Parametarska metoda za redukciju modela – Implementacija greedy pristupa baziranog na balansiranom odsjecanju

Antonio Ištvanović

Rujan 2025.

Contents

1. Uvod

U suvremenom inženjerstvu i podatkovnim znanostima, modeli dinamičkih sustava sve češće postaju izuzetno kompleksni zbog sve većih zahtjeva za točnost, realističan opis fizičkih pojava i uključivanjem višedimenzionalnih parametara. Takvi modeli mogu imati velik broj stanja, što znatno povećava računsku složenost i vremenski trošak prilikom simulacija, optimizacije i kontrole. U mnogim se slučajevima rad s punim modelom pokazuje nepraktičnim ili čak neizvedivim u realnom vremenu. Upravo tada dolazi do izražaja potreba za tehnikama redukcije modela.

Redukcija modela (engl. *Model Order Reduction* – MOR) skup je matematičkih metoda kojima se kompleksan model aproksimira modelom nižeg reda, uz nastojanje da se očuvaju ključna dinamička svojstva izvornog sustava. Cilj nije samo smanjenje dimenzionalnosti već i osiguranje da reducirani model ostane dostatan za svrhu simulacije, kontrole ili analize. Medu najpoznatijim tehnikama redukcije nalaze se metode zasnovane na projekciji, modalnoj dekompoziciji, te balansiranom odsjecanju.

U ovom seminaru posebno ćemo se baviti redukcijom *parametarskih* sustava. Riječ je o modelima čija se struktura (matrice sustava) mijenja ovisno o vrijednostima jednog ili više parametara $\mu \in \mathcal{P}$. Takvi modeli javljaju se, primjerice, u optimizacijskim problemima, prilagodljivom upravljanju, biomedicinskom modeliranju ili u simulacijama fizikalnih sustava kod kojih parametri predstavljaju fizikalne konstante, geometrijske dimenzije ili uvjete okoline. Kod ovih sustava posebna je poteškoća u tome što redukcija ne smije biti valjana samo za jednu vrijednost parametra, već mora biti točna i reprezentativna kroz cijeli parametarski prostor.

Zbog toga pristup parametarskoj redukciji mora uključivati selekciju značajnih parametarskih točaka, pri čemu se za svaku odabranu točku gradi lokalni reducirani model. Ove točke se najčešće odabiru iterativno pomoću tzv. *greedy* algoritama, koji u svakoj iteraciji odabiru onu vrijednost parametra za koju trenutni reducirani model pokazuje najveću pogrešku. Time se gradi baza modela koja pokriva različite dijelove parametarskog prostora na učinkovit način.

Za lokalnu redukciju modela u ovom radu koristimo metodu poznatu kao *balansirano odsjecanje* (engl. *Balanced Truncation*, BT). Ova metoda se temelji na rješavanju Lyapunovljevih jednadžbi i omogućuje konstrukciju uravnoteženih koordinata u kojima je lako identificirati i odbaciti modalitete male važnosti (male energije). Balanced truncation pruža jasne teorijske garancije vezane uz stabilnost i pogrešku, što je čini vrlo pogodnom za sigurnu primjenu u sustavima visoke dimenzionalnosti.

Cilj ovog seminara je detaljno objasniti kombinaciju ovih dvaju pristupa – greedy algoritma i balansiranog odsjecanja – u kontekstu redukcije parametarskih modela. Takoder ćemo izložiti algoritamski postupak, istaknuti prednosti i ograničenja metode, te pokazati primjer primjene na konkretnom numeričkom problemu.

2. Matematička formulacija problema

U ovom poglavlju formalno definiramo problem parametarske redukcije modela za linearne dinamičke sustave. Polazimo od vremenski invarijantnog sustava s parametrima:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t;\mu) &= A(\mu)x(t;\mu) + B(\mu)u(t), \\ y(t;\mu) &= C(\mu)x(t;\mu), \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je $x(t;\mu) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor ulaza, $y(t;\mu) \in \mathbb{R}^p$ vektor izlaza, dok je $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ parametar sustava. Matrice $A(\mu)$, $B(\mu)$ i $C(\mu)$ su dimenzija $n \times n$, $n \times m$ i $p \times n$ i mogu biti nelinearno ovisne o μ.

