Dokumentacja do zadania 3.14

Marcin Horoszko, Radosław Głombiowski, Jacek Dermont

18 grudnia 2012

1 Zadanie 3.14

Zagadnienie różniczkowe $xy' = (y-2)y - x^4, y(1) = 3$ rozwiązać na przedziale $[1, 3]$ metodą Eulera oraz udoskonaloną metodą Eulera, zwaną metodą Heuna. Wyniki porównać z rozwiązaniem dokładnym $y(x) = x^2 + 2$.

2 Podstawowe pojęcia

2.1 (Równanie różniczkowe)**.** Równanie wyznaczające zależność między nieznaną funkcją a jej pochodnymi. Polega na znalezieniu funkcji y, która spełnia to równanie. Na przykład równanie różniczkowe $y'' + y = 0$ ma ogólne rozwiązanie w postaci $y = Acosx + Bsinx$, gdzie A i B są stałymi wyznaczonymi z warunków brzegowych.

2.2 (Zagadnienie Cauchy'ego)**.** Zagadnienie polegające na znalezieniu konkretnej funkcji spełniającej dane równanie różniczkowe i warunek początkowy. W przypadku równania stopnia pierwszego, warunkiem początkowym będzie punkt, przez który powinien przechodzić wykres szukanej funkcji. W przypadku równania stopnia drugiego, zagadnienie początkowe zawierać będzie dodatkowo wartość pierwszej pochodnej w danym punkcie i analogicznie, w przypadku równań wyższego stopnia.

Przykład :

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2+1} \\ y(\frac{\pi}{4}) = e^3 \end{cases} \Longrightarrow y = e^{arctgx+C} \Longrightarrow \begin{array}{c} e^3 = e^{arctg\frac{\pi}{4}+C} \\ C = 3 - arctg\frac{\pi}{4} \end{array} \Longrightarrow y = e^{arctgx+3-arctg\frac{\pi}{4}}$$

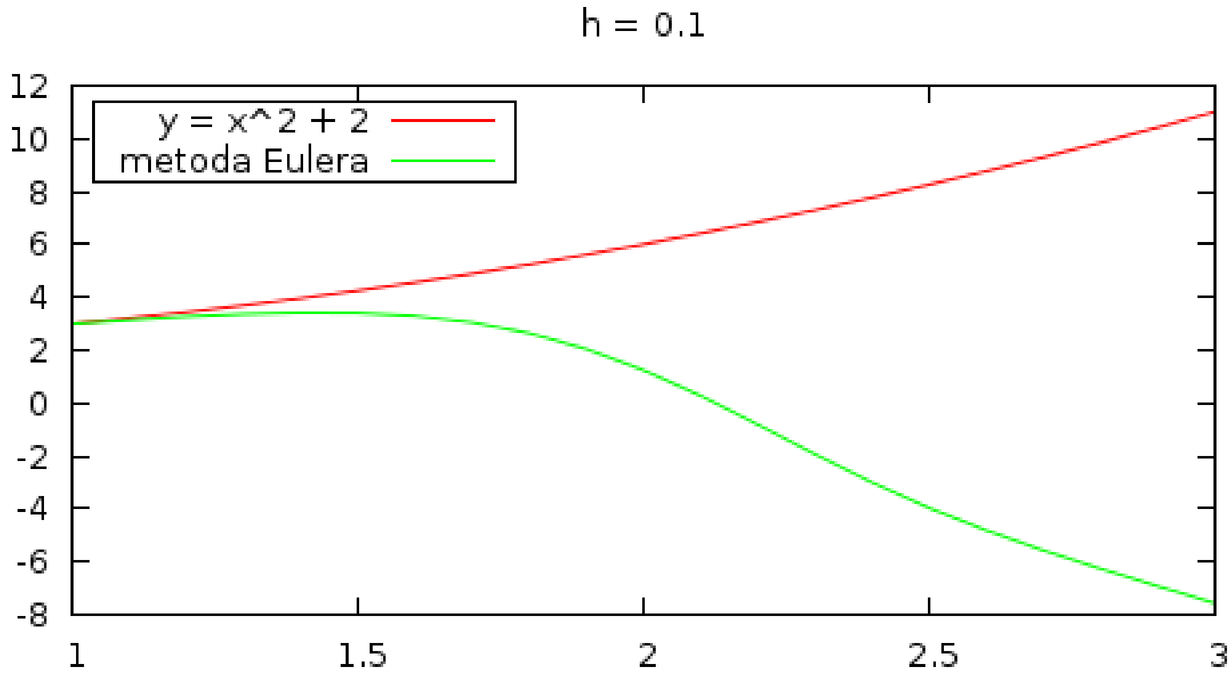
A więc rozwiązanie to $y = e^{arctgx+3-arctg\frac{\pi}{4}}$.

