



Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Fakultet primijenjene matematike i informatike

Sveučilišni diplomski studij matematike
modul: matematika i računarstvo

Parametrizirana metoda redukcije modela bazirana na balansiranom odsijecanju i greedy pristupu

Seminarski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović

Student: Antonio Ištvanović

Osijek, 2026

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Parametarski model	3
2.1	Linearni vremenski invarijantan sustav	4
2.2	Stabilnost sustava	4
3	Lokalna redukcija modela (BT)	5
3.1	Balansirano odsijecanje za fiksne parametre	5
3.2	Lokalna redukcija	5
3.3	Numerička provjera balansiranosti sustava	6
3.4	Pad Hankelovih singularnih vrijednosti	7
4	Galerkinova projekcija	8
5	H_2 norma i mjera pogreške	8
5.1	H_2 norma (implementacija <code>h2_norm</code>)	8
5.2	Sustav pogreške i H_2 pogreška (implementacija <code>h2_error</code>)	9
6	Greedy algoritam	9
6.1	Greedy odabir najgoreg parametra	10
7	Numerički rezultati	12
7.1	Prostorna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške	12
7.2	Greedy konvergencija	13
7.3	Finalna reducirana baza	14
7.4	Globalna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške	14
7.5	Poboljšanje aproksimacije u okolini greedy točke (before/after)	14
8	Zaključak	18

1 Uvod

U ovom projektu prikazana je redukcija parametarskog sustava korištenjem greedy pristupa za odabir parametara i konstrukciju globalne projekcijske baze. Temelj projekta je sustav koji ovisi o dva parametra, a cilj je bio konstruirati reducirani model manjeg reda koji dobro aproksimira ponašanje originalnog sustava za različite vrijednosti parametara.

Za odabrane vrijednosti parametara provodimo lokalnu redukciju metodom balansiranog odsijecanja, a njome dobivamo lokalne reducirane baze. Nakon toga, greedy algoritmom iterativno spajamo lokalne baze u jednu globalnu bazu, pri čemu se u svakoj iteraciji analizira pogreška aproksimacije i odabire se parametar za koji je ta pogreška najveća.

Kvaliteta reduciranog modela ocjenjuje se pomoću H2 pogreške, koja se koristi kao mjerilo razlike između punog i reduciranog modela.

2 Parametarski model

Promatramo sustav opisan sljedećim jednadžbama:

$$\dot{x}(t) = A(p_1, p_2)x(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

gdje je $x(t)$ vektor stanja, $u(t)$ ulazni vektor, a $y(t)$ izlazni vektor sustava. Sustav ovisi o dva realna parametra p_1 i p_2 , a utjecaj tih parametara uveden je kroz matricu sustava $A(p_1, p_2)$.

Parametarska ovisnost matrice sustava zadana je u obliku

$$A(p_1, p_2) = A_0 + p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

gdje su A_0 , A_1 i A_2 konstantne matrice. Matrica A_0 odabrana je tako da sustav bude stabilan, a to je osigurano tako što je njezina dijagonala negativno dominantna, dok matrice A_1 i A_2 opisuju utjecaj parametara na dinamiku sustava, odnosno, kako se dinamika sustava mijenja promjenom parametara. Njihov utjecaj je ograničen na način da te dvije matrice nisu velike, skalirane su malim koeficijentima, a time smo postigli slab utjecaj parametara. Dakle, parametri mijenjaju dinamiku sustava, ali ne u toj mjeri da se naruši stabilnost sustava za promatrani raspon vrijednosti parametara. Ulazna i izlazna matrica B i C u ovom radu ne ovise o parametrima.

Parametarski prostor opisan je diskretnom mrežom 11 vrijednosti parametara p_1 i p_2 . Za svaku točku mreže konstruiramo puni model, zatim odgovarajući reducirani model, nakon čega računamo pogrešku između punog i reduciranog modela pomoću H2 pogreške. Na temelju tih vrijednosti procjenjuje se koliko dobro reducirani model aproksimira izvorni sustav na promatranom parametarskom prostoru.

Cilj je dobiti jednu projekcijsku bazu koja dobro radi za sve parametre s mreže, a da je red modela manji.

2.1 Linearni vremenski invarijantan sustav

Za fiksnu vrijednost parametara (p_1, p_2) sustav poprima oblik linearnog vremenski invarijantnog (LTI) sustava.

Definicija 2.1. *Linearni vremenski invarijantni (LTI) sustav definiran je jednadžbama*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{1}$$

gdje je $x(t) \in \mathbb{R}^n$ stanje sustava, $u(t) \in \mathbb{R}^k$ ulaz, a $y(t) \in \mathbb{R}^m$ izlaz.

Primjenom Laplaceove transformacije na jednadžbe koje opisuju sustav dobivamo funkciju prijenosa

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D,\tag{2}$$

koja opisuje kako ulaz utječe na izlaz sustava.

U ovom implementiranom parametarskom modelu $D = 0$.

2.2 Stabilnost sustava

Stabilnost sustava je nužan uvjet za redukciju sustava algoritmom balansirano odsijecanja.

