UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

LISTA 2 - PROBABILIDADE B (CE087)

Prof. Benito Olivares Aguilera 2º Sem./19

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, INDEPENDÊNCIA E MÉTODO DO JACOBIANO.

1. Se $X \sim \exp(1/2)$, encontre a densidade de $Y = X^{1/2}$. Tal distribuição é chamada **Weibull** de parâmetros 2 e 1/2.

2. Seja $X \sim N(0,1)$, encontre a densidade de $Y = e^X$. Tal distribuição é chamada **Lognormal** de parâmetros 0 e 1.

3. Se X~Laplace(1), encontre a densidade de $Y = X^2$.

4. Seja X uma variável aleatória cuja função de distribuição F é uma função contínua na reta. Prove que a distribuição de $Y = F(x)$ é $U(0,1)$.

5. Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, independentes e distribuídas uniformemente no intervalo (0,60), encontre $P(|X - Y| < 10)$.

6. Suponhamos que os tempos que dois estudantes demoram para resolverem um problema sejam independentes e exponenciais com parâmetro λ. Calcule a probabilidade do primeiro estudante demorar pelo menos duas vezes o tempo do segundo para resolver o problema.

7. Uma urna contém 1 bola vermelha e 2 brancas. Retira-se uma amostra de tamanho 3 com reposição. Seja a variável aleatória

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ se a i-ésima bola é vermelha} \\ 0, \text{ se a i-ésima bola é branca.} \end{cases}$$

a) Encontre a distribuição conjunta de (X_1, X_2, X_3).

b) Determine $P(X_1 + X_2 = X_3)$.

8. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $N(0,1)$. Mostre que $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ e $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ também são independentes e $N(0,1)$.

9. Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $U(0,1)$. Verfique se $X+Y$ e X-Y são independentes.

10. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas exp(λ), encontre as densidades de $X+Y$ e X-Y.

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\exp(\lambda)$, Provar que $Z = \dfrac{X}{X+Y}$ possui distribuição $U[0,1]$.

12. Seja X uma variável aleatória possuindo densidade $f(x)$. Encontrar a densidade de $Y = |X|$ pelo método da Função Distribuição e logo pelo método do Jacobiano.

13. Mostre que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias iid tais que $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, então $X_1 + \ X_2 + \cdots, +X_n \sim Poisson(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

14. Mostre que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias iid $\exp(\lambda_i)$ e $Y = \min X_i$, então $Y \sim \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

15. Se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias iid $U(0,1)$, mostre que $-2n \log Y \sim {\chi^2}_{2n}$, onde Y é a média geométrica das X_i, definida por $Y = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$.

16. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xy, \ 0 \leq x \leq 1, , 0 \leq y \leq 1 \ .$$

Encontre a densidade do produto e do quociente entre X e Y.

17. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com $X \sim \Gamma(\alpha_1, 1)$ e $Y \sim \Gamma(\alpha_2, 1)$. Mostre que $X + Y$ e X/Y são independentes e ache suas distribuições.

18. Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias iid N(0,1). Defina as novas variáveis:

$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $Y_2 = X_1 - X_2$ e $Y_3 = X_1 - X_3$.

Encontre as densidades marginais das $Y_i's$.