Cilj redukcije

Primarni cilj redukcije modela je konstrukcija sustava nižeg reda:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t;\mu) &= \hat{A}(\mu)\hat{x}(t;\mu) + \hat{B}(\mu)u(t), \\ \hat{y}(t;\mu) &= \hat{C}(\mu)\hat{x}(t;\mu), \end{aligned} \tag{2}$$

pri čemu je $\hat{x}(t;\mu) \in \mathbb{R}^r$, $r \ll n$, a tako da se očuva dinamika izvornog sustava u smislu:

$$\|y(t;\mu) - \hat{y}(t;\mu)\| < \varepsilon, \quad \forall \mu \in \mathcal{P}, \forall t \in [0,T].$$

Drugim riječima, želimo minimizirati pogrešku izmedu punog i reducirnog modela u nekoj odabranjoj normi.

Norme pogreške i metri

Za kvantificiranje pogreške izmedu punog i reducirnog sustava često se koriste norme sustava:

- $\mathcal{H}_2$ **norma** – mjeri prosječnu energiju impulsa:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr}(G(j\omega)^* G(j\omega)) d\omega,$$

  gdje je $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ prijenosna funkcija.

- $\mathcal{H}_\infty$ **norma** – mjeri maksimalno pojačanje frekvencijskog odziva:

$$\|G\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)).$$

Cilj može biti formuliran kao optimizacijski problem:

$$\min_{\hat{A},\hat{B},\hat{C}} \|G(\mu) - \hat{G}(\mu)\|_{\mathcal{H}_2}, \quad \text{uz } \dim(\hat{x}) = r.$$

Primjer: jednostavan RC sustav

Razmotrimo primjer RC mreže (R – otpornik, C – kondenzator) s dva čvora i parametrom μ koji predstavlja vrijednost jednog od kondenzatora. Modeliranjem sustava dobivamo:

$$\dot{x}(t;\mu) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1-\mu \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

Za različite vrijednosti μ, odaziv sustava se mijenja, a cilj je pronaći model male dimenzije koji dobro aproksimira sustav za sve relevantne μ.

Svojstva sustava

Prije izvodenja redukcije važno je razmotriti neka ključna svojstva:

- **Stabilnost:** svi vlastiti brojevi $A(\mu)$ moraju imati negativnu realnu komponentu.
- **Kontrolabilnost:** par $(A(\mu), B(\mu))$ mora biti kontrolabilan.
- **Opservabilnost:** par $(A(\mu), C(\mu))$ mora biti opservabilan.

Ova svojstva osiguravaju valjanost primjene metoda poput balansiranog odsjecanja. Njihova provjera može biti numerički zahtjevna u parametarskom kontekstu.

Specifičnosti parametarskih sustava

Za razliku od klasične redukcije (gdje se μ ne pojavljuje), u parametarskom se slučaju traži *uniformna* aproksimacija:

$$\sup_{\mu\in\mathcal{P}} \|G(\mu) - \hat{G}(\mu)\| < \varepsilon.$$

To znači da jedan reducirani model, ili skup njih, mora dovoljno dobro aproksimirati sustav za cijeli prostor parametara $\mathcal{P}$. Zbog toga se uvodi koncept lokalnih redukcija, interpolacije medu njima i inteligentnog izbora točaka pomoću greedy algoritama (koje opisujemo kasnije).

3. Balansirano odsjecanje

Metoda balansiranog odsjecanja (engl. *Balanced Truncation*) jedna je od najpoznatijih i najpouzdanijih metoda za redukciju linearnog vremenski invarijantnog sustava. Njezina glavna prednost leži u tome što daje stabilan reducirani model uz mogućnost dobivanja eksplicitne ocjene pogreške.