Definicija 2.2. *Za LTI sustav kažemo da je asimptotski stabilan ukoliko za svaki početni uvjet $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da $x(t) \rightarrow 0$ kako $t \rightarrow \infty$.*

Za asimptotski stabilan LTI sustav postoje Gramiani upravljivosti i osmotrivosti, koji su definirani kao rješenja Lyapunovljevih jednadžbi

$$AP + PA^T + BB^T = 0,\tag{3}$$

$$A^TQ + QA + C^TC = 0.\tag{4}$$

Ove jednadžbe čine osnovu algoritma balansirano odsijecanja.

3 Lokalna redukcija modela (BT)

Kako bismo u ovom radu mogli riješiti parametarski problem, prvo ćemo promotriti redukciju sustava za jednu fiksnu kombinaciju parametara. Za odabrane vrijednosti parametara p_1 i p_2 , matrica sustava $A(p_1, p_2)$ poprima konkretne numeričke vrijednosti pa se sustav može promatrati kao linearno vremenski invarijantan (LTI) sustav.

3.1 Balansirano odsijecanje za fiksne parametre

Za tako dobiveni LTI sustav možemo primijeniti metodu balansiranog odsijecanja za redukciju modela. Ovom metodom dolazimo do reduciranog modela nižeg reda koji dobro aproksimira ponašanje originalnog sustava za promatranu vrijednost parametara.

Metoda balansiranog odsijecanja temelji se na Gramianima upravljivosti i osmotrivosti koji se za stabilan LTI sustav dobivaju kao rješenja Lyapunovljevih jednadžbi

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0.$$

Balansiranjem sustava traži se transformacija koordinata u kojoj su oba Gramiana jednaka i dijagonalna,

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

gdje su σ_i Hankelove singularne vrijednosti poredane silazno. Velike vrijednosti odgovaraju stanjima koja su istovremeno dobro upravljiva i dobro mjerljiva, dok male vrijednosti označavaju stanja s malim utjecajem na ulazno–izlazno ponašanje sustava.

Odsijecanjem stanja povezanih s malim Hankelovim singularnim vrijednostima dobiva se reducirani model niže dimenzije koji zadržava dominantnu dinamiku sustava.

3.2 Lokalna redukcija

Reducirani model dobiven balansiranim odsijecanjem vrijedi za konkretnu fiksnu vrijednost parametara. Takav model dobro opisuje dinamiku sustava u toj točki parametarskog prostora, ali ne mora nužno biti prikladan za druge kombinacije parametara.

Lokalne projekcijske baze dobivene na odabranim parametrima koriste se unutar greedy algoritma za konstrukciju globalne projekcijske baze, čime se dobiva reducirani model koji dobro aproksimira originalni sustav na cijelom parametarskom prostoru.

U implementaciji balansirano odsijecanje realizirano je tzv. square-root postupkom, pri čemu se Gramiani prvo faktoriziraju Choleskyjevom dekompozicijom, a zatim singularnom dekompozicijom dolazimo do projekcijskih baza. Ovaj pristup je numerički stabilan i ekvivalentan klasičnom postupku balansiranja i odsijecanja.

3.3 Numerička provjera balansiranosti sustava

Numerička provjera provedena je za parametarsku točku $p = (0, 0)$ koja predstavlja početni model sustava prije pokretanja greedy algoritma. Ova točka služi kao polazište za konstrukciju globalne reducirane baze i omogućuje uvid u osnovna svojstva balansiranog sustava.

Implementirana je pomoćna funkcija `bt_diag`, a ideja je numerički provjeriti jedno od temeljnih svojstava balansiranog sustava, a to je jednakost i dijagonalnost Gramiana upravljivosti i osmotrivosti.

Prvo računamo Gramiane originalnog sustava rješavanjem Lyapunovljevih jednadžbi, zatim radimo Cholesky dekompoziciju Gramiana čime ih pripremamo za daljnju analizu. Zatim nad produktom dobijenih faktoriziranih matrica primjenjujemo SVD dekompoziciju kojom dobivamo Hankelove singularne vrijednosti.

Na temelju poretka važnih smjerova dinamike sustava kojeg znamo iz Hankelovih singularnih vrijednosti, konstruira se transformacija koja originalni sustav preslikava u novu koordinatnu bazu u kojoj su Gramiani jednaki i dijagonalni. Takav oblik znači da je svako stanje jasno odvojeno po svojoj važnosti i možemo ih uspoređivati.

Reducirani model dobiva se zadržavanjem prvih r stanja koja imaju najveće Hankelove singularne vrijednosti, dok se preostala stanja odbacuju jer minimalno utječu na ponašanje sustava.

Kako bismo numerički potvrdili da je sustav uspješno balansiran ponovno računamo Gramiane reduciranog sustava.

Za promatrani reducirani sustav dobiveni su sljedeći rezultati:

$$P_b = \begin{bmatrix} 2.2854 & -1.70 \times 10^{-10} & 2.61 \times 10^{-10} \\ -1.70 \times 10^{-10} & 0.0231 & 9.98 \times 10^{-10} \\ 2.61 \times 10^{-10} & 9.98 \times 10^{-10} & 0.00445 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$Q_b = \begin{bmatrix} 2.2854 & -2.86 \times 10^{-10} & -3.53 \times 10^{-10} \\ -2.86 \times 10^{-10} & 0.0231 & -1.10 \times 10^{-9} \\ -3.53 \times 10^{-10} & -1.10 \times 10^{-9} & 0.00445 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Iz dobijenog rezultata vidimo da su Gramiani gotovo jednaki i dijagonalni, a upravo to je svojstvo koje očekujemo nakon balansiranja. Ovime smo potvrdili da je metoda balansiranog odsijecanja pravilno provedena.

