Dokumentacja do zadania 3.14

Marcin Horoszko, Radosław Głombiowski, Jacek Dermont

3 stycznia 2013

1 Zadanie 3.14

Zagadnienie różniczkowe $xy' = (y-2)y-x^4, y(1) = 3$ rozwiązać na przedziale $[1,3]$ metodą Eulera oraz udoskonaloną metodą Eulera, zwaną metodą Heuna. Wyniki porównać z rozwiązaniem dokładnym $y(x) = x^2 + 2$.

2 Podstawowe pojęcia

2.1 (Równanie różniczkowe)**.** Równanie wyznaczające zależność między nieznaną funkcją a jej pochodnymi. Polega na znalezieniu funkcji y, która spełnia to równanie. Na przykład równanie różniczkowe $y'' + y = 0$ ma ogólne rozwiązanie w postaci $y = Acosx + Bsinx$, gdzie A i B są stałymi wyznaczonymi z warunków brzegowych.

2.2 (Zagadnienie Cauchy'ego)**.** Zagadnienie polegające na znalezieniu konkretnej funkcji spełniającej dane równanie różniczkowe i warunek początkowy. W przypadku równania stopnia pierwszego, warunkiem początkowym będzie punkt, przez który powinien przechodzić wykres szukanej funkcji. W przypadku równania stopnia drugiego, zagadnienie początkowe zawierać będzie dodatkowo wartość pierwszej pochodnej w danym punkcie i analogicznie, w przypadku równań wyższego stopnia.

Przykład :

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x^2+1} \\ y(\frac{\pi}{4}) = e^3 \end{cases} \Longrightarrow y = e^{arctgx+C} \Longrightarrow \begin{matrix} e^3 = e^{arctg\frac{\pi}{4}+C} \\ C = 3 - arctg\frac{\pi}{4} \end{matrix} \Longrightarrow y = e^{arctgx+3-arctg\frac{\pi}{4}}$$

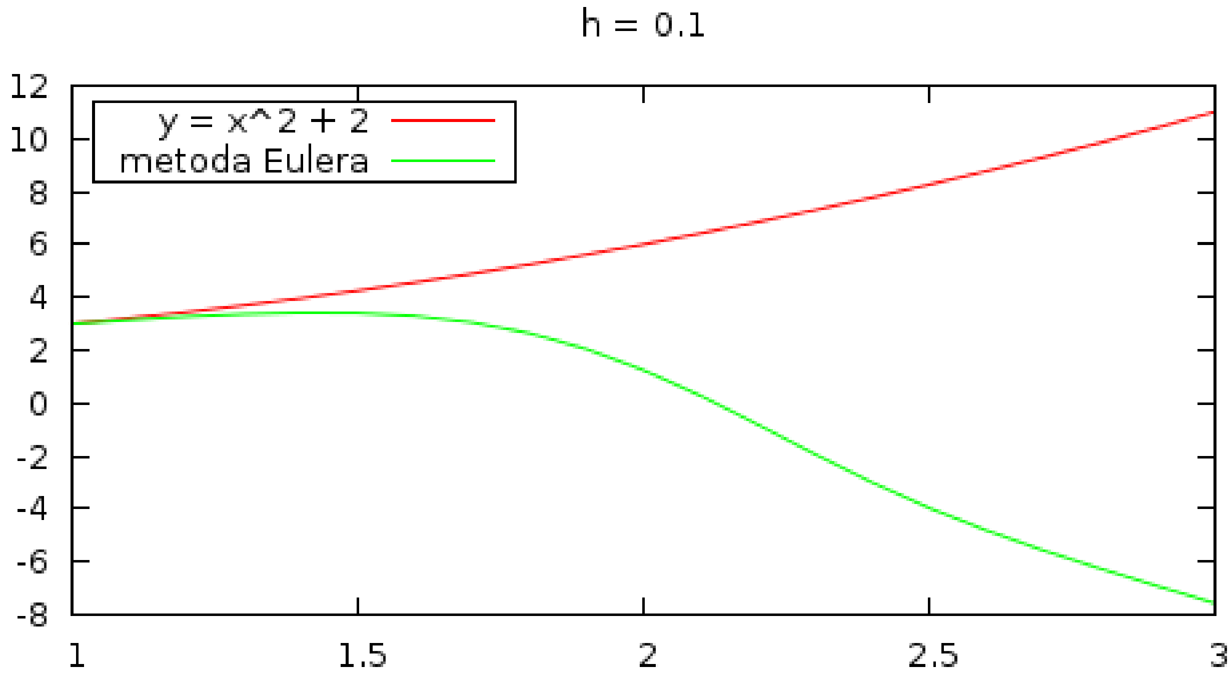
A więc rozwiązanie to $y = e^{arctgx+3-arctg\frac{\pi}{4}}$.

