шения этих задач - от поиска модуля до применения классических теорем Ферма, Эйлера и Вильсона.

Собранные здесь задачи взяты из различных источников. Наряду с задачами, известными по многочисленным учебникам и задачникам по теории чисел, сюда вошли авторские задачи, задачи региональных, национальных и международных олимпиад, а также большой пласт "фольклорных" задач, которые автор собирал в течение трех десятилетий.

Эти задачи неоднократно использовались при работе школьных и студенческих кружков, подготовке школьников СССР, России и Казахстана к олимпиадам различного уровня. В этом смысле по уровню трудности они доступны для учащихся. Однако не стоит отчаиваться, если какая-то из них не поддастся Вашим усилиям - многие из них достаточно трудны и требуют многих *часов* работы.

В заключение автор хотел бы выразить свою благодарность руководству и коллективу центра "Дарын" Министерства образования и науки Республики Казахстан, стимулировавших систематизацию этих задач и написание этого сборника, а также всех, кто способствовал его появлению на свет. Всем им - огромное спасибо.

С.Е.Рукшин

3 D

1. МОДУЛЬ

1. На сколько нулей оканчивается число $9^{1974}+1$? ✓ mod

2. Существует ли натуральное n такое, что число 3^n+1 делится на 10^{100}?

3. a) решите в целых числах уравнение $x^2+y^2=19861986$; ✓

b) решите в целых числах уравнение $x^4+y^4=1986198519841983$. mod 4

4. Докажите, что уравнение $x^8+y^8=1972^{1972}+1973^{1973}+1974^{1974}$ не имеет решений в целых числах. mod 3, 9

5. Решите уравнение в натуральных числах: $105^x+211^y=106^z$. mod 8

6. Докажите, что произведение $p_1p_2...p_n$ первых n простых чисел при $n>1$ не может на 1 отличаться от полного квадрата. mod 3

7. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в простых числах: a) $p^2+q^2=r^2$ mod 8

b) $p^2+q^2=r^2+s^2+t^2$

8. Решите уравнение в целых числах:

$$(3a^3+a+12)^2=21a^5+1985.$$

9. Решите уравнение $2^n+8n+5=k^2$ в натуральных числах.

10. Докажите, что уравнение $x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$ не имеет решений в целых числах.

11. Решите в простых числах уравнение $1+x^y=z$. mod 3

12. Найдите все простые числа p такие, что число p^4-606 также является простым. mod 5

13. Известно, что числа p, p^3-6, p^3+6 - простые. Найдите p. mod 7

14. Докажите, что в последовательности 4^2+1, 14^2+1, 24^2+1, 34^2+1, … имеется бесконечно много составных чисел.

15. Решите в натуральных числах уравнение $2^n-1=k^2$ *(см. также задачу 39 серии 6).*

16. Докажите, что при натуральных $m \neq n$ числа 2^m и 2^n имеют различные наборы цифр.

17. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составить шестизначное число, делящееся на 11?

18. Делится ли число 192021...7980 на 1980?

19. Докажите, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

20. Числа $n+1$ и $2n+1$ являются точными квадратами. Докажите, что число n делится на 24.

21. Известно, что $n+1 \vdots 24$. Докажите, что сумма всех делителей числа n также делится на 24 *(см. также задачу 9 серии 8).*

22. Докажите, что число $\underbrace{2..2}_{1982}$ не представимо в виде $xy(x+y)$, где числа x, y – натуральные.

mod 9

23. Может ли

a) 5^n-1 делиться на 4^n-1;

mod 3, 5

b) 7^n-1 делится на 6^n-1?

mod 5, 7

24. Какие числа вида $\underbrace{9..9}_{n}$ представляются в виде суммы двух квадратов целых чисел?

mod 4

25. При каких n число $\underbrace{2..2}_{n}$ представимо в виде

a) разности двух квадратов;

mod 4

3D

b) суммы двух квадратов? mod 8

26. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы

a) двух квадратов; 8

b) трех квадратов. 8

27. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы

a) двух кубов; mod 7

b) трех кубов.

28. Докажите, что число $1\underbrace{0\ldots0}_{48}6\underbrace{0\ldots0}_{97}1$ не является кубом натурального числа

(см. также задачу 6 серии 2).