Dijagonalni elementi Gramiana odgovaraju Hankelovim singularnim vrijednostima i predstavljaju mjeru zajedničke upravljivosti i osmotrivosti svakog stanja. Njihov monotoni pad jasno pokazuje da samo prvih nekoliko stanja dominantno doprinosi ulazno–izlaznom ponašanju sustava.

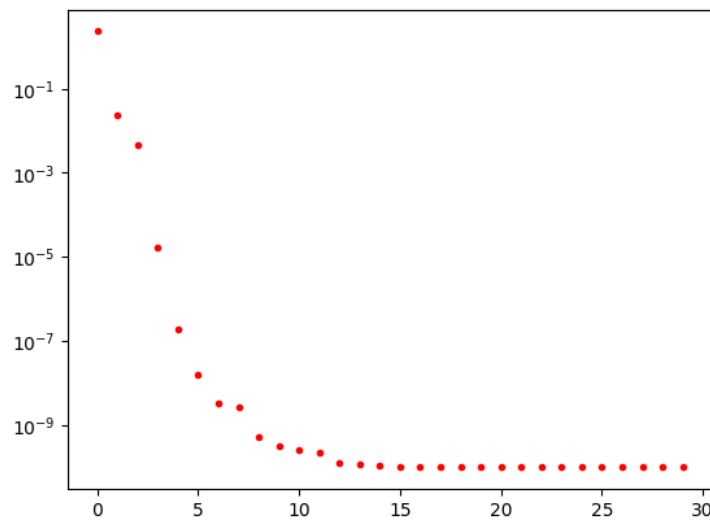
Dodatna numerička provjera provedena je računanjem Frobeniusove norme razlike Gramiana:

$$\|P_b - Q_b\|_F = 3.1 \times 10^{-9}, \quad (7)$$

ovime smo dobili još jednu potvrdu da je metoda balansiranog odsijecanja pravilno provedena.

3.4 Pad Hankelovih singularnih vrijednosti

Na Slici 1 prikazan je pad Hankelovih singularnih vrijednosti sustava za parametarsku točku $p = (-1.0, -1.0)$ koja je odabrana kao početna greedy točka algoritma. Za tu točku prvo je provedeno balansirano odsijecanje kako bi se konstruirala lokalna projekcijska baza.



Slika 1: Pad Hankelovih singularnih vrijednosti za prvu greedy točku $p = (-1.0, -1.0)$.

Možemo vidjeti da prvih nekoliko vrijednosti značajno odstupa od ostatka dok preostale vrijednosti vrlo brzo opadaju prema numeričkoj nuli.

Takvo ponašanje ukazuje na to da se dominantna dinamika sustava može opisati malim brojem stanja jer preostala stanja imaju vrlo mali utjecaj na ponašanje odnosno dinamiku sustava. Upravo zbog toga je moguće provesti redukciju reda bez značajnog gubitka informacija o dinamici.

Na temelju ovakvog rasporeda singularnih vrijednosti odabrana je redukcija na $r = 3$ stanja (u poglavlju Numerički rezultati $r = 4$) i na taj način smo dobili lokalni reducirani model koji zadržava najvažnija dinamička svojstva punog sustava.

Ovaj rezultat je važan jer pokazuje da je sustav dobro reducibilan već u prvoj greedy iteraciji što predstavlja dobru polaznu točku za daljnje proširivanje globalne projekcijske baze.

4 Galerkinova projekcija

Neka je $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ matrica čiji stupci čine bazu reduciranog potprostora ($r \ll n$). Galerkinova aproksimacija stanja zadana je s

$$x(t) \approx Vx_r(t),$$

a Galerkinov uvjet $V^T(\dot{x} - Ax - Bu) = 0$ vodi na reducirani sustav

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t), \quad y_r(t) = C_r x_r(t),$$

pri čemu vrijedi

$$A_r = V^T A V, \quad B_r = V^T B, \quad C_r = C V.$$

5 H_2 norma i mjera pogreške

Kako bismo mogli ocijeniti kvalitetu aproksimacije, koristimo H_2 -normu sustava pogreške, odnosno normu razlike funkcija prijenosa punog i reduciranog sustava.

Za LTI sustav:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (8)$$

funkcija prijenosa u strictly proper slučaju $D = 0$, dana je s:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

5.1 H_2 norma (implementacija `h2_norm`)

Ako je sustav stabilan, odnosno ako vrijedi

$$\Re(\lambda) < 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

tada postoji jedinstveni Gramian upravljivosti P koji zadovoljava Lyapunovljevu jednadžbu

$$AP + PA^T + BB^T = 0. \quad (9)$$

Tada je H_2 norma sustava dana formulom

$$\|G\|_{H_2} = \sqrt{\text{tr}(CPC^T)}. \quad (10)$$

U implementaciji funkcija `h2_norm(A,B,C)` prvo provjerava stabilnost: ako postoji svojstvena vrijednost s $\Re(\lambda) \geq 0$, sustav nije stabilan i funkcija vraća ∞ . U stabilnom slučaju rješava se (9) (koristeći `solve_continuous_lyapunov`) i računa se vrijednost (10).

