О применении одного неравенства

Н. СЕДРАКЯН

ЧАСТО встречаются задачи на доказательство неравенств. Некоторые из них требуют оригинального подхода, другие можно решить, пользуясь известными методами и неравенствами.

В этой статье мы расскажем об одном неравенстве и его обобщениях. Покажем, как с их помощью можно доказать алгебраические и геометрические неравенства.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Докажите двойное неравенство*

$$\frac{12}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d} \le \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$$

где a, b, c, d — положительные числа.

Решение. Легко убедиться в верности неравенства

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0. \quad (1)$$

Несколько раз применяя неравенство (1), получим:

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right);$$

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+\left(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}\right)+\left(\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}\right) \ge \frac{12}{a+b+c+d}.$$

Вторая задача похожа на первую.

Задача 2. *Докажите неравенство*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{9}{2(a+b+c)},$$

где a, b, c — положительные числа.

Решение. Оказывается, что

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \ge \frac{9}{x+y}, \text{ где } x>0,\ y>0 \quad (2)$$

(проверьте это самостоятельно). Значит,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{4}{a+b+b+c}+\frac{1}{a+c} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Решения этих двух задач очень похожи. Появилась идея: а может быть, верно более общее неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2} \ge \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}, \quad (3)$$

где $b_1>0$, $b_2>0$? Неравенство (3) сразу приводится к виду

$$\frac{a_1^2 b_2}{b_1}+\frac{a_2^2 b_1}{b_2} \ge 2a_1 a_2,$$

что очевидно (причем равенство достигается при $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$).

Теперь уже не стоит большого труда методом математической индукции доказать обобщение неравенства (3):

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}, \quad (4)$$

где $b_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Замечание. В неравенстве (4) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Получилось очень красивое неравенство. Но оказывается, что это не что иное, как одна из форм записи неравенства Коши-Буняковского. Действительно, подставляя $x_i=a_i/\sqrt{b_i}$ и $y_i=\sqrt{b_i}$, получим неравенство Коши-Буняковского:

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2\right) \ge \left(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\right)^2.$$

Но форма записи (4) оказывается более удобной при решении некоторых задач.

Попробуем получить более общее неравенство. Есть идея: вместо a_i^2 напишем произведение двух множителей. Пробуя доказать получившееся неравенство при $n=2$, получаем новое условие. Оказывается, для

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{c_n},\ \frac{b_1}{c_1} \ge \frac{b_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{b_n}{c_n}$$

(или, можно сказать, $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ одинаково упорядочены) и $c_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, верно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i\cdot b_i}{c_i} \ge \frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \quad (5)$$

При $a_i=b_i$ неравенство (5) обращается в (4).

Для доказательства (5) нам понадобится следующий простой факт, который можно доказать методом математической индукции: если

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \ge \ldots \ge \frac{a_n}{c_n}$$

$$(c_i>0,\ i=1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{c_1+c_2+\ldots+c_k} \ge \frac{a_n}{c_n}$$

для любого $k=1, 2, \ldots, n$.

Неравенство (5) докажем математической индукцией по n. При $n=2$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2} \ge \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{c_1+c_2},$$

или же

$$(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_2-b_2c_1) \ge 0,$$

что вытекает из условия

$$\frac{a_1}{c_1} \ge \frac{a_2}{c_2} \text{ и } \frac{b_1}{c_1} \ge \frac{b_2}{c_2}.$$

Пусть (5) верно для $n=k$. При $n=k+1$ имеем

$$\frac{a_1b_1}{c_1}+\frac{a_2b_2}{c_2}+\ldots+\frac{a_kb_k}{c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}} \ge \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}.$$

Из факта, указанного выше, и доказанного неравенства при $n=2$ следует, что

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)(b_1+b_2+\ldots+b_k)}{c_1+c_2+\ldots+c_k}+$$

$$+\frac{a_{k+1}b_{k+1}}{c_{k+1}}\geq$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{k+1})(b_1+b_2+\ldots+b_{k+1})}{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}.$$

Аналогично можно доказать, что если $\frac{a_i}{c_i}$ и $\frac{b_i}{c_i}$ обратно упорядочены, то неравенство (5) меняет знак:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{c_i}\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}. \qquad (5.1)$$

Замечание. При условиях $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$, $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$ и $0<c_1\leq c_2\leq\ldots\leq c_n$ выполняются условия неравенства (5), и значит, верно это неравенство.

