2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

8 класс, 1-ші күн

1. Квадраттың бір қабырғасы p%-ға ұзартылып, ал екінші қабырғасы p%-ға қысқартылды. Пайда болған тіктөртбұрыштың ауданы квадраттың ауданының 99%-ына тең болса, p-ны табыңдар.

2. Өрнекті ықшамадаңдар: $\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$.

3. Теңдеуді шешіңдер: $x^2+x+1=\dfrac{156}{x^2+x}$.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8 класс, 1 день

1. Одна сторона квадрата увеличена на p%, а другая уменьшена на p%. Площадь полученного прямоугольника составляет 99% от площади квадрата. Найдите p.

2. Упростите выражение: $\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$.

3. Решите уравнение: $x^2+x+1=\dfrac{156}{x^2+x}$.

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

8 класс, 2-ші күн

4. Оң бүтін a, b, c сандары

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 1000$$

тепе-теңдігін қанағаттандыратын болса, $a + b + c$ қосындысын табыңдар.

5. A, B, C, D, E жануарларының әрқайсысы немесе қасқыр, немесе ит екені белгілі. Иттер әрқашан шын, ал қасқырлар әрқашан өтірік сөйлейді. A: «B – ит», – деді. C: «D – қасқыр», – деді. E: «A – ит», – деді. B: «C – қасқыр», – деді. D: «B мен E – әр түрлі жануарлар», – деді. A, B, C, D, E жануарларының арасында қанша қасқыр бар екенін анықтаңдар.

6. N жұмысшы N тонна өнім шығару үшін N күн бойы N сағаттан жұмыс істеуі тиіс. M жұмысшы M күн бойы M сағаттан жұмыс істесе, қанша тонна өнім шығарады?

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8 класс, 2 день

4. Целые положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению:

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 1000.$$

Найдите сумму $a + b + c$.

5. Каждое из пяти животных A, B, C, D, E – либо волк, либо собака. Собаки всегда говорят правду, а волки всегда врут. A утверждает, что B – собака. C утверждает, что D – волк. E утверждает, что A – собака. B утверждает, что C – волк. D утверждает, что B и E – животные разных видов. Найдите количество волков среди животных A, B, C, D, E.

6. N рабочих производят N тонн продукта, работая N дней по N часов. Сколько тонн продукта произведут M рабочих, работая M дней по M часов?

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

9 класс, 1-ші күн

1. 10-нан аспайтын натурал m және n сандарының көмегімен $\frac{m}{n}$ түрінде қанша әртүрлі сан жасай аламыз? Мысалы, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ болатынын ұмытпаңдар.

2. Әр түзу дәл төрт басқа түзумен қиылысатындай етіп, жазықтықта, ең көп дегенде, қанша түзу жүргізе аламыз?

3. $4^{50}\cdot5^{105}$ санының ондық жазбасында қанша цифр бар?

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 1 день

1. Сколько различных чисел можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, не превосходящие 10? Заметьте, что, например, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы каждая прямая пересекала ровно четыре другие?

3. Сколько цифр содержит десятичная запись числа $4^{50}\cdot5^{105}$?

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

9 класс, 2-ші күн

4. Би үйірмесіне 6 ұл бала және 6 қыз бала қатысады. Оларды қанша әдіспен ұл-қыз парларына бөлуге болады?

5. Қаржы министрі мемлекетте айналысқа тек қана 33 және 60 ақша бірлігіне тең монеталар түсетінін бекітті. Егер олардың әрқайсысында монеталардың әр түрі жеткілікті мөлшерде болса, сатып алушы сатушыға қандай ең аз оң соманы төлей алады?

6. Клубтың жиырма мүшесі бар. Жаңа жылда олардың әрқайсысы клубтың 10 мүшесіне ашық құттықтау хатын жолдағаны белгілі болса, бір-біріне ашық құттықтау хатын жолдаған екі адам табылатынын дәлелдеңдер.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

9 класс, 2 день

4. В танцевальном кружке 6 парней и 6 девушек. Сколькими способами их можно разбить на пары парень-девушка?

5. Министр финансов решил, что в государстве должны быть в обращении только монеты достоинством 33 и 60 денежных единиц. Какую минимальную положительную сумму может заплатить покупатель продавцу за товар при условии, что у каждого из них достаточно монет и того, и другого достоинства?

6. В клубе двадцать человек. На Новый год каждый послал поздравительные открытки десяти другим членам клуба. Докажите, что какие-то два человека обменялись открытками.

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

10 класс, 1-ші күн

1. Бөлменің тіктөртбұрыш пішіндес еденіне өлшемдері бірдей квадрат плиткалар төселген. Еденнің шеткі жиектері қызыл плиткалармен көмкеріліп, ал ішкі ауданы жасыл плиткалармен жабылған. Қолданылған қызыл және жасыл плиткалардың саны бірдей болса, барлығы қанша плитка төселген?