29. Найдите минимум выражения $\left|36^k - 5^l\right|$ при натуральных k и l.

30. При каких n число $2^n + 3^n + 4^n$ является полным квадратом?

31. При каких n число является полным квадратом:

a) $6^n - 5^n$; mod 4

b) $7^n - 6^n$? mod 7

32. Решите в натуральных числах уравнение:

a) $2^n + 65 = k^2$; mod 5

b) $3^n + 55 = k^2$.

33. Шесть простых чисел являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30.

34. Пятнадцать простых чисел являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Докажите, что разность этой прогрессии не менее 30 000.

2. НЕРАВЕНСТВА И РОСТ

1. К числу 2^n приписали число 5^n. Сколько цифр в получившемся числе?

2. Для некоторого натурального n числа 2^n и 5^n начинаются с одной и той же цифры. Какая это цифра?

3. Можно ли из набора гирь $3^1,..,3^n$ выбрать два набора одинакового веса?

4. Докажите, что число $1981^{1986}+30^{1986}$ не является полным квадратом.

5. a) Найдите наибольшее натуральное число x такое, что число $4^{27}+4^{1000}+4^x$ является полным квадратом.

   b) Найдите все натуральные n, для которых число $2^8+2^{11}+2^n$ является полным квадратом.

6. Докажите, что число $1\underbrace{0...0}_{48}6\underbrace{0...0}_{97}1$ не является кубом натурального числа

   (*см. задачу 28 серии 1*).

7. Найдите все 200-значные числа, начинающиеся с 99 девяток и являющимися полными квадратами.

8. При каких целых x числа $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ и $\sqrt{x}$ одновременно целые?

9. Докажите, что не существует натуральных m и n таких, что числа m^2+n и n^2+m являются полными квадратами.

10. Решите в натуральных числах уравнение $n^2+3n=k^2$.

11. Найдите все натуральные n такие, что $n^2+2n+12=m(m+1)$, где m - натуральное.

30

12. Докажите, что при натуральных m и n уравнения не имеют решений:

a) $n(n+1)=m(m+2)$;

b) $n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$;

c) $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$.

13. Решите в целых числах уравнение $x^3-y^3=91$.

14. Существует ли такое простое p, что сумма всех натуральных делителей числа p^4 является точным квадратом?

15. Найдите все простые p и q, для которых $p^2-p+1=q^3$. *(СПб95)*

16. Найдите все целые числа a, b, c такие, что $1<a<b<c$ и число $(a-1)(b-1)(c-1)$ является делителем числа $abc-1$.

17. Решите в натуральных числах уравнение

a) $3^n+4^n=5^n$;

b) $\dfrac{3^n+5^n}{2}=4^n$.

18. Для натуральных x и y выполняется равенство $x^x+y^y=x^y+y^x$. Докажите, что $x=y$.

19. Докажите, что уравнение $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений в натуральных числах при $n\geq z$.

20. Найдите все тройки неотрицательных целых x,y,z такие, что равенство $x^n+y^n=z^{n+1}$ выполнено при бесконечном количестве значений натуральных n.

21. Докажите, что уравнение не имеет решений в натуральных числах:

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

1. Найдите минимальное натуральное n такое, что $n = 2a^2 = 3b^3 = 5c^5$.

2. Пусть последовательность $\{p_k\}$ задается следующим образом – $p_1 = 2$ и p_{n+1} - максимальный простой делитель числа $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Докажите, что в последовательности $\{p_k\}$ никогда не встретится число 5.

3. В последовательности натуральных чисел $a_1 = 2$, a_n - произведение первых n простых чисел. Известно, что разность некоторых двух чисел этой последовательности равна 30 000. Найдите эти числа.

4. Какое наибольшее количество натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать так, что любые два выбранных числа взаимно просты.

5. a). Докажите, что если произведение нескольких попарно взаимно простых чисел – точный квадрат, то каждое из них – точный квадрат.

b) Докажите тот же факт для точной k-й степени ($k \geq 3$).

6. Докажите, что уравнение имеет конечное число натуральных решений:

a) $x! + 1987 = y^2$;

b) $x! + a = y^2$ при натуральном a, не являющимся полным квадратом;

c) $x! - a = y^2$ при любом натуральном a.

