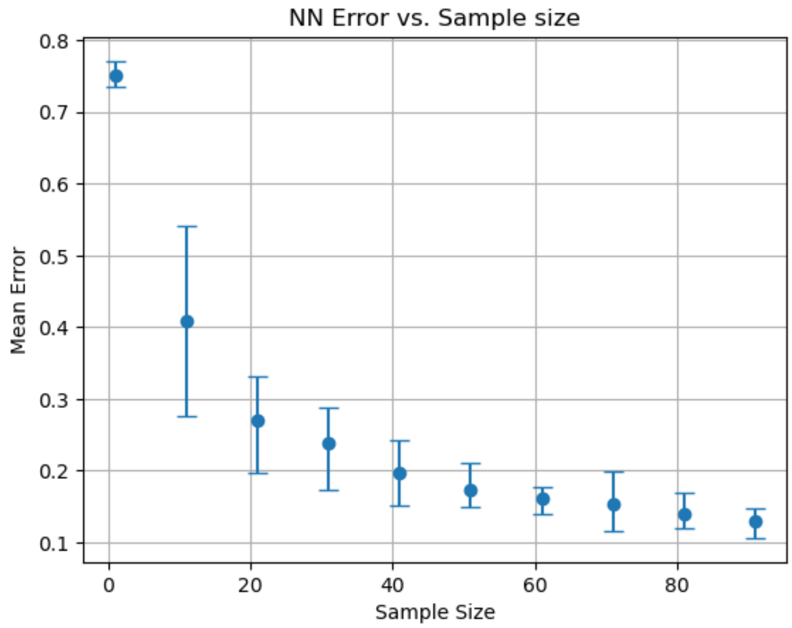
שאלה 2

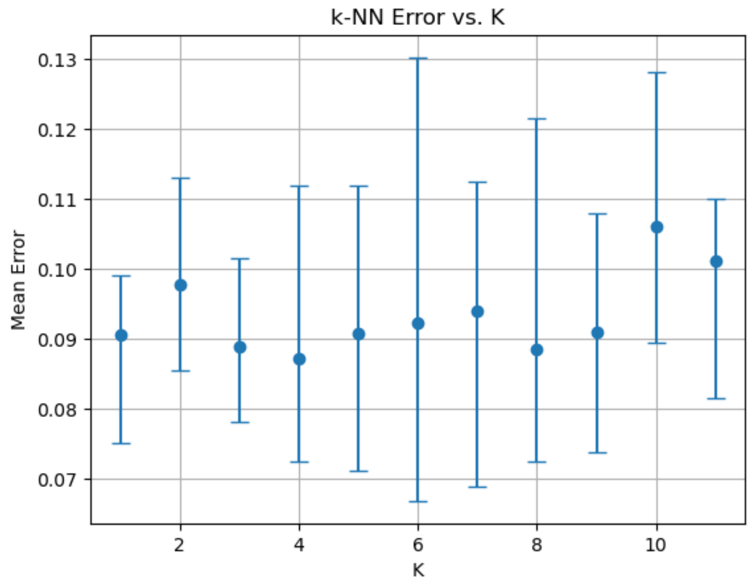
א) קיבלנו את הגרף:



ב) ניתן להבחין במגמת ירידה בשגיאה הממוצעת כתלות בגודל המדגם. המגמה צפויה מכיוון שאלגוריתם NN-1 משתמש במדגם כדי לסווג את הקלטים, ככל שהמדגם גדול יותר, הוא מייצג בצורה טובה יותר את ההתפלגות ולכן נצפה לראות ירידה בשגיאה. בנוסף ראינו בהרצאות כי עבור תוויות דטרמיניסטיות (מתקיים במקרה שלנו) אז כאשר גודל המדגם גדל אז האלגוריתם יתקרב bayes-error.