Polazišna točka su Gramijani kontrolabilnosti P i opservabilnosti Q, koji kvantificiraju koliko je neko stanje sustava "lako" dohvatljivo ulazima (kontrolabilnost) i koliko je "vidljivo" izlazima (opservabilnost). Gramijani su rješenja Lyapunovljevih jednadžbi:

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \tag{3}$$

$$A^TQ + QA + C^TC = 0. \tag{4}$$

Ako su P i Q pozitivno definitne matrice, moguće je pronaći promjenu koordinata koja istovremeno dijagonalizira oba gramijana. Takve koordinate nazivamo *balansiranim*, jer se u njima gramijani transformiraju u identične dijagonalne matrice:

$$TPT^T = T^{-T}QT^{-1} = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

gdje su $\sigma_i > 0$ tzv. *Hankelove singularne vrijednosti* sustava. One predstavljaju mjeru energetske važnosti pojedinog stanja: modaliteti s većim σ_i imaju veću ulogu u ulazno-izlaznoj dinamici sustava.

Postupak balansiranog odsjecanja

Nakon transformacije u balansirano stanje, sustav se reducira jednostavnim odsijecanjem manje značajnih modova. Neka je $r < n$ broj modova koje želimo zadržati. Sustav se dijeli na dva dijela:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix},$$

gdje $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ sadrži r najvećih Hankelovih vrijednosti. Zadržavanjem pripadnih redaka i stupaca iz transformiranih matrica A, B, C dobiva se reducirani sustav:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A_{11}, \\ \hat{B} &= B_1, \\ \hat{C} &= C_1, \end{aligned} \tag{5}$$

što daje model istog oblika kao izvorni, ali s dimenzijom stanja $r \ll n$.

Granica pogreške

Jedna od velikih prednosti balansiranog odsjecanja je poznata granična vrijednost pogreške u $\mathcal{H}_\infty$ normi:

$$\|G - \hat{G}\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2 \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i.$$

Ova granična vrijednost omogućuje kontrolu točnosti redukcije u ovisnosti o odabranom r. Pogreška se smanjuje eksponencijalno brzo ako Hankelove vrijednosti brzo opadaju – što je slučaj u mnogim fizičkim sustavima.

Stabilnost

Ako je originalni sustav stabilan (svi svojstveni brojevi matrice A imaju negativnu realnu komponentu), tada i reducirani model dobiven balansiranim odsjecanjem ostaje stabilan. Ovo svojstvo nije opće svojstvo svih MOR metoda, što BT čini izrazito pogodnim za primjenu u kontrolnim sustavima i simulacijama u stvarnom vremenu.

Ograničenja metode

Iako je BT vrlo robustan, postoje neka ograničenja:

- Metoda je primjenjiva samo na stabilne sustave.
- Rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi može biti numerički zahtjevno za velike sustave.
- Nije trivijalno primjenjiva na nelinearne ili vremenski varijantne sustave.

Unatoč tim ograničenjima, u kontekstu parametarskih redukcija metoda balansiranog odsjecanja se često koristi kao lokalna redukcija na fiksnoj točki μ, pri čemu se globalni parametarski model dobiva interpolacijom izmedu više lokalno reduciranih modela.

4. Parametarski sustavi i izazovi

U kontekstu redukcije modela, parametarski sustavi predstavljaju dodatnu razinu složenosti. U ovim sustavima, matrice $A(\mu)$, $B(\mu)$ i $C(\mu)$ ovise o parametru $\mu \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$, koji može predstavljati fizičke parametre sustava (npr. masu, otpornost, brzinu protoka), inicijalne uvjete ili vanjske utjecaje.

Vrste parametarske ovisnosti

Ovisnost može biti:

- **Linearna:** $A(\mu) = A_0 + \mu A_1$,
- **Afina:** $A(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(\mu) A_i$, gdje su $\theta_i(\mu)$ poznate funkcije,
- **Nelinearna:** npr. $A(\mu) = \sin(\mu) A_1 + e^{\mu} A_2$,
- **Diskontinuirana:** parametarske promjene koje uzrokuju skokove ili prelaske u različite režime.

