Funktionentheorie II

im Wintersemster 2017 / 18
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Jonas Müller
Heidelberg, den 1. Dezember 2017

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Funktionentheorie 2 aus dem Wintersemster 2017 / 18 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde von mir in der Vorlesung mitgetext und mit pdflatex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und ich übernehme keine Garantie für Richtigkeit.

Bei Fehlern, kannst du mir gerne unter folgender Mailadresse schreiben:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

https://github.com/jenuk/funktheo2/blob/master/script.pdf

Die LaTeX-Source Dateien findet man hier, Fehler kannst du alternativ hier auch als neues Issue öffnen:

https://github.com/jenuk/funktheo2/tree/master

Inhaltsverzeichnis

0 Wiederholung

Definition 0.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt HOLOMORPH, falls f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, d. h.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(z_o + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert.

Satz 0.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

(i) f hat auf D eine Stammfunktion.

(ii) $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $C \subseteq D$.

Satz 0.3 (Cauchysche Integralformel). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w\,,$$

wobei C gegeben ist durch $z_0 + re^{2\pi i t}$ für $t \in [0, 1]$.

Daraus folgen einige Aussagen:

- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty$.
- *Satz von Taylor*: $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

- f ist genau dann auf D holomorph, wenn f auf D analytisch ist ist.
- Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen
  - Identitätssatz

– Satz von der Gebietstreue

– Maximumsprinzip

Definition 0.4 (Singularitäten). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \notin D$, $\dot{U}_r(a) \subseteq D$. Dann heißt a eine Singularität von f. Die Klassifikationen einer Singularität sind

- a ist *hebbar* (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
- a ist ein *Pol* ($\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = \infty$ wobei $z \neq a$ gelten muss)
- a ist wesentlich (Casorati-Weierstraß)

Satz 0.5 (Laurentzerlegung). *Sei $\mathcal{R} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R \,\}$ ein Ringgebiet mit $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad z \in \mathcal{R}s\,,$$

wobei $g\colon U_R(0) \to \mathbb{C}$ der Nebenteil *und $h\colon U_{r^{-1}}(0) \to \mathbb{C}$ der* Hauptteil *holomorph mit $h(0) = 0$.*

Anwendung auf Singularitäten: $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subseteq D$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad z \in \dot{U}_\delta(a)$$

→ a ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n \leqslant -1$.

→ a ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \geqslant 1$, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$.

→ a ist genau dann wesentlich, wenn es unendlich viele $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$.

Satz 0.6 (Residuensatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_1, \ldots, z_k \in D$*

$$f\colon D \setminus \{\, z_1, \ldots, z_k \,\} \to \mathbb{C}$$

holomorph und C eine glatte geschlossene Kurve in $D \setminus \{\, z_1, \ldots, z_k \,\}$. Dann gilt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=z_j} f \cdot \mathcal{X}(C, z_j)\,,$$

wobei $\operatorname*{res}\limits_{z=z_j} f$ das Residuum von f ist und $\mathcal{X}(C, z_j)$ die Umlaufzahl von C um z_j ist.

1 Konstruktion meromorpher und holomorpher Funktionen

1.1 Partialbruchzerlegung

Satz 1.1 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien p, q zwei Polynome über $\mathbb{C}$, $q \not\equiv 0$ und $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $g(q) \neq 0$ die zugehörige rationale Funktion. Seien $z_1, \ldots, z_k$ die verschiedenen Polstellen mit den Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $p_1(z), \ldots, p_k(z)$ mit $p_r(0) = 0$ $(r = 1, \ldots, k)$ und ein eindeutig bestimmtes Polynom p_0, so dass gilt*

$$R(z) = \sum_{r=0}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) + p_0(z) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{ z_1, \ldots, z_k \} .$$

Außerdem gilt $\operatorname{grad} p_r = \mu_r$ *für* $r = 1, \ldots, k$.

Beweis. Für jedes $r = 1, \ldots, k$ sei p_r der Hauptteil der Laurententwicklung von R bezüglich der Polstelle z_r. Dann ist p_r ein Polynom vom Grad μ_r. Sei

$$p_0(z) := R(z) - \sum_{r=1}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) .$$

Dann hat p_0 keinen Hauptteil mehr, d. h. p_0 hat in $z_1, \ldots, z_k$ hebbare Singularitäten, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Aber p_0 ist nach Konstruktion eine rationale Funktion. Also ist p_0 ein Polynom.

Das heißt es existieren $p_0, \ldots, p_k$ wie behauptet, es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei eine weitere Darstellung wie oben gegeben durch $\widetilde{p}_0, \ldots, \widetilde{p}_h$. Sei $\nu \in \{ 1, \ldots, k \}$. Dann gilt

$$R(z) = \widetilde{p}_\nu\left(\frac{1}{1 - z_\nu}\right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq\nu}}^{h} \widetilde{p}_r\left(\frac{1}{1 - z_r}\right) + \widetilde{p}_0(z) \tag{1.1}$$

$$= p_\nu\left(\frac{1}{1 - z_\nu}\right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq\nu}}^{h} p_r\left(\frac{1}{1 - z_r}\right) + p_0(z) .$$

Die ersten Summanden sind in einer kleinen punktierten Umgebungen von z_ν holomorph, der Rest in der gesamten Umgebung. Also ist (1.1) die Laurentzerlegung von R bezüglich z_ν. Da die Laurententwicklung eindeutig ist, folgt $p_\nu = \widetilde{p}_\nu$. Da dies für alle $\nu \in \{1, \dots, k\}$ gilt, folgt bereits $p_0 = \widetilde{p}_0$. *q.e.d.*

Ziel: Man beweise einen ähnlichen Satz für beliebige meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ wird gegeben durch eine holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, wobei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret ist, d. h. S hat in $\mathbb{C}$ keinen Häufungspunkt (insbesondere ist $\mathbb{C} \setminus S$ offen), und die Punkte aus S sind Pole von f.

Problem: Ist S unendlich, so ist die Summe über die Hauptteile $\sum_{s\in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ im Allgemeinen nicht mehr konvergent.

Lösung: Man addiere konvergenz erzeugende Summanden!

Satz 1.2 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler).

(i) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Jedem $s \in S$ sei eine ganze Funktion $h_s\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h_s(0) = 0$ zugeordnet. (Man nennt $\{h_s\}_{s\in S}$ eine Hauptteilverteilung.) Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C}\setminus S \to \mathbb{C}$, deren Hauptteil in $s \in S$ durch $h_s(\frac{1}{z-s})$ gegeben wird. (Man nennt h eine Lösung der Hauptteilverteilung.) Ist H eine weitere Lösung, so existiert eine ganze Funktion g mit $H = h + g$.

(ii) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einer Polstellenmenge S und Hauptteilen p_s $(s \in S)$. (Beachte: p_s ist ein Polynom mit $p_s(0) = 0$.) Dann existieren Polynome q_s $(s \in S)$ und eine ganze Funktion g, sodass gilt

$$f(z) = \sum_{s\in S} \left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - q_s(z) \right) + g(z)$$

wobei die Summe in der Klammer auf kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ absolut gleichmäßig konvergiert.

Beweis.

(i) Ist S endlich, so ist $h(z) = \sum_{s\in S} h_s(\frac{1}{z-s})$ eine Lösung (siehe Beweis von Satz 1.1).

Sei nun S unendlich. Zeige dafür zunächst, dass S abzählbar ist. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, dann ist $K \cap S$ beschränkt.

Angenommen $K \cap S$ ist unendlich. Nach Bolzano-Weierstraß hat dann $K \cap S$, also auch S, einen Häufungspunkt. ↯

Also ist $S \cap K$ endlich. Da $\mathbb{C} = \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{U_n(0)}$ und $\overline{U_n(0)}$ kompakt, ist S abzählbar.

Sei $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ eine Abzählung derart, dass

$$|s_0| \leqslant |s_1| \leqslant \dots \leqslant |s_n| \leqslant \dots \to \infty$$

(Beachte: falls $0 \in S$, dann $s_0 = 0$, ferner $|s_n| > 0$ für $n \geqslant 1$.) Schreibe $h_n := h_{s_n}$ für $n \geqslant 0$.

Sei nun $n \geqslant 1$ fest. Dann ist die auf der offenen nichtleeren Kreisschreibe $U_{|s_n|}(0)$ holomorphe Funktion $h_n(\frac{1}{z-s_n})$ um den Ursprung in eine Potenzreihe entwickelbar (Taylor), welche auf kompakten Teilmengen gleichmäßig absolut konvergiert. Nach Definition der Konvergenz existiert daher ein Polynom $q_n(z)$ sodass

$$\left| h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - q_n(z)\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$$

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ und $z \in K$ gilt $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ (denn $|s_n| \to \infty$). Es folgt dass die Reihe

$$h(z) := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n\geqslant 1}\left(h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - q_n(z)\right)$$

auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}\setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert, denn $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} < \infty$. Nach Weierstraß ist daher $h(z)$ auf $\mathbb{C}\setminus S$ holomorph. Schreibt man $h(z) = h_m(\frac{1}{z-s_m})$+Rest ($m \geqslant 0$ fest), so folgt, dass $h(z)$ eine Lösung der Hauptteilverteilung ist.

Sei H eine weitere Lösung. Dann haben h und H dieselbe Postellenmenge S und die gleichen Hauptteile für $s \in S$. Daraus folgt $g(z) := H(z) - h(z)$ hat in allen Punkten $s \in S$ hebbare Singularitäten, ist also ganz.

(ii) Sei $\{\, p_s \,\}_{s\in S}$ die angegebene Hauptteilverteilung. Dieser hat als Lösung per Definition f. Ferner existiert die im Beweis von (i) konstruierte Lösung. Nach der Eindeutigkeit stimmen daher beide Lösung bis auf eine ganze Funktion g überein. *q.e.d.*

Praktische Anwendung von Satz 1.2 Gegeben sei eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit Polstellenmenge S.

(i) Man bestimme die Hauptteile für alle $s \in S$.

(ii) Man untersuche $\sum_{s\in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls Polynome q_s ($s \in S$) (durch Abbruch der entsprechenden Taylor-Reihe), sodass $\sum_{s\in S}(p_s(\frac{1}{z-s}) - q_s(z))$ auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

(iii) Man bestimme eine ganze Funktion g, so dass

$$f(z) = \sum_{s\in S}\left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - q_s(z)\right) + g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S$$

Beispiel 1.3.

(i) Es gilt

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

wobei die Summe rechts auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. Siehe unten. q.e.d.

(ii) Partialbruchzerlegung des Kotangens

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

Beweis. Siehe unten. q.e.d.

Beweis.

(i) Die Polstellenmenge ist offensichtlich $S = \mathbb{Z}$.