2.3 (Metoda Eulera)**.** Sposób rozwiązywania równań różniczkowych.
Na wejściu mamy równanie $y' = f(x,y)$ o warunkach początkowych $(x_0, y_0) = y(x_0)$ oraz ustalone h (zatem kolejne punkty x wyznaczamy tak: $x_{n+1} = x_n + h$).
Z definicji pochodnej: $y' = \frac{\Delta y}{h}$, czyli $f(x_n, y_n) = \frac{\Delta y}{h}$. Po przekształceniu: $\Delta y = hf(x_n, y_n)$
Szukamy $y_{n+1} = y + \Delta y$. Po przekształceniu mamy wzór: $\mathbf{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$.
Wykorzystujemy ten wzór to przybliżania wartości punktów. Zależnie od h, przybliżenie będzie się różniło od dokładnego wyniku. Im mniejsze h, tym mniejszy błąd.

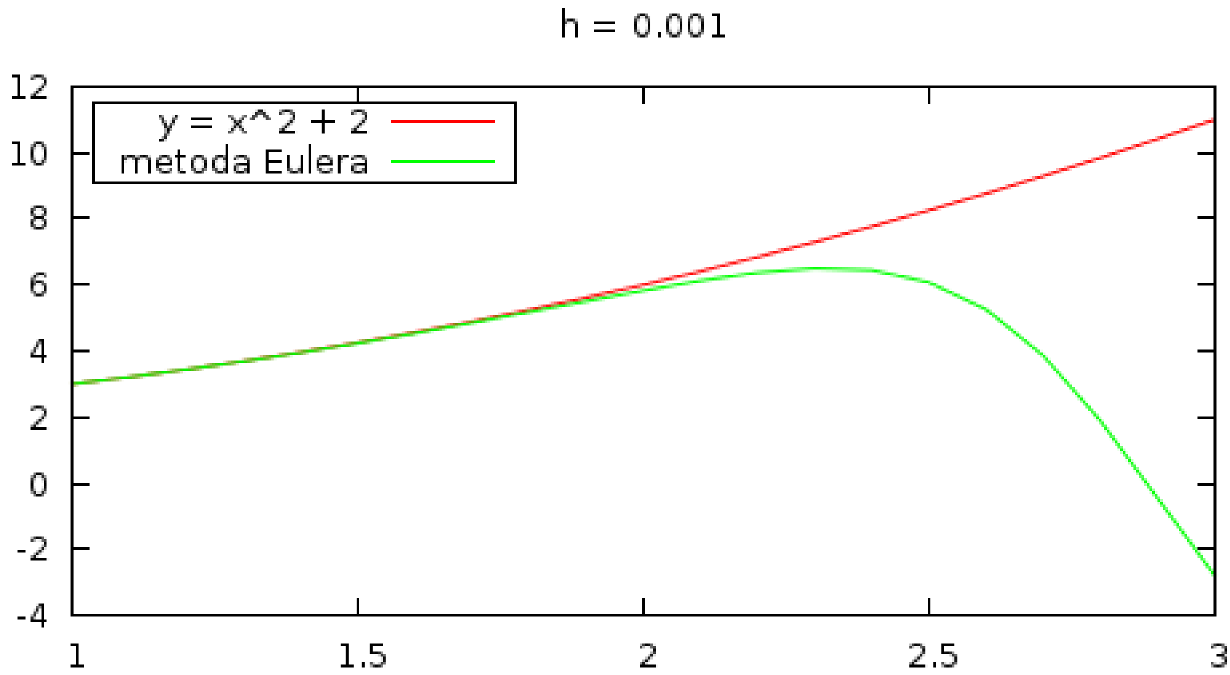
2.4 (Udoskonalona metoda Eulera - metoda Heuna)**.** Modyfikacja metody Eulera. Obliczamy Δy za pomocą: $\mathbf{\Delta y = h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+f(x_n,y_n)h)}{2}}$