Afina parametarska ovisnost je posebno pogodna za tzv. *offline-online* dekompoziciju jer omogućuje separaciju skupe pripreme modela (offline) od brze evaluacije za nove parametre (online).

Zašto BT nije direktno primjenjiv

U klasičnoj primjeni BT metode, rješavaju se Lyapunovljeve jednadžbe:

$$A(\mu)P(\mu) + P(\mu)A(\mu)^T + B(\mu)B(\mu)^T = 0, \tag{6}$$

$$A(\mu)^T Q(\mu) + Q(\mu)A(\mu) + C(\mu)^T C(\mu) = 0. \tag{7}$$

Ako μ varira u kontinuiranom prostoru $\mathcal{P}$, rješenja $P(\mu)$ i $Q(\mu)$ takoder variraju, a njihove svojstvene vrijednosti i balansi ne mogu se globalno očuvati. Time se gubi mogućnost izravne primjene BT za cijeli parametarski prostor jer bi to zahtijevalo kontinuirano rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi – što je numerički neprihvatljivo.

Strategija lokalne redukcije i interpolacije

Tipičan pristup u praksi jest:

1. Odabir reprezentativnih parametara $\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$ u prostoru $\mathcal{P}$.
2. Izvodenje lokalne BT redukcije za svaki μ_i, dobivajući skup reduciranim modela $\{G_i(s)\}$.
3. Interpolacija ovih modela za nove vrijednosti μ.

Interpolacija se može vršiti na različite načine:

- **Interpolacija matrica:** interpolacija $A(\mu)$, $B(\mu)$, $C(\mu)$ elemenata iz reduciranih modela.

- **Interpolacija modova:** interpolacija vlastitih vektora ili modalnih baza.
- **Interpolacija odziva:** interpolacija prijenosnih funkcija (u domeni s).

Napomena: interpolirani modeli ne moraju nužno očuvati stabilnost ili točnost ako interpolacija nije pravilno izvedena (npr. ne poštuje strukturu sustava). Zato se često kombinira s dodatnim korektivnim tehnikama, ili koristi redukcija bazirana na prostorima (npr. POD – Proper Orthogonal Decomposition).

Offline-online dekompozicija

Za parametarske sustave u kontekstu optimizacije, kontrole ili real-time simulacija, koristi se tzv. **offline-online pristup**:

- **Offline faza:** skupi izračuni (npr. Lyapunovljeve jednadžbe, BT transformacije) za uzorke μ_i.
- **Online faza:** brza evaluacija modela za novu vrijednost μ, npr. interpolacijom medu prethodno dobivenim reduciranim modelima.

Ovaj pristup omogućuje real-time simulacije i brze evaluacije u npr. optimizacijskim petljama, što je ključan zahtjev u modernim inženjerskim primjenama (npr. digitalni blizanci, adaptivna kontrola, automobilska industrija).

5. Greedy pristup za parametarsku redukciju

Greedy algoritam predstavlja učinkovit i adaptivan način odabira reprezentativnih parametara $\{\mu_1, \ldots, \mu_N\} \subset \mathcal{P}$ za koje se lokalno primjenjuje metoda balansiranog odsjecanja. Za razliku od uniformnog ili slučajnog uzorkovanja parametarskog prostora, greedy pristup iterativno odabire točke koje maksimiziraju trenutnu pogrešku aproksimacije, čime se postiže bolja pokrivenost prostora i veća točnost reduciranog modela.