Частными случаями неравенств (4) и (5) являются следующие известные неравенства:

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$, при условии $c_i>0$ ($i=1,2,\ldots,n$);

2) $$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2; \qquad (6)$$

3) $$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i, \qquad (7)$$

при условиях $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n$ и $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n$ (*неравенство Чебышева*).

Оказывается, (5) тоже является формой записи классического неравенства. Заменой

$$a_i=c_ix_i,\ b_i=c_iy_i,\ p=\frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n}c_i}$$

оно приводится к одному из вариантов неравенства Чебышева: если x_i и y_i одинаково упорядочены, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ($p_i>0$), то для средних $Mz=\sum_{i=1}^{n}z_ip_i$ выполнено

$$Mx\cdot My\leq M(xy).$$

Получилось, что неравенство Коши-Буняковского есть частный случай неравенства Чебышева.

С помощью неравенств (4) и (5) можно решить много интересных задач. Рассмотрим, например, такую.

Задача 3. *Для положительных чисел* x_1, x_2, x_3 *докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{3}{2}.$$

Первое решение. В задачах подобного рода иногда бывает удобно вместо $\frac{a}{b}$ написать $\frac{a^2}{ab}$:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}=$$

$$=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\frac{x_3^2}{x_3(x_1+x_2)}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}\geq\frac{3}{2}$$

(здесь мы воспользовались неравенством $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leq x_1^2+x_2^2+x_3^2$).

Второе решение. Эту задачу можно свести к задаче 2, если переписать условие в следующем виде:

$$\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_2+x_3}\right)\left(\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_1}\right)+$$

$$+\left(\frac{x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2}\right)\geq\frac{3}{2}+3,$$

или же

$$\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_3+x_1}+\frac{1}{x_1+x_2}\geq$$

$$\geq\frac{9}{2(x_1+x_2+x_3)}.$$

Задача 4. *Докажите неравенство*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2,$$

где a, b, c, $d>0$.

Решение. Эта задача решается так же, как и предыдущая:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+a)}+\frac{d^2}{d(a+b)}\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно раскрыть скобки в выражении $(a+b+c+d)^2$ и применить неравенства $a^2+c^2\geq 2ac$, $b^2+d^2\geq 2bd$.

Задача 5. *Для положительных* x_1, x_2, …, x_n *докажите неравенство*

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geq 2;$$

где $n\geq 4$.

Решение. Воспользуемся той же идеей:

$$\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_n)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_1)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{x_n^2}{x_n(x_1+x_{n-1})}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)}=A_n.$$

Методом математической индукции докажем, что при $n\geq 4$ выражение $A_n\geq 2$. При $n=4$ имеем

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-$$

$$-4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=$$

$$=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2\geq 0.$$

Пусть неравенство верно для k чисел, докажем, что оно верно для $k+1$ чисел.

По предположению, имеем

$$(x_1+x_2+\ldots+(x_{i-2}+x_{i-1})+$$

$$+x_i+\ldots+x_{k+1})^2\geq$$

$$\geq 4(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{i-3}(x_{i-2}+x_{i-1})+$$

$$+(x_{i-2}+x_{i-1})x_i+\ldots+x_kx_{k+1}+x_{k+1}x_1),$$

где $x_i=\max(x_1,\ldots,x_{k+1})$; остается заметить, что $x_{i-1}x_{i-3}+x_{i-2}x_i\geq x_{i-2}x_{i-1}$.

Задача 6. *Докажите неравенство*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+$$

$$+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3},$$

где a, b, $c>0$.

Решение. Применим неравенство (4):

$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2}+$$

$$+\frac{c^4}{c^3+c^2a+ca^2}\geq$$

$$\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

(здесь мы пользовались неравенством

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}(a+b+c)^2,$$

т.е. неравенством (4) при $n=3$).

Следующие две задачи были предложены на XXII и XXIII Международных математических олимпиадах.