3 Analiza przykładu

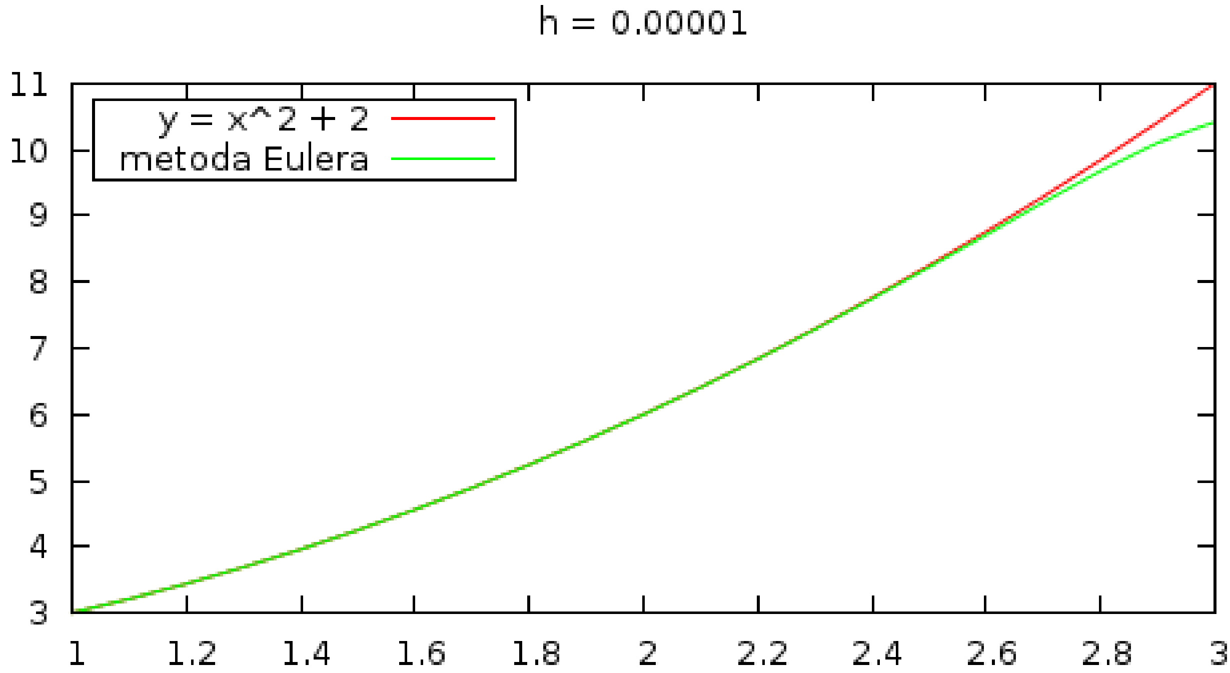
Dla dużych kroków h błąd jest względnie duży. Jak się okazuje, w tym przypadku krok $h = 0.1$ jest "bardzo duży".



Już jest lepiej dla kroku $h = 0.001$, jednak funkcja staje się wyraźnie rozbieżna w połowie przedziału.



Krok h, co najwyżej $h = 0.00001$, wybrany doświadczalnie. Tutaj Metoda Eulera już mocno zbliża się do równania dokładnego, jednak wciąż nie jest idealnie.



Zatem większych kroków $h > 0.00001$ nie ma sensu wybierać.

4 Metoda numeryczna

Użytkownik pytany jest o krok h z zakresu $(0, 1)$. Główna część metody opiera się na trzech pętlach, każda oblicza wartości: dokładnym równaniem, metodą Eulera i metodą Heuna.

- przedział $[1, 3]$ jest długości 2, więc każda pętla ma ok. $\frac{2}{h} + 1$ iteracji
- $y_0 = 3$
- y_{n+1} jest obliczane zgodnie ze wzorem danej metody
- tylko co któreś y_n jest drukowane na wyjście (by było maksymalnie 21 wartości na ekranie)
- na wyjściu drukowany jest także błąd bezwględny względem rozwiązania dokładnego

5 Opis programu

Program został w całości napisany w języku C.

Wejście

- krok h, w przedziale $(0, 1)$ (najlepiej $h < 0.00001$); w przypadku błędu program zapyta ponownie

Wyjście

- wydruk tabelki, który zawiera maksymalnie 21 wierszy; w tabelce znajdują się:

– wartość wyliczona dokładnym równaniem
– wartość wyliczona metodą Eulera
– wartość wyliczona metodą Heuna
– błędy bezględne poszczególnych metod względem rozwiązania dokładnego

Całość programu umieszczona jest w jednym pliku *main.c*.

