Г. П. Иванова, В. Я. Кондратьев, Одна оценка вероятности разорения, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2007, том 52, выпуск 2, 359–363

DOI: http://dx.doi.org/10.4213/tvp178

 ИВАНОВА Г. П., КОНДРАТЬЕВ В. Я.**

ОДНА ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ[1)]

Неравенство для вероятности разорения игрока при игре с бесконечно богатым противником выводится из одной формулы Лапласа.

Ключевые слова и фразы: вероятность разорения, классическая задача о разорении.

Введение. Целью данной работы является решение одной из задач о разорении игрока, предложенной Я. В. Успенским в VIII главе книги «Введение в математическую вероятность» ([1, с. 160–161]).

Задача. *Два игрока A и B играют последовательно не более, чем n партий. Их ставки равны единице. Вероятности выигрыша для A и B в одной конкретной партии равны $\frac{1}{2}$. Капитал игрока A равен a единиц, капитал игрока B считаем бесконечно большим.*

Требуется определить вероятность $y_{a,n}$ того, что игрок A разорится в какой-либо партии с номером k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $a \geqslant 1$.

Для $y_{a,n}$ Успенским была предложена формула

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du + \Delta, \tag{0.1}$$

где

$$t = \frac{a}{\sqrt{2\left(n + \frac{2}{3}\right)}}, \tag{0.2}$$

$$|\Delta| < \frac{1}{2\pi n} + \frac{2}{n} \exp\left\{ - \frac{\pi^2 n}{32} \right\} = \Delta'. \tag{0.3}$$

Эта формула приведена без доказательства.

В настоящей работе получена более точная оценка остаточного члена Δ в формуле (0.1) для вычисления вероятности разорения игрока A, а именно,

$$|\Delta| \leqslant \frac{4(n+1)}{8,62\pi N^2} + \frac{4}{N\pi} e^{-N/2} = \Delta'', \qquad N = n + \frac{2}{3}. \tag{0.4}$$

(Нетрудно показать, что $\Delta'' < 1/(6n)$ при $n \geqslant 8$.)

Заметим, что формулу (0.1) для $y_{a,n}$ можно переписать в виде $y_{a,n} = 2(1 - \Phi(\tau))$, где Φ — стандартная нормальная функция распределения, а $\tau = t\sqrt{2} = a\left(\sqrt{n + \frac{2}{3}}\right)^{-1} = a/\sqrt{N}$.

Первое слагаемое в Δ'' равно

$$\frac{1}{2\pi n} \frac{8(n^2+n)}{8,62(n+2/3)^2} \leqslant \frac{1}{2\pi n} 0,93.$$

Второе слагаемое в Δ'' не превосходит ($\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{32} > 0,19$)

$$\frac{2}{n} \exp\left\{ - \frac{\pi^2}{32} n \right\} \frac{2}{\pi} e^{-\gamma n} < \frac{2}{n} \exp\left\{ \frac{-\pi^2}{32} n \right\} 0,64\, e^{-0,19n}.$$

Отсюда видно, насколько величина Δ'' меньше Δ'.

---

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия.

1. Уравнение для $y_{a,n}$; связь с суммами случайных величин. Обозначим X_k изменение капитала игрока A в результате k-й партии. Случайные величины $X_1, X_2, \dots$ являются независимыми и принимают значения 1 и -1 с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждое. Сумма $S_k = X_1 + \dots + X_k$ равна изменению капитала игрока A в результате k первых партий.

Очевидно, что при $a > 0$ и $n \geqslant 1$

$$y_{a,n} = \mathbf{P}\Big\{ \min_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \leqslant -a \Big\}. \tag{1.1}$$

Вероятности $y_{a,n}$ удовлетворяют соотношениям (ср. [2, гл. XIV])

$$y_{a,n} = \frac{1}{2} y_{a+1,\,n-1} + \frac{1}{2} y_{a-1,\,n-1}, \tag{1.2}$$

$$y_{0,n} = 1, \qquad n \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$y_{a,0} = 0, \qquad a > 0. \tag{1.4}$$

Указанные соотношения определяют однозначно $y_{a,n}$ для всех положительных a и n.

Для $y_{a,n}$ в случае, когда a и n имеют одинаковую четность, Лаплас в своей «Аналитической теории вероятностей» («Théorie analytique des probabilités», 1812, с. 235) предложил следующую точную формулу:

$$y_{a,n} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin a\varphi}{\sin \varphi} (\cos \varphi)^{n+1}\, d\varphi \tag{1.5}$$

и изучил поведение интеграла в (1.5) при $n \to \infty$.

Формулы Успенского (0.1)–(0.3) придают строгий смысл рассуждениям Лапласа.

2. Оценка вероятности разорения игрока при игре с бесконечно богатым противником. Перепишем подынтегральную функцию в интеграле (1.5) в виде

$$\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\, g(\varphi), \tag{2.1}$$

где $g(\varphi) = \varphi(\sin\varphi)^{-1} (\cos\varphi)^{n+1}$.