Bestimmung der Hauptteile: Sei $z \neq 0$, z nahe bei Null. Dann ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot (1 + a_2 z^2 + \dots)$$

wobei $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität dort den Wert 1 hat und eine gerade Funktion ist. Also

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots$$

Also ist der Hauptteil in $z = 0$ bereits $\frac{1}{z^2}$.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Für $z \neq n$, z nahe bei n gilt

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} \\ &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \\ &= \frac{1}{(z-n)^2} + 2a_2 + \dots \end{aligned}$$

Also ist der Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$ von $z = n$ bereits $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Konvergenz der Reihe in (1.2): Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Es gelte $|z| \leqslant c$ für $z \in K$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geqslant 2c$ gilt

$$|z - n| = |n - z| \geqslant |n| - |z| \geqslant |z| - c \geqslant \frac{|n|}{2} \qquad \forall z \in K$$

Also

$$\sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{4}{|n|^2} < \infty$$

Daher ist

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$$

auf Kompakta in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergent.

Folgerung: Beide Seiten von (1.2) sind auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ holomorphe Funktionen mit den gleichen Polstellen und gleichen Hauptteilen. Daher folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})$$

wobei g ganz ist.

Zeige $g\equiv 0$. Es gilt für $z=x+iy\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sin^2\pi z &= \left|\frac{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}{2}\right|^2\\
&= \frac{1}{4}(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})\overline{(e^{\pi iz}-e^{-\pi iz})}\\
&= \dots\\
&= \frac{1}{4}(e^{-2\pi y}+e^{2\pi y}) - \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\\
&\xrightarrow{|y|\to\infty} \infty \quad \text{gleichmäßig in } x
\end{aligned}$$

denn $\cos(2\pi x)$ $(x\in\mathbb{R})$ ist beschränkt. Also $\left|\frac{\pi^2}{sin^2\pi z}\right| \to 0$ für $|y|\to\infty$ gleichmäßig in x. Insbesondere ist $\frac{\pi^2}{sin(\pi z)^2}$ beschränkt auf

$$R := \{\, z=x+iy \mid |x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1 \,\}$$

Zeige rechte Seite von (1.2) ebenfalls auf R beschränkt. Sei $z\in R, n\neq 0$. Dann

$$\begin{aligned}
|z-n|^2 = (x-n)^2+y^2 &= |n-x|^2+y^2\\
&\geqslant (|n|-|x|)^2+y^2 \geqslant (|n|-1)^2+y^2\\
&\geqslant (|n|-1)^2+1
\end{aligned}$$

Also für $z\in R$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant 1 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(|n|-1)^2+1} < \infty \tag{1.4}$$

Daher ist $g(z)$ auf R beschränkt. Aber $g(z+1) = g(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Trivialerweise ist g auf $\{ z = x + iy \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1 \}$ beschränkt. Also ist g auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach Liouville ist $g \equiv c$ konstant.

Aus (1.4) folgt, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann folgt

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = 0\,,$$

da

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} = 0\,.$$

Und wir wissen bereits, dass $\frac{\pi^2}{sin^2 \pi z} \to 0$ für $|y| \to \infty$. Also muss bereits gelten $c = 0$. *q.e.d.*

(ii) Vorgehen wie in (i): Man sieht $S = \mathbb{Z}$ und der Hauptteil in $z = n \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{z-n}$. Da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ schlechte Konvergenzeigenschaften hat, muss man Polynome abziehen. Beachte für $n \neq 0$ ist $\frac{1}{z-n}|_{z=0} = -\frac{1}{n}$. Damit folgt dann die Behauptung.

Alternativ kann man (i) + Trick benutzen: Differenziere beide Seiten von (1.3):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-n)^2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\pi\cot(\pi z)) &= \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right) \\ &= \pi\frac{-\pi\sin(\pi z)\sin(\pi z) - \pi\cos(\pi z)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}\,.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ein Gebiet ist, unterscheiden sich die rechte und linke Seite (da die Ableitungen nach (i) gleich sind) nur um eine Konstante c. Zeige $c = 0$. Hierfür zeige, dass $\pi\cot(\pi z)$ und $\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ ungerade sind. Es gilt

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{-z-n}+\frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}
$$

wobei der letzte Schritt folgt, wenn wir $n\mapsto -n$ ersetzen, was eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ auf sich selbst ist.

Es muss also gelten, dass c ungerade ist. Für eine ungerade Konstante gilt bereits $c=0$. *q.e.d.*

1.2 Unendliche Produkte

Gegeben sei eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Wir wollen nun in sinnvoller Weise das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

definieren. Ein naheliegender Vorschlag dafür ist: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ heißt konvergent, falls die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialprodukte $P_N=\prod_{n=1}^{N} p_n$ konvergent ist. In diesem Fall setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \lim_{N\to\infty} P_n =: P\,.$$

Das Problem was sich mit dieser Definition stellt ist, dass falls einer der Faktoren Null ist, so ist der Wert des Produktes gleich 0. Dieses hängt also gar nicht von der Gesamtheit der Faktoren ab. Ferner möchte man oft $\prod_{n=1}^{N} p_n$ bzw. P mit der Summe $\sum_{n=1}^{N}\log p_n$ bzw. mit $\log P$ vergleichen. Und das geht nur falls $p_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und entsprechend $P\neq 0$. Später wollen wir allerdings holomorphe Funktionen als Produkte darstellen, dies sollte auch möglich sein, wenn diese Nullstellen haben.

Definition 1.4 (Unendliches Produkt). Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass nur endlich viele der p_n Null sind. Sei $m\in\mathbb{N}$ der größte Index mit $p_m=0$ (und $m:=0$, falls $p_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$). Dann heißt das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

konvergent, falls der Limes

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant m+1}} P_n \text{ mit } P_N = \prod_{n=m+1}^{N} p_n$$

existiert und ungleich Null ist. Man setzt dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} P_n & \text{falls } m=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dabei ist zu beachten, dass nach Definition ein konvergentes unendliches Produkt den Wert 0 genau dann hat, wenn ein Faktor gleich Null ist.

Beispiel 1.5.

(i) Das unendliche Produkt $\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat den Wert $\frac{1}{2}$.

Beweis. Zunächst sind alle Faktoren ungleich Null und

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (N-1))\cdot(3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (N+1)}{(2\cdot 3\cdot \ldots \cdot N)\cdot(2\cdot 3\cdot \ldots \cdot N)} \\ &= \frac{1}{N}\frac{N+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right) \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

q.e.d.

(ii) $\prod_{n\geqslant 1}(1-\frac{1}{n^2}) = 0\cdot\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat Wert 0

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist nicht konvergent in unserem Sinn. Denn

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N\to\infty} 0\,.$$

Satz 1.6. *Für eine unendliche Reihe $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ gilt:*

(i) Ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent, so gilt notwendigerweise $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

(ii) Sei $p_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$$

konvergiert. (Erinnerung $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$ der Hauptwert des Logarithmus und $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ das Argument von z.) Insbesondere ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$, so existiert $h \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$$

gilt. Ist umgekehrt $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$, so gilt

$$e^S = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

Beweis.

(i) Es ist

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{P}{P} = 1\,.$$

für $N \geqslant m+1$, hierbei benutzt man $p_n \neq 0$ für $n \geqslant m+1$ und $P \neq 0$.

(ii) Es gelte

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n\,.$$

Also $S = \lim\limits_{N \to \infty} S_N$ mit $S_n = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n$. Da exp stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 \neq e^S = \lim_{N\to\infty} e^{S_n} &= \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1 + \ldots + \log p_n} \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1} \cdot \ \ldots \ \cdot e^{\log p_n} = \lim_{N\to\infty} (p_1 \cdot \ \ldots \ \cdot p_N) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n = P\,. \end{aligned}$$

Gelte nun andererseits $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$.

Aus $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ folgt

$$\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Sei

$$\varepsilon_N := \operatorname{Log}\left(\frac{\prod_{n=1}^N p_n}{P}\right)$$

Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Log} z$ in $z = 1$ und $\operatorname{Log} 1 = 0$ folgt

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = \operatorname{Log} 1 = 0$$

Wir wollen nun zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $h_N \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_N \tag{1.5}$$

Zunächst gilt offensichtlich $\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=1}^\infty p_n}{P}$. Nach den Additionstheoremen und wegen $\exp \operatorname{Log} z = z$ gilt außerdem

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P\right) = \frac{\prod_{n=1}^\infty p_n}{P}$$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$ folgt aus $\exp z = \exp z'$ stets, dass $z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Damit folgt dann (1.5).

Es gilt

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = \operatorname{Log} p_{N+1} + \varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

da alle Einzelterme der rechten Seite gegen 0 gehen. Da $h_{N+1}, h_N \in \mathbb{Z}$ folgt $(h_{N+1} - h_N)_{N\geqslant 1}$ ist konstant für große N, also $h_{N+1} = h_N$ für alle großen N, d. h. $h_n = h$ für N groß.

Nun gilt wegen (1.5) und $\lim \varepsilon_N = 0$, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n \xrightarrow{N\to\infty} \operatorname{Log} P - 2\pi i h\,.$$

q. e. d.

Notation. Man schreibt oft $p_n = 1 + a_n$. Dann lautet die notwendige Konvergenzbedingung aus dem Satz, dass $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Satz 1.7. *Es gilt folgender Zusammenhang*

(i) Sei $1 + a_n \neq 0$ für $n \geqslant 1$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$$

genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergiert.

(ii) *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert. Dann ist* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *konvergent. Außerdem ist das Produkt unbedingt konvergent, d. h. jede Umordnung konvergiert und hat den gleichen Limes.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log} 1}{z}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Log} z \bigg|_{z=1} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=1} = 1\,. \tag{1.6}$$

Daher auch

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h} \right| = 1\,.$$

Falls (Fall 1) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ oder (Fall 2) $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+a_n)|$ konvergent ist, so folgt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Denn* für Fall 1 ist dies gerade die notwendige Konvergenz-Bedingung. Und für Fall 2 lautet die entsprechende Bedingung $\operatorname{Log}(1+a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da exp stetig ist, folgt

$$1 + a_n = e^{\operatorname{Log}(1+a_n)} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1\,.$$

Also $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Damit folgt wegen (1.6) für alle a_n, mit n groß genug und für $\varepsilon > 0$ beliebig, dass

$$(1-\varepsilon)|a_n| \leqslant |\operatorname{Log}(1+a_n)| \leqslant (1+\varepsilon)|a_n|\,.$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Majoranten-Kriterium.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent, dann gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $|a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$. Dann $1 + a_n \neq 0$ für alle $n > N$, also folgt die Konvergenz von $\prod_{k=N+1}^{\infty}(1+a_n)$ aus (i) und Satz 1.6 (ii). Also ist insbesondere $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergent.

Die unbedingte Konvergenz von $\prod_{n\geqslant N+1}(1+a_n)$ (also auch von $\prod_{n\geqslant 1}(1+a_n)$) folgt wegen (Satz 1.6 (ii)):

$$\sum |\operatorname{Log}(1+a_n)| < \infty \iff \sum \operatorname{Log}(1+a_n) \text{ ist unbedingt konvergent}$$

q.e.d.

Satz 1.8. *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge holomorpher Funktionen* $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ *derart, dass die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *auf jedem Kompaktum* $K \subseteq D$ *gleichmäßig, absolut konvergiert. Dann ist*

$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \qquad z \in D$$

ein unbedingt konvergentes Produkt und F ist eine auf D holomorphe Funktion. Insbesondere gilt $F(z) = 0$ genau dann wenn $1 + f_n(z) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Unbedingte Konvergenz des Produktes folgt aus Satz 1.7 (ii) mit $a_n = f_n(z)$ für $z \in D$.