5.2 Sustav pogreške i H_2 pogreška (implementacija `h2_error`)

Neka je (A, B, C) puni sustav, a (A_r, B_r, C_r) reducirani sustav. Pogrešku između njih definiramo kao H_2 normu razlike funkcija prijenosa:

$$\|G - G_r\|_{H_2}.$$

Kako je H_2 norma definirana za jedan sustav, a ovdje imamo dva, konstruiramo tzv. *sustav pogreške* čiji je izlaz razlika izlaza punog i reduciranog sustava.

Puni i reducirani sustav definiramo kao:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad \dot{x}_r = A_r x_r + B_r u, \quad y_r = C_r x_r.$$

Definiramo prošireno stanje $x_e = [x; x_r]$ i matrice sustava pogreške (A_e, B_e, C_e) kao

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}, \quad C_e = [C \quad -C_r]. \quad (11)$$

Tada vrijedi

$$y_e = Cx - C_r x_r = C_e x_e,$$

pa je funkcija prijenosa sustava pogreške upravo

$$G_e(s) = G(s) - G_r(s).$$

Dakle, pogrešku između punog i reduciranog sustava računamo kao:

$$\|G - G_r\|_{H_2} = \|G_e\|_{H_2}. \quad (12)$$

U implementaciji opisani postupak radimo funkcijom `h2_error(full, red)`, gdje su `full=(A,B,C)` i `red=(A_r,B_r,C_r)`. Funkcija prvo konstruira blok matrice (A_e, B_e, C_e) prema (11) (blok-dijagonalno spajanje stanja i oduzimanje izlaza) i na kraju vraća vrijednost $\|G_e\|_{H_2}$ pozivom `h2_norm(A_e,B_e,C_e)`.

Dobivena H_2 pogreška koristi se kao funkcija cilja u greedy algoritmu za odabir parametara, manja vrijednost norme označava bolju aproksimaciju punog sustava.

6 Greedy algoritam

Za parametarski sustav $(A(p), B, C)$, cilj je konstruirati globalnu bazu V takvu da reducirani modeli dobiveni Galerkinovom projekcijom što bolje aproksimiraju puni sustav na cijeloj mreži parametara.

Spajanje (merge) baza.

Neka su $V^{(1)}, \dots, V^{(k)} \in \mathbb{R}^{n \times r_{\text{loc}}}$ lokalne baze. Konkatencijom stupaca dobivamo

$$V_{\text{cat}} = \begin{bmatrix} V^{(1)} & V^{(2)} & \dots & V^{(k)} \end{bmatrix},$$

a globalna ortonormirana baza dobiva se tankim QR-om:

$$V_{\text{cat}} = QR, \quad V := Q,$$

pri čemu se po potrebi zadržava samo prvih r_{merge} stupaca:

$$V := V(:, 1 : r_{\text{merge}}).$$

6.1 Greedy odabir najgoreg parametra

Za trenutnu bazu V i svaki parametar p s mreže prvo računamo reducirani model Galerkinovom projekcijom, a nakon toga računamo \mathcal{H}_2 pogrešku $\|G(p) - G_r(p)\|_{\mathcal{H}_2}$. Zatim se odabire parametar s najvećom izračunatom pogreškom i za njega se konstruira nova lokalna BT baza koja se dodaje u skup baza i ponovno spaja QR-om.

Algorithm 1 Greedy postupak (BT + Galerkin + \mathcal{H}_2 pogreška)

```
1: Odaberi mrežu parametara  $\mathcal{P}$ , početni parametar  $p_0$ , lokalni red  $r_{\text{loc}}$ , kapu spajanja  
    $r_{\text{merge}}$  (r_merge_cap), toleranciju tol i maksimalan broj iteracija  $K$ .  
2: Inicijaliziraj listu odabranih parametara:  $\mathcal{S} \leftarrow [p_0]$ .  
3: Izračunaj početnu lokalnu bazu:  $(V_0, \_, \_) \leftarrow$   
   balanced_truncation_basis( $A(p_0), B, C, r_{\text{loc}}$ ).  
4: Inicijaliziraj listu lokalnih baza:  $\mathcal{V} \leftarrow [V_0]$ .  
5: Inicijaliziraj prazne liste: max_errors, argmax_params.  
6: for  $k = 1, 2, \dots, K$  do  
7:   Spajanje baza:  $V \leftarrow \text{merge\_V\_bases}(\mathcal{V}, r_{\text{merge}})$ .  
8:   Inicijaliziraj niz pogrešaka: errors  $\leftarrow []$ .  
9:   for svaki  $p = (p_1, p_2)$  u  $\mathcal{P}$  do  
10:     $A_f \leftarrow A(p_1, p_2)$ ,  $\text{full} \leftarrow (A_f, B, C)$ .  
11:     $(A_r, B_r, C_r) \leftarrow \text{project\_model\_galerkin}(A_f, B, C, V)$ ,  $\text{red} \leftarrow (A_r, B_r, C_r)$ .  
12:     $e(p) \leftarrow \text{h2\_error}(\text{full}, \text{red})$ .  
13:    Dodaj  $e(p)$  u errors.  
14:   end for  
15:   Nađi indeks najveće pogreške:  $i^* \leftarrow \arg \max(\text{errors})$ .  
16:    $e_{\text{max}} \leftarrow \text{errors}[i^*]$ ,  $p_{\text{worst}} \leftarrow \mathcal{P}[i^*]$ .  
17:   Dodaj  $e_{\text{max}}$  u max_errors i  $p_{\text{worst}}$  u argmax_params.  
18:   if  $e_{\text{max}} < \text{tol}$  then  
19:     prekini.  
20:   end if  
21:   Dodaj novu greedy točku:  $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \parallel [p_{\text{worst}}]$ .  
22:   Izračunaj novu lokalnu bazu:  $(V_{\text{new}}, \_, \_) \leftarrow$   
     balanced_truncation_basis( $A(p_{\text{worst}}), B, C, r_{\text{loc}}$ ).  
23:   Dodaj bazu:  $\mathcal{V} \leftarrow \mathcal{V} \parallel [V_{\text{new}}]$ .  
24: end for  
25: Vrati: odabrane parametre  $\mathcal{S}$ , listu baza  $\mathcal{V}$ , max_errors i argmax_params.
```