7. Докажите, что число 1986! не является точным квадратом.

30

8. Сумма пяти делителей натурального числа a - простое число. Докажите, что произведение этих пяти делителей не превосходит a^4. *(СПб97)*

9. Найдите все натуральные числа меньшие 300, имеющие ровно 15 делителей.

10. Известно, что натуральное число имеет ровно 1982 натуральных делителя. Может ли это число делится на 66?

11. Докажите, что натуральное число имеет нечетное количество натуральных делителей в том и только в том случае, когда оно является точным квадратом

(см. также задачу 2 серии 8).

12. Натуральные числа a и b имеют ровно по 99 натуральных делителей. Может ли число ab иметь ровно 1000 натуральных делителей?

13. Сколько натуральных решений имеет уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1980}$.

14. Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел $n, n+1, .. n+20$ имеет с числом 30030 общий делитель, больший 1.

15. Докажите, что ни при каком натуральном n число $n!$ не делится на

a) 2^n;

b) p^n для простых p.

16. Докажите, что при $n_1+n_2+...+n_k \le n$ число $\frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$ - целое.

17. Пусть $\varphi(n)$ - количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Докажите, что $\varphi(n)$ четно при $n>2$.

18. Найдите все натуральные n, делящиеся на $\varphi(n)$. $n=2^{\ell}$

19. Докажите, что сумма $\varphi(d)$, взятая по всем натуральным d, делящим n, равняется самому числу n.

20. Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа n на простые множители, тогда $\varphi(n)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_m^{\alpha_m}-p_m^{\alpha_m-1}\right)=$

$$=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_m-1)=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

21. Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа n на простые множители. Докажите, что сумма k-ых степеней всех различных натуральных делителей n равна

$$\frac{p_1^{(\alpha_1+1)k}-1}{p_1^k-1}\cdot\frac{p_2^{(\alpha_2+1)k}-1}{p_2^k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_m^{(\alpha_m+1)k}-1}{p_m^k-1}.$$

22. Число n называется совершенным, если сумма всех его собственных (меньших n) натуральных делителей равна n. Докажите следующую теорему Евклида:

если число $2^{k+1}-1$ - простое, то число $2^k(2^{k+1}-1)$ - совершенное.

23. Докажите следующую теорему Эйлера: каждое четное совершенное число представляется в виде $2^k(2^{k+1}-1)$, где $2^{k+1}-1$ - простое.

24. Для натуральных чисел a,b,c,d выполнено равенство $ab=cd$. Докажите, что

3D

a) существуют целые числа x, y, z, t такие, что $a = xy, b = zt, c = xz, d = yt$;

b) число $a+b+c+d$ является составным;

c) число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ является составным.

25. Докажите равенство $\dfrac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \dfrac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$.

26. Натуральные числа k, l, m таковы, что k^3 делится на l, l^3 делится на m, m^3 делится на k. Докажите, что число $(k+l+m)^{13}$ делится на klm.

27. Дано множество *M*, состоящее из 1985 различных натуральных чисел, простые делители которых не превосходят 26. Докажите, что из множества *M* можно выбрать:

a) два различных числа, произведение которых – точный квадрат;

b) четыре попарно различных числа, произведение которых – точная четвертая степень.

17. Пусть $\varphi(n)$ - количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Докажите, что $\varphi(n)$ четно при $n>2$.

18. Найдите все натуральные n, делящиеся на $\varphi(n)$. $n=2^k$

19. Докажите, что сумма $\varphi(d)$, взятая по всем натуральным d, делящим n, равняется самому числу n.

20. Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа n на простые множители, тогда $\varphi(n)=\left(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1}\right)\cdot\left(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_m^{\alpha_m}-p_m^{\alpha_m-1}\right)=$

$$=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdot\ldots\cdot p_m^{\alpha_m-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdot\ldots\cdot(p_m-1)=$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

21. Пусть $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ - разложение числа n на простые множители. Докажите, что сумма k-ых степеней всех различных натуральных делителей n равна

$$\frac{p_1^{(\alpha_1+1)k}-1}{p_1^k-1}\cdot\frac{p_2^{(\alpha_2+1)k}-1}{p_2^k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_m^{(\alpha_m+1)k}-1}{p_m^k-1}.$$

22. Число n называется совершенным, если сумма всех его собственных (меньших n) натуральных делителей равна n. Докажите следующую теорему Евклида:

если число $2^{k+1}-1$ - простое, то число $2^k(2^{k+1}-1)$ - совершенное.