Es verbleibt zu zeigen, dass F holomorph auf D ist.

Sei $U \subseteq D$ offen mit $\overline{U} \subseteq D$ kompakt. Es genügt Holomorphie von F für beliebiges solches U zu zeigen. Da $\overline{U}$ kompakt ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf $\overline{U}$ (also auch auf U) absolut gleichmäßig konvergent. Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig gegen Null.

Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $n > m$ für $z \in U$ gilt

$$|f_n(z)| < 1 \tag{1.7}$$

Also (siehe Beweis von Satz 1.7 (i) mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$|\mathrm{Log}(1 + f_n(z))| \leqslant \frac{3}{2}|f_n(z)|$$

Die Reihe $\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)$ ist auf U gleichmäßig absolut konvergent, nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz und wegen (1.7) ist daher

$$S_m(z) := \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + f_n(z))$$

auf U gleichmäßig konvergent.

Nach dem Satz von Weierstraß (FT 1) folgt, dass $S_m(z)$ auf U holomorph ist. Also ist $e^{S_m(z)} = \prod_{n=m+1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ auf U holomorph (siehe Beweis von Satz 1.6 (ii)). Damit ist

$$F(z) = (1 + f_1(z)) \cdot \ldots \cdot (1 + f_m(z)) \prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

auf U holomorph. *q.e.d.*

Erinnerung. Ist $h\colon U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, h nicht identisch Null, $h(z) = (z - z_0)^m g(z)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $g(z_0) \neq 0$, so nennt man $\mathrm{ord}_{z=z_0} h = m$ die Ordnung von z_0 bezüglich h.

Problem: Gegeben $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Zu jedem $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben.

Frage: Gibt es eine ganze Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, dass (i) $h(z) = 0$ genau dann, wenn $z \in S$ und (ii) $\mathrm{ord}_{z=s} h = m_s$ für alle $s \in S$.

Man nennt $\{\,(s, m_s) \mid s \in S\,\}$ eine NULLSTELLENVERTEILUNG. Und eine Funktion h wie oben heißt Lösung der Nullstellenverteilung.

Antwort: Ja! Solche h kann man mit Hilfe von Weierstraß-Produkten konstruieren!

Satz 1.9 (WEIERSTRASS'SCHER PRODUKTSATZ).

(i) *Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret und für jedes $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann hat die Nullstellenverteilung $\{\,(s, m_s) \mid s \in S\,\}$ eine Lösung h. Alle Lösungen erhält man als $H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)}$ wobei h eine gegebene Lösung und g ganz ist.*

(ii) *Sei f ganz und nicht identisch Null, $S = \{\,z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\,\} \subseteq \mathbb{C}$ (Beachte S ist diskret). Für $s \in S$ sei $m_s := \operatorname{ord}_{z=s} f(z)$. Dann gibt es zu jedem $s \in S$ ein Polynom P_s und eine ganze Funktion g, so dass gilt*

$$f(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{s \in S} \left(1 - \frac{z}{s}\right)^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \notin S \\ z^{m_0} \cdot \displaystyle\prod_{\substack{s \in S \\ s \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{s}\right)^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \in S \end{cases}$$

wobei die Produkte rechts WEIERSTRASS-PRODUKTE *genannt werden, diese sind auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}$ unbedingt konvergent.*

Beweis.

(i) Falls S endlich ist, so ist das Produkt $\prod_{s \in S}(z - s)^{m_s}$ eine Lösung. Sei S nun unendlich. Wir können außerdem annehmen, dass $0 \notin S$, denn eine Nullstelle in $z = 0$ der Ordnung m_0 kann man immer durch Multiplikation mit z^{m_0} erzeugen.

Sei $s_1,\ s_2,\ \ldots, s_n,\ \ldots$ nun eine Abzählung von S mit

$$0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots \to \infty\,,$$

und sei $m_n := m_{s_n}$.

Da die holomorphe Funktion $(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n}$ auf dem Elementargebiet $U_{|s_n|}(0)$ keine Nullstellen hat, kann man eine holomorphe Funktion $A_k \colon U_{|s_n|}(0) \to \mathbb{C}$ finden (nach Funktionentheorie 1), so dass

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} = e^{-A_n(z)} \qquad \text{für } |z| < |s_n|$$

Es ist $e^{-A_n(0)} = 1$, also $A_n(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Also kann durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ erreicht werden, dass $A_n(0) = 0$. Die Potenzreihenentwicklung von A_n um $z = 0$ ist auf das Kompaktum $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ absolut gleichmäßig konvergent. Also können wir durch Abbruch dieser Reihe ein Polynom P_n finden, so dass für $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ gilt

$$\left|\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1\right| = \left|e^{P_n(z) - A_n(z)} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1 \right|$$

auf Kompakta gleichmäßig, absolut konvergent. Durch anwenden von Satz 1.8 erhalten wir, dass das Produkt

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)}$$

auf $\mathbb{C}$ unbedingt konvergiert und eine holomorphe Funktion ist. Offenbar ist h eine Lösung der Nullstellenverteilung (Beachte $(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n} = s_n^{-m_n}(z - s_n)^{m_n}(-1)^{m_n}$).

Sei H nun eine weitere Lösung. Betrachte $\frac{H(z)}{h(z)}$ für $z \notin S$. Diese Funktion hat in allen Punkten $s \in S$ hebbare Singularitäten und ist nullstellenfrei. Da $\mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist, existiert eine ganze Funktion g mit $\frac{H(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$, also $H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Betrachte die Nullstellenverteilung $\{\, (s, m_s) \mid s \in S \,\}$. Diese hat f nach Definition als Lösung und auch die in (i) konstruierte Lösung. Nach (i) unterscheiden sich beide Lösungen nur um einen Faktor $e^{g(z)}$ mit g ganz. Daraus folgt die Behauptung. *q.e.d.*

Bemerkung 1.10. Die holomorphen Funktionen $A_n(z)$ für $|z| < |s_n|$ sind durch die Bedingung

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} = e^{-A_n(z)} \text{ und } A_n(0) = 0$$

eindeutig bestimmt.

Denn wäre $\widetilde{A}_n$ eine weitere solche Funktion, so würde gelten $e^{-\widetilde{A}_n(z)} = e^{-A_n(z)}$. Damit folgt $e^{\widetilde{A}_n(z) - A_n(z)} = 1$. Also $\widetilde{A}_n(z) - A_n(z) = 2\pi i t_z$ mit $t_z \in \mathbb{Z}$. Da $U_{|s_n|}(0)$ zusammenhängend und $\widetilde{A}_n - A_n$ stetig ist, ist $z \mapsto 2\pi i t_z$ stetig, also folgt $B := t_z$ konstant. Also gilt $\widetilde{A_n}(z) - A_n(z) = B$. Und mit $z = 0$ folgt $B = 0$.

Daher muss gelten $A_n(z) = -m_n \operatorname{Log}(1 - \frac{z}{s_n})$ für $|z| \leqslant |s_n|$. *Denn* zunächst ist $-m_n \operatorname{Log}(1 - \frac{0}{s_n}) = 0$ klar, außerdem folgt mit den Additionstheoremen

$$e^{m_n \operatorname{Log}(1 - \frac{z}{s_n})} = e^{\operatorname{Log}(1 - \frac{z}{s_n})} \cdot \ldots \cdot e^{\operatorname{Log}(1 - \frac{z}{s_n})} = (1 - \frac{z}{s_n})^{m_n}.$$

Es ist $-\operatorname{Log}(1 - z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$ für $|z| < 1$. Also $A_n(z) = m_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (\frac{z}{s_n})^\nu$ für $|z| < |s_n|$, die Polynome P_n erhält man durch Abbruch dieser Reihe.

Korollar 1.11. *Jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellbar.*

Beweis. Sei f auf $\mathbb{C}$ meromorph, S die Polstellenmenge von f. Gelte $S \neq \emptyset$, sonst ist die Aussage klar. Für $s \in S$ sei $m_s := -\operatorname{ord}_{z=s} f(z) \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.9 existiert eine ganze Funktion h mit Nullstellen genau in den Punkten aus S und so dass die Nullstellenordnung von h in $z = s$ genau m_s ist.

Sei $g := f \cdot h$. Dann ist g ganz, denn die Nullstellen kürzen sich gegen Polstellen. Es folgt $f = \frac{g}{h}$. *q.e.d.*

Beispiel 1.12. Nullstellenverteilungen kann man beispielsweise so berechnen:

(i) Sei $S = \left\{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$, $m_s = 1$ für alle $s \in S$. Dann ist

$$h(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

eine Lösung der Nullstellenverteilung, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2}$ ist auf Kompakta gleichmäßig, absolut konvergent.

(ii) $S = \mathbb{Z}$, $m_s = 1$ für alle $s \in S$. Die Reihe $\sum_{n\neq 0} \frac{z}{n}$ hat schlechte Konvergenzeigenschaften, man muss also konvergenzerzeugende Faktoren einbauen. Der lineare Term von A_n ist gleich $\frac{z}{n}$ mit $n \neq 0$. Betrachte also

$$\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = \left(1 - \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \text{ höhere Terme}$$

(*formal* $= 1 + (\frac{z}{n})^2 B(\frac{z}{n})$, wobei $B(z) = \frac{(1-z)e^z - 1}{z^2}$, $B(0) = -\frac{1}{2}$).

Die Reihe $\sum_{n\neq 0} (\frac{z}{n})^2 B(\frac{z}{n})$ ist auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergent, *denn* gelte $|z| \leqslant c$, dann gilt $\left|\frac{z}{n}\right| \leqslant c$ und B ist als stetige Funktion auf Kompakta beschränkt, damit gilt

$$\sum_{n\neq 0} \left| \left(\frac{z}{n}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right) \right| \leqslant C \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Also ist

$$h(z) = z \prod_{n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

eine Lösung der gegebenen Verteilung.

Beachte $h(z) = z \prod_{n\geqslant 1} (1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}} \cdot \prod_{n\leqslant 1} (1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n\geqslant 1} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ da die Produkte unbedingt konvergent sind.

(iii) Es gilt

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Denn: Beide Seiten sind Lösungen der Nullstellenverteilung $\{ (n,1) \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Nach Satz 1.9 existiert eine ganze Funktion g, so dass

$$e^{g(z)} \sin \pi z = \pi z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}$$

Beachte $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ hat in $z = 0$ eine hebbare Singularität (Taylorentwicklung) und dort den Wert 1. Schreibe

$$e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Zeige nun g konstant und $g \equiv 0$. Zweites folgt aus erstem durch auswerten in $z = 0$ aus, dann gilt $e^{g(0)} = 1$, also $g(0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Addiere ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ und erreiche $g(0) = 0$. Im folgenden gelte deshalb $g(0) = 0$.