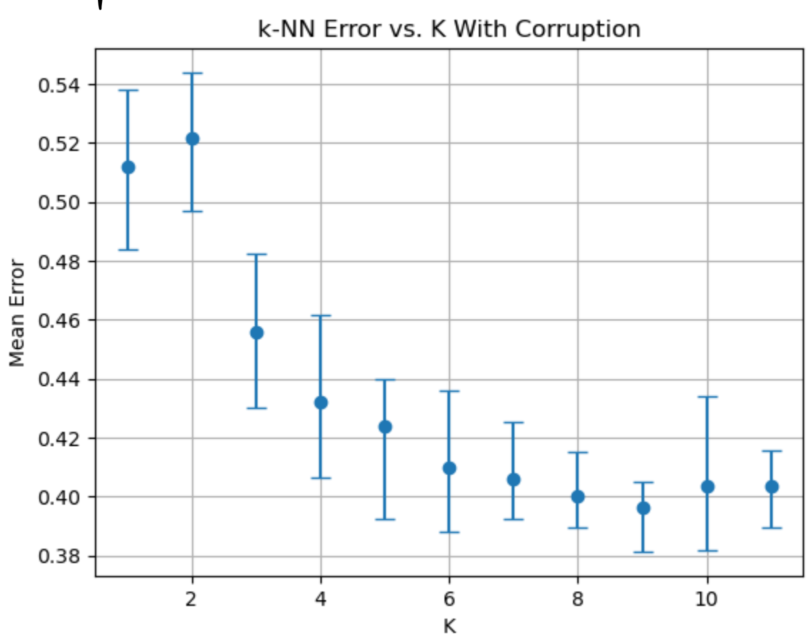
ג) ניתן לראות מגמת ירידה בגודל ה-bays error ככל שגודל המדגם גדל. זה נובע מכך שעבור מדגם קטן האלגוריתם שלנו מקבל מעט מאוד נק׳ ולכן קשה יותר להכליל. זה גורם לכך שהביצועים מאוד רגישים לנק׳ הספציפיות שהמדגם מכיל. אם המדגם הקטן מכיל ״גיוון״ בנק׳, כלומר מייצג יחסית טוב את ההתפלגות אז נקבל שגיאה קטנה יותר. אך ייתכן שגודל מדגם קטן לא מייצג ולכן השגיאה תהיה גדולה. ככל שהמדגם גדל, הוא מייצג טוב יותר של ההתפלגות ולכן השונות קטנה יותר והשגיאה קטנה.

ד) הגרף שקיבלנו עבור השגיאה כתלות ב- k:



ה-k האופטימלי עפ"י הגרף הוא k=4. ניתן לראות שעבור k>4, מתקבלת עלייה בשגיאה. ראינו בהרצאה שאלגוריתם k-NN מתקרב לשגיאת בייס כאשר k וגם m גדלים אך m גדל בסדר גודל מעל. במקרה שלנו m = 200 ואינו משתנה ולכן עבור k הולכים וגדלים האלגוריתם נוטה לכיוון התיוג הנפוץ ביותר במדגם האימון, כלומר אנו מקבלים bias גבוה.

ה) הגרף שקיבלנו עבור השגיאה כתלות ב- k עם דאטה "מלוכלך":



1) עבור הדאטה הנקי, ראינו כבר בסעיף ד שה-k האופטימלי הוא 4 בעוד עבור הדאטה המלוכלך ה-k האופטימלי הוא 9. בנוסף בשונה מסעיף ג' המגמה היא שהשגיאה עולה עם k בעוד בסעיף הקודם אנו רואים שהשגיאה יורדת ככל ש-k גדל. ההבדל במגמה נובע מכך שללא "לכלוך" של הדאטה, האלגוריתם חוזה עפ"י מעט נקודות קרובות ומכיוון שאין רעש יוצא אנו מקבלים שגיאה יחסית נמוכה. בניסוי המלוכלך עבור ערכי k קטנים ואנחנו חשופים יותר להשפעה של נקודות "מלוכלכות" ולכן השגיאה גבוהה מאוד עבור ערכי k נמוכים וככל ש-k גדל אנו נותנים פחות משקל לנק' מלוכלכות ולכן השגיאה יורדת. שווה לציין כי ערכי השגיאה בניסוי המלוכלך גדולים משמעותית מאלו המתקבלים בניסוי הנקי בגלל הלכלוך של הדאטה.