23. Докажите следующую теорему Эйлера: каждое четное совершенное число представляется в виде $2^k(2^{k+1}-1)$, где $2^{k+1}-1$ - простое.

24. Для натуральных чисел a,b,c,d выполнено равенство $ab=cd$. Докажите, что

a) существуют целые числа x, y, z, t такие, что $a = xy, b = zt, c = xz, d = yt$;

b) число $a+b+c+d$ является составным;

c) число $a^{1984}+b^{1984}+c^{1984}+d^{1984}$ является составным.

25. Докажите равенство $\dfrac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \dfrac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]^2}$.

26. Натуральные числа k, l, m таковы, что k^3 делится на l, l^3 делится на m, m^3 делится на k. Докажите, что число $(k+l+m)^{13}$ делится на klm.

27. Дано множество *М*, состоящее из 1985 различных натуральных чисел, простые делители которых не превосходят 26. Докажите, что из множества *М* можно выбрать:

a) два различных числа, произведение которых – точный квадрат;

b) четыре попарно различных числа, произведение которых – точная четвертая степень.

4. ДЕЛИМОСТЬ

1. Известно, что при некоторых целых a и b число $(16a+17b)(17a+16b)$ делится на 11. Докажите, что оно делится и на 121.

2. Натуральные числа m и n таковы, что $34m = 43n$. Докажите, что число $m+n$ – составное.

3. Сумма двух натуральных чисел равна 770. Может ли их произведение делиться на 770?

4. В примере на умножение одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные – разными. Докажите, что не могла получиться запись:

a) $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{eeff}$;

b) $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{efef}$.

5. Каждое из натуральных чисел a, b, c, d делится на натуральное число $ab-cd$. Докажите, что $ab-cd=1$.

6. Четное число a таково, что из делимости a на простое число p следует делимость числа $a-1$ на $p-1$. Докажите, что a является степенью двойки.

7. Докажите, что число $2^{200}-1$ делится на

a) 15;

b) 17.

8. При каких натуральных n число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323?

9. На что и при каких n может сокращаться дробь $\dfrac{6n+17}{9n+33}$?

10. Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, делящееся на 11.

11. Можно ли из набора гирь $3^1,\dots,3^n$ выбрать два набора одинакового веса?

12. Пусть натуральные x, y, z удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что число xyz делится на 60.

13. Докажите, что ни при каком натуральном n сумма

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$;

b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n+1}$

не является натуральным числом.

14. Число $k+1$ – простое. Докажите, что число $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{3k+1}+\dots+\frac{1}{nk+1}$ не является натуральным ни при каком натуральном n.

15. Докажите, что при любом натуральном n числа 1974^n и $1974^n + 2^n$ имеют поровну цифр в десятичной записи.

5. КОНСТРУКТИВНОСТЬ

1. Найдите минимальное натуральное n такое, что $n = 2a^2 = 3b^3 = 5c^5$.

2. Найдите какие-нибудь целые числа a и b такие, что $\frac{a}{999} + \frac{b}{1001} = \frac{1}{999999}$.

3. Найдите минимальное натуральное n такое, что из делимости числа n на $p-1$ (p - простое число) следует делимость n на p.

4. Докажите, что любое натуральное $n > 6$ можно представить в виде суммы двух взаимно простых натуральных чисел, отличных от 1.

5. Докажите, что любое натуральное $n > 17$ можно представить в виде суммы трех попарно взаимно простых натуральных чисел, отличных от 1.

6. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество различных простых делителей.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы точного квадрата и простого числа.

8. Существует ли 100-значное число без нулей, делящееся на сумму своих цифр?

9. Существует ли 10 различных целых чисел таких, что все суммы составленные из девяти из них – точные квадраты?

10. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, 3, F, 1985 так, что разность любых двух выбранных не проста? (*СП685*)

11. Существует ли 1999 последовательных натуральных чисел, сумма которых является кубом натурального числа?

12. Пусть $c > 1$ - натуральное число, p - простое. Докажите, что число p^c представимо в виде суммы нескольких подряд идущих нечетных чисел.