Für $|z| < 1$ sind alle Faktoren rechts ungleich Null, damit folgt aus Satz 1.6 (ii):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{Log}\left(e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z$$

mit $t_z \in \mathbb{Z}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{Log} e^{g(z)} + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z$$

für $|z| < \delta$ und $0 < \delta$ klein. *Denn* $\operatorname{Log}(w_1 w_2) = \operatorname{Log} w_1 + \operatorname{Log} w_2$ für w_1, w_2 nahe bei 1, beachte $g(0) = 0$ und g stetig. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = g(z) + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z\,,$$

da $\operatorname{Log} e^{g(z)} = g(z)$ für z bei 0, denn Log und exp sind zueinander invers.

Da die Reihe links absolut lokal gleichmäßig konvergiert, ist die Funktion stetig, also ist auch $z \mapsto 2\pi i t_z$ stetig. Aber $t_z \in \mathbb{Z}$ und $U_\delta(0)$ ist zusammenhängend, also ist $t_z = t \in \mathbb{Z}$ konstant.

Nach Weierstraß darf gliedweise differenziert werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\frac{z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = g'(z) + \frac{1}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right)$$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = g'(z) + \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cos(\pi z) \cdot \pi z - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2}$$

$$= g'(z) + \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \qquad z \in \dot{U}_\delta(0)\,.$$

Wir kennen bereits die Partialbruchzerlegung des Kotangens (Beispiel 1.3):

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}\,.$$

Damit folgt $g'(z) = 0$ für $z \in \dot{U}_\delta(0)$. Also ist g konstant auf $\dot{U}_\delta(0)$. Damit ist g bereits auf ganz $\mathbb{C}$ konstant, wegen des Identitätssatz. Insgesamt haben wir also $g \equiv 0$ (wegen $g(0) = 0$).

1.3 Gamma-Funktion

Ausgangsproblem: Man gebe eine *vernünftige* Interpolationsfunktion für die Fakultät $n \mapsto n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ an. D. h. man sucht eine (zumindest stetige Funktion) Γ auf $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ mit

a) $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$,

b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ (Grundeigenschaft der Fakultät).

Welche Eigenschaften hat Γ? Kann Γ auf $\{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0 \,\}$ holomorph oder meromorph fortgesetzt werden? Vielleicht sogar auf ganz $\mathbb{C}$? Durch welche Eigenschaften ist Γ charakterisiert?

Heuristische Vorgehensweise: Für n klein ist $(n-1)! = \Gamma(n)$ „klein“, nicht klar wie man interpolieren sollte. Für n groß ist $\Gamma(n) = (n-1)!$ „riesengroß“, also wächst die Funktion „gleichmäßiger“und sollte daher einfacher zu interpolieren sein!

Sei $x \in \mathbb{N}$ fest, $N \in \mathbb{N}$. Dann soll gelten

$$\Gamma(x+N) = (N+x-1) \cdot \ldots \cdot (N+1) \cdot N \cdot (N-1)!$$

$$= N^x \underbrace{\left(1 + \frac{x-1}{N}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1 + \frac{x-2}{N}\right)}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{N}\right)}_{\to 1} \cdot 1 \cdot (N-1)!$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^x(N-1)!}{\Gamma(x+N)} = 1\,.$$

Außerdem soll gelten

$$\begin{aligned}\Gamma(x+N) &= (x+N-1)! \\ &= (x+N-1)\cdot(x+N-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+1)\cdot x\cdot\Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

Durch einsetzen erhalten wir

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^x(N-1)!}{x(x+1)\ldots(x+N-1)}\,. \tag{1.8}$$

Also probiere man (1.8) als Definition für $\Gamma(x)$ oder sogar für $\Gamma(z)$ mit $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, -1, -2, \ldots$ aus, vorausgesetzt der Limes existiert.

Satz 1.13. *Sei*

$$D_{-\mathbb{N}_0} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -1, -2, \ldots \,\}\ .$$

(i) Durch

$$\Gamma(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)\ldots(z+N-1)}$$

für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ wird eine holomorphe Funktion erklärt, diese heißt GAMMA-FUNKTION. *Obige Darstellung heißt* GAUSS'SCHE PRODUKTDARSTELLUNG *von $\Gamma(z)$.*

(ii) Es gilt für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}$$

die EULERSCHE PRODUKTDARSTELLUNG. *(Beachte $N^z = e^{z \operatorname{Log} N}$ für $z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$.)*

(iii) Es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ für alle $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zeige zunächst (i) und (ii):

(i, ii) Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$\Gamma_N(z) := \frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)\ldots(z+N-1)}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} &= \frac{(N+1)^z N!}{z(z+1)\ldots(z+N)} \cdot \frac{z(z+1)\ldots(z+N-1)}{N^z(N-1)!} \\ &= \frac{(N+1)^z}{N^z} \cdot \frac{N}{z+N} = \left(1+\frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}}\,.\end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ fest sei $(1+w)^z = e^{z\,\mathrm{Log}(1+w)}$ für $|w| < 1$. Dies ist eine holomorphe Funktion und hat um $w=0$ die Taylorentwicklung für $|w| < 1$

$$(1+w)^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{z}{n} w^n .$$

wobei $\binom{z}{n} = \frac{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z-n+1)}{n!}$ der VERALLGEMEINERTE BINOMINALKOEFFIZIENT ist (Beweis diese Aussage durch Induktion). Schreibe nun

$$(1+w)^z = 1 + zw + w^2 A(z,w)$$

wobei

$$A(z,w) = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{z}{n} w^{n-2} \qquad |w| < 1$$

Behauptung $A(z,w)$ ist auf Mengen der Form

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant c \,\} \times \{\, w \in \mathbb{C} \mid |w| \leqslant \alpha \,\} \qquad 0 < c, 0 < \alpha < 1$$

beschränkt, denn

$$\begin{aligned} |A(z,w)| &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left| \binom{z}{n} \right| \cdot |w|^{n-2} \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{c(c+1)\ldots(c+n-1)}{n!}}_{=(-1)^n \cdot \binom{-c}{n}} \alpha^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{-c}{n} (-\alpha)^{n-2} \\ &= A(-c,-\alpha) < \infty . \end{aligned}$$

Sei $K \subseteq D_{-\mathbb{N}_0}$ kompakt. Dann gilt für alle $z \in K$ und $N \in \mathbb{N}$ (mit N groß genug) unter Benutzung der geometrischen Reihe und mit $w = \frac{1}{N}$, dass

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} \\
&= \left(1+\frac{z}{N}+\frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\right)\left(1-\frac{z}{N}+\left(\frac{z}{N}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{z^2}{N^2}+\left(1+\frac{z}{N}\right)\left(\frac{z}{N}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)+\frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{z}{N}\right) \\
&\quad +\frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\cdot\left(\frac{z}{N}\right)^2\cdot B\left(\frac{z}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Also $\left|\left(1+\frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} - 1\right| \leqslant \frac{C}{N^2}$ für ein $C > 0$. Wegen $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty$ und Satz 1.8 folgt, dass

$$
\prod_{N=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)}
$$

unbedingt konvergent und eine holomorphe Funktion definiert auf $D_{-\mathbb{N}_0}$. Alle Faktoren sind ungleich Null, also nach Definition

$$
\begin{aligned}
\prod_{N=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} &= \lim_{M\to\infty} \prod_{N=1}^{M} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\Gamma_2(z)}{\Gamma_1(z)} \cdot \frac{\Gamma_3(z)}{\Gamma_2(z)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma_{M+1}(z)}{\Gamma_M(z)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\Gamma_{M+1}(z)}{\Gamma_1(z)} = z \lim_{M\to\infty} \Gamma_M(z)\,,
\end{aligned}
$$

dies zeigt die Behauptungen (i) und (ii).

(iii) Es gilt für alle $z+1 \in D_{-\mathbb{N}_0}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+N)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{z+N} \cdot \frac{zN^z(N-1)!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+N-1)} = z\Gamma(z)\,.
\end{aligned}
$$

Es gilt weiter

$$\Gamma(1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)!}{N!} = 1\,.$$

Induktiv folgt damit $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

q.e.d.

Satz 1.14. *Für die Γ-Funktion gelten folgende Eigenschaften:*

(i) Die Gammafunktion lässt sich in ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen mit einfachen Polstellen in $-\mathbb{N}_0$ und holomorph in $D_{-\mathbb{N}_0}$. Und es gilt

$$\operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(ii) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ ist ganz mit hebbaren Singularitäten in $z \in -\mathbb{N}_0$. Es gilt die Weierstrass-Produktentwicklung

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

mit $\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n) = 0{,}57721\ldots$ die Euler-Mascheroni-Konstante.

(iii) Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ der Ergänzungssatz*:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Beweis.

(i) Es gilt mit Satz 1.13 (iii) für $N \in \mathbb{N}_0$:

$$\Gamma(z+N+1) = (z+N)\ldots(z+1)z\Gamma(z)\,.$$

Damit erhält man

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+N+1)}{z(z+1)\ldots(z+N)}\,.$$

Also

$$\Gamma(z) = \frac{g(z)}{z-(-N)}\,,$$

wobei g lokal holomorph und $g(-N) \neq 0$.

Also besitzt Γ in $z = -N$ einen Pol der Ordnung 1 mit Residuen

$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=-N} \Gamma(z) &= \lim_{z\to -N} (z+N)\Gamma(z) = g(-N) \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-N)(-N+1)(-N+2)\ldots(-1)} \\ &= \frac{(-1)^N}{N!}\,.\end{aligned}$$

(ii) Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)$.

Zeige zunächst a_n ist eine konvergente Folge. Zunächst gilt

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0\,.$$

denn

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.\end{aligned}$$

Also ist die Folge a_n monoton fallend. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} &= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{1}{\nu}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log(n+1) \geqslant \log(n)\end{aligned}$$

Also ist $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz über die monotone Folge, folgt, dass die a_n konvergieren. Den Grenzwert bezeichnen wir mit γ.

Nun folgt

$$\frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}} = e^{z(Log(N)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{N})} \xrightarrow{N\to\infty} e^{-\gamma z}\,,$$

also

$$\begin{aligned} z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+N)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}} \frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})} N!}{(z+1)\ldots(z+N)} \\ &= e^{-\gamma z} \lim_{N\to\infty} \frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})} N!}{(z+1)\ldots(z+N)} \\ &= e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\,.$$

Insbesondere gilt diese Schreibweise auch für $z \in -\mathbb{N}_0$.

(iii) Aus $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ folgt

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z)\,,$$

also für $z \notin \mathbb{Z}$ (Beispiel 1.12)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} &= -\frac{1}{z\Gamma(-z)\Gamma(z)}\\ &= -\frac{1}{z}(-z)ze^{-\gamma z}e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{\pi}\sin(\pi z)\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 1.15 (Charakterisierung nach Wielandt).

(i) Die Gammafunktion ist auf jedem Vertikalstreifen

$$\{\, z = x+iy \in \mathbb{C} \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}$$

mit $0 < a \leqslant b$ beschränkt.

(ii) Es sei $D \subseteq D_{-\mathbb{N}_0}$ ein Gebiet, welches den Vertikalstreifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ enthält. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit den Eigenschaften

(a) $zf(z) = f(z+1)$ für alle $z, z+1 \in D$,

(b) f ist auf dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt.