שאלה 3

א) נתחיל מתיאור התומך של X:

$$supp(X) = \{(20,5),(50,10),(50,15),(80,20)\}$$

וזאת הגדרה של bayes optimal predictor:

$$h_{bayes}(x) = \underset{y \in Y}{\arg\max}\ \eta_y(x) \quad \text{where:} \quad \eta_y(x) := \underset{(x,y)}{\mathbb{P}}(Y=y \mid X=x)$$

כעת נחשב את $h_{bayes}(x)$ עבור כל x בתומך, נסמן $\eta_{Apple}=\eta_A$, $\eta_{Orange}=\eta_O$.

$x=(80,20)$:

$$\eta_O((80,20)) = \frac{0.2}{0.2} = 1 \quad , \quad \eta_A((80,20)) = 0$$

$$\boxed{h_{bayes}((80,20)) = \text{Orange}}$$

$x=(50,15)$:

$$\eta_O((50,15)) = \frac{0.1}{0.1} = 1 \quad , \quad \eta_A((50,15)) = 0$$

$$\boxed{h_{bayes}((50,15)) = \text{Orange}}$$

$x=(50,10)$:

$$\eta_O((50,10)) = \frac{0}{0.2} = 0 \quad , \quad \eta_A((50,10)) = \frac{0.2}{0.2} = 1$$

$$\boxed{h_{bayes}((50,10)) = \text{Apple}}$$

$x=(20,5)$:

$$\eta_O((20,5)) = \frac{0.1}{0.5} = 0.2 \quad , \quad \eta_A((20,5)) = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

$$\eta_A((20,5)) > \eta_O((20,5)) \Rightarrow \boxed{h_{bayes}((20,5)) = \text{Apple}}$$

ב) כדי לחשב את ה error bayes optimal של D נשתמש בנוסחה שראינו בהרצאה:

$$err(h,D)=\sum \mathbb{P}[X=x]\left(1-\eta_{h(x)}(x)\right)$$

נציב בנוסחה:

$$\mathbb{P}[(20,5)]\cdot(1-0.8)+\mathbb{P}[(50,10)](1-1)+\mathbb{P}[(50,15)](1-1)$$

$$+\mathbb{P}[(80,20)](1-1)=\mathbb{P}[(20,5)]\cdot 0.2=0.5\cdot 0.2=\boxed{0.1}$$

ג) שגיאות האופרוקסימציה של מחלקת היפותזות $\mathcal{H}$ מוגדרת ע"י:

$$err_{app}:\min_{h\in\mathcal{H}} err(h,D)$$

ובמקרה שלנו מחלקת ההיפותזות היא:

$$\mathcal{H}=\{h(x)=\text{Orang},\ h(x)=\text{Apple}\}$$

נחשב את השגיאה עבור כל אחת מהפונקציות (נסמן:

$$h_1: h(x)=\text{Orange},\ h_2: h(x)=\text{Apple}$$

$$err_{h_1}=\mathbb{P}[X=x\mid y=\text{Orange}]=0.1+0.1+0.2=0.4$$

$$err_{h_2}=\mathbb{P}[X=x\mid y=\text{Apple}]=0.4+0.2=0.6$$

ולכן מהגדרה:

$$err_{app}(\mathcal{H},D)=0.4$$

ד) נשתמש בנוסחה שראינו בהרצאה:

$$\mathbb{E}_{S\sim D^m}[err(\hat{h}_S,D)]=\frac{k-1}{k}\sum_{x\in X}p_x(1-p_x)^m$$

במקרה שלנו $k=m=2$ ונקבל:

$$\mathbb{E}_{S\sim D^m}[err(\hat{h}_S,D)]=\frac{1}{2}\sum_{x\in X}p_x(1-p_x)^2=\frac{1}{2}\left[0.4\cdot0.6^2+0.2\cdot0.75^2+0.15\cdot0.85^2\right.$$

$$\left.+0.2\cdot0.8^2\right]=\frac{1}{2}\cdot1.285=0.642$$

עבור התפלגות D' ניתן להשתמש בנוסחה הסוף עבור התפלגות D לא מכיוון שפיתחנו את הנוסחה עם הנחת תגויות דטרמיניסטיות. כלומר אנחנו אומים רק כאשר קיבלנו x שרק רוינו וגם אינו בניחוש. בסוף בתגויות לא דטרמיניסטיות ניתן לטעות גם על x שראינו בתהליך הלמידה.