2. a параметріне тәуелді етіп, теңдеулер жүйесінің нақты (x,y) шешімдер парларының санын табыңдар:
$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}.$$

3. Кез келген бүтін $k \geq 6$ үшін квадратты k квадратқа (олардың ішінде кейбіреулері өзара тең болуы мүмкін) бөлуге болатынын дәлелдеңдер.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

10 класс, 1 день

1. Прямоугольный участок пола в помещении покрыт квадратной плиткой одинакового размера. На границе участка использовали плитку красного цвета, а внутри участка – зеленого. Понадобилось поровну плиток красного и зеленого цвета. Сколько всего плиток могло быть использовано?

2. В зависимости от параметра a найдите число вещественных решений (x,y) системы:
$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}.$$

3. Докажите, что для любого натурального $k \geq 6$ квадрат можно разбить на k квадратов (среди которых могут быть одинаковые).

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

10 класс, 2-ші күн

4. Қыз бала бауыры екеуі үшбұрыш пішінді пиццаны былайша бөліп жеуге келісті. Алдымен қыз үшбұрыш ішінен кез келген нүктені таңдайды. Сонан соң бауыры сол нүкте арқылы өтетін түзу бойымен пиццаны екіге бөліп, қалаған бөлігін алады. Үшбұрыштың қай нүктесі, қыз оны таңдаған жағдайда, оған мүмкіндігінше ауданы ең үлкен пицца бөлігін алуға кепілдік береді?

5. Оң бүтін санның факториалының ондық жазбасы дәл он бір нөлмен аяқталуы мүмкін бе? ($n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ екенін естеріңізге саламыз.)

6. Нақты c және d сандары төмендегі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$\begin{cases} c^3-3c^2+5c-17=0 \\ d^3-3d^2+5d+11=0 \end{cases}.$$

Олай болса, $c + d$ қосындысын табыңдар.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

10 класс, 2 день

4. Брат и сестра испекли пиццу в форме равностороннего треугольника. Сестра выбирает точку внутри треугольника, а брат делает прямой разрез, проходящий через эту точку, и берет себе понравившийся кусок. Какую точку должна выбрать сестра, чтобы гарантировать себе кусок максимально возможной площади?

5. Может ли десятичная запись факториала натурального числа оканчиваться одиннадцатью нулями? Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.

6. Вещественные числа c и d удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} c^3-3c^2+5c-17=0 \\ d^3-3d^2+5d+11=0 \end{cases}.$$

Найдите сумму $c + d$.

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

11 класс, 1-ші күн

1. Теңдеудің барлық нақты түбірлерін табыңдар: $\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=45x+x^2$.

2. $|2n^2 + 9n + 4|$ саны жай сан болатын, барлық бүтін n санын табыңдар.

3. Әрқайсысының радиустары 1-ге тең үш шеңбер O нүктесінде қиылысады. Шеңберлер бұл нүктеден басқа A, B, C нүктелерінде бір-бірімен тағы қиылысады. ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің радиусы 1-ге тең екенін дәлелдеңдер.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

11 класс, 1 день

1. Найдите все вещественные корни уравнения: $\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=45x+x^2$.

2. Найдите все целые n, для которых число $|2n^2 + 9n + 4|$ – простое.

3. На плоскости три окружности радиуса 1 имеют общую точку O. Обозначим через A, B, C другие точки пересечения этих окружностей друг с другом. Докажите, что радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 1.

2012 жылғы оқушылардың Республикалық математикалық олимпиадасының II кезеңі

Жұмыс уақыты – 4 сағат
Әр есеп 7 ұпайға бағаланады

11 класс, 2-ші күн

4. Әртүрлі алты қорап бар. Бірдей он екі монетаны, осы қораптарға, ең көп дегенде, біреуі ғана бос қалатындай етіп, қанша әдіспен салуға болады?

5. f функциясы кез келген нақты x саны үшін $f(\cos x) = \cos(17x)$ тепе-теңдігін қанағаттандырады. Осы функцияның кез келген нақты x саны үшін

$$f(\sin x) = \sin(17x)$$

тепе-теңдігін қанағаттандыратынын дәлелдеңдер.

6. Координаттар жазықтығында кез келген $-1 \leq t \leq 1$ үшін $t^2 + yt + x \geq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратынын (x,y) нақты сандар парларының жиынын белгілеңдер.

II этап Республиканской олимпиады школьников по математике 2012 года

Время работы – 4 часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

11 класс, 2 день

4. Имеется шесть различных кошельков. Сколькими способами можно разложить в них двенадцать одинаковых монет, чтобы пустым остался максимум один кошелек?

5. Функция f удовлетворяет соотношению

$$f(\cos x) = \cos(17x)$$

для любого вещественного x. Докажите, что она также удовлетворяет соотношению

$$f(\sin x) = \sin(17x)$$

для любого вещественного x.

6. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x,y), для которых при любом $-1 \leq t \leq 1$ справедливо неравенство $t^2 + yt + x \geq 0$.