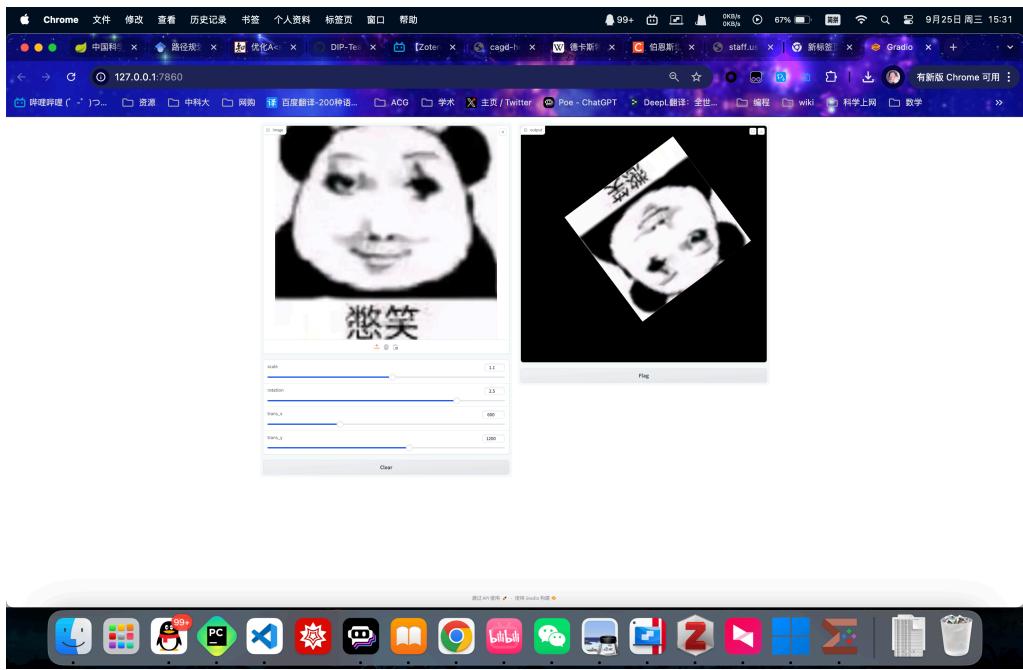
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

其中 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 控制平移， k 控制伸缩， $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 控制旋转。

1.2 程序实现

在 python 程序中实现上述原理，为了加速图像的计算，使用 opencl 平台进行 gpu 编程。本程序的旋转以图片的左上角为中心，如果旋转后发现图片不见，可能是旋转到外面，只需将其平移适当距离即可看见。运行可得一些使用案例如图。





2 点导向变形

2.1 数学原理

给定若干个点的变换 $p_i \rightarrow q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, 希望找到一个变换 f 可以实现插值性: $f(p_i) = q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$;

连续性: f 是连续映射;

恒等性: 若 $p_i = q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 则 f 是恒等映射。

用径向基函数来插值可以得到这样的变换, 但是这里对以往的方法做一点改进, 具体如下:

设 r 是一个常数参数, 控制影响范围, $q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是变换后的点坐标, 其在经过 $g(q)$ 的位移后可以回到变换前的位置 p , 也即 $p = q + g(q)$. 从假定中我们已知几个特殊值, 即

$$g(q_i) = p_i - q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

用径向基函数插值来找到这样一个满足条件的 g . 设 g 是一系列高斯径向基函数的线性组合, 即

$$g(q) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-\frac{\|q-q_i\|}{r^2}}, c_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},$$

记

$$A = \left(a_{ij} = e^{-\frac{\|q_i-q_j\|}{r^2}} \right), C = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \dots \\ c_n^T \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} p_1^T - q_1^T \\ p_2^T - q_2^T \\ \dots \\ p_n^T - q_n^T \end{pmatrix}$$

上面的特殊值可以导出一个线性方程组

$$g(q_i) = p_i - q_i, i = 1, 2, 3, \dots, n \implies AC = D \implies C = A^{-1}D$$

求解此线性方程组可以得到满足条件的变换，若想求出变换后每个点的颜色，只需使用 g 找到其变换前的位置，然后取此位置的颜色即可。

2.2 程序实现

在 python 程序中实现上述原理，为了加速图像的计算，使用 opencl 平台进行 gpu 编程。运行可得一些使用案例如图。