שאלה 4

נתון לנו כי $x\in[0,1]$ ו- $y\in\{0,1\}$ ועבור $k\geq 2$ זוגי נגדיר את מחלקת ההיפותזות:

$$\mathcal{H}=\left\{f_{a_1\ldots a_k}\,\middle|\,\forall i\in\{1,\ldots,k\},\ a_i\in[0,1],\ \text{and}\ a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_k\right\}$$

$$\forall x\in[0,1],\quad f_{a_1\ldots a_k}(x)=\mathbb{I}\left[\exists\,\text{odd integer}\ i\in\{1,\ldots,k-1\}\ \text{s.t}\ x\in[a_i,a_{i+1}]\right]$$

נתונה התפלגות D מעל $X\times Y$ כך שההסתברות $\mathbb{P}\left[X=x\right]$ עבור $(X,Y)\sim D$ מתפלגת אחיד על $[0,1]$.

א) עבור המחלקות - $\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_4,\mathcal{H}_6$ נטען כי $\mathcal{H}_6$ מקבלת את שגיאת האופרוקסימציה המינימלית על D. נזכיר כי שגיאת האופרוקסימציה מוגדרת כ:

$$err_{app}:\min_{h\in\mathcal{H}} err(h,D)$$

מחלקות ההיפותזות הנתונות מכילות אחת את השניה, מתקיים:

$$\mathcal{H}_2\subseteq\mathcal{H}_4\subseteq\mathcal{H}_6$$

מכיוון שכל $\mathcal{H}_2$ מאפשרת לנו לחלק את המקטע $[0,1]$ לשני מקטעים לכל היותר, אז גם כ- $\mathcal{H}_4$ ו- $\mathcal{H}_6$ ניתן לשלב את החלוקה הזאת ע"י הגדרת מקטעים בגודל 0. וכן לגבי $\mathcal{H}_4$ ו- $\mathcal{H}_6$. לכן אם קיימת היפותזה h כ- $\mathcal{H}_2$ או $\mathcal{H}_4$ עבורה מתקבלת שגיאת האופרוקסימציה אז $h\in\mathcal{H}_6$. בהכרח קיימת $h^*\in\mathcal{H}_6$ כך ש- $h^*\notin\mathcal{H}_4,\mathcal{H}_2$ אז ייתכן כי h^* כזאת תשיג שגיאה קטנה יותר מאשר h ולכן מתקיים:

$$\min_{h\in\mathcal{H}_2} err(h,D)\geq\min_{h\in\mathcal{H}_4} err(h,D)\geq\min_{h\in\mathcal{H}_6} err(h,D)$$

ב) נניח כי עבור $k\geq 2$ ו $m\leq k$ אז היפותזה $h\in H_k$ שלו משחזרת את כלל ההחלטה של אלגוריתם NN-1 מקיימת את כלל ה-ERM.

אלגוריתם NN-1 על $S=\{(x_1,y_1)\dots(x_k,y_k)\}$ יחלק את המקטע $[0,1]$ לכל היותר ל-m מקטעים המוגדרים ע"י המרחקים בין הנק' במדגם. אלגוריתם NN-1 ישיג שגיאה 0 עבור המדגם מכיוון שעבור כל x_i במדגם נחזיר את y_i.

כעת נרצה להראות שניתן לשחזר את התיוג של NN-1 בעזרת פונקציה מ-H_k.
נרצה לבחור את הנק' $a_1\leq\dots\leq a_k$ כך שהתיוג עבור x_i יהיה y_i.
עבור k נק' אנחנו יכולים ליצור לכל היותר k+1 אינטרוולים, ונקבל $\frac{k}{2}$ אינטרוולים בעלי תיוג 1 ו $\frac{k}{2}+1$ אינטרוולים עם תיוג 0.

נבנה את הפונקציה $h\in H_k$ איטרטיבית:

- עבור הנק' (x_1,y_1) אם $y_1=0$ אז נרצה מקטע אשר מתויג כ-1. נבחר $a_1>x_1$ והמקטע $[0,a_1)$ מתויג ב-0 ולכן נתייג נכון.
  אם $y_1=1$ אז נבחר $a_1<x_1$ ו $a_2>x_1$ ונקבל $x_1\in[a_1,a_2)$ יתויג נכון ל-x_1.
- נמשיך כך עבור כל $i\in\{2,\dots,k\}$:

→ אם $y_i=y_{i-1}$, כלומר התיוג החדש זהה לזה של המקטע הקודם אז ניתן להרחיב את a_i כך ש $a_i>x_i$ ולכן $x_i\in[a_{i-1},a_i)$ ויום התיוג זהה אז הוא נכון.