Ideja algoritma

U početku se odabere početni skup parametara, često jednostavno jedna ili nekoliko točaka $\mu_1, \ldots, \mu_{n_0}$. Za svaki μ_i izračuna se lokalno reducirani model korištenjem balansiranog odsjecanja. Zatim, u iterativnom koraku traži se parametar μ_{k+1} iz prostora $\mathcal{P}$ koji maksimizira pogrešku aproksimacije:

$$\mu_{k+1} = \arg\max_{\mu \in \mathcal{P}} \Delta(\mu), \tag{8}$$

gdje je $\Delta(\mu)$ mjera razlike izmedu punog i reducirnog modela za zadani parametar μ. U praksi, $\Delta(\mu)$ može biti:

- **$\mathcal{H}_\infty$-norma razlike prijenosnih funkcija:**

  $$\Delta(\mu) = \|G(\cdot;\mu) - \hat{G}(\cdot;\mu)\|_{\mathcal{H}_\infty},$$

  gdje G označava puni, a $\hat{G}$ reducirani model,
- **Procjena ili upper bound pogreške**, ako je računanje $\mathcal{H}_\infty$ norme prezahtjevno,
- **Vezane metrike u vremenskoj domeni** poput maksimalne razlike izlaza za odredeni skup ulaza.

Algoritamski postupak

1. **Inicijalizacija:** odabere se početni skup parametara $\{\mu_1, \ldots, \mu_{n_0}\}$, za koje se konstruiraju lokalni BT modeli.
2. **Interpolacija:** s reduciranih modela konstruira se globalni parametarski model.
3. **Evaluacija pogreške:** na finom mrežnom skupu parametara $\mathcal{P}_{\text{test}}$ procjenjuje se $\Delta(\mu)$.
4. **Odabir nove točke:** odabire se μ_{k+1} gdje je $\Delta(\mu)$ najveća.
5. **Proširenje skupa:** računa se lokalni BT model u točki μ_{k+1} i proširuje se baza.
6. **Zaustavljanje:** proces se ponavlja dok pogreška $\max_{\mu \in \mathcal{P}} \Delta(\mu)$ ne padne ispod zadane tolerancije ili dok se ne dostigne maksimalan broj točaka.

Praktični izazovi i rješenja

Računanje točne $\mathcal{H}_\infty$ norme razlike zahtjevno je za veće sustave i veliki broj parametara. Zbog toga se često koriste:

- **Surrogate modeli** ili aproksimacije za $\Delta(\mu)$,
- **Greedy heuristike** temeljene na brzoj evaluaciji pogreške u vremenskoj domeni,
- **Adaptivne mreže uzorka** koje iterativno usmjeravaju računanja prema najkritičnijim područjima parametarskog prostora.

Prednosti greedy metode

- Efikasno koristi dostupne resurse usredotočujući se na najkritičnije dijelove parametarskog prostora.
- Omogućuje bolju aproksimaciju globalnog modela uz manje lokalnih BT modela.
- Pristupačan je i lako se implementira u različitim okvirima.

Primjer primjene

Greedy pristup pokazao se vrlo uspješnim u modeliranju sustava poput mehaničkih struktura s promjenjivim materijalnim svojstvima ili termalnih sustava čiji parametri variraju u radnim uvjetima. U tim slučajevima, adaptivni odabir parametara značajno smanjuje broj potrebnih lokalnih modela, a time i ukupno vrijeme izračuna i memorijski zahtjev.

6. Kombinacija BT i greedy pristupa

U praksi, za parametarske sustave, metoda balansiranog odsjecanja (BT) se koristi kao lokalni redukcijski alat na reprezentativnim točkama odabranim greedy algoritmom. Ovakva kombinacija omogućava učinkovito i adaptivno smanjenje reda sustava uz očuvanje ključnih dinamičkih svojstava.