6 Kod źródłowy

main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define MAX 3.00000000000001

// rownanie dokladne
double f(double x) {
    return x*x+2;
}

// rownanie rozniczkowe
double fp(double x, double y) {
    return ((y-2)*y-x*x*x*x)/x;
}

// zmniejsza duza liczbe rozwiazan drukowanych na ekran
int mod(double h) {
    if (1/h <= 10) return 1;
    else return (int)((1/h)/10);
}

int main() {
    printf("Program rozwiazujacy zagadnienie rozniczkowe xy' = (y-2)y - x^4,
        y(1) = 3 na przedziale [1,3]\n");
    printf("metoda Eulera i Heuna oraz porownuje z rozwiazaniem dokladnym: y(
        x) = xY2 + 2. Najlepiej jest\n");
    printf("podac krok h mniejszy od 0.00001.\n\n");

    // uzytkownik podaje h
    int temp = 0;
    double h;
    do {
        if (temp) printf("h nieprawidlowe!\n");
        printf("Podaj krok h z zakresu (0,1): "); scanf("%lf",&h);
        temp = 1;
    } while (h <= 0.0 || h >= 1.0);

    int m = mod(h);

    double i;
    int j,k;

    // rozwiazania dokladne
    double x[21] = {};
    double normal[21] = {};
    for (i=1,j=0,k=0;i<=MAX;i+=h,j++) {
```

```
        if (j%m == 0) {
            x[k] = i;
            normal[k] = f(i);
            k++;
        }
    }
    int n = k;

    // rozwiazania przy pomocy Eulera
    double *euler = malloc(n*sizeof(double));
    double y = 3.0;
    euler[0] = y;
    for (i=1.0+h,j=1,k=1;i<=MAX;i+=h) {
        y = y + h*fp(i,y);
        if (j%m == 0) {
            euler[k] = y;
            k++;
        }
        j++;
    }

    // rozwiazania przy pomocy Heuna
    double *heun = malloc(n*sizeof(double));
    y = 3.0;
    heun[0] = y;
    for (i=1.0+h,j=1,k=1;i<=MAX;i+=h) {
        y = y + h*(fp(i,y)+fp(i+h,y+fp(i,y)*h))/2;
        if (j%m == 0) {
            heun[k] = y;
            k++;
        }
        j++;
    }

    // drukowanie na ekran
    printf(" x | dokladny | metoda eulera | blad | metoda heuna | blad\n");
    printf("---+----------+---------------+------+--------------+-----\n");
    for (j=0;j<n;j++) {
        printf(" %.5lf | %8.5lf | %13.5lf | %11.5lf | %12.5lf | %11.5lf\n",
 x[j],normal[j],euler[j],fabs(normal[j]-euler[j]),heun[j],fabs(normal[j]-heun
    [j]));
    }

    return 0;
}
```

7 Przykładowe uruchomienia

Przykład 1

```
Program rozwiazujacy zagadnienie rozniczkowe xy' = (y-2)y - x^4, y(1) = 3 na
   przedziale [1,3] metoda Eulera i Heuna oraz porownuje z rozwiazaniem
   dokladnym: y(x) = x^2 + 2. Najlepiej jest podac krok h mniejszy od
   0.00001.

Podaj krok h z zakresu (0,1): 0.00001
     x    | dokladny | metoda eulera |      blad | metoda heuna |      blad
---------+----------+--------------+-----------+--------------+-----------
 1.00000 |  3.00000 |        3.00000 |   0.00000 |      3.00000 |   0.00000
 1.09999 |  3.20998 |        3.20997 |   0.00001 |      3.20997 |   0.00001
 1.19998 |  3.43995 |        3.43993 |   0.00002 |      3.43993 |   0.00002
 1.29997 |  3.68992 |        3.68987 |   0.00005 |      3.68988 |   0.00004
 1.39996 |  3.95989 |        3.95980 |   0.00008 |      3.95981 |   0.00007
 1.49995 |  4.24985 |        4.24971 |   0.00014 |      4.24972 |   0.00013
 1.59994 |  4.55981 |        4.55957 |   0.00024 |      4.55960 |   0.00021
 1.69993 |  4.88976 |        4.88937 |   0.00039 |      4.88941 |   0.00035
 1.79992 |  5.23971 |        5.23907 |   0.00064 |      5.23914 |   0.00057
 1.89991 |  5.60966 |        5.60860 |   0.00106 |      5.60871 |   0.00094
 1.99990 |  5.99960 |        5.99784 |   0.00176 |      5.99803 |   0.00157
 2.09989 |  6.40954 |        6.40659 |   0.00295 |      6.40691 |   0.00263
 2.19988 |  6.83947 |        6.83448 |   0.00500 |      6.83502 |   0.00445
 2.29987 |  7.28940 |        7.28081 |   0.00859 |      7.28174 |   0.00766
 2.39986 |  7.75933 |        7.74433 |   0.01499 |      7.74595 |   0.01338
 2.49985 |  8.24925 |        8.22268 |   0.02657 |      8.22554 |   0.02371
 2.59984 |  8.75917 |        8.71135 |   0.04782 |      8.71649 |   0.04268
 2.69983 |  9.28908 |        9.20165 |   0.08743 |      9.21103 |   0.07805
 2.79982 |  9.83899 |        9.67670 |   0.16229 |      9.69403 |   0.14496
 2.89981 | 10.40890 |       10.10347 |   0.30543 |     10.13586 |   0.27304
 2.99980 | 10.99880 |       10.41766 |   0.58114 |     10.47847 |   0.52033
```

Przykład 2