→ אם $y_{i-1}\neq y_i$ אז נרצה להחליף אינדקס כדי ליצור מקטע חדש עם תיוג הפוך אז רק נדרוש ש $a_i<x_i$ ולכן נחליף תיוג מהמקטע הקודם ונקבל תיוג נכון.

מכיוון ש- $m\leq k$ אז בהכרח יש לנו מספיק נק' לבחור כדי ליצור מקטעים עם תיוג מתאים.

אם $m<k$ אז נוכל לבחור פשוט מקטעים באורך 0 כך שהתיוג בכל מקטע נשאר זהה לזה של NN-1.

בסה"כ הראנו כי עבור כל S וכל תיוג ש NN-1, נוכל למצוא פונקציה ב H_k אשר משחזרת את התיוג עם שגיאה אמפירית 0. מכיוון ש-0 זאת השגיאה המינימלית

ולכן הפונקציה מיישמת את כלל ה-ERM.

ג) נרצה להוכיח כי עבור $m=k+1$ כאשר $k\geq 2$ קיים מדגם $S=\{(x_1,x_2),\dots,(x_m,y_m)\}$ ללא דוגמאות חוזרות, שעבורו התוצאה המוחזרת ע"י 1-NN <u>לא</u> מקיימת את כלל ERM עבור המחלקה H_k. נבחר את המדגם להיות:

$$S=\{(x_1=0,y_1=1),(x_2,y_2=0),\dots(x_m=1,y_m=1)\}$$

המדגם הוא בעל תוויות מתחלפות כאשר $x_1=0$, $x_m=1$ והתוויות של שניהם הן 1.
האלגוריתם 1-NN מסווג m נקודות מושלם מכיוון שהוא יחזיר את y_i עבור x_i מכיוון שכל נקודה היא הקרובה ביותר לעצמה. 1-NN מקבל שגיאה אמפירית 0.
נראה כי אין $f\in H_k$ אשר עבורה ניתן לתייג עם שגיאה 0 את S.
בכדי לתייג את המדגם נכון f חייבת ש-x_m יכלל במקטע בעל אינדקס אי זוגי.
אבל מכיוון ש-$x_1=0$ ו-$y_1=1$ אז בהכרח $a_1=0$ אחרת נטעה כבר שם. ומאחר שהדוגמאות מתויגות בתוויות מתחלפות אז כל דוגמה דורשת הגדרה של a_i נוסף.
אז $y_k=0$ ולכן $a_k<x_k$ כדי לא לטעות בתיוג והמקטע האחרון הוא $[a_k,1]$ אך k זוגי ולכן x_m יתויג כ-0. כלומר בהכרח נטעה ונקבל שגיאה שונה 0.
כלומר למרות ש-1-NN מסווג נכון הוא לא מקיים את תנאי ה-ERM ב-H_k עבור מדגם בגודל $m=k+1$.

שאלה 5

נתונה מחלקת ההיפותזות:

$$\mathcal{H}=\{f_{a,b,c,d} \mid a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a<b<c<d\}$$

כאשר:

$$f_{a,b,c,d}(x)=\mathbb{I}[a\le x\le b \text{ or } c\le x\le d]$$

כלומר פונקציה המחזירה כאשר x נמצא באיחוד בין שני קטעים על הישר הממשי 0-1 ואחרת. כדי למצוא את מימד VC של $\mathcal{H}$ נרצה להראות שני דברים:

1) קיימת קבוצה בגודל k אשר מנתצת את $\mathcal{H}$ כלומר ניתן לתייג אותה בכל דרך עם היפותזות ב-$\mathcal{H}$.

2) כל קבוצה בגודל $k+1$ לא יכולה להיות מתויגת בכל דרך ע"י היפותזות ב-$\mathcal{H}$.

נטען כי $VC(\mathcal{H})=4$.

