FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ

Los 12 pasos para computar las ecuaciones de Navier-Stokes

Juan Camilo Acosta Arango

16 de octubre de 2015

Resumen

Este proyecto se basa en el curso online *12 steps to Navier-Stokes*[Lora], de la Prof. Lorena Barba y puesto a disposición del público en general por la Universidad de Boston. La intención es seguir el camino trazado por el curso, para lograr comprender las ecuaciones de Navier-Stokes y así mismo trasladar la formulación matemática, a esquemas de computación para su solución numérica a travez de Python y sus librerías.

Introducción

La idea de seguir este curso es entender los conceptos fundamentales para la solución computacional de problemas con fluidos, y durante este proceso aplicar técnicas de los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales. Además de la parte computacional, investigar y entender el fenómeno físico y su formulación con modelos matemáticos.

Los objetivos son:

1. Presentación de las ecuaciones de Navier-Stokes

2. Discretización de ecuaciones diferenciales por medio de Diferencias Finitas

3. Modelos simplificados de ecuaciones como el de Convección Lineal, Ecuación no viscosa de Burguer, Ecuación de Convección y Difusión.

4. Desarrollo de los 12 pasos para computar las ecuaciones de Navier-Stokes

¿Por que basar el proyecto en fluidos? Gran parte de los temas abarcados en los cursos de anális en una carrera de pregrado de matemáticas, se pueden ver aplicados en el estudio de la

Mecánica de Fluidos, entre ellos encontramos Series de Taylor, linealización de funciones, Ecuaciones diferenciales Ordinarias y Parciales, Álgebra lineal, Cálculo Vectorial e Integral, inclusive Álgebra Booleana, solo por mencionar algunos.

Es decir de grandes personalidades como el neurofisiólogo Dr. Rodolfo Llinás, que los conceptos abstractos son mas fáciles de ser apropiados por la mente, cuando se ponen en contexto. En un curso de Cálculo Vectorial el estudiante se enfrenta a teoremas, como el de Divergéncia o el de Stokes, los cuales al ser presentados por el profesor como una simple ecuación matemática, tal vez no logren ser interiorizados. En el estudio de los fluidos estos teoremas cobran una representación tangible y generan una relación directa con su formulación matemática. No se malentienda la intención de la idea aquí presentada, por el contrario los conceptos abstractos de la matemática son de gran importancia para toda la ciencia y su desarrollo futuro.

Formulación del Problema

Ecuación de Navier-Stokes[Lorb]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{-1}{\rho}\nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} \tag{1}$$

Solo para mostrar su gran importancia, las ecuaciones de Navier-Stokes fueron propuestas por el matemático Steven Smale, ante el Clay Mathematics Instute como uno de los 8 problemas para este milenio.

"Navier-Stokes equation; This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding."[Ste]

Como lo menciona Smale en su formulación, no conocemos soluciones analíticas para este problema, esto es debido a que las ecuaciones están en términos de ecuaciones diferenciales *no lineales* y en general no existen métodos que den una forma para resolverlas.

Cabe mencionar que además de su gran importancia matemática, las ecuaciones de Navier-Stokes, describen el comportamiento de los fluidos es decir de casi todo lo que nos rodea (si no todo).

Las aplicaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, son infinitas, a nivel científico para entender el comportamiento del paso de aire por los pulmones, de la sangre por el cuerpo, son la base para entender los comportamientos de los súper fluidos como lo es el plasma presente en el corazón del Sol. En la ingeniería permiten crear modelos eficientes de todo tipo de vehículos. Llega a tener aplicaciones tan importantes como en la investigación de movimientos telúricos, por medio de simulaciones de las placas tectónicas que fluyen sobre el flujo de magma de la Tierra. Es por los aspectos anteriormente mencionados que se puede decir que las ecuaciones de Navier-Stokes son muy importantes para la humanidad y si se llegase a encontrar sus soluciones analíticas, el avance de matemático y tecnológico sería enorme.

Debido a que no existen soluciones analíticas, se recurre a las herramientas brindadas por los métodos numéricos, que en general permiten aproximaciones a la solución.

A travez de este curso, se pretende hacer el paso a paso, pero orientándose a la discretización de las Ecuaciones de Euler para fluidos, que son una formulación particular de las de Navier-Stokes, y como nota historica la base de su formulación.
La ecuación (1) se simplifica a:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} - g \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{3}$$

Donde esta representación de las Ecuaciones de Euler para fluidos[R M], son para un flujo bajo el campo gravitacional de la Tierra.

Los avances en este proyecto pueden ser encontrados en el repositorio `http://ja0335.github.io/`

Requerimientos

- Conocimientos en Mecánica de Fluidos, Ecuaciones de Navier-Stokes, Ecuaciones de Euler (fluidos)
- Ecuaciónes Diferenciales Parciales
- Conocimientos en programación con Python y sus librerías de programación científica (Numpy, Matplotlib)

Referencias

[Lora] Boston University Lorena Barba. *12 steps to Navier-Stokes.* URL: `https://piazza.com/bu/spring2013/me702/resources`.

[Lorb] Boston University Lorena Barba. *Simplified model equations.* URL: `https://s3.amazonaws.com/piazza-resources/had0f0fu18r5e9/hckodx02z861x9/me702Lecture3slides.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAJKOQYKAYOBKKVTKQ&Expires=1441955265&Signature=gL6JbRszc9FBdhfE2KYTeECtd4w=`.

[R M] F. J. Uribe R. M. Velasco. *La Hidrodinamica de Leonhard Euler.* URL: `http://www.miscelaneamatematica.org/Misc46/Uribe.pdf`.

[Ste] Clay Mathematics Institute Steven Smale. *Millennium Problems.* URL: `http://www.claymath.org/millennium-problems`.