13. Пусть p_n обозначает n - е по счету простое число. Докажите, что $p_n < 2^{2^n}$.

14. Докажите, что для любого натурального $n > 2$ между числами n и $n!$ есть простое число.

15. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида: a) $4k-1$;

b) $6k-1$;

c) $4k+1$.

16. a) Докажите, что в любом натуральном числе делителей вида $4k+1$ не меньше, чем делителей вида $4k+3$.

b) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих поровну делителей вида $4k+1$ и $4k+3$.

c) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, имеющих натуральных делителей вида $4k+1$ больше, чем делителей вида $4k+3$.

17. Докажите, что существует бесконечно много пар различных чисел m и n таких, что числа m и n имеют одинаковые простые делители и числа $m+1$ и $n+1$ имеют одни и те же простые делители.

18. Докажите, что для любого натурального n существует $x > n$ и натуральное y такое, что $y^y \vdots x^x$, а y не делится на x.

19. Докажите, что существует бесконечно много натуральных X и Y таких, что $y(y+1) \vdots x(x+1)$, а числа $y, y+1$ не делятся ни на одно из чисел x, $x+1$.

20. Докажите, что для каждого натурального n существует такое натуральное x, что каждое из чисел $x+1$, x^x+1, $x^{x^x}+1$, …, $x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}+1$, … делится на n.

21. Докажите, что существует бесконечно много нечетных чисел n, для которых ни при каком четном x ни одно из чисел x^x+1, $x^{x^x}+1$, …, $x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}+1$, … не делится на n.

22. Докажите, что в натуральном ряду существуют промежутки сколь угодно большой длины, не содержащие простых чисел.

23. В строго возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с третьего, равно сумме каких-то двух предшествующих. Докажите, что в этой последовательности бесконечно много составных чисел. (*СП672*)

24. Докажите, что в последовательности 2^n-1 существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

25. Докажите, что для любого натурального s найдется натуральное n такое, что в каноническое разложение числа 2^n-1 содержит по крайней мере s простых делителей.

26. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $2^n+1 \vdots n$.

27. a) Может ли число 2^n+4^n быть полным квадратом?

b) Докажите, что существует бесконечно много квадратов вида 2^k+4^k.

28. a) Докажите, что квадраты целых чисел могут давать при делении на 9 только остатки 0, 1, 4, 7;

b) докажите, что сумма цифр числа x^2 может принимать любые значения, не противоречащие ограничениям пункта a).

29. Пусть a_0 и d - натуральные числа. Докажите, что в если в прогрессии $a_0 + nd$ встретился точный квадрат, то в ней бесконечно много точных квадратов.

30. Пусть a_0 и d - натуральные числа. Докажите, что в прогрессии $a_0 + nd$

a) есть составное число;

b) есть бесконечно много составных чисел.

31. Пусть a_0 и d - натуральные числа. Докажите, что в прогрессии $a_0 + nd$ есть бесконечно много чисел с одинаковыми простыми множителями в каноническом разложении.

32. Докажите, что существует арифметическая прогрессия любой длины из различных попарно взаимно простых чисел.

33. Докажите, что в любой возрастающей арифметической прогрессии с натуральными числами существует отрезок любой длины, состоящий из составных чисел.

34. Докажите, что в арифметической прогрессии $an + b$ с натуральными взаимно простыми a и b, для любого натурального m существует бесконечно много членов, взаимно простых с m.

35. Докажите, что в арифметической прогрессии $an + b$ с натуральными взаимно простыми a и b, существует бесконечно много попарно взаимно простых членов.

36. Докажите, что из k целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на k.

37. В Тяпляпии 1 тяп равен 1001 ляпу. В кошельке Хрюнзеля есть 1998 тяпов, а в кассе магазина сколько угодно тяпов и всего 1 ляп. Докажите, что Хрюнзель может купить в этом магазине несколько хряпок, каждая из которых стоит 1999 ляпов, правильно рассчитавшись с кассой магазина.

38. Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

39. Из натуральных чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел одно делится на другое.

40. Будем говорить, что число обладает свойством (k), если оно разлагается в произведение k последовательных натуральных чисел, больших 1. Найдите число N, которое для некоторого натурального числа $k>1$ обладает одновременно свойствами (k) и $(k+2)$.

