Dokumentacja do zadania 2.5

Marcin Horoszko, Radosław Głombiowski, Jacek Dermont

16 listopada 2012

1 Zadanie 2.5

Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = lnx + x - 5$, wczytać a,b $\in R$ takie, by $0 <$ a $<$ b oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Następnie, dopóki "użytkownik się nie znudzi", wczytywać wartość $0 < \epsilon < 1$ i metodą połowienia na [a,b] przybliżyć z dokładnością ϵ rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 =$ a, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_{k-1}| \leqslant \epsilon$. Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawowe pojęcia

2.1 (Metoda połowienia (równego podziału, bisekcji))**.** Jedna z metod rozwiązywania równań nieliniowych. Opiera się ona na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego: *Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.*. Przebieg metody:
Wybieramy przybliżenie ϵ (np. $\epsilon = 0.001$).
1. Sprawdzamy czy dla $c = \frac{a+b}{2}$ $f(c) = 0$. Jeśli tak, to kończymy, a c jest pierwiastkiem funkcji.
2. Jeżeli nie, dzielimy przedział na połowy $[a, c][c, b]$. Jeżeli $f(a) \cdot f(c) < 0$ to $b = c$, w przeciwnym przypadku $a = c$.
3. Powtarzamy proces, dopóki odległość między a i b nie będzie mniejsza lub równa przybliżeniu ϵ. Zarówno a i b będą pierwiastkami spełniającymi zadane przybliżenie.

2.2 (Metoda Newtona)**.** Iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji. Można ją zastosować, gdy w przedziale $[a, b]$ funkcja jest ciągła, $f(a) \cdot f(b) < 0$ oraz pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak na tym przedziale. Przebieg metody:
Wybieramy przybliżenie ϵ (np. $\epsilon = 0.001$) oraz wyliczamy pochodną $f'(x)$.
1. $x_0 = a$
2. Kolejny k-ty x wyliczamy ze wzoru: $x_{k+1} = x_k$-$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
3. Powtarzamy 2. punkt dopóki $|x_{k+1} - x_k| \leqslant \epsilon$. x_{k+1} jest szukanym pierwiastkiem spełniającym zadane przybliżenie.

Przy spełnionych założeniach błąd przybliżenia maleje kwadratowo. Jednakże, jeśli punkt startowy jest daleko od pierwiastka, metoda Newtona może być rozbieżna i w konsekwencji działać w "nieskończoność". W tym wypadku należy się zabepieczyć, np. poprzez ustalenie maksymalnej ilości iteracji.

3 Metoda numeryczna

Posiadając a, b (0<a<b i $f(a) \cdot f(b)$ <0) oraz ϵ (0< ϵ <1) możemy przybliżyć wartość pierwiastka $f(x) = lnx + x - 5$ powyższymi metodami.
Dla metody połowienia*:

- $i = 0$ (ilość kroków)
- tworzymy pętlę **while**, której warunkiem działania jest $|a - b| > \epsilon$:
  - $i++$
  - c = $\frac{a+b}{2}$
  - jeśli $f(a) \cdot f(c) < 0$, to b = c
  - w przeciwnym przypadku a = c
- zmienna c to zadane przybliżenie
- zmienna i to ilość wykonanych kroków

* ponieważ dla równania w zadaniu x jest niewymierne, omijamy sprawdzanie $f(c) == 0$

Dla metody Newtona:

- definiujemy pochodną $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$
- $j = 0$ (ilość kroków)
- x_0 = a
- tworzymy nie kończącą się pętlę **while**:
  - $j++$
  - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  - jeśli $|x_0 - x_1| \leqslant \epsilon$, to przerywamy **pętlę**
  - jeśli $j == 100$, to przerywamy **pętlę**
  - $x_0 = x_1$
- jeśli $j < 100$, zmienna x_1 jest naszym szukanym przybliżeniem
- jeśli $j == 100$, metoda Newtona jest w tym przypadku rozbieżna; nie otrzymaliśmy założonego przybliżenia
- zmienna j to ilość wykonanych kroków