Algorytmy numeryczne

Zadanie 3
Dawid Bińkuś & Oskar Bir & Mateusz Małecki
grupa 1 tester-programista

9 Grudzień 2018

1 Majority/Consensus problem

Sprawozdanie prezentuje analizę problemu przeprowadzenia głosowania większościowego, przedstawionego w sposób następujący:
Dane jest N agentów, o trzech możliwych stanach: $\{Y, N, U\}$, znaczące kolejno: agent głosujący na TAK, agent głosujący na NIE oraz agent niezdecydowany. W każdym kroku omawianego problemu losowanych jest dwóch agentów z równomiernym prawdopodobieństwem ($\frac{2}{n \cdot (n-1)}$). Następnie dochodzi do zmiany stanu wybranych agentów według następujących reguł przejść stanów:

- $\{Y, U\} \to \{Y, Y\}$,
- $\{Y, N\} \to \{U, U\}$,
- $\{N, U\} \to \{N, N\}$,

Kroki wykonywane są, dopóki wszyscy agenci nie będą jednakowego stanu.
Dla danego prawdopodobieństwa $P_{\#Y,\#N}$, niech $\#N$ oznacza ilość agentów głosujących na NIE, a $\#Y$ ilość agentów głosujących na TAK. Program przygotowany w ramach projektu, ma na celu obliczenie prawdopodobieństwa zagłosowania na TAK przy liczbie agentów równej N i określonym stanie początkowym. Do jego obliczenia wykorzystany został układ równań liniowych obliczony za pomocą 3 różnych algorytmów:

- Algorytm Gaussa z częściowym wyborem elementu początkowego (nazywany dalej PG) oraz jego wariant z optymalizacją dla macierzy rzadkich (nazywany dalej PGS)
- Algorytm Jacobiego z postacią iteracyjną:
  $x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} {x_j}^k + b_i}{a_{ii}}, i = 1, 2, ..., n, j \neq i.$
- Algorytm Gaussa-Seidela z postacią iteracyjną:
  $x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} {x_j}^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} {x_j}^{(k)} + b_i}{a_{ii}}$

2 Implementacja i możliwość stosowania metod iteracyjnych

2.1 Generowanie układu równań dla danej liczby agentów

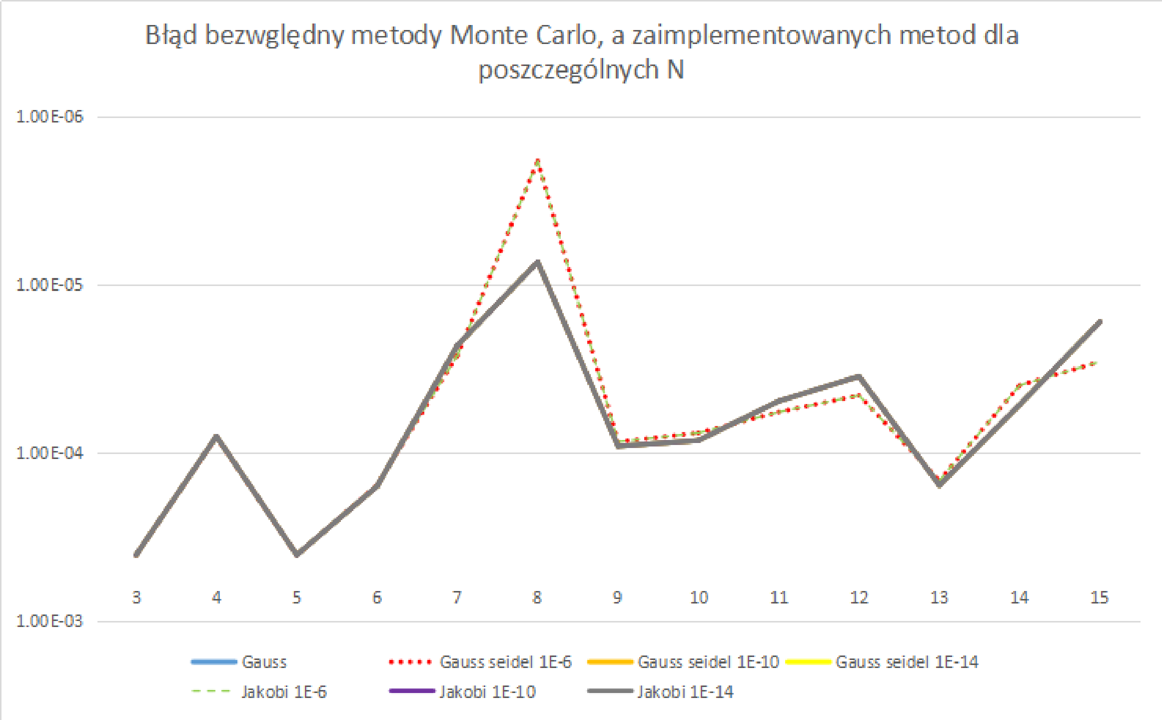
Generowanie układu równań dla danego N odbywa się w sposób następujący:

1. Określenie wszystkich możliwych przypadków (ilość agentów $\#Y$ oraz ilość agentów $\#N$),
2. Wyliczenie wszystkich możliwych kombinacji bez powtórzeń za pomocą Symbolu Newtona $\binom{N}{2}$,
3. Wygenerowanie równań dla poszczególnych przypadków,
4. Osadzenie równań w macierzy
5. Wypełnienie wektora B zerami z wyjątkiem ostatniej wartości (gdyż ostatni przypadek jest zawsze przypadkiem pewnym, tj $P_{\#Y=N,\#N=0} = 1$)

2.2 Prawidłowość implementacji

By zweryfikować poprawność implementacji zarówno generowania macierzy jak i obliczania stworzonego w ten sposób układu równań, wykonane zostały testy dla $N \in [3, 15]$, których zadaniem było obliczenie wszystkich możliwych prawodopodobieństw i zestawienie ich z prawdopodobieństwem wyliczonym za pomocą metody MonteCarlo w ilości iteracji = 1000000 Błędy osiągnięte za pomocą metod Gaussa 1a osiągają wartości rzędu 1, co biorąc pod uwagę niedoskonałość metody MonteCarlo jest wynikiem jak najbardziej zadowalającym.

Rysunek 1: Wykres reprezentujący błąd bezwzględny metod Gaussa oraz metod iteracyjnych względem metody MonteCarlo



(a)

2.3 Metody iteracyjne a problem

Wnioskując z wykresu 1a możemy śmiało stwierdzić, iż metody iteracyjne są jak najbardziej słusznym sposobem na rozwiązanie problemu. Jednakże, najistotniejszym czynnikiem w przypadku ich działania jest zakładana dokładność obliczeń, tj $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < p$, gdzie $p =$ zadana precyzja. W przypadku zadanej dokładności równej 10^{-6} zauważyć można że, różnice względem wartości wyliczonej za pomocą metody MonteCarlo są większe niż w przypadku metod iteracyjnych z większą zadaną dokładnością $(10^{-10}, 10^{-14})$.

Wniosek 1 *Metody iteracyjne umożliwiają rozwiązanie problemu aczkolwiek, by osiągnąć dokładniejsze wyniki, należy zwiększyć dokładność, a co za tym idzie - liczbę iteracji, co znacząco wydłuża czas działania algorytmu.*

3 Analiza wyników i wydajność zaimplementowanych algorytmów

3.1 Analiza wyników

Błąd bezwzględny dla poszczególnych metod był wyliczany w sposób następujący:

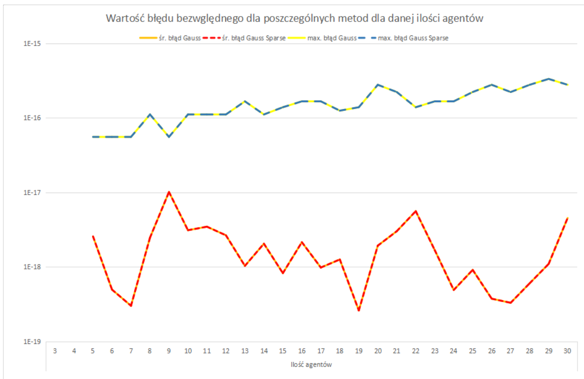
1. Wygenerowana została macierz A oraz wektor B
2. Za pomocą danego algorytmu obliczany zostaje wektor X (wynikowy)
3. Wykonujemy operację $A \cdot x = b'$
4. Wyliczany jest błąd bezwzględny kolejnych wartości wektora b' względem wektora b
5. Jako błąd przechowywana jest największa wartość oraz jej średnia