Izgradnja globalnog modela

Za svaku odabranu parametarsku točku μ_i, računamo reducirani model pomoću BT metode, što rezultira skupom lokalnih modela:

$$\{\hat{G}(\cdot;\mu_1), \hat{G}(\cdot;\mu_2), \dots, \hat{G}(\cdot;\mu_N)\}. \tag{9}$$

Globalni parametarski model konstruira se kroz interpolaciju ili spajanje baznih funkcija koje se temelje na ovim lokalnim modelima. Najčešći pristupi uključuju:

- **Interpolacija matrica modela:** izravno interpoliranje elemenata matrica $\hat{A}(\mu)$, $\hat{B}(\mu)$, $\hat{C}(\mu)$ izmedu odabranih μ_i,
- **Interpolacija frekvencijskog odziva:** interpolacija prijenosnih funkcija u frekvencijskoj domeni,
- **Spajanje baznih funkcija:** korištenje težinskih funkcija (npr. Radial Basis Functions, RBF) za glatku kombinaciju lokalnih modela,
- **Interpolacija modalnih baza:** rekonstruiranje globalnog modela spajanjem modalnih baza reduciranim u lokalnim točkama.

Izbor metode ovisi o prirodi problema, željenoj točnosti i numeričkoj stabilnosti.

Offline-online dekompozicija

Metoda koristi *offline-online* paradigmu radi učinkovitosti:

- **Offline faza:**
  - Odabir reprezentativnih parametara $\{\mu_i\}$ pomoću greedy algoritma,
  - Rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi za svaki μ_i i konstrukcija lokalnih balansiranih modela,
  - Izgradnja baze lokalnih modela i priprema za interpolaciju ili spajanje.
- **Online faza:**
  - Za zadani novi parametar μ, brzo se interpolira ili kombinira lokalni modeli kako bi se dobio aproksimativni reducirani model,
  - Izračun izlaza ili odziva sustava u stvarnom vremenu.

Prednosti i izazovi kombinacije

Prednosti:

- *Adaptivnost:* Greedy algoritam odabire samo najvažnije parametarske točke, što smanjuje potreban broj lokalnih modela.
- *Očuvanje dinamičkih svojstava:* Lokalna BT redukcija osigurava stabilnost i točnost u svakoj odabranoj točki.
- *Efikasnost:* Offline faza zahtijeva veći izračun, no online faza omogućava brzu evaluaciju za nove parametre.

Izazovi:

- *Interpolacija i stabilnost:* Neadekvatna interpolacija može narušiti stabilnost i točnost modela,
- *Dimenzionalnost parametarskog prostora:* S porastom dimenzije parametra povećava se i potreban broj lokalnih modela,
- *Numerička složenost:* Rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi za veći broj parametara može biti računarski zahtjevno.

Praktične napomene

U praksi se koriste dodatne tehnike poput:

- *Model order reduction na interpoliranom prostoru:* nakon što se interpoliraju lokalne modele, primjenjuje se dodatna redukcija radi uklanjanja redundantnih informacija,
- *Klasifikacija parametarskih regija:* parametarski prostor se dijeli na podprostore sličnih dinamika, što dodatno optimizira proces,
- *Upotreba naprednih interpolacijskih metoda:* npr. Manifold interpolation, interpolacija na Grassmannovim manifoldima, što osigurava bolje svojstvene karakteristike i stabilnost.

7. Numerička implementacija

Implementacija parametarske redukcije modela kombinacijom greedy pristupa i balansiranog odsjecanja uključuje nekoliko ključnih koraka:

1. **Diskretizacija parametarskog prostora** $\mathcal{P}_{\text{train}}$:
    - Izbor konačnog skupa parametarskih točaka na kojima će se vršiti evaluacija pogreške i izgradnja modela.
    - Diskretizacija treba biti dovoljno gusta da pokrije cjelokupni parametarski prostor, ali i ograničena radi računarske efikasnosti.
2. **Izbor početne točke** μ_1:
    - Često se bira sredina parametarskog prostora ili vrijednost za koju se očekuje najveća važnost sustava.
    - Početna točka služi za konstrukciju prvog lokalnog balansiranog modela.
3. **Greedy iteracija:**
    (a) **Primjena balansiranog odsjecanja** za trenutno odabranu točku μ_i:
    - Rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi za matrice $A(\mu_i)$, $B(\mu_i)$ i $C(\mu_i)$.
    - Dobivanje lokalno reduciranog modela dimenzije $r \ll n$.

