

Dokumentacja do zadania 2.5

Marcin Horoszko, Radosław Głombiowski, Jacek Dermont

19 listopada 2012

1 Zadanie 2.5

Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = \ln x + x - 5$, wczytać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$. Następnie, dopóki “użytkownik się nie znudzi”, wczytywać wartość $0 < \epsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ϵ rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 = a$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$. Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawowe pojęcia

2.1 (Metoda połowienia (równego podziału, bisekcji)). Jedna z metod rozwiązywania równań nieliniowych. Opiera się ona na twierdzeniu Bolzano-Cauchy’ego: *Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.* Przebieg metody:

Wybieramy przybliżenie ϵ (np. $\epsilon = 0.001$).

1. Sprawdzamy czy dla $c = \frac{a+b}{2}$ $f(c) = 0$. Jeśli tak, to kończymy, a c jest pierwiastkiem funkcji.
2. Jeżeli nie, dzielimy przedział na połowy $[a, c][c, b]$. Jeżeli $f(a) \cdot f(c) < 0$ to $b = c$, w przeciwnym przypadku $a = c$.
3. Powtarzamy proces, dopóki odległość między a i b nie będzie mniejsza lub równa przybliżeniu ϵ . Zarówno a i b będą pierwiastkami spełniającymi zadane przybliżenie.

2.2 (Metoda Newtona). Iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji. Można ją zastosować, gdy w przedziale $[a, b]$ funkcja jest ciągła, $f(a) \cdot f(b) < 0$ oraz pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak na tym przedziale. Przebieg metody:

Wybieramy przybliżenie ϵ (np. $\epsilon = 0.001$) oraz wyliczamy pochodną $f'(x)$.

1. $x_0 = a$
2. Kolejny k -ty x wyliczamy ze wzoru: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
3. Powtarzamy 2. punkt dopóki $|x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$. x_{k+1} jest szukany pierwiastkiem spełniającym zadane przybliżenie.

Przy spełnionych założeniach błąd przybliżenia maleje kwadratowo. Jednakże, jeśli punkt startowy jest daleko od pierwiastka, metoda Newtona może być rozbieżna i w konsekwencji działać w “nieskończoność”. W tym wypadku należy się zabezpieczyć, np. poprzez ustalenie maksymalnej ilości iteracji.

3 Metoda numeryczna

Posiadając a, b ($0 < a < b$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$) oraz ϵ ($0 < \epsilon < 1$) możemy przybliżyć wartość pierwiastka $f(x) = \ln x + x - 5$ powyższymi metodami.

Dla metody połowienia*:

- $i = 0$ (ilość kroków)
- tworzymy pętlę **while**, której warunkiem działania jest $|a - b| > \epsilon$:
 - $i++$
 - $c = \frac{a+b}{2}$
 - jeśli $f(a) \cdot f(c) < 0$, to $b = c$
 - w przeciwnym przypadku $a = c$
- zmienna c to zadane przybliżenie
- zmienna i to ilość wykonanych kroków

* ponieważ dla równania w zadaniu x jest niewymierne, omijamy sprawdzanie $f(c) == 0$

Dla metody Newtona:

- definiujemy pochodną $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$
- $j = 0$ (ilość kroków)
- $x_0 = a$
- tworzymy nie kończącą się pętlę **while**:
 - $j++$
 - $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
 - jeśli $|x_0 - x_1| \leq \epsilon$, to przerywamy pętlę
 - jeśli $j == 100$, to przerywamy pętlę
 - $x_0 = x_1$
- jeśli $j < 100$, zmienna x_1 jest naszym szukanym przybliżeniem
- jeśli $j == 100$, metoda Newtona jest w tym przypadku rozbieżna; nie otrzymaliśmy założonego przybliżenia
- zmienna j to ilość wykonanych kroków

4 Opis programu

Program został w całości napisany w języku C.

Wejście

- a , liczba typu double, taka że $a > 0$; jeśli $a \leq 0$, to program zapyta ponownie
- b , liczba typu double, taka że $b > a$; jeśli $b \leq a$, to program zapyta ponownie
jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$, to program ponownie zapyta o a i b
- ϵ , liczba typu double, taka że $0 < \epsilon < 1$, podawana w nieskończonej pętli dopóki użytkownik “się nie znudzi”; jeśli ϵ jest spoza przedziału $[0, 1]$, program zapyta ponownie

Wyjście

- c , liczba typu double, pierwiastek funkcji o przybliżeniu ϵ
- i , liczba całkowita, ilość kroków wykonanych za pomocą metody połowień
- x_1 , liczba typu double, pierwiastek funkcji o przybliżeniu ϵ *
- j , liczba całkowita, ilość kroków wykonanych za pomocą metody Newtona *

* jeśli $j == 100$ to x_1 nie jest pierwiastkiem, bo metoda Newtona stała się rozbieżna

Program składa się tylko z jednego pliku *main.cpp*. Zawiera wszystkie potrzebne funkcje.