Dann gilt: $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ für $z \in D$.

Bemerkung 1.16. Die Voraussetzung D Gebiet darf nicht weggelassen werden. Denn sei $D := \left\{\, z = x+iy \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < x < 3 \,\right\} \dot\cup U_1(10)$ und

$$f(z) := \begin{cases}\Gamma(z) & \text{wenn } \frac{1}{2} < x < 3 \text{ für } z = x+iy\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}.$$

Dann erfüllt f offensichtlich die Bedingungen (a) und (b), aber es gilt nicht $f(z) = \Gamma(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis.

(i) Für beliebiges $z = x+iy \in \mathbb{C}$ mit $0 < a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$ gilt wegen

$$|N^z| = \left|e^{\log(N)(x+iy)}\right| = N^x$$

und $|w| \geqslant \mathrm{Re}(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$:

$$|\Gamma(z)| = \lim_{N\to\infty} \left| \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+N-1)} \right|$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)\dots(x+N-1)} = \Gamma(x)$$

und, da Γ stetig ist und somit auf dem Kompaktum [a,b] beschränkt ist, ist $\Gamma(x)$ beschränkt.

(ii) Durch die Vorschrift

$$f(z+1) = zf(z)$$

wird f holomorph auf $1+D$ fortgesetzt, man erhält also eine holomorphe Funktion auf $D \cup (D+1)$ Letzteres ist ein Gebiet, da D und $1+D$ Gebiete und $D \cap (1+D)$ enthält die Gerade $\{\, z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x = 2 \,\}$.

Nach dem Identitätssatz ist die holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf $D \cup (1+D)$ eindeutig bestimmt. Verfährt man nach dem selben Prinzip weiter, so erhält man eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf dem Gebiet

$$D \cup (1+D) \cup (2+D) \cup (3+D) \cup ...$$

Ebenso wird f durch die Vorschrift $f(z+1) = zf(z)$ sukzessive auf

$$D \cup (-1+D) \cup (-2+D) \cup (-3+D) \cup ...$$

meromorph fortgesetzt, mit Polstellen höchstens in den Punkten $-\mathbb{N}_0$. Insgesamt erhält man also eine meromorphe Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$ mit Polen in $-\mathbb{N}_0$. Wegen des Identitätssatzes gilt global die Funktionalgleichung

$$zf(z) = f(z+1)$$

und analog zu Satz 1.14 (i) erhalten wir eine Laurent-Entwicklung von f in jedem Punkt $z = -N \in -\mathbb{N}_0$ der Form

$$f(z) = \frac{(-1)^N}{N!} f(1) \frac{1}{N+z} + \dots .$$

Sei

$$h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z) \qquad \text{für } z \in D_{-\mathbb{N}_0} .$$

Nach Satz 1.14 (i) definiert h dann eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$h(z+1) = zh(z)$$

aus Stetigkeitsgründen in ganz $\mathbb{C}$.

Wegen (i) und (b) ist $h(z)$ beschränkt auf dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$. Es ist $h(z) = \frac{h(z+2)}{z(z+1)}$ für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$. Sei $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Dann ist $1 \leqslant x+2 \leqslant 2$, also folgt aus der Beschränktheit von $h(z)$ in dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ und wegen $|z| \geqslant |y|$ die Beschränktheit von $h(z)$ in $\{\, z = x+iy \in \mathbb{C} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0, 1 \leqslant |y| \,\}$.

Da h stetig ist und $-1 \leqslant x \leqslant 0, |y| \leqslant 1$ kompakt ist, ist also $h(z)$ auf $-1 \leqslant x \leqslant 0$ beschränkt. Sei

$$H(z) = h(z)h(1-z) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}\,.$$

Dann ist H in $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Außerdem ist für alle $z \in \mathbb{C}^\times$

$$H(z+1) = h(z+1)h(-z) = \frac{zh(z)h(1-z)}{-z} = -H(z)\,.$$

Also gilt $|H(z+1)| = |H(z)|$ aus Stetigkeitsgründen für alle $z \in \mathbb{C}$. Daher ist H auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach dem Satz von Liouville folgt damit

$$H(z) = H(1) = h(1)h(0) = 0 \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

da $h(1) = f(1) - f(1)\Gamma(1) = 0$.

Hieraus folgt $h \equiv 0$, also die Behauptung. *Denn* wäre $h(z_0) \neq 0$, so gäbe es aus Gründen der Stetigkeit eine Umgebung $U_\delta(z_0)$ mit $h(w) \neq 0$ für alle $w \in U_\delta(z_0)$. Damit folgt $h|_{U_\delta(1-z_0)} \equiv 0$, also da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist mit dem Identitätssatz $h \equiv 0$. *q.e.d.*

Satz 1.17 (Legendresche Duplikationsformel). *Es gilt*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\cdot 2^{1-z}\cdot\Gamma(z) \qquad \textit{für } z \in D_{-\mathbb{N}_0}$$

Beweis. Wir wollen den Satz von Wielandt (Satz 1.15) benutzen mit

$$f(z) := \frac{2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Dann gilt: $D_{-\mathbb{N}_0}$ enthält den Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ und f ist dort holomorph. Es gilt

$$f(z+1) = \frac{2^z\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{z2^{z-1}\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\sqrt{\pi}} = zf(z)\,.$$

Nach Satz 1.15 (i) ist f beschränkt auf $1 \leqslant x \leqslant 2$. Somit gilt nach dem Satz von Wielandt (Satz 1.15)

$$f(z) = f(1)\Gamma(z)\,.$$

Es gilt weiterhin

$$f(1) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}}$$

und $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ nach dem Ergänzungssatz (Satz 1.14).

Wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ (folgt aus der Produktformel von Euler (Satz 1.13) gilt somit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und damit $f(1) = 1$. *q.e.d.*

Lemma 1.18. *Sei $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. $f(t) \geqslant 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist dann*

$$\int_A^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C \qquad \text{für } 0 < A < 1\,,$$

so existiert

$$\lim_{A\to 0} \int_A^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a\,.$$

Sei zunächst $a_n = \frac{1}{n}$. Die Folge

$$\left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist monoton steigend und nach oben beschränkt, also existiert

$$a = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

als die kleinste obere Schranke.

Sei jetzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon < \int_{\frac{1}{N_0}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant \frac{1}{N_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $N < n$. Es folgt

$$a - \varepsilon < \int_{\frac{1}{N_0}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{a_n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{N_n}}^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a < a + \varepsilon\,.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = a\,.$$

q.e.d.

Satz 1.19 (Eulersches Integral).

(i) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

mit $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$ *ist für* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *absolut konvergent, d. h.*

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{und}$$

$$\lim_{B\to\infty}\int_1^B t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existieren.

(ii) Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ *ist*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Beweis.

(i) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ fest mit $x = \mathrm{Re}(z) > 0$. Es ist

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1} \qquad \text{für } t > 0\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\int_A^1 \left|t^{z-1}e^{-t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_A^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\Big|_A^1 = \frac{1}{x}(1-A^x) \overset{x>0}{\leqslant} \frac{1}{x}$$

Nach dem Majorantenkriterium für Integrale folgt also die Existenz von

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } \mathrm{Re}(z) > 0\,.$$

Es gilt weiterhin

$$t^{x-1} \leqslant C\cdot e^{\frac{t}{2}} \qquad \text{für alle } t \geqslant 1$$

mit geeignetem $C = C(x) > 0$. Daher folgt

$$\int_1^B t^{x-1}\,\mathrm{d}t \leqslant C(x)\int_1^B e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2C(x)(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{B}{2}}) \leqslant 2C(x)e^{\frac{1}{2}}\,.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{B\to\infty}\int_1^B t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existiert.

(ii) Wir wollen wieder den Satz von Wielandt (Satz 1.15) benutzen mit

$$f(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ ist (Partielle Integration!)

$$f(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \, \mathrm{d}t = -e^{-t} t^z \Big|_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1} (-e^{-t}) \, \mathrm{d}t = z f(z) \, .$$

Das geht, wegen Lemma 1.18. Nach dem Leibniz-Kriterium ist das betrachte Integral holomorph, daher ist partielle Integration gerechtfertigt.

Schließlich ist für $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| t^{z-1} e^{-t} \right| &\leqslant \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 e^{-t} \, \mathrm{d}t + \int_1^\infty t e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1 + C \qquad \text{für ein } C > 0 \, . \end{aligned}$$

Also ist $f(z)$ auf $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt.

Schließlich muss man noch zeigen, dass $f(z)$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ holomorph ist. Es ist leicht zu sehen, dass

$$f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

holomorph ist für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ ein kompaktes Intervall ist (Leibniz-Regel). Unter Benutzung ähnlicher Argumente wie in (i) zeigt man, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Kompakta $K \subseteq \{ Re(z) \geqslant 0 \}$ gleichmäßig konvergiert. Damit folgt die Behauptung mit dem Satz von Weierstraß und die Aussage des Satzes folgt mit Wielandt (Satz 1.15), da

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$$

klar ist. *q.e.d.*

Problem: Wie verhält sich $\Gamma(z)$ für sehr große Werte $|z|$? Kann man $\Gamma(z)$ dort durch eine „einfache Funktion“ gut approximieren?

Satz 1.20 (Stirlingsche Formel).

(i) *Sei* $\mathbb{C}_- = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq x \text{ für } x \in \mathbb{R}\colon x \leqslant 0 \}$ *die geschlitzte Ebene ohne die negative reelle Achse und* 0. *Für* $z \in \mathbb{C}_-$ *gilt dann die Darstellung*[1]

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \cdot z^{z-\frac{1}{2}} \cdot e^{-z} \cdot e^{H(z)}$$

mit einer Funktion $H(z)$, *welche in jedem Winkelbereich*

$$W_\delta = \{ z \in \mathbb{C}_- \mid -\pi + \delta < \operatorname{Arg}(z) < \pi - \delta \} \qquad \textit{mit } \delta > 0$$

für $|z| \to \infty$ *gegen* 0 *konvergiert.*

(ii) *Für* $x >$ *ist*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\vartheta(x)}{12x}}$$

mit $0 < \vartheta(x) < 1$.

Für den Beweis zeigen wir zunächst einige Lemma.