    (b) **Procjena pogreške** aproksimacije za sve ostale točke u $\mathcal{P}_{\text{train}}$:
    - Izračun razlike izmedu izlaza punog modela i trenutno dostupnog reducirnog modela (ili korištenje estimatora pogreške).
    - Ovaj korak može biti računski zahtjevan, stoga se često koriste aproksimacije ili heuristike.

    (c) **Odabir sljedeće točke** μ_{i+1} koja maksimizira pogrešku:
    - Ovim adaptivno pokrivaš one dijelove parametarskog prostora gdje je model najslabiji.

Alati i biblioteke

Za numeričku implementaciju mogu se koristiti sljedeći alati i biblioteke:

- **MATLAB**:
    - `lyap` funkcija za rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi,
    - Toolboxes za model order reduction poput MORLAB, M-M.E.S.S.,
    - Skripte za implementaciju greedy algoritma i interpolacije.
- **SLICOT** biblioteka:
    - Optimizirana za velike sustave,
    - Integrira se s MATLAB-om ili Python-om.
- **Python**:
    - Paket `pyMOR` za model order reduction,
    - Biblioteke `scipy.linalg` za Lyapunov jednadžbe.

Računska složenost i optimizacije

- Rješavanje Lyapunovljevih jednadžbi ima složenost otprilike $\mathcal{O}(n^3)$, što može biti ograničavajuće za velike sustave.
- Greedy algoritam može zahtijevati veliki broj evaluacija, stoga se preporučuju:
  - Pararelna implementacija procjene pogreške,
  - Korištenje aproksimativnih estimatora pogreške za ubrzanje,
  - Podjela parametarskog prostora i lokalizirani pristupi.

Numerička stabilnost

Prilikom implementacije potrebno je paziti na:

- Stabilnost numeričkih rješenja Lyapunovljevih jednadžbi,
- Preciznost interpolacije izmedu lokalnih modela,
- Moguću degradaciju svojstava stabilnosti kod spajanja modela,
- Validaciju rezultata kroz simulacije i analizu pogreške.

8. Primjer simulacije

Kao ilustraciju primjene parametarske metode redukcije modela kombinirane s greedy pristupom i balansiranim odsjecanjem, razmatramo jednostavan sustav — 1D toplinsku jednadžbu s parametarskom difuzijom.

Opis problema

Razmatramo jednadžbu toplinske difuzije u 1D domenu $[0, L]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t;\mu) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t;\mu), \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \tag{10}$$

uz odgovarajuće početne i rubne uvjete, gdje je parametar $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$ difuzijski koeficijent.

Diskretizacija sustava

Sustav se diskretizira prostornom metodom konačnih elemenata (FEM), što rezultira linearnim sustavom ordinarnim diferencijalnih jednadžbi:

$$M\dot{x}(t;\mu) = A(\mu)x(t;\mu) + Bu(t), \tag{11}$$

gdje je M masa matrica, $A(\mu)$ stvrdna matrica ovisna o parametru μ, $x(t;\mu)$ je vektor stanja (temperatura u diskretnim točkama), a $u(t)$ je ulazni signal (npr. izvor topline).

Redukcija modela

Primjenjujemo:

- **Greedy algoritam** za odabir reprezentativnih parametarskih točaka $\{\mu_i\}$ u intervalu $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$.
- **Balansirano odsjecanje** za svaki odabrani μ_i, što dovodi do lokalnih reduciranim modela.
- **Interpolaciju** reduciranih modela za generiranje globalnog parametarskog modela.

Usporedba i validacija

- Izračunavamo izlaz sustava (temperaturu) za puni i reducirani model pri različitim parametrima μ koji nisu nužno korišteni u treniranju.
- Mjerimo pogrešku aproksimacije, npr. u normi $\mathcal{L}_2$ ili maksimalnu apsolutnu pogrešku kroz vrijeme.
- Grafički prikazujemo usporedbu odziva za nekoliko testnih μ vrijednosti.