נראה תחילה כי קיימת קבוצה בגודל 4 שניתן לתייג בכל דרך ע"י היפותזות מ-$\mathcal{H}$:

ניקח 4 נקודות $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ כאשר $x_1<x_2<x_3<x_4$. אם התיוג שלהן הוא זהה, כלומר:

$$\{1,1,1,1\},\ \{0,0,0,0\}$$

אז ניתן לבחור $a=x_1, b=x_4$ עבור האפשרות הראשונה ו-$a>x_4$ עבור השנייה.

אם התיוג דורש רק מקטע רציף אחד כדי לתייג אותו נכון, כלומר תיוג מהצורה:

$$\{0,0,1,1\},\ \{1,1,0,0\},\ \{0,1,1,0\}$$

אז אנחנו יכולים לבחור מקטע יחיד שמכיל את הנק' המתויגות 1 ואת המקטע השני כך שהוא לא מכיל אף אחת מהנקודות האחרות ונקבל תיוג נכון.

עבור מקטעים הדורשים שני מקטעים רציפים כדי לתייג אותם, כלומר מהצורה:

$$\{0,1,0,1\},\ \{1,0,0,1\},\ \{1,0,1,0\}$$

נוכל לבחור a,b,c,d כך שנקבל שני מקטעים זרים אשר מתייגים נכון.

כעת נותר להראות כי עבור כל 5 נק' לא ניתן להשיג עבורן את כל התיוגים האפשריים עם פונקציות מ-$\mathcal{H}$. נסתכל על 5 נק' $x_1 \ldots x_5 \in \mathbb{R}$. קיים תיוג עבור 5 הנק' הדורש שלושה מקטעים זרים, כלומר שאין 2 נק' עוקבות בעלות תיוג "1". תיוג מהצורה: $\{1,0,1,0,1\}$ ומכיוון שמחלקת ההיפותזות שלנו מוגבלת לשני מקטעים זרים עבור כל דוגמה של 5 לא נוכל להשיג את התיוג הזה.

שאלה 6

נרצה למצוא תנאי על m (גודל המדגם S) כך שהאלגוריתם מחזיר $h_{S,S'}$ המקיים:

$$\underset{S\sim D^m, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[err(h_{S,S'}, D) \le \epsilon\right] \ge 1-\delta \quad \text{for } \epsilon,\delta\in(0,1)$$

נחשב את ההסתברות שהאלגוריתם החזיר לנו פרדיקטור בעל שגיאה גדולה מ-ϵ:

$$\underset{S\sim D^m, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[err(h_{S,S'}, D) > \epsilon\right] \overset{(1)}{=}$$

$$\underset{D^m, S\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[err(h_{S,S'}, D) > \epsilon \text{ and } \hat{err}(h_{S,S'}, S) = 0 \text{ and } \hat{err}(h_{S,S'}, S') = 0\right] \overset{(2)}{\le}$$

$$\mathbb{P}\left[\exists h\in\mathcal{H} \text{ s.t } err(h,D) > \epsilon \text{ and } \hat{err}(h,S) = 0 \text{ and } err(h,S') = 0\right] =$$

$$\mathbb{P}\left[\text{samples } S, S' \text{ are bad}\right]$$

(1) נובע מהגדרת ה-ERM כאשר D ריאליזבילית עבור $\mathcal{H}$.

(2) מכיוון שעברנו למקרה כללי יותר.

כעת נרצה למצוא גודל מדגם m שעבורו מתקיים:

$$\underset{S\sim D^m, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[S, S' \text{ are good samples}\right] \ge 1-\delta$$

נגדיר $h^{bad}\in\mathcal{H}$ להיות השערה סבורה:

$$err(h^{bad}, D) > \epsilon$$

ומתקיים:

$$\underset{(X,Y)\sim D}{\mathbb{P}}\left[h^{bad}(X)\ne Y\right] = err(h^{bad}, D) > \epsilon$$