Задача 7. *Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA, AB. Для каких точек M величина*

$$\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$$

принимает наименьшее значение?

Решение. Преобразуем выражение и применим неравенство (4):

$$\frac{BC^2}{BC\cdot MA_1}+\frac{CA^2}{CA\cdot MB_1}+\frac{AB^2}{AB\cdot MC_1}\ge$$

$$\ge\frac{(BC+CA+AB)^2}{BC\cdot MA_1+CA\cdot MB_1+AB\cdot MC_1}=$$

$$=\frac{4p^2}{2S}=2\frac{p}{r}.$$

Следовательно, наименьшее значение $\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}$ будет равно $2\frac{p}{r}$ при

$$\frac{BC}{BC\cdot MA_1}=\frac{CA}{CA\cdot MB_1}=\frac{AB}{AB\cdot MC_1},$$

т.е. при $MA_1=MB_1=MC_1$; следовательно, M — центр вписанной окружности.

Задача 8. *Рассматривается последовательность (x_n) положительных чисел, удовлетворяющих условию $1=x_0\ge x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n\ge\ldots$ Докажите, что для любой такой последовательности существует n, при котором*

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3{,}999.$$

Решение. Применяя неравенство (4), получим

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge$$

$$\ge\frac{(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}=K_n.$$

Докажем, что существует натуральное n_0, для которого, при $n>n_0$, $K_n\ge 3{,}999$. Действительно,

$$(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})^2-$$

$$-3{,}999(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)=$$

$$=(1-[x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}])^2+$$

$$+0{,}001(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})-3{,}999x_n\ge$$

$$\ge 0{,}001(n-1)x_n-3{,}999x_n\ge 0,$$

когда $n\ge(3{,}999/0{,}001)+1$. Т.е. можно принимать $n_0=4000$.

Задача 9. *Если a_1, a_2, ..., a_n — стороны n-угольника ($n\ge3$), то*

$$\frac{a_1}{p-2a_1}+\frac{a_2}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-2a_n}\ge\frac{n}{n-2},$$

где $p=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Решение. Без ограничения общности можно допустить, что $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$, тогда $0<p-2a_1\le p-2a_2\le\ldots\le p-2a_n$.

Имея в виду замечание к неравенству (5), получим:

$$\frac{a_1\cdot1}{p-2a_1}+\frac{a_2\cdot1}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n\cdot1}{p-2a_n}\ge$$

$$\ge\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot n}{np-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)}=\frac{n}{n-2}.$$

Задача 10. *Пусть G — центр тяжести треугольника $A_1A_2A_3$, а C — описанная около него окружность. GA_1 пересекает C в точке B_1. Точки B_1 и B_2 определяются аналогично. Докажите неравенство*

$$GA_1+GA_2+GA_3\le GB_1+GB_2+GB_3.$$

Решение. Через A_1', A_2', A_3' и a_1, a_2, a_3 обозначим середины и длины сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 соответственно.

Пусть $a_1\le a_2\le a_3$, тогда легко убедиться, что $GA_3\le GA_2\le GA_1$.

Имеем: $\frac{3}{2}GA_1\cdot B_1A_1=\frac{1}{4}a_1^2$, отсюда $GB_1=\frac{1}{2}GA_1+\frac{a_1^2}{6GA}$. Итак, достаточно доказать, что

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3}\ge$$

$$\ge GA_1+GA_2+GA_3.$$

Применяя неравенство (5), получим

$$\frac{a_1^2}{3GA_1}+\frac{a_2^2}{3GA_2}+\frac{a_3^2}{3GA_3}\ge$$

$$\ge\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{GA_1+GA_2+GA_3}=$$

$$=\frac{3(GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2)}{GA_1+GA_2+GA_3}\ge$$

$$\ge GA_1+GA_2+GA_3.$$

Задача 11. *Докажите неравенство*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_ic_i\ldots d_i$$

при условии $0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$, $0\le b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$, $0\le c_1\le c_2\le\ldots\le c_n$, ..., $0\le d_1\le d_2\le\ldots\le d_n$.

Решение. Применим неравенство Чебышева:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\le$$

$$\le\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_ic_i\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i\right)\le\ldots$$

$$\ldots\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\ldots d_i.$$