2.1. Мы оценим теперь функцию $g(\varphi)$ *сверху на интервале* $(0, \pi/2)$ и *снизу на интервале* $(0, 1)$. В обоих случаях мы пользуемся известными разложениями функций $\ln\cos\varphi$ и $\ln(\sin\varphi/\varphi)$ в степенные ряды.

Лемма 1. *При* $|\varphi| < \pi/2$

$$\ln\cos\varphi = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k} \tag{2.2}$$

$$= -\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{12} - \frac{\varphi^6}{45} - \frac{17\varphi^8}{2520} - \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k}, \tag{2.3}$$

где B_{2k} — числа Бернулли.

Лемма 2. *При* $|\varphi| < \pi$

$$\ln\frac{\sin\varphi}{\varphi} = -\frac{\varphi^2}{6} - \frac{\varphi^4}{180} - \frac{\varphi^6}{2835} - \frac{\varphi^8}{37800} - \sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{2k-1}|B_{2k}|}{k(2k)!} \varphi^{2k}. \tag{2.4}$$

См. [4, с. 40, (4.3.1), (4.3.2) и с. 607–613].

Лемма 3. *При* $|\varphi| < \pi/2$

$$0 \leqslant g(\varphi) \leqslant \exp\Big\{ -\frac{N\varphi^2}{2} \Big\}, \qquad N = n + \frac{2}{3}. \tag{2.5}$$

Доказательство леммы 3. Мы имеем

$$\ln g(\varphi) = (n+1)\ln\cos\varphi - \ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}. \tag{2.6}$$

Применим формулы (2.3) и (2.4) и сгруппируем слагаемые с одинаковыми показателями φ:

$$-\frac{(n+1)\,\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^2}{6}=\frac{-3(n+1)\,\varphi^2+\varphi^2}{6}=\frac{-3n\varphi^2-3\varphi^2+\varphi^2}{6}$$
$$=\frac{-3\varphi^2(n+2/3)}{6}=-\frac{n+2/3}{2}\,\varphi^2=-\frac{N}{2}\,\varphi^2,$$
$$-\frac{(n+1)\,\varphi^4}{12}+\frac{\varphi^4}{180}<0,$$
$$-\frac{(n+1)\,\varphi^6}{45}+\frac{\varphi^6}{2835}<0,$$
$$-\frac{(n+1)\,17\varphi^8}{2520}+\frac{\varphi^8}{37800}<0,$$

и т.д. Поскольку все слагаемые ряда для функции (2.6) отрицательны, то в качестве верхней оценки функции (2.6) можно взять

$$-\frac{n+2/3}{2}\,\varphi^2=-\frac{N}{2}\,\varphi^2.$$

Следовательно, мы доказали, что

$$0\leqslant\frac{\varphi(\cos\varphi)^{n+1}}{\sin\varphi}<\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\},\qquad |\varphi|<\frac{\pi}{2}.$$

Лемма 4. *При* $|\varphi|\leqslant 1$

$$g(\varphi)\geqslant\exp\left\{-\frac{N}{2}\,\varphi^2-\frac{n+1}{8,62}\,\varphi^4\right\}. \tag{2.7}$$

При доказательстве леммы 4 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5. *При* $2k\geqslant 10$

$$|B_{2k}|\leqslant\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\,1{,}001. \tag{2.8}$$

Доказательство леммы 5. Рассмотрим функцию

$$\zeta(2k)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2k}}$$

(дзета-функция Римана). Ясно, что $\zeta(2k)$ убывает с ростом k. Кроме того, имеет место соотношение

$$|B_{2k}|=\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\,\zeta(2k)$$

(см. ([4, с. 610, (23.2.16) и с. 614])) и при $k\geqslant 5$ справедливо $\zeta(2k)\leqslant\zeta(10)=1{,}00099\ldots\leqslant 1{,}001$, откуда следует утверждение леммы 5.

Доказательство леммы 4. Мы исходим из формулы (2.6). В разложении функции $(n+1)\ln\cos\varphi$ выпишем явно члены до порядка φ^8, а в разложении $\ln\sin\varphi/\varphi$ возьмем только член с φ^2. Мы получим при $|\varphi|\leqslant 1$

$$(n+1)\ln\cos\varphi-\ln\frac{\sin\varphi}{\varphi}\geqslant-\frac{N}{2}\,\varphi^2-(n+1)\,\frac{\varphi^4}{12}-(n+1)\,\frac{\varphi^6}{45}-(n+1)\,\frac{17\varphi^8}{2520}$$
$$-(n+1)\sum_{k=5}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!}\,\varphi^{2k}$$
$$\geqslant-\frac{N}{2}\,\varphi^2-(n+1)\,\varphi^4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{45}+\frac{17}{2520}+\sum_{k=5}^{\infty}\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)|B_{2k}|}{k(2k)!}\right). \tag{2.9}$$