נחשב את ההסתברות ש-h^{bad} נראית "טובה" ל-$ERM_{\mathcal{H}}$:

$$\mathbb{P}\left[\hat{err}(h^{bad}, S) = 0 \text{ and } err(h^{bad}, S') = 0\right] =$$

$$\underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[\forall (x,y)\in S,\ (x',y')\in S',\ h^{bad}(x)=y \text{ and } h^{bad}(x')=y'\right] \overset{(3)}{=}$$

$$\underset{S\sim D^m}{\mathbb{P}}\left[\forall (x,y)\in S,\ h^{bad}(x)=y\right]\cdot \mathbb{P}\left[\forall (x',y')\in S'\ h^{bad}(x')=y'\right] \overset{(4)}{=}$$

$$\left(\underset{(X,Y)\in D}{\mathbb{P}}\left[h^{bad}(X)=Y\right]\right)^m \cdot \left(\underset{(X,Y)\in D}{\mathbb{P}}\left[h^{bad}(X)=Y\right]\right)^n = \left(\underset{(X,Y)\in D}{\mathbb{P}}\left[h^{bad}(X)=Y\right]\right)^{m+n} =$$

$$= \left(1-\underset{(X,Y)\sim D}{\mathbb{P}}\left[h^{bad}(X)\neq Y\right]\right)^{m+n} \overset{(5)}{\leq} (1-\epsilon)^{m+n} \leq e^{-\epsilon(m+n)}$$

(3) מכיוון ש-S' ו-S נדגמים ללא תלות

(4) מכיוון שכל (x,y) ו-(x',y') נדגמים עצמאית ניתן לעבור לכפל הסתברויות

(5) $\mathbb{P}\left[h^{bad}(X)\neq Y\right] = err(h^{bad}, D) > \epsilon$

כמו נדרש שזה יתקיים עבור כל היפותזה "רעה" $h\in \mathcal{H}$. נגדיר: $I_{bad}\subseteq\{1,\dots,k\}$ להיות קבוצת האינדקסים עבור היפותזות "רעות" ב $\mathcal{H}$.

נסמן קודם את ההסתברות שהיפותזה גרועה טובה על המדגמים S,S' עבור $i\in I_{bad}$:

$$\underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[\hat{err}(h_i,S)=0 \text{ and } \hat{err}(h_i,S')=0\right] \leq e^{-\epsilon(m+n)}$$

המדגמים S,S' הם לא טובים אם עבור $i\in I_{bad}$ כלשהו h_i גרועה טובה עליהם.

$$\mathbb{P}[S,S' \text{ are not good}] = \underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[\exists i\in I_{bad} \text{ s.t } \hat{err}(h_i,S)=0 \text{ or } \hat{err}(h_i,S')=0\right] =$$

$$\underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\Big[\left(\hat{err}(h_1,S)=0 \text{ and } \hat{err}(h_1,S')=0\right) \text{OR} \dots$$

$$\left(\hat{err}(h_k,S)=0 \text{ and } \hat{err}(h_k,S')=0\right)\Big] \overset{(6)}{\leq}$$

$$\sum_{i\in I_{bad}} \underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[\hat{err}(h_i,S)=0 \text{ and } \hat{err}(h_i,S')=0\right] \leq |I_{bad}|\, e^{-\epsilon(m+n)} \leq$$

$$|\mathcal{H}|\cdot e^{-\epsilon(m+n)}$$

(6) חסם האיחוד.

ולכן קיבלנו:

$$\underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[err(\hat{h}_{S,S'}, D) > 0\right] \le \mathbb{P}[S, S' \text{ are not good}] \le |\mathcal{H}|e^{-\epsilon(m+n)}$$

ונדרוש:

$$\underset{S\sim D^m,\, S'\sim D^n}{\mathbb{P}}\left[err(\hat{h}_{S,S'}, D) > 0\right] \le |\mathcal{H}|e^{-\epsilon(m+n)} \le \delta$$

ונסתכל על אי השוויון הימני:

$$|\mathcal{H}|e^{-\epsilon(m+n)} \le \delta \Rightarrow e^{-\epsilon(m+n)} \le \frac{\delta}{|\mathcal{H}|} \Rightarrow -\epsilon(m+n) \le \log(\delta) - \log(|\mathcal{H}|)$$

$$\Rightarrow m+n \ge \frac{\log(|\mathcal{H}|) + \log(\frac{1}{\delta})}{\epsilon} = \boxed{m \ge \frac{\log(|\mathcal{H}|) + \log(\frac{1}{\delta})}{\epsilon} - n}$$