41. Конечно или бесконечно множество решений в натуральных числах уравнения $x^2+y^3=z^2$.

42. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $4n^2+1$ одновременно делится на 5 и на 13.

43. Докажите, что уравнение $x^2-51y^2=1$ имеет решение в натуральных числах.

44. Докажите, что уравнение $(x^2+1)(y^2+1)=z^2+1$ имеет бесконечно много натуральных решений.

45. Докажите, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

46. Найдите два взаимно простых четырехзначных числа a и b таких, что $\left|a^m - b^n\right| \geq 4\,000$ при любых натуральных m и n.

47. Пусть $P(n)$ – наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+1989$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, при которых $P(n) > P(n+1)$.

6. АЛГЕБРА

1. Докажите, что число $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \cdot 66 \cdot 96$ является составным.
2. Докажите, что число $\underbrace{1...1}_{2n} - \underbrace{2...2}_{n}$ является точным квадратом для любого натурального n.
3. Известно, что для некоторого натурального n число $n^2 + 2n$ оканчивается на 4. Найдите предыдущую цифру этого числа.
4. Решите уравнение $5(x^2 + y^2 + 1) = 6x + 8y$.
5. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$, где p - простое число.
6. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число n является простым.
7. Найдите все прямоугольники с целыми сторонами, у которых площадь равна периметру.
8. Докажите, что при любых целых a, b, c уравнение $xy + ax + by = c$ имеет решение в целых числах.
9. При каких k число 101....101 (в записи числа k нулей, $k+1$ единица) является простым?
10. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.
11. Каждое из
    а) двух;

b) n натуральных чисел

представимо как сумма двух квадратов. Докажите, что их произведение представимо в виде суммы двух квадратов.

12. Докажите, что на окружности с центром в точке (0,0) и радиусом равным $5^{\frac{x}{2}}13^{\frac{y}{2}}$ (x, y - натуральные) всегда найдется целая точка.

13. Докажите, что произведение любых четырех последовательных целых чисел, увеличенное на 1, является полным квадратом.

14. Докажите, что уравнение $x^2 - y^2 = a^3$ имеет целочисленное решение при любом натуральном a.

15. Решите уравнение в простых числах: $x^2 + y^3 = z^4$.

16. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 - y^3 = 91$.

17. Найдите все целые n такие, что $n^3 + n \vdots n+3$.

18. Докажите, что число $2^{10} + 2^5 \cdot 5^6 + 5^{12}$ является составным.

19. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ является составным.

20. Докажите, что число $2^{2^{58}} + 1$ раскладывается по крайней мере на три натуральных множителя, больших 1.

21. Докажите, что если при натуральном x выполнено $x^4 + 4^x \neq 5$, то число $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ – составное.

22. Докажите равенство $\dfrac{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(11^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(12^4 + \frac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{313}$.

23. Докажите, что квадрат суммы n различных ненулевых квадратов целых чисел является суммой n квадратов не равных нулю целых чисел.

24. Докажите, что для любого натурального $k > 2$ существует не более одного простого числа такого, что сумма всех его натуральных делителей является точной k-ой степенью.

25. Докажите, что в последовательности $2^{2^k} - 1$ каждое число делится на все предыдущие.

26. Докажите следующую теорему Мерсенна: если число $2^k - 1$ является простым, то k - тоже простое

27. Докажите следующую теорему Ферма: если число $2^k + 1$ является простым, то k - степень двойки

28. Докажите следующую теорему Евклида: если $2^{n+1} - 1$ является простым числом то число $2^n(2^{n+1} - 1)$ является совершенным.

29. Докажите следующую теорему Эйлера: каждое четное совершенное число имеет вид $2^n(2^{n+1} - 1)$, где $2^{n+1} - 1$ является простым числом.

30. Докажите, что если $2^n - 2 \vdots n$ то $2^{2^n-1} - 2 \vdots 2^n - 1$.

31. Пусть $a_n = 2^{2^n} + 1$. Докажите, что $2^{a_n} - 2 \vdots a_n$.

32. Докажите следующее утверждение Сабида ибн Корра – Ферма - Декарта: пусть числа $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ и $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ простые. Тогда числа $2^n pq$ и $2^n r$ - дружественные, т.е. сумма собственных делителей одного из них равна другому, и наоборот.