Lemma 1.21. *Für* $z \in \mathbb{C}_-$ *sei*

$$H_0(z) := \left(z + \frac{1}{2}\right)(\operatorname{Log}(z+1) - \operatorname{Log}(z)) - 1$$

Sei $A = \mathbb{C}_- \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \right\}$. *Für* $z \in A$ *gilt dann*

$$H_0(z) = \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ gerade}}} \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{1}{2z+1}\right)^\nu \tag{1.9}$$

Beweis. Sei $K \subseteq A$ kompakt. Dann existiert $c > 1$, so dass $\left|z + \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{c}{2}$ für alle $z \in K$, also konvergiert die Reihe (1.9) auf Kompakta absolut und gleichmäßig und stellt somit eine in A holomorphe Funktion da. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\log(x+1) - \log(x) &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log\left(\frac{1 + \frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{1}{2x+1}}\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{2x+1}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) \\
&= \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^\nu + \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^\nu,
\end{aligned}$$

[1] Insbesondere gilt für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus $0 < \frac{1}{2x+1} < 1$ und

$$\log(1+\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \qquad |\delta| < 1$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\log(x+1) - \log(x) = 2 \cdot \sum_{\substack{\nu \geqslant 1 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^{\nu}.$$

Für $x > 0$ folgt also

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \left(x + \frac{1}{2} \right) (\log(x+1) - \log(x)) - 1 \\ &= \left(\sum_{\substack{\nu \geqslant 1 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^{\nu-1} \right) - 1 \\ &= \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^{\nu-1} \end{aligned}$$

also gilt (1.9) für $z \in A \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, beide Seiten sind in A holomorphe Funktionen, also gilt (1.9) nach dem Identitätssatz. *q.e.d.*

Lemma 1.22. *Für $z \in \mathbb{C}_-$ mit $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$ ist*

$$|H_0(z)| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{|2z+1|^2}.$$

Beweis. Für $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$ ist $\frac{1}{|2z+1|} < \frac{1}{2}$. Mit $w = \frac{1}{2z+1}$ ist für $|w| < \frac{1}{2}$ dann nach Lemma 1.21

$$\begin{aligned} |H_0(z)| &\leqslant \frac{|w|^2}{3} + \frac{|w|^4}{5} + \frac{|w|^6}{7} + \ldots \\ &\leqslant \frac{|w|^2}{3}(1 + |w|^2 + |w|^4 + \ldots) \\ &\leqslant \frac{|w|^2}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots \right) \\ &= \frac{|w|^2}{3} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|w|^2}{3} \leqslant \frac{1}{2}|w|^2. \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 1.23. *Sei*

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k) \qquad z \in \mathbb{C}_- \,.$$

(i) Die Reihe $H(z)$ konvergiert auf jeder Teilmenge $\mathbb{C}_-$ absolut und gleichmäßig und ist damit eine holomorphe Funktion in $\mathbb{C}_-$.

(ii) Es gilt

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in W_\delta}} H(z) = 0\,. \tag{1.10}$$

Beweis.

(i) Sei $K \subseteq \mathbb{C}_-$ kompakt. Für $n \in \mathbb{N}_0$, n groß, ist dann

$$\left|(z+n)+\frac{1}{2}\right| = \left|\left(n+\frac{1}{2}\right)-(-z)\right| \geqslant n+\frac{1}{2}-|z| > 1 \qquad z \in K\,.$$

Also folgt für solche n für alle $z \in K$ nach Lemma 1.22

$$|H_0(z+n)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\,,$$

falls n zusätzlich noch so groß ist, dass $2(x+n)+1 \geqslant n$, d. h. $x \geqslant \frac{-(n+1)}{2}$.

Weil $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ absolut konvergiert, also $H(z)$ auf K gleichmäßig absolut konvergiert, ist $H(z)$ auf $\mathbb{C}_-$ holomorph.

(ii) Es genügt (1.10) für kleines δ, z. B. $\delta < \frac{\pi}{2}$, zu zeigen. Dann ist

$$W_\delta = \{\, z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ oder } |y| > C|x| \,\}$$

mit geeignetem $C = C(\delta) > 0$.

Offenbar gibt es $N(\delta) \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geqslant N(\delta)$ und $z \in W_\delta$ gilt

$$z+n \in \mathbb{C}_- \text{ und } \left|(z+n)+\frac{1}{2}\right| > 1\,.$$

Also folgt nach Lemma 1.22

$$\begin{aligned} |H_0(z+n)| &\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2x+2n+1)^2+4y^2} \qquad \forall n \geqslant N(\delta), z \in W_\delta \end{aligned}$$

Für $x > 0$ ist

$$(2x+2n+1)^2+4y^2 \geqslant (2n+1)^2\,.$$

Für $|y| > c|x|$ ist

$$(2x + 2n + 1)^2 + 4y^2 \geqslant (2x + 2n + 1)^2 + 4C^2x^2$$
$$\geqslant (2x_{0,n} + 2n + 1)^2 + 4C^2x_{0,n}^2 \geqslant 4C^2x_{0,n}^2$$

mit $x_{0,n} = -\frac{2n+1}{2+2C^2}$, denn die Funktion $x \mapsto (2x + 2n + 1)^2 + 4C^2x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum in $x_{0,n}$ an (Analysis 1). Es folgt daher

$$|H_0(z + n)| \leqslant C_1 \cdot \frac{1}{(2n + 1)^2} \qquad \forall n \geqslant N(\delta), z \in W_\delta$$

mit geeignetem $C_1 = C_1(\delta) > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < \infty$, existiert $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n \geqslant N(\varepsilon)} \frac{1}{(2n+1)^2} \leqslant \varepsilon$. Sei $N := \max(N(\delta), N(\varepsilon))$. Für $z \in W_\delta$ folgt dann

$$\sum_{n \geqslant N} |H_0(z + n)| \leqslant C' \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{(2n + 1)^2} \leqslant C'\varepsilon\,.$$

Sei $n < N$. Für $z \in W_\delta$, $|z|$ groß, ist dann

$$\left|(z + n) + \frac{1}{2}\right| = \left|z - \left(-n - \frac{1}{2}\right)\right| \geqslant |z| - \left|n + \frac{1}{2}\right| > 1\,.$$

Also gilt nach Lemma 1.22 für solche n und z

$$|H_0(z + n)| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{|2(z + n) + 1|^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } |z| \to \infty,\ z \in W_\delta$$

Insgesamt folgt also

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z \in W_\delta}} H(z) = 0\,.$$

q.e.d.

Lemma 1.24. *Sei*

$$h(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}\,.$$

(i) Dann gilt

$$h(z + 1) = zh(z)$$

(ii) $h(z)$ ist beschränkt in $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Beweis.

(i) Es ist $h(z) = \exp((z - \frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(z) - z + H(z))$, also folgt

$$\begin{aligned}\frac{h(z+1)}{h(z)} &= \exp\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(z+1) - (z+1) + H(z+1)\right.\\ &\qquad \left.- \left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(z) - z + H(z)\right)\right)\\ &= \exp((H(z+1) - H(z) + H_0(z) + \mathrm{Log}(z)) = z\,,\end{aligned}$$

wegen der Teleskopsumme

$$\begin{aligned}H(z+1) - H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k+1) - \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k)\\ &= -H_0(z)\,.\end{aligned}$$

(ii) Die Funktion e^{-z} ist auf $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Im Winkelbereich $W_{\frac{\pi}{2}}$ gilt $H(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$ nach Lemma 1.23, insbesondere ist $e^{H(z)}$ in $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Es ist

$$\left|z^{z-\frac{1}{2}}\right| = \left|e^{(z-\frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(z)}\right| = e^{\mathrm{Re}\left((z-\frac{1}{2})\,\mathrm{Log}(z)\right)}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}(z)\right) &= \mathrm{Re}\left(\left(x-\frac{1}{2}+iy\right)(\log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z))\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\log|z| - y\,\mathrm{Arg}(z)\\ &\overset{y\neq 0}{=} y\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\log|z|}{y} - \mathrm{Arg}(z)\right).\end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis (Stirlingsche Formel Satz 1.20).

(i) Nach dem Satz von Wielandt (Satz 1.15) folgt mit Lemma 1.24

$$\Gamma(z) = Ah(z)$$

für ein $A \in \mathbb{C}^\times$. Nach der Legendreschen Duplikationsformel (Satz 1.17) ist für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= 2^{n-1}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n)} = 2^{n-1}\frac{h(\frac{n}{2})h(\frac{n+1}{2})}{h(n)} \cdot A \\
&= A \cdot 2^{n-1}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} e^{H(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{n+1}{2}} e^{H(\frac{n+1}{2})}}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{H(n)}} \\
&= A \cdot 2^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} e^{H(\frac{n}{2})+H(\frac{n+1}{2})-H(n)} \\
&= A \cdot (2e)^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{H(\frac{n}{2})+H(\frac{n+1}{2})-H(n)} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{A}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Also $A = \sqrt{2\pi}$. Das beweist (i).

(ii) Nach (i) ist für $x > 0$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{H(x)}$$

für $x > 0$ ist mit $w = \frac{1}{2x+1}$ nach Lemma 1.21

$$H_0(x) = \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ gerade}}} \frac{1}{\nu+1} w^\nu = \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \ldots$$

also folgt

$$\begin{aligned}
0 < H_0(x) &< \frac{1}{3}w^2(1 + w^2 + w^4 + \ldots) \\
&= \frac{1}{3}w^2\frac{1}{1-w^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2 - 1} \\
&= \frac{1}{12(x+1)x} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)
\end{aligned}$$

Daber gilt für $x > 0$

$$
\begin{aligned}
0 < H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_0(x+n) \\
&< \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right) \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right) \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+N+1} \right) = \frac{1}{12x} \,.
\end{aligned}
$$

Mit $\vartheta(x) = 12x \cdot H(x)$ folgt die Behauptung. *q.e.d.*

2 Periodische Funktionen

2.1 Einfach periodische Funktionen

Definition 2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Es gebe ein $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass aus $z \in D$ folgt, dass $z + \omega \in D$. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$. Gilt dann $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $z \in D$, so heißt f EINFACH PERIODISCH mit Periode ω.

Beispiel 2.2. e^z hat die Periode $2\pi i$ auf ganz $\mathbb{C}$. Und $\sin z, \cos z$ haben Periode 2π.

Hat $f\colon D \to \mathbb{C}$ die Periode ω, so hat $g\colon \frac{1}{\omega}D \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(\omega z)$ Periode 1.

Die einfachste nicht-konstante auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit Periode 1 ist $e^{2\pi i z}$. Diese wird eine wichtige Rolle spielen: wir werden periodische Funktionen f mit Periode 1 durch Summen von Potenzen $(e^{2\pi i z})^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ ausdrücken. Wir werden annehmen, dass D ein Streifen $D_{a,b} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im}(z) < b \,\}$ mit $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ ist. Zum Beispiel $D = D_{0,\infty} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \,\} =: \mathbb{H}$ die obere Halbebene.

Satz 2.3. *Sei $f\colon D_{a,b} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1. Dann lässt sich f auf $D_{a,b}$ in eine Fourierreihe entwickeln, d. h. es gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } z \in D_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Diese konvergiert gleichmäßig und absolut auf Kompakta. Es gilt

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z}\, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

wobei $z = x + iy_0$ mit $y_0 \in (a,b)$ fest gewählt. (Zu beachten ist hier, dass über die reelle Variable x integriert wird).

Beweis. Schreibe $D = D_{a,b}$. Betrachte die Abbildung

$$D \to \mathbb{C}, z \mapsto q := e^{2\pi i z}\,.$$

Diese bildet D surjektiv auf das Ringgebiet

$$\mathcal{R} = \{\, q \in \mathbb{C} \mid r < |q| < R \,\}$$

mit $r := e^{-2\pi b}$ und $R := e^{-2\pi a}$ ab (*Konvention* $R = \infty$, falls $a = -\infty$ und $r = 0$ falls $b = \infty$). Denn es gilt $r < |q| < R$, genau dann wenn $e^{-2\pi b} < e^{-2\pi y} < e^{-2\pi a}$, also wenn $a < y < b$.