7 Numerički rezultati

U ovom poglavlju prikazani su numerički rezultati primjene greedy algoritma za parametarski sustav opisan u prethodnim poglavljima. Dimenzija punog modela iznosi $n = 30$, dok se kvaliteta aproksimacije punog modela procjenjuje pomoću H_2 pogreške između punog i reduciranog modela na parametarskoj mreži.

Greedy algoritam provodi se s maksimalnim brojem iteracija $K = 10$ i tolerancijom $\text{tol} = 5 \cdot 10^{-3}$. U svakoj iteraciji računa se maksimalna H_2 pogreška na parametarskoj mreži, ako vrijednost maksimalne H_2 pogreške padne ispod zadane tolerancije algoritam se zaustavlja ranije.

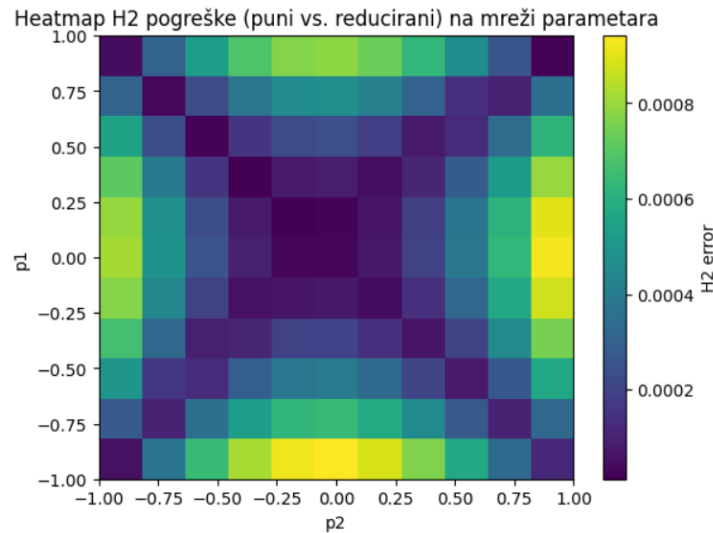
Parametarska mreža definirana je kao uniformna mreža 11×11 na kvadratu $[-1, 1]^2$.

7.1 Prostorna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške

Na slici 2 prikazana je prostorna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške između punog i reduciranog modela na parametarskoj mreži.

Možemo vidjeti da su najveće vrijednosti pogreške koncentrirane uz rubove parametarskog prostora, dok u središnjem dijelu pogreška poprima manje vrijednosti. Manja pogreška u središnjem dijelu prostora može se objasniti time što je početna greedy točka odabrana upravo u tom dijelu. Takva raspodjela ukazuje na to da reducirani model nešto slabije aproksimira dinamiku sustava za ekstremne vrijednosti parametara.

Ovaj rezultat dodatno opravdava primjenu greedy algoritma, budući da algoritam u svakoj iteraciji odabire parametar za koji je pogreška najveća i na taj način postupno poboljšava kvalitetu globalne aproksimacije na cijelom parametarskom prostoru.