33. Существует ли натуральное число n такое, что $n^n + (n+1)^n \vdots 1987$?

34. Существует ли натуральное число n такое, что $n^{n+1}+(n+1)^{n-1} \vdots 1987$?

35. Докажите, что число $2^{3^{100}}+1$

a) делится на 3^{101};

b) не делится на 3^{102}.

36. Найдите максимальное k при котором число $1978^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}$ делится на число 1979^k.

37. Решите в натуральных числах уравнение $3\cdot 2^x+1=y^2$.

38. Решите в натуральных числах уравнение $3\cdot 2^x+1=7^y$.

39. Решите в натуральных числах уравнение $2^n+1=k^2$.

40. Известно, что $2^k+1=p^n$, где число $n>1$ натуральное, а p - простое. Докажите, что $k=3$.

41. Решите уравнение в целых числах $x^3+y^3+z^3=3xyz+1$.

42. Решите в натуральных числах уравнение $x^3+y^3+1=3xy$.

43. Решите уравнение $x^3+y^3=9xy-27$ в

a) натуральных числах;

b) в положительных рациональных числах;

c) в целых числах.

44. Решите в целых числах уравнение $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=30$.

45. Докажите, что при натуральных a дробь $\dfrac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}$ является несократимой.

46. Натуральные числа a,b,c,d таковы, что $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Докажите, что $a=c$ и $b=d$.

47. Известно, что $\left(\sqrt{2}+1\right)^7=\sqrt{57122}+\sqrt{57121}$. Найдите чему равно $\left(\sqrt{2}-1\right)^7$.

48. Известно, что $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a+b\sqrt{2}$. Докажите, что $\left(1-\sqrt{2}\right)^n=a-b\sqrt{2}$.

49. Докажите, что в условии предыдущей задачи $a^2-2b^2=\pm1$.

50. Докажите, что для любого натурального n число $(\sqrt{2}-1)^n$ можно представить в виде $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, где k - натуральное.

51. Докажите, что не существует

a) целых;

b) рациональных

чисел a, b, c, d таких, что при некотором натуральном k выполняется равенство $(a+b\sqrt{2})^{2k}+(c+d\sqrt{2})^{2k}=5+4\sqrt{2}$.

52. Найдите первые 100 знаков после запятой в разложении числа

a) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{1988}$;

b) $\left(\sqrt{3}+2\right)^{1985}$.

53. Докажите, что для любого натурального k найдется натуральное n такое, что $\sqrt{n+1981^k}+\sqrt{n}=\left(\sqrt{1982}+1\right)^k$.

54. Докажите, что число $\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$ - рациональное.

55. Докажите, что число $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}}$ - иррациональное.

56. Числа $a, b, \sqrt{a}+\sqrt{b}$ - рациональные. Докажите, что числа $\sqrt{a}, \sqrt{b}$ рациональные.

3D

57. Существуют ли такие вещественные a и b, что число $a+b$ – рациональное, а число a^n+b^n – иррациональное при всех натуральных $n>1$?

58. Существуют ли такие вещественные a и b, что число $a+b$ – иррациональное, а число a^n+b^n - рациональное при всех натуральных $n>1$?

59. Найдите все вещественные a такие, что числа $a+\sqrt{15}$ и $\sqrt{15}-\frac{1}{a}$ являются целыми.

60. Числа m и n натуральные, причем $\frac{m}{n}<\sqrt{7}$. Докажите, что $\frac{m}{n}<\sqrt{7}-\frac{1}{mn}$.

61. Числа m и n натуральные, причем $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$. Докажите, что $\frac{m}{n}<\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$.

62. a) Натуральные взаимно простые числа x,y,z удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=z^2$, причем x четно. Докажите, что тогда существуют натуральные взаимно простые числа u и v разной четности такие, что $u>v>0$, $x=2uv, y=u^2-v^2, z=u^2+v^2$.

b) Докажите, что числа x,y,z указанного вида являются взаимно простым решением уравнения $x^2+y^2=z^2$.

63. Решите в целых числах уравнение $x^4+y^4=z^2$.