Согласно (2.8), имеем при $k\geqslant 5$

$$\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k(2k)!}\,|B_{2k}|\leqslant\frac{2^{2k-1}(2^{2k}-1)}{k(2k)!}\,\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\,1{,}001\leqslant\frac{1}{k}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k 1{,}001.$$

Следовательно, $\sum_{k=5}^{\infty}$ в правой части (2.9) не превосходит

$$\alpha = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{\pi^2}\right)^5 \frac{1}{1-4/\pi^2}\,1{,}001 = 0{,}003680919.$$

Кроме того,

$$\beta = \frac{1}{12} + \frac{1}{45} + \frac{17}{2510} = 0{,}112301587.$$

Мы видим, что коэффициент при φ^4 в правой части (2.9) не превосходит по абсолютной величине

$$(n+1)\,(\alpha+\beta) < (n+1)\,0{,}115982506 = (n+1)\,\frac{1}{8{,}62198993} < (n+1)\,\frac{1}{8,62}.$$

Лемма 4 доказана.

2.2. Оценка остаточного члена Δ в формуле $y_{a,n} = 1 - 2\pi^{-1/2}\int_0^t e^{-u^2}\,du + \Delta$. Сначала придадим интегралу другой вид.

Лемма 6. *При любых $a > 0$, $N > 0$*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi, \tag{2.10}$$

где $t = a/\sqrt{2N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (2.10) известно (см. [3, с. 452, (2.5.36.6)]). Мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} y_{a,n} &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin a\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^{n+1}\,d\varphi \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,g(\varphi)\,d\varphi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\,du + \Delta \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi + \Delta. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,g(\varphi)\,d\varphi \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,g(\varphi)\,d\varphi\right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi - \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi/2}\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,g(\varphi)\,d\varphi \\ &= \Delta_1 + I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Оценим Δ_1 и интегралы I_1, I_2 по отдельности. Ясно, что

$$|I_1| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi,$$

а по лемме 3 также и

$$\begin{aligned} |I_2| &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{\varphi}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi < \frac{2}{\pi N}\int_1^\infty N\varphi\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi N}\int_{N/2}^\infty e^{-u}\,du = \frac{2}{\pi N}\,e^{-N/2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 7. *Справедлива оценка*

$$|I_1| + |I_2| \leqslant \frac{4}{\pi N}\,e^{-N/2}. \tag{2.14}$$

Оценим теперь $|\Delta_1|$.

Мы запишем $g(\varphi)$ в следующем виде: вместо вытекающих из лемм 3 и 4 неравенств

$$\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{n+1}{8{,}62}\,\varphi^4\right\}\leqslant g(\varphi)\leqslant\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\},\qquad |\varphi|\leqslant 1,$$

мы запишем равенство $g(\varphi)=\exp\{-N\varphi^2/2\}\,(1-\theta[(n+1)/8{,}62]\,\varphi^4)$, где θ — некоторая величина, зависящая от N и φ, и $0\leqslant\theta\leqslant 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|\Delta_1| &= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^1\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\left(\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}-g(\varphi)\right)d\varphi\right|\\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\left|\int_0^1\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\,\theta\,\frac{n+1}{8{,}62}\,\varphi^4\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi\right|\\
&\leqslant \frac{n+1}{8{,}62}\,\frac{2}{\pi}\int_0^1\varphi^3\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi\\
&= \frac{n+1}{8,62}\,\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{N\varphi^2}{2}\,\frac{2}{N}\,N\varphi\,\frac{1}{N}\exp\left\{-\frac{N\varphi^2}{2}\right\}d\varphi=\frac{n+1}{8{,}62}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{N/2}ue^{-u}\,du\,\frac{2}{N}\,\frac{1}{N}\\
&\leqslant \frac{n+1}{8{,}62}\,\frac{2}{\pi}\,\frac{2}{N^2}\int_0^\infty ue^{-u}\,du=\frac{n+1}{8{,}62}\,\frac{4}{\pi N^2}.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Из формул (2.12)–(2.15) вытекает неравенство (0.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Uspensky J. V.* Introduction to Mathematical Probability. New York: McGraw-Hill, 1937, 240 p.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984, 528 с.
3. *Прудников А. В.*, *Брычков Ю. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981, 798 с.
4. *Абрамовиц М.*, *Стиган И.* (ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979, 830 с.

Поступила в редакцию
4.IV.2004

 *ЛЕБЕДЕВ А. В.**

ЭКСТРЕМУМЫ ПОЛЕЙ ДРОБОВОГО ШУМА В СЛУЧАЕ ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИХСЯ ХВОСТОВ С ПОКАЗАТЕЛЕМ $\alpha\in(0,1)$[1)]

Рассматриваются поля дробового шума с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд, где показатель изменения $\alpha\in(0,1)$. Исследуется асимптотическое поведение супремумов поля по ограниченным измеримым областям, растущим в смысле Ван Хова. Ранее полученный автором невырожденный предельный закон выведен при иных условиях.

* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей, Ленинские горы, 119992 Москва, Россия; e-mail: alebedev@mech.math.msu.su

1) Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и гранта НШ-1758.2003.1.