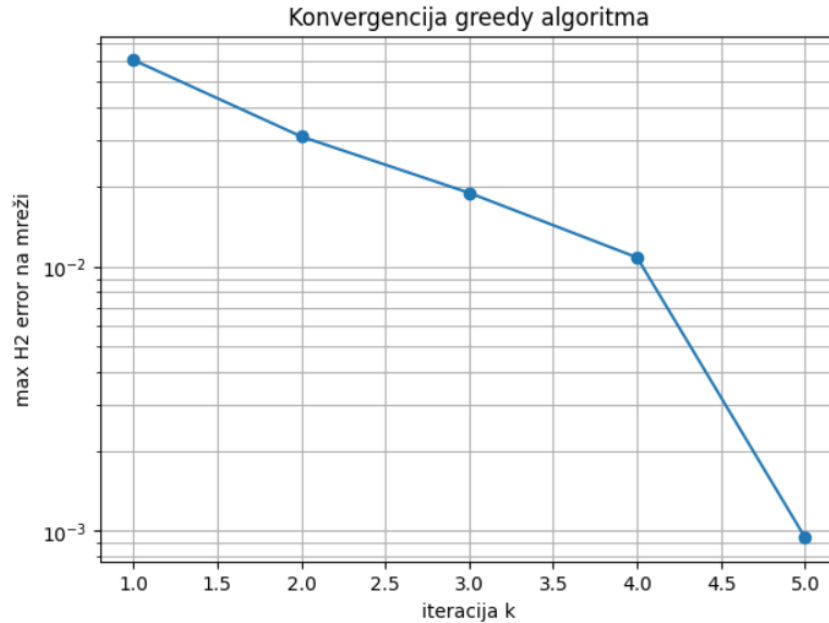


Slika 2: Prostorna raspodjela H_2 pogreške između punog i reduciranog modela na parametarskoj mreži.

7.2 Greedy konvergencija

Algoritam započinje od početne točke $(p_1, p_2) = (0, 0)$, za koju se radi lokalna redukcija pomoću metode balansiranog odsijecanja. U svakoj iteraciji globalna projekcijska baza proširuje se lokalnom bazom dobivenom za parametar za kojeg je H2 pogreška najveća.

Za odabrane postavke algoritam se zaustavio nakon pet iteracija, budući da je maksimalna H2 pogreška pala ispod zadane tolerancije. Kroz iteracije dimenzija reduciranog potprostora postupno raste, dok se maksimalna H2 pogreška postupno smanjuje.



Slika 3: Pad maksimalne \mathcal{H}_2 pogreške tijekom greedy iteracija.

Odabrane greedy točke (redom): 1. $(1.0, 1.0)$, 2. $(1.0, -1.0)$, 3. $(-1.0, -1.0)$, 4. $(-1.0, 1.0)$, 5. $(-1.0, 0.0)$.

Na slici 3 prikazan je pad maksimalne H2 pogreške tijekom greedy iteracija. Postupno smanjenje pogreške koje vidimo kroz iteracije ukazuje na to da se djelovanjem greedyja postupno poboljšava aproksimacija sustava. U zadnjoj iteraciji algoritam je odabrao parametarsku točku na rubu prostora, gdje je aproksimacijska pogreška bila najveća, a nagli pad nam govori da je upravo ta točka doprinijela boljoj reprezentativnosti globalne baze. Najveće aproksimacijske pogreške se često pojavljuju na rubovima domene parametara. Takvim proširivanjem globalne baze dolazimo do značajnog poboljšanja aproksimacije sustava na cijeloj mreži.

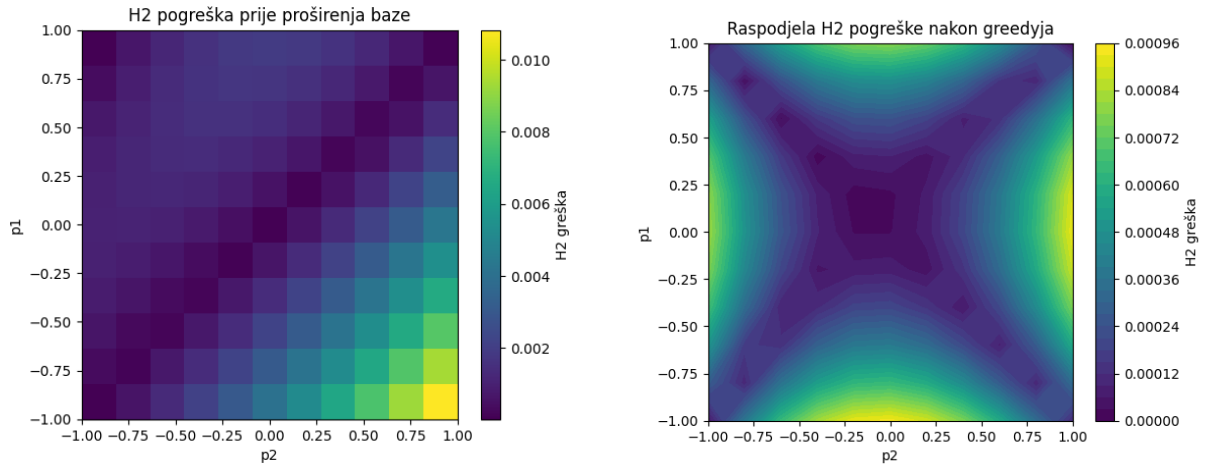
Nakon završetka greedyja dimenzija reducirane baze iznosi 20, dok je maksimalna H2 pogreška smanjena na razinu reda 10^{-3} , a to nam ukazuje na dobru aproksimaciju punog sustava na cijelom promatranom parametarskom prostoru. Dobivena dimenzija predstavlja značajnu redukciju u odnosu na puni model dimenzije $n = 30$ uz zadržavanje male aproksimacijske pogreške.