3.1.1 Gauss oraz Gauss z optymalizacją dla macierzy rzadkich

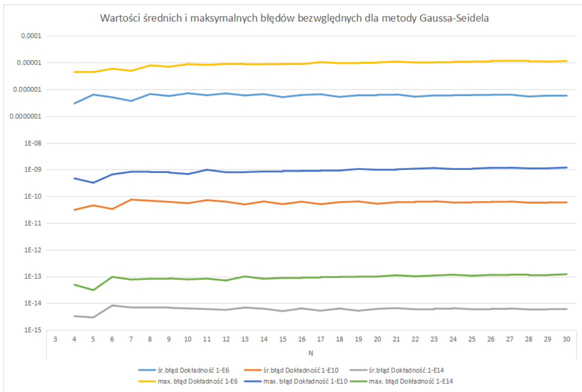
Przeanalizujmy wykres 2a. Zostało na nim przedstawione zestawienie wyników dla wartości średniej oraz maksymalnej błędu bezwzględnego. Z wartości na nich ukazanych wynika, że w przypadku metod PG oraz PGS, zarówno maksymalny jak i średni błąd jest identyczny.

Wniosek 2 *Algorytm PG oraz PGS osiągają taką samą dokładność. Dodanie optymalizacji dla macierzy rzadkich nie ma żadnego wpływu na końcowy wynik.*

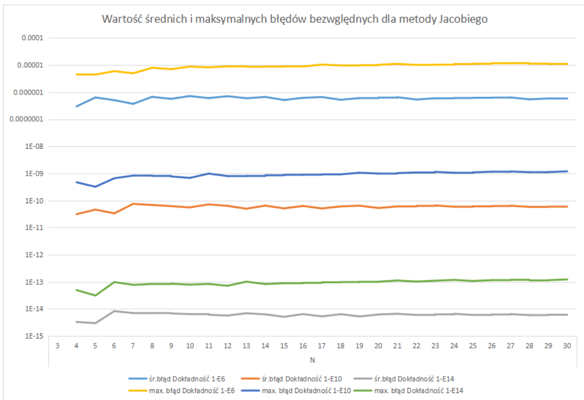
Rysunek 2: Wykresy reprezentujące czas wykonania i błędy bezwzględne zaimplementowanych algorytmów



(a)



(b)



(c)

3.1.2 Algorytmy iteracyjne

Przeanalizujmy wykresy 2b oraz 2c. Prezentują one maksymalny oraz średni błąd bezwzględny dla różnej zadanej dokładności: $10^{-6}, 10^{-10}$ oraz 10^{-14}. Wnioski z nich są następujące:

Wniosek 3 *Zarówno algorytm Jacobiego jak i Gaussa-Seidela oferują taką samą dokładność, w zależności od tego jaka precyzja była zadana. Warunek kończący iterowanie był zależny od maksymalnego błędu między kolejnymi iteracjami - stąd mniejszy średni błąd bezwzględny.*

3.2 Wydajność

3.2.1 Metody PG oraz PGS

Przeanalizujmy wykres XD. Zauważyć na nim można znaczną przewagę algorytmu PGS względem PG w czasie wykonywania algorytmu. Wynika to ze specyfiki działania wariantu PGS - algorytm ten pomija redukcję elementów w wierszu w przypadku gdy wybrany na początku element jest równy zeru.

Wniosek 4 *Wariant PGS algorytmu Gaussa jest wydajniejszy niż standardowy wariant PG. Zestawiając ten wniosek z wnioskiem* **??** *stwierdzić można, iż wariant PGS zapewnia o wiele lepszą wydajność nie mając żadnego wpływu na poprawność zwracanych wyników*

3.2.2 Metody iteracyjne

W przypadku metod iteracyjnych, należy rozważyć osobno algorytmy dla różnej zadanej precyzji. Jednakże we wszystkich przypadków, zależność jest następująca: Metoda Gaussa-Seidela w każdym przypadku (wraz z wzrostem N) ma krótszy czas wykonania względem metody Jacobiana.

Wniosek 5 *Metoda Gaussa-Seidela jest wydajniejsza od metody Jacobiana - wynika to ze sposobu działania obu tych algorytmów. Metoda Jacobiana by osiągnąć żądaną precyzję musi wykonać o wiele więcej iteracji niż metoda Gaussa-Seidela.*

3.2.3 Podsumowanie

4 Podział pracy

Dawid Bińkuś	**Oskar Bir**	**Mateusz Małecki**
Implementacja algorytmu PG oraz PGS	Implementacja algorytmu Gaussa-Seidela	Implementacja algorytmu Jacobiego
Przygotowanie sprawozdania	Przygotowanie testów i ich uruchomienie	Praca nad strukturą projektu
Implementacja algorytmu generowania macierzy	Przygotowanie wykresów końcowych	Implementacja symulacji MonteCarlo