64. Решите в целых числах систему уравнений: $\begin{cases} xz-2yt=3, \\ xt+yz=1. \end{cases}$

11. Докажите, что при нечетном n, большем 1, сумма $1^n + 2^n + ... + (n-1)^n \vdots n$.

12. Докажите, что при простом $p \geq 5$ числитель дроби, получающейся после приведения к общему знаменателю выражения $1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p-1}$, делится на

a) p;

b) p^2.

13. Пусть p и q – натуральные числа такие, что $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$. Докажите, что число p делится на 1979.

14. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

15. Докажите, что число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n является четным числом.

16. Числа от 1 до $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Докажите, что множества остатков при делении на $2n$ попарных сумм чисел каждой группы (включая суммы вида $a + a$) совпадают.

17. Пусть $S(n)$ - сумма всех натуральных делителей числа n, отличных от n. Докажите, что уравнение $S(n) = 1\,000\,000$ имеет менее 1 500 000 натуральных решений.

18. Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из совокупности чисел 1, 2, ..., 1982 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?

9. СРАВНЕНИЯ

1. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n \underset{2}{\equiv} 1$, $n \underset{3}{\equiv} 2$, $n \underset{4}{\equiv} 3$, $n \underset{5}{\equiv} 4$, $n \underset{6}{\equiv} 5$.

2. Докажите, что для любого натурального a, взаимно простого с 10, найдется число, десятичная запись которого состоит из одних единиц, делящееся на a.

3. Докажите, что при любом натуральном n число $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$.

4. Докажите, что при целом a и натуральном n число $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2}$ делится на $a^2 - a + 1$.

5. Пусть p и q – последовательные нечетные числа. Докажите, что $p^p + q^q$ делится на $p + q$.

6. Докажите, что 1985!!+1986!! делится на 1987.

7. Докажите, что к любому натуральному числу можно приписать несколько цифр слева так, что результат будет делиться на 1993.

8. Найдите все натуральные числа a для которых существует число из одних единиц, делящееся на a.

9. Натуральные числа m и n взаимно просты. Докажите, что найдется натуральное k такое, что

   a) число $mk - 1$ делится на n;

   b) число $m^k - 1$ делится на n.

10. Докажите, что из n целых чисел можно выбрать несколько таких, что их сумма делится на n.

11. В Тяпляпии 1 тяп равен 1001 ляпу. В кошельке Хрюнзеля есть 1998 тяпов, а в кассе магазина сколько угодно тяпов и всего 1

ляп. Докажите, что Хрюнзель может купить в этом магазине несколько хряпок, каждая из которых стоит 1999 ляпов, правильно рассчитавшись с кассой магазина.

12. Есть 100 купюр достоинством a и b тугриков, где $a, b \le 100$ и $a \ne b$, причем имеются купюры и того, и другого достоинства. Докажите, что можно купить без сдачи несколько задачников по теории чисел ценой 101 тугрик каждый и порвать их в клочья.

13. Последовательность натуральных чисел задана соотношениями $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Докажите, что при всех n числа x_n и n взаимно просты. (*СПб97*)

14. Известно, что некоторое число представимо в виде суммы двух полных квадратов двумя различными способами. Докажите, что это число не является простым.

30

10. СПУСК

1. Докажите, что уравнение $x^2+y^2=7z^2+7t^2$ не имеет ненулевых целочисленных решений.

2. Решите в целых числах уравнение $x^2+y^2+z^2=2xyz$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^3-2y^3-4z^3=0$.

4. Решите в целых числах уравнение $5x^3+11y^3+13z^3=0$.

5. Докажите, что уравнение $x^3+y^3=7\cdot 8^k$ не имеет решений в целых числах для любого натурального k.

6. Докажите, что число $16^n\cdot 31$ нельзя представить в виде суммы 15 четверных степеней целых чисел.

7. Найдите все решения уравнения в рациональных числах: $x^2+y^2+z^2+x+y+z=1$.

8. Из 13 гирь натурального веса любые 12 можно разложить на две кучи равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.

9. Из 13 гирь произвольного веса (не обязательно рационального) любые 12 можно разложить на две кучи равного веса по 6 гирь в каждой. Докажите, что все гири имеют одинаковый вес.

10. Пусть a,b - натуральные числа такие, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ является квадратом целого числа.