2.3 (Metoda Eulera)**.** Sposób rozwiązywania równań różniczkowych.
Na wejściu mamy równanie $y' = f(x, y)$ o warunkach początkowych $(x_0, y_0) = y(x_0)$ oraz ustalone h (zatem kolejne punkty x wyznaczamy tak: $x_{n+1} = x_n + h$).
Z definicji pochodnej: $y' = \frac{\Delta y}{h}$, czyli $f(x_n, y_n) = \frac{\Delta y}{h}$. Po przekształceniu: $\Delta y = hf(x_n, y_n)$
Szukamy $y_{n+1} = y + \Delta y$. Po przekształceniu mamy wzór: $\mathbf{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$.
Wykorzystujemy ten wzór to przybliżania wartości punktów. Zależnie od h, przybliżenie będzie się różniło od dokładnego wyniku. Im mniejsze h, tym mniejszy błąd.

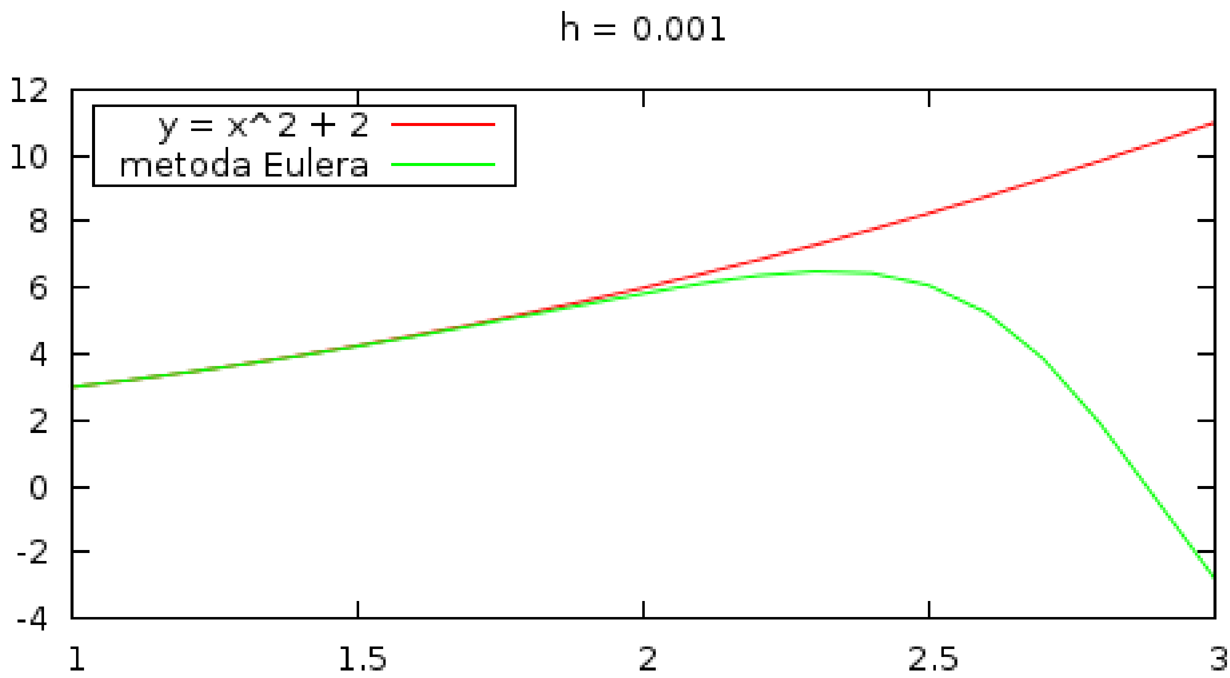
2.4 (Udoskonalona metoda Eulera - metoda Heuna)**.** Modyfikacja metody Eulera. Obliczamy Δy za pomocą: $\mathbf{\Delta y = h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+f(x_n,y_n)h)}{2}}$