Setze $F\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ mit $F(q) := f(z)$ für $q = e^{2\pi i z}$. Beachte: dies ist wohldefiniert, denn ist $e^{2\pi i z} = e^{2\pi i z'}$, so folgt $z - z' \in \mathbb{Z}$, also $z' = z + n$, aber $f(z+n) = f(z)$, da f periodisch ist.

Behauptung F ist auf $\mathcal{R}$ holomorph.

Denn: Sei $q_0 \in \mathcal{R}$ fest. Betrachte $\lim_{q \to q_0} \frac{F(q)-F(q_0)}{q-q_0}$. Wähle dafür eine beliebige Folge $q_\nu = e^{2\pi i z_\nu}$, $q_0 = e^{2\pi i z_0}$ mit $q_\nu \to q_0$ und $q_\nu \neq q_0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Es ist

$$q_\nu - q_0 = e^{2\pi z_\nu} - e^{2\pi z_0} = e^{2\pi z_0} \cdot (e^{2\pi(z_\nu - z_0)} - 1)$$

Damit folgt $e^{2\pi(z_\nu - z_0)} \xrightarrow{\nu\to\infty} 1$, also $\operatorname{Log} e^{2\pi(z_\nu - z_0)} \xrightarrow{\nu\to\infty} \operatorname{Log} 1 = 0$. Aber es gibt $m_\nu \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$\operatorname{Log} e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} = 2\pi i(z_\nu - z_0) + 2\pi i m_\nu = 2\pi i(\underbrace{z_\nu + m_\nu}_{=:z'_\nu}) + 2\pi i z_0$$

und somit $z'_\nu \to z_0$.

Daher

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} \frac{F(q_\nu) - F(q_0)}{q_\nu - q_0} &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i z_\nu} - e^{2\pi i z_0}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z'_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i z'_\nu} - e^{2\pi i z_0}} \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{2\pi i z'_\nu} - e^{2\pi i z_0}}{z'_\nu - z_0}} \cdot \frac{f(z'_\nu) - f(z_0)}{z'_\nu - z_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z_0}} f'(z_0)\,.
\end{aligned}$$

Wende nun den Satz über die Laurent-Entwicklung auf F an, mit diesem gilt:

$$F(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \qquad \text{für } q \in \mathcal{R}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_n, insbesondere ist die Reihe gleichmäßig und absolut konvergent auf Kompakta. Und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|q|=\rho} \frac{F(q)}{q^{n+1}}\,\mathrm{d}q \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei über die Kreislinie, die genau einmal im mathematisch positiven Sinn um 0 mit dem Radius ρ läuft, integriert wird. Diese wird gegeben durch $\rho e^{2\pi i x}$ mit $0 \leqslant x \leqslant 1$. Damit folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n+1}} \cdot \rho \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n}}\,\mathrm{d}x$$

Wähle nun $\rho = e^{-2\pi y_0}$ mit $a < y_0 < b$, dann $e^{2\pi i z} = e^{-2\pi y_0} \cdot e^{2\pi i x} = \rho \cdot e^{2\pi i x}$. Also erhalten wir

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

q.e.d.

Beispiel 2.4. Sei $D = D_{0,\infty} = \mathbb{H}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n\geqslant 1} n^{k-1} e^{2\pi i n z}\,. \tag{2.1}$$

Beweis. Die Reihe links in (2.1) ist auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergent (Beweis ähnlich wie in Beispiel 1.3 für k=2). Daher ist dies eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ also auch auf $\mathbb{H}$. Wegen der absoluten Konvergenz ist die Reihe periodisch mit Periode 1, hat also eine Fourierentwicklung nach Satz 2.3.

Mit der Partialbruchzerlegung des Kotangens (Beispiel 1.3) folgt nun

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Aber es gilt auch

$$\begin{aligned}\pi \cot \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{\frac{e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}}{2}}{\frac{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}}{2i}} \\ &= \pi i \frac{e^{\pi i z}+e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z}-e^{-\pi i z}} = \pi i \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} = \pi i \frac{q+1}{q-1} \\ &= \pi i \frac{q-1+2}{q-1} = \pi i \left(1 - \frac{2}{1-q}\right) \\ &= \pi i - 2\pi i \sum_{n\geqslant 0} q^n \,.\end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n\geqslant 0} e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}\,.$$

Ableiten beider Seiten gibt

$$\begin{aligned}-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z-n)^2}\right) \\ &\overset{!}{=} (-2\pi i)(2\pi i) \sum_{n\geqslant 1} n e^{2\pi i n z}\end{aligned}$$

Also folgt der Fall $k = 2$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{n\geqslant 1} n e^{2\pi i n z}\,.$$

Für die höheren Fälle $k > 2$ leitet man die Identität für $k = 2$ sukzessive ab. *q.e.d.*

2.2 Elliptische Funktionen

2.2.1 Einführung

Problem Gibt es nicht-konstante holomorphe bzw. meromorphe Funktionen f auf $\mathbb{C}$ mit zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Perioden, d. h. existieren $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind und so dass $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine auf $\mathbb{C}$ meromophe Funktion ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ derart, dass $S(f) = f^{-1}(\{\infty\})$ diskret in $\mathbb{C}$ ist, die Einschränkung $f_0 = f|_{\mathbb{C}\setminus S(f)}$ holomorph ist und alle Punkte aus $S(f)$ Pole von f_0 sind.

Sind f, g auf $\mathbb{C}$ meromorph, so ist $f_0 + g_0$ auf $\mathbb{C} \setminus (S(f) \cup S(g))$ holomorph und hat in $S(f) \cup S(g)$ nur unwesentliche Singularitäten, also lässt sich $f_0 + g_0$ eindeutig zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $f + g$ fortsetzen. Genauso kann man $f \cdot g$, f' und $\frac{f}{g}$ (für $g \not\equiv 0$) als meromorphe Funktionen definieren. Damit bilden die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen einen Körper.

Definition 2.5. Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ heißt GITTER[1], falls es über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$L = \{\, m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \,\} =: \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \,.$$

Man nennt $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$ eine BASIS des Gitters L.

Beispiel 2.6. Ein [Bild, siehe altes Skript]

Bemerkung 2.7.

(i) Man zeigt leicht: $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter mit Basis $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$. Dann ist $\{\, \omega_1', \omega_2' \,\}$ genau dann eine weitere Basis von L, wenn es ein $M \in GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{\, A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid \det A = \pm 1 \,\right\}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \,.$$

(ii) *Periodentorus:* Ist L ein Gitter mit Basis $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$, so kann man eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ definieren durch

$$z \sim z' \iff z - z' \in L \,.$$

Die Äquivalenzklasse von z ist gerade $[z] := z + L := \{\, z + \omega \mid \omega \in L \,\}$, man bezeichnet die Mengen der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{C}/L$. Man definiert $[z] + [z'] := [z + z']$. Beachte: $\mathbb{C}/L$ ist gerade die Faktorgruppe der abelschen Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ nach dem Normalteiler $(L, +)$.

Geometrisches Modell von $\mathbb{C}/L$ Offenbar ist jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ äquivalent zu einem Punkt in der Grundmasche

$$\mathcal{F}(\omega_1, \omega_1) = \{\, t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1 \,\} \,,$$

denn für alle $z \in \mathbb{C}$ existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$z = x\omega_1 + y\omega_2 = (x - \lfloor x \rfloor)\omega_1 + (y - \lfloor y \rfloor)\omega_2 + \underbrace{\lfloor x \rfloor\omega_1 + \lfloor y \rfloor\omega_2}_{\in L} \,.$$

[1] Im Englischen *lattice*, deshalb werden Gitter mit L bezeichnet.

Zwei Punkte in $\mathcal{F}(\omega_1, \omega_2)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie entweder gleich oder auf gegenüberliegenden Rändern liegen. Man erhält ein geometrisches Modell von $\mathbb{C}/L$ indem man gegnüberliegende Ränder identifiziert, man erhält dann einen Torus[2].

Definition 2.8. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter mit Basis $\{\omega_1, \omega_2\}$. Dann heißt eine meromorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ ELLIPTISCH bezüglich L, falls gilt $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 2.9.

(i) Es gilt $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $f(z+\omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $w \in L$. Deswegen heißen elliptische Funktionen auch doppelt periodische Funktionen.

(ii) Ist $c \in \overline{\mathbb{C}}$ und $f(z) = c$ und f elliptisch, so gilt $f(z+\omega) = c$ für alle $\omega \in L$. Insbesondere macht es Sinn von den Null- oder Polstellen von f modulo L zu sprechen.

(iii) Die elliptischen Funktionen zu einem Gitter L bilden einen Körper $K(L)$. Dieser enthält $\mathbb{C}$. Und für $f \in K(L)$ gilt auch $f' \in K(L)$.

(iv) *Historie:* Der Name *elliptische Funktionen* kommt von der Theorie der *elliptischen Integrale*, d. h. Integralen der Form

$$\int_a^z \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\,\mathrm{d}t\,,$$

wobei $P(t)$ ein Polynom dritten oder vierten Gerade ohne mehrfache Nullstellen ist. (Der Wert hängt im Allgemeinen von der Wahl von a, des Integtrationsweges und der Wahl der Wurzel ab.) Solche Integrale treten bei der Berechnung von Bogenlängen von Ellipsen auf. Man kann zeigen, dass die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrales gerade eine elliptische Funktion ist.

Geometrisch gesehen sind Ellipsen (gegeben durch Gleichung der Form $ax^2+by^2 = c$) verschieden von elliptischen Kurven (das sind Gleichungen der Form $y^2 = x^3+ax+b$ mit $4a^3 - 27b^2 \neq 0$).

Erstere werden parametrisiert durch rationale Funktionen (z.,B. wird $x^2+y^2 = 1$ parametrisiert durch $(x, y) = (\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1})$), letztere durch elliptische Funktionen. Erstere haben „Geschlecht Null“ (isomorph zu $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$), letztere haben „Geschlecht Eins“ (isomorph zu einem Torus).

[2] Auch *Donut* genannt.

2.2.2 Die Liouvillschen Sätze

Es handelt sich um vier Sätze, die notwendige Bedingungen geben für die Existenz von elliptischen Funktionen.

Satz 2.10. *Eine elliptische Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ ohne Polstellen ist notwendigerweise konstant.*

Beweis. Sei f elliptisch zum Gitter $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ mit Grundmasche

$$\mathcal{F} = \{\, t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1 \,\} \,.$$

Beachte (i) $\mathcal{F}$ ist kompakt (ii) zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es $\omega \in L$, so dass $z + \omega \in \mathcal{F}$ (iii) $f(z + w) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $\omega \in L$.

Es folgt: f nimmt schon jeden seiner Werte auf dem Kompaktum $\mathcal{F}$ an, und f ist ganz, also insbesondere stetig und damit auf jedem Komapaktum beschränkt. Also ist f bereits auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach Liouville (Funktionentheorie 1) ist f somit bereits konstant. *q.e.d.*

Satz 2.11. *Sei $f \in K(L)$. Dann gilt*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}/L} \operatorname{res}_z f = 0 \,,$$

wobei die linke Seite über ein Repräsentantensystem aller Punkte $z \in \mathbb{C}/L$ läuft und nur die Pole von f ungleich Null sind.