```
Program rozwiazujacy zagadnienie rozniczkowe xy' = (y-2)y - x^4, y(1) = 3 na
   przedziale [1,3] metoda Eulera i Heuna oraz porownuje z rozwiazaniem
   dokladnym: y(x) = x^2 + 2. Najlepiej jest podac krok h mniejszy od
   0.00001.

Podaj krok h z zakresu (0,1): -1
h nieprawidlowe!
Podaj krok h z zakresu (0,1): 0.5
     x    | dokladny | metoda eulera |      blad | metoda heuna |      blad
---------+----------+--------------+-----------+--------------+-----------
 1.00000 |  3.00000 |        3.00000 |   0.00000 |      3.00000 |   0.00000
 1.50000 |  4.25000 |        2.31250 |   1.93750 |      0.74658 |   3.50342
 2.00000 |  6.00000 |       -1.50684 |   7.50684 |     -3.36300 |   9.36300
 2.50000 |  8.25000 |       -8.26249 |  16.51249 |     -6.18096 |  14.43096
 3.00000 | 11.00000 |       -7.63020 |  18.63020 |     -8.78282 |  19.78282
```

Przykład 3

```
Program rozwiazujacy zagadnienie rozniczkowe xy' = (y-2)y - x^4, y(1) = 3 na
   przedziale [1,3] metoda Eulera i Heuna oraz porownuje z rozwiazaniem
   dokladnym: y(x) = x^2 + 2. Najlepiej jest podac krok h mniejszy od
   0.00001.

Podaj krok h z zakresu (0,1): 0.000000001
     x    | dokladny | metoda eulera |       blad | metoda heuna |       blad
---------+----------+---------------+-----------+--------------+-----------
 1.00000 |  3.00000 |       3.00000 |    0.00000 |       3.00000 |    0.00000
 1.10000 |  3.21000 |       3.21000 |    0.00000 |       3.21000 |    0.00000
 1.20000 |  3.44000 |       3.44000 |    0.00000 |       3.44000 |    0.00000
 1.30000 |  3.69000 |       3.69000 |    0.00000 |       3.69000 |    0.00000
 1.40000 |  3.96000 |       3.96000 |    0.00000 |       3.96000 |    0.00000
 1.50000 |  4.25000 |       4.25000 |    0.00000 |       4.25000 |    0.00000
 1.60000 |  4.56000 |       4.56000 |    0.00000 |       4.56000 |    0.00000
 1.70000 |  4.89000 |       4.89000 |    0.00000 |       4.89000 |    0.00000
 1.80000 |  5.24000 |       5.24000 |    0.00000 |       5.24000 |    0.00000
 1.90000 |  5.61000 |       5.61000 |    0.00000 |       5.61000 |    0.00000
 2.00000 |  6.00000 |       6.00000 |    0.00000 |       6.00000 |    0.00000
 2.10000 |  6.41000 |       6.40999 |    0.00001 |       6.40999 |    0.00001
 2.20000 |  6.84000 |       6.83999 |    0.00001 |       6.83999 |    0.00001
 2.30000 |  7.29000 |       7.28998 |    0.00002 |       7.28998 |    0.00002
 2.40000 |  7.76000 |       7.75997 |    0.00003 |       7.75997 |    0.00003
 2.50000 |  8.25000 |       8.24994 |    0.00006 |       8.24994 |    0.00006
 2.60000 |  8.76000 |       8.75989 |    0.00011 |       8.75989 |    0.00011
 2.70000 |  9.29000 |       9.28980 |    0.00020 |       9.28980 |    0.00020
 2.80000 |  9.84000 |       9.83962 |    0.00038 |       9.83962 |    0.00038
 2.90000 | 10.41000 |      10.40928 |    0.00072 |      10.40929 |    0.00071
```