

第一次作业2016-09-23

本次作业一共5道题目，前4题为计算证明题，最后一题为上机题。

Note:

(1) 作业统一以pdf格式提交，命名为**学号_姓名.pdf**，如“201628014628053_吴金文.pdf”。程序源码等打包到**学号_姓名.zip**提交。

(2) 上机题需要提交源码，并指出运行环境以及环境依赖以方便查看。源码中建议提供简单注释。

(3) 作业时间为2周，通过选课网站<http://sep.ucas.ac.cn/>，在对应课程的**课堂作业**栏目下提交。若提交时间有变动，网站上会通知。

1. 对一个 c 类分类问题，假设各类先验概率为 $P(\omega_i), i = 1, \dots, c$ ，条件概率密度为

$P(\mathbf{x} | \omega_i), i = 1, \dots, c$ （这里 \mathbf{x} 表示特征向量），将第 j 类模式判别为第 i 类的损失为 λ_{ij} 。

(1) 请写出贝叶斯最小风险决策和最小错误率决策的决策规则；

(2) 引入拒识（表示为第 $c+1$ 类），假设决策损失为

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \lambda_r, & i = c+1 \\ \lambda_s, & \text{otherwise} \end{cases}$$

请写出最小损失决策的决策规则（包括分类规则和拒识规则）。

2. 表示模式的特征向量 $\mathbf{x} \in R^d$ ，对一个 c 类分类问题，假设各类先验概率相等，每一类条件概率密度为高斯分布。

(1) 请写出类条件概率密度函数的数学形式；

(2) 请写出在下面两种情况下的最小错误率决策判别函数：(a)类协方差矩阵不等；(b)所有类协方差矩阵相等。

(3) 在基于高斯概率密度的二次判别函数中，当协方差矩阵为奇异时，判别函数变得不可计算。请说出两种克服协方差奇异的方法。

3 Consider the following decision rule for a two-category one-dimensional problem: Decide ω_1 if $x > \theta$; otherwise decide ω_2 .

(a) Show that the probability of error for this rule is given by

$$P(\text{error}) = P(\omega_1) \int_{-\infty}^{\theta} p(x|\omega_1) dx + P(\omega_2) \int_{\theta}^{\infty} p(x|\omega_2) dx.$$

(b) By differentiating, show that a necessary condition to minimize $P(\text{error})$ is that θ satisfy

$$p(\theta|\omega_1)P(\omega_1) = p(\theta|\omega_2)P(\omega_2).$$

(c) Does this equation define θ uniquely?

(d) Give an example where a value of θ satisfying the equation actually *maximizes* the probability of error.

• 4 假定 x 和 m 是两个随机变量，并设在给定 m 时， x 的条件密度为

$$p(x|m) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m)^2 / \sigma^2 \right\}$$

再假设 m 的边缘分布是正态分布，期望值是 m_0 ，方差是 σ_m^2 ，证明

$$p(m|x) = \frac{(\sigma^2 + \sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma \sigma_m} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 + \sigma_m^2}{\sigma^2 \sigma_m^2} \left(m - \frac{\sigma_m^2 x + m_0 \sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_m^2} \right)^2 \right]$$

5. 实验题：

请分别用 LDF、QDF 分类器对 MNIST 数据集进行分类，并对结果进行分析讨论。

MNIST 数据集：<http://yann.lecun.com/exdb/mnist/>