7.3 Finalna reducirana baza

Rezultat greedyja je jedna globalna reducirana projekcijska baza koja je konstruirana spajanjem lokalnih baza dobivenih za različite kombinacije parametara. Svaka lokalna baza dobro opisuje dinamiku sustava za odgovarajuću vrijednost parametra, dok njihovo spajanje omogućuje dobru aproksimaciju sustava na cijeloj promatranoj parametarskoj mreži.

Tijekom spajanja lokalnih baza uklanja se linearna zavisnost među stupcima, čime se osigurava da reducirana baza zadrži umjerenu dimenziju ali i dalje sadrži relevantne informacije za opis dinamike sustava za sve parametre s mreže. Tako je dobivena reducirana baza dimenzije 20 što je značajno smanjenje u odnosu na puni model.

7.4 Globalna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške



(a) Raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške prije proširenja projekcijske baze.

(b) Raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške nakon greedy proširenja baze.

Slika 4: Prostorna raspodjela \mathcal{H}_2 pogreške na parametarskoj mreži prije i nakon proširenja globalne projekcijske baze. Vidimo da greedy postupak smanjuje maksimalnu pogrešku i dovodi do ravnomjernije i kvalitetnije aproksimacije na cijelom parametarskom prostoru.

7.5 Poboljšanje aproksimacije u okolini greedy točke (before/after)

U svim numeričkim primjerima promatra se SISO sustav, pa se pogreška funkcije prijenosa za fiksni parametar računa kao apsolutna razlika:

$$|G(j\omega, p) - G_r(j\omega, p)|.$$

U svrhu ilustracije učinka dodavanja novih greedy parametara na lokalnu kvalitetu aproksimacije, odabrana je iteracija $k = 4$ i greedy točka p^* koja u toj iteraciji maksimizira H_2 pogrešku na mreži.

Uspoređuju se dvije globalne projekcijske baze:

$$V_{\text{before}} = \text{merge_V_bases}(\{V_0, \dots, V_{k-1}\}), \quad V_{\text{after}} = \text{merge_V_bases}(\{V_0, \dots, V_k\})$$

Ovdje je V_k lokalna BT baza konstruirana upravo u točki p^* . Osim same točke p^* promatraju se i susjedne točke definirane pomakom $\delta = 0.2$:

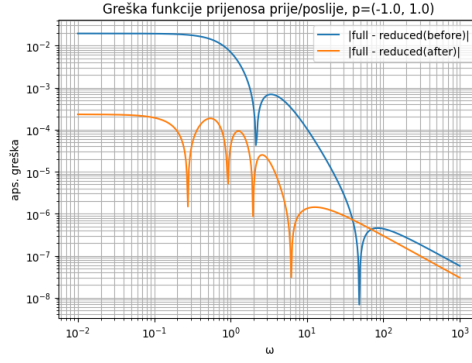
$$p^*, \quad (p_1^* + \delta, p_2^*), \quad (p_1^*, p_2^* + \delta)$$

Greška funkcije prijenosa prije i poslije proširenja baze

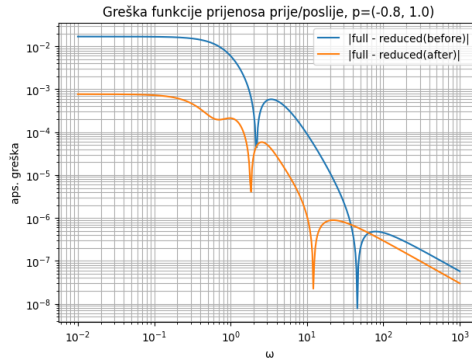
Kako bi se ispitao lokalni učinak dodavanja nove greedy baze, uspoređuje se apsolutna pogreška maksimalne singularne vrijednosti $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ prije i nakon proširenja globalne projekcijske baze.

Analiza je provedena u greedy točki p^* , ali i za susjedne parametre $(p_1^* + \delta, p_2^*)$ i $(p_1^*, p_2^* + \delta)$. Na slici 5 vidljivo je da se nakon dodavanja nove lokalne baze greška smanjuje i ne samo u točki p^* , nego i za susjedne parametre.

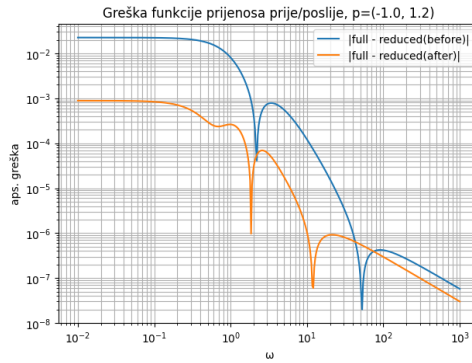
Ovakvo ponašanje pokazatelj je lokalnog poboljšanja aproksimacije u parametarskom prostoru. Također, možemo vidjeti da nova baza može poboljšati model ne samo u jednoj točki nego i u njezinoj okolini.



(a) Greška u greedy točki p^* .



(b) Greška za susjedni parametar $(p_1^* + \delta, p_2^*)$.



(c) Greška za susjedni parametar $(p_1^*, p_2^* + \delta)$.

Slika 5: Apsolutna pogreška funkcije prijenosa prije i poslije dodavanja greedy baze za greedy točku i njenu lokalnu okolinu.