Bemerkung 2.12. Die Summe links ist wohldefiniert, denn

(i) f hat nur endlich viele Polstellen modulo L. *Denn* andernfalls hätte f unendlich viele Polstellen in $\mathcal{F}$, und da $\mathcal{F}$ kompakt ist, hätte $S(f)$ nach dem Satz von Weierstraß hätte einen Häufungspunkt $\lightning$.

(ii) Das Residuum ist invariant unter Verschiebung um $\omega \in L$. *Denn* das Residuum ist der Koeffizient mit Nummer -1 in der Laurententwicklung. Um $z_0 + \omega$ ist dies eine Summe von Potenzen $\frac{1}{z-(z_0+\omega)} = \frac{1}{(z-\omega)-z_0}$, also erhält man die Laurententwicklung von $f(z - \omega) = f(z)$ um z_0.

Beweis. Für $a \in \mathbb{C}$ sei $\mathcal{F}_a = a + \mathcal{F} = \{\, a + z \mid z \in \mathcal{F} \,\}$. Dann kann $\mathbb{C}/L$ mit $\mathcal{F}_a$ (modulo Randidentifikation) identifiziert werden, denn zu $z \in \mathbb{C}$ existiert $\omega \in L$ mit $z-a+\omega \in \mathcal{F}$, d. h. $z + \omega \in a + \mathcal{F} = \mathcal{F}_a$. Man wähle $a \in \mathbb{C}$ so, dass auf dem Rand $\partial\mathcal{F}_a$ von $\mathcal{F}_a$ kein Pol von f liegt. Dies geht, da f auf $\mathcal{F}$ nur endlich viele Pole hat.

Man wende den Residuensatz an, unter Beachtung, dass nach der Wahl von a das Innere int F_a genau ein Repräsentanten jeder Polstelle von f enthält. Es folgt also

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{z\in\mathbb{C}/L} \operatorname*{res}_z f = 2\pi i \sum_{z\in \operatorname{int}\mathcal{F}_a} \operatorname*{res}_z f &= \int_{\partial\mathcal{F}_a} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_4} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Hier heben sich das erste und das dritte und das zweite und das vierte Integral jeweils auf, die Summe ist also Null. *Denn*

$$\int_{C_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\omega_1+C_4} f(z-\omega_1)\,\mathrm{d}z = \int_{\omega_1+C_4} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

q.e.d.

Korollar 2.13. *Es gibt keine elliptische Funktion f mit genau einer einfachen Polstelle modulo L. In anderen Worten hat ein $f \in K(L)\setminus\mathbb{C}$ entweder mindestens einen Pol der Ordnung größer als 1 oder mindestens zwei modulo L verschiedene Polstellen.*

Definition 2.14. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph, $f \not\equiv 0$ und $z_0 \in D$.

(i) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Man sagt, dass f in z_0 den Wert c mit Vielfachheit k annimmt, falls
$$ord_{z_0}(f-c) = k\,.$$

(ii) Sei z_0 eine Polstelle von f der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ (also $\operatorname{ord}_{z_0} f = -k$). Man sagt, dass f in z_0 den Wert ∞ mit Vielfachheit k annimmt.

Satz 2.15. *Jedes $f \in K(L)\setminus\mathbb{C}$ nimmt jeden Wert $c \in \overline{\mathbb{C}}$ (mit Vielfachheiten gezählt) gleich oft an. Insbesondere gilt für alle $c \in \mathbb{C}$*

$$\sum_{\substack{z\in\mathbb{C}/L\\ z \text{ kein Pol}}} \operatorname*{ord}_z(f-c) = -\sum_{\substack{z\in\mathbb{C}/L\\ z \text{ Pol}}} \operatorname*{ord}_z f$$

Beweis. Sei $c \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist $\frac{f'}{f-c} \in K(L)$, denn f ist nicht konstant, $f' \in K(L)$ und $K(L)$ ist ein Körper. Wir wollen nun Satz 2.11 auf $\frac{f'}{f-c}$ anwenden. Zunächst gilt $\frac{f'}{f-c} = \frac{(f-c)'}{f-c}$, daher ist

$$\operatorname*{res}_z \frac{f'}{f-c} = \operatorname*{res}_z \frac{(f-c)'}{f-c} = \operatorname*{ord}_z(f-c)\,,$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Beweis des Satzes über das Null- und Pollstellenzählende Integral aus Funktionentheorie 1 folgt. Nach Satz 2.11 folgt dann

$$0 = \sum_{z \in \mathbb{C}/L} \operatorname*{ord}_z (f-c) = \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}/L \\ z \text{ kein Pol}}} \operatorname*{ord}_z (f-c) + \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}/L \\ z \text{ Pol}}} \underbrace{\operatorname*{ord}_z (f-c)}_{=\operatorname{ord}_z f(z)} .$$

q.e.d.

Definition 2.16. Man nennt

$$- \sum_{\substack{z \in \mathbb{C}/L \\ z \text{ Pol}}} \operatorname*{ord}_z f \in \mathbb{N}$$

aus Satz 2.15 die Ordnung von f.

Satz 2.17. *Sei $f \in K(L) \setminus \mathbb{C}$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bzw. $\beta_1, \ldots \beta_s$ ein vollständiges Vertretersystem modulo L der Null- bzw. Polstellen von f mit Vielfachheiten gezählt, das heißt nicht notwendigerweise paarweise verschieden. Dann gilt*

(i) $r = s$,

(ii) $\sum_{j=1}^{s} \alpha_j - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \in L$.

Beweis.

(i) $r = s$ folgt aus Satz 2.15 mit $c = 0$.

(ii) Für den Beweis braucht man folgendes Lemma

Lemma 2.18. *Sei D ein Elementargebiet und f eine auf D meromorphe Funktion mit endlich vielen Null- und Polstellen $a_1, \ldots, a_n$. Sei C eine stückweise glatte Kurve in $D \setminus \{ a_1, \ldots, a_n \}$. Sei zusätzlich $g\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} \mathcal{X}(C, a_\nu) \cdot g(a_\nu) \cdot \operatorname*{ord}_{a_\nu} f .$$

Beweis. Genauso wie für $g \equiv 1$ im Null- und Polstellen zählendes Integral aus Funktionentheorie 1. Die Funktion $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist holomorph auf $D \setminus \{ a_1, \ldots, a_n \}$. Ist $a \in \{ a_1 \ldots, a_n \}$, so gilt

$$\operatorname*{res}_{z=a} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(a) \cdot \operatorname*{ord}_a f .$$

Mit dem Residuensatz folgt die Behauptung. *q.e.d.*

Durch Abändern modulo L kann man erreichen, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s \in \operatorname{int}\mathcal{F}_a$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{C}$, wobei $\mathcal{F}_a = \mathcal{F} + a$ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\omega_1, \omega_2) = \{\, t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mid 0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant 1 \,\}$ die Grundmasche bezüglich einer Basis $\{\, \omega_1, \omega_2 \,\}$ von L.

Man wende das Lemma an mit $g(z) = z$ und $C = \partial\mathcal{F}_a$ (positiv durchlaufen). Es folgt

$$\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{s} \beta_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{F}_a} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\nu=1}^{4} \int_{C_\nu} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z \right) ,$$

mit den Integrationswegen wie im Beweis von Satz 2.11.

Man betrachte das Integral über C_2 und C_4. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z &= \int_{\underbrace{C_4 + \omega_1}_{=-C_2}} (z - \omega_1) \frac{f'(z - \omega_1)}{f(z - \omega_1} \,\mathrm{d}z \\ &= -\int_{C_2} (z - \omega_1) \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = -\int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z + \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z \,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\int_{C_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z + \int_{C_4} z \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \omega_1 \int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z \,.$$

Nach Voraussetzung hat f keine Null- oder Polstellen auf C_2. Daher kann man ein offenes Rechteck R (insbesondere also ein Elementargebiet), welches C_2 enthält, finden, auf dem f keine Null- und Polstellen hat. *Denn* f hat als meromorphe Funktion, die nicht identisch Null ist, nur isolierte Null- und Polstellen.

Da R ein Elementargebiet und f holomorph und nullstellenfrei auf R ist, existiert eine holomorphe Funktion $h\colon R \to \mathbb{C}$, so dass $f(z) = e^{h(z)}$ für alle $z \in R$.

Durch Ableiten ergibt sich $f'(z) = h'(z)e^{h(z)} = h'(z)f(z)$. Damit erhalten wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = h'(z) \,.$$

Es folgt daher aus der Funktionentheorie 1:

$$\int_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = h(a + \omega_1 + \omega_2) - h(a + \omega_1) \,.$$

Aber wir wissen $e^{h(a+\omega_1+\omega_2)} = f(a + \omega_1 + \omega_2) = f(a + \omega_1) = e^{h(a+\omega_1)}$. Damit folgt $h(a + \omega_1 + \omega_2) - h(a + \omega_1) \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Also folgt

$$\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_{C_2+C_4}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \in \omega_1\mathbb{Z}\,.$$

Genauso zeigt man

$$\int_{C_1+C_3} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \omega_2\int_{C_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

dann gilt

$$\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_{C_1+C_3}\frac{f'(z)}{f(z)} \in \omega_2\mathbb{Z}\,.$$

q.e.d.

2.3 Die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion

Unsere Ziele in diesem Abschnitt sind

(i) Die Konstruktion einer elliptischen Funktion $\wp(z)$ zum Gitter L mit genau doppelten Polstellen in allen Gitterpunkten $\omega \in L$. Die Konstruktion erfolgt nach dem Rezept des Beweis des Partialbruchsatzes von Mittag-Leffler (Satz 1.2): Ein guter Kandidat wäre

$$\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^2}\,.$$

Allerdings hat diese Reihe schlechte Konvergenzeigenschaften. Das Lösen wir durch konvergenzerzeugende Summanden, also ein besserer Kandidat

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\,.$$

(ii) Man zeige $K(L) = \mathbb{C}(\wp) + \wp'\mathbb{C}(\wp)$, wobei $\mathbb{C}(\wp)$ der Körper der rationalen Funktionen in $\wp$ ist.[3]

Notation. In diesem Abschnitt sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Satt $\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\cdots$ schreiben wir einfach ${\sum}'_{\omega\in L}\cdots$

[3] Das heißt jedes $f \in \mathbb{C}(\wp)$ lässt sich mit $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1\wp(z) + \ldots + a_n\wp(z)^n}{b_0 + b_1\wp(z) + \ldots + b_m\wp(z)^m}\,.$$

Lemma 2.19. *Sei $r > 2$. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{w\in L}' \frac{1}{|\omega|^2}$$

konvergent.

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{|x\omega_1 + y\omega_2|^r}{|xi+y|^r}\,.$$

Da $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist, gilt $f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Außerdem gilt $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Da f stetig auf dem Kompaktum $S' = \left\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\,\right\}$ ist, folgt, dass es $C > 0$