3 Analiza przykładu

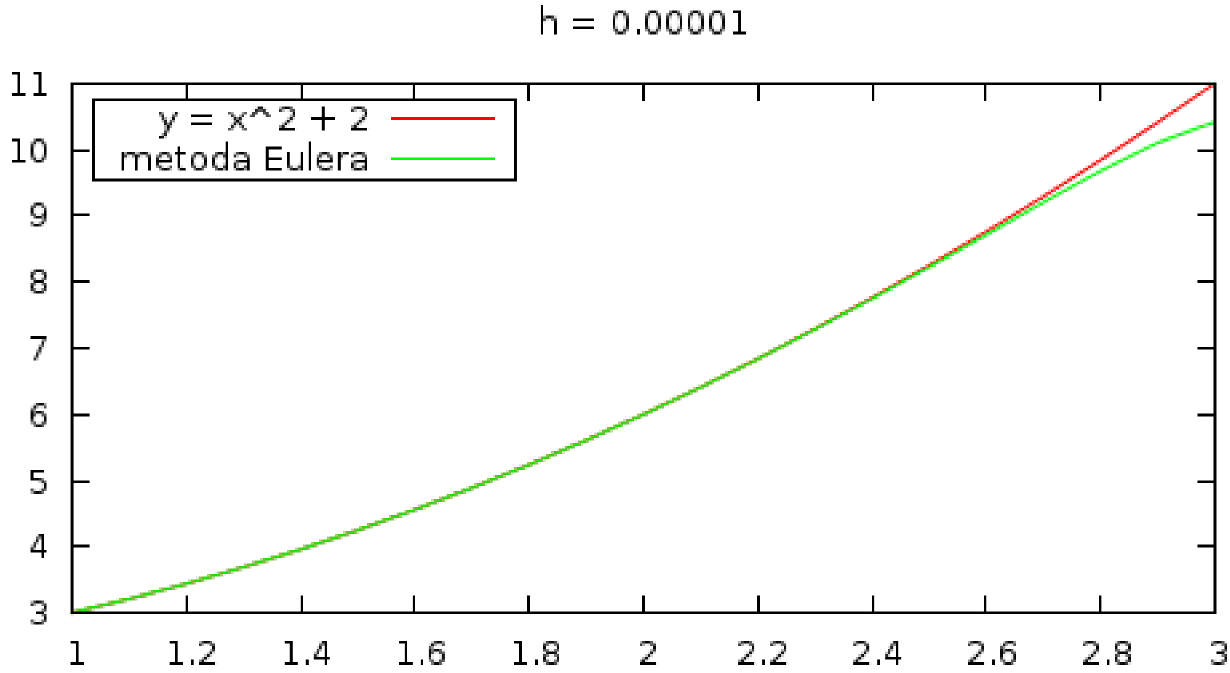
Dla dużych kroków h błąd jest względnie duży. Jak się okazuje, w tym przypadku krok $h = 0.1$ jest "bardzo duży".



Już jest lepiej dla kroku $h = 0.001$, jednak funkcja staje się wyraźnie rozbieżna w połowie przedziału.



Krok h, co najwyżej $h = 0.00001$, wybrany doświadczalnie. Tutaj Metoda Eulera już mocno zbliża się do równania dokładnego, jednak wciąż nie jest idealnie.



Zatem większych kroków $h > 0.00001$ nie ma sensu wybierać.

4 Metoda numeryczna

Użytkownik pytany jest o krok h z zakresu $(0, 1)$. Główna część metody opiera się na trzech pętlach, każda oblicza wartości: dokładnym równaniem, metodą Eulera i metodą Heuna.

- przedział $[1, 3]$ jest długości 2, więc każda pętla ma ok. $\frac{2}{h} + 1$ iteracji
- $y_0 = 3$
- y_{n+1} jest obliczane zgodnie ze wzorem danej metody
- tylko co któreś y_n jest drukowane na wyjście (by było maksymalnie 21 wartości na ekranie)
- na wyjściu drukowany jest także błąd bezwględny względem rozwiązania dokładnego