Presjeci funkcije cilja

Greedy postupak u svakoj iteraciji odabire parametar za koji je vrijednost funkcije cilja

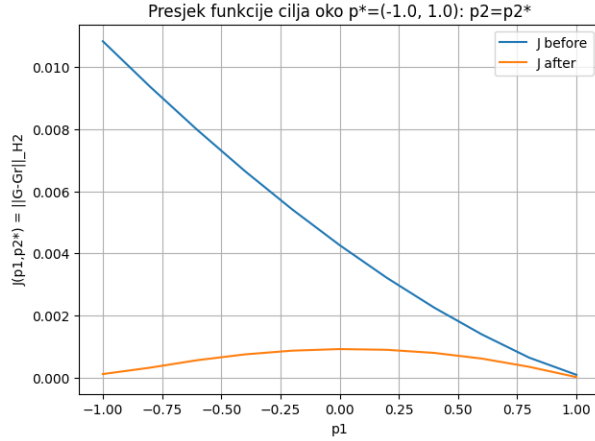
$$J(p) = \|G(p) - G_r(p)\|_{H_2}$$

najveća, a onda proširuje bazu informacijom dobivenom upravo u toj točki. Kako bismo ilustrirali lokalni učinak proširenja baze oko odabrane greedy točke $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, prikazujemo presjeke funkcije cilja u dva parametarska smjera:

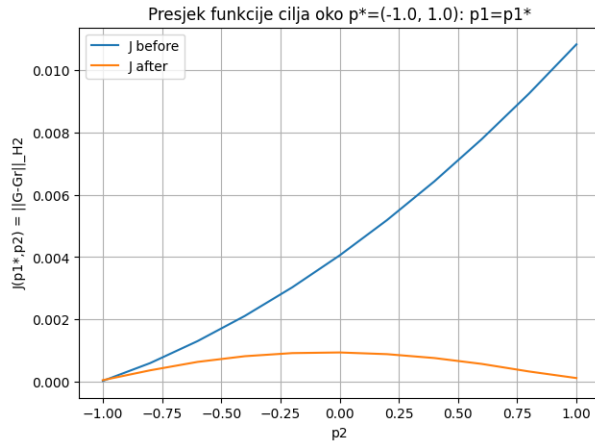
$$J(p_1, p_2^*) \quad \text{ i } \quad J(p_1^*, p_2),$$

pri čemu se uspoređuju vrijednosti prije i poslije dodavanja lokalne baze u točki p^* (korištenjem V_{before} i V_{after})

Na slici 6 se vidi da je krivulja *after* znatno niža od *before* u okolini p^* u oba promatrana presjeka. Iz ovoga vidimo da proširenje baze konstruirano u najgoroj točki (maksimalnog J) može poboljšati aproksimaciju ne samo u toj jednoj točki, nego i lokalno u okolini te točke što je u skladu s očekivanim ponašanjem greedy algoritma.



(a) Presjek $J(p_1, p_2^*)$ (fiksirano $p_2 = p_2^*$).



(b) Presjek $J(p_1^*, p_2)$ (fiksirano $p_1 = p_1^*$).

Slika 6: Presjeci funkcije cilja $J(p) = \|G(p) - G_r(p)\|_{H_2}$ prije i poslije dodavanja greedy baze u točki p^* .

8 Zaključak

U ovom radu analizirana je redukcija parametarskog sustava primjenom metode balansiranog odsijecanja u kombinaciji s greedy algoritmom za odabir parametarskih točaka. Cilj je bio konstruirati globalnu projekcijsku bazu koja omogućuje dobru aproksimaciju punog sustava na cijeloj promatranoj parametarskoj mreži uz smanjenje dimenzije modela.

Kvaliteta aproksimacije ocijenjena je pomoću \mathcal{H}_2 pogreške između funkcija prijenosa punog i reduciranog modela. Numerički rezultati pokazuju smanjenje maksimalne \mathcal{H}_2 pogreške tijekom greedy iteracija, što nam potvrđuje da postupno proširivanje globalne baze dovodi do poboljšanja aproksimacije. Dobivena reducirana baza dimenzije 20 predstavlja značajnu redukciju u odnosu na puni model dimenzije $n = 30$ uz zadržavanje male aproksimacijske pogreške reda 10^{-3} na promatranom parametarskom prostoru.

Posebno smo analizirali utjecaj dodavanja nove greedy točke na lokalnu kvalitetu aproksimacije. Usporedba pogreške funkcije prijenosa prije i poslije proširenja baze kao i presjeci funkcije cilja, pokazuju da se aproksimacija poboljšava ne samo u odabranoj točki najveće pogreške nego i u njejoj okolini. Time smo ilustrirali temeljnu ideju greedy pristupa, a to je da dodavanje baze konstruirane u najslabijem parametru povećava reprezentativnost globalnog reduciranog modela.

Rezultati rada pokazuju da kombinacija balansiranog odsijecanja i greedy odabira parametara predstavlja učinkovit pristup za redukciju parametarskih sustava.

Literatura

- [1] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, S. Gügercin, *Interpolatory Methods for Model Reduction*, SIAM, Philadelphia, 2020.
- [2] J. C. Cooper, *Efficient H_2 -Based Parametric Model Reduction via Greedy Search*, Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2021.
- [3] D. Šokčević, *Redukcija sustava drugog reda*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2023.