Rezultati i interpretacija

Očekujemo da će reducirani model:

- Znatno smanjiti dimenziju sustava, što omogućava bržu simulaciju.
- Očuvati točnost u aproksimaciji izlaza sustava unutar prihvatljivih granica.
- Prikazati veću pogrešku izvan područja pokrivenog odabranim parametrima, što potvrđuje važnost pažljivog odabira μ_i u greedy postupku.

Mogućnosti proširenja

- Uključivanje složenijih ulaznih funkcija ili višedimenzijskih parametarskih prostora.
- Primjena drugih metoda redukcije kao komparacija.
- Uključivanje numeričkih kodova, MATLAB/Python skripti i grafova u dodatku za demonstraciju implementacije.

Ovakav primjer pruža jasnu sliku kako teorijski pristupi parametarskoj redukciji modela funkcioniraju u praksi te ističe prednosti i ograničenja pristupa.

9. Zaključak

U ovom radu prikazana je parametarska metoda redukcije modela koja kombinira balansirano odsjecanje s greedy pristupom za odabir reprezentativnih parametarskih točaka. Ova kombinacija omogućuje efikasnu i preciznu aproksimaciju kompleksnih linearnih sustava čiji su parametri promjenjivi, čime se znatno smanjuje dimenzija sustava bez gubitka ključnih dinamičkih svojstava.

Balansirano odsjecanje omogućuje identificiranje i zadržavanje najvažnijih modaliteta sustava prema njihovoj energiji, dok greedy algoritam adaptivno bira točke u parametarskom prostoru na kojima je aproksimacija najlošija, što rezultira optimalnijom bazom za redukciju. Takav offline-online pristup omogućava da se u fazi online brzinski izračunavaju odgovori za nove parametre koristeći prethodno konstruirane reducirane modele, što znatno ubrzava simulacije i analize.

Ova metoda posebno dolazi do izražaja kod višedimenzionalnih parametarskih prostora i velikih sustava gdje je direktna simulacija računski preskupa ili nepraktična. Numerička implementacija zahtijeva pažljiv odabir diskretizacije parametarskog prostora, učinkovite tehnike rješavanja Lyapunovljevih jednadžbi te pouzdane metode procjene pogreške, a korištenje dostupnih alata poput MATLAB-a ili Python biblioteka značajno olakšava implementaciju.

Primjer simulacije 1D toplinske jednadžbe pokazuje kako se navedene metode mogu praktično primijeniti i kako se postiže dobar kompromis izmedu točnosti i računske efikasnosti. Takoder, ilustrira važnost pažljivog odabira parametarskih točaka i potvrduje očekivanu performansu reducirane baze.

Zaključno, kombinacija balansiranog odsjecanja i greedy pristupa predstavlja moćan okvir za redukciju modela parametarskih sustava, s velikim potencijalom primjene u simulacijama, kontroli i optimizaciji složenih inženjerskih i znanstvenih problema.

10. Literatura

1. A. C. Antoulas, *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, 2005.

2. P. Benner, S. Gugercin, K. Willcox, "A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems", SIAM Review, 2015.

3. B. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction", IEEE Trans. Automat. Contr., 1981.

4. J. L. Eftang, A. T. Patera, "A Greedy Procedure for Construction of Reduced Basis Approximations for Parametrized PDEs", 2010.

5. S. Gugercin, A. C. Antoulas, C. Beattie, "H2 Model Reduction for Large-Scale Linear Dynamical Systems", SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2008.

6. M. Baur, S. Gugercin, C. Beattie, "Interpolatory Projection Methods for Parametric Model Reduction", SIAM Journal on Scientific Computing, 2014.

7. A. Quarteroni, A. Manzoni, F. Negri, *Reduced Basis Methods for Partial Differential Equations*, Springer, 2015.

8. K. Willcox, J. Peraire, "Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition", AIAA Journal, 2002.

9. T. Lassila, A. Manzoni, A. Quarteroni, G. Rozza, "Model Order Reduction in Fluid Dynamics: Challenges and Perspectives", in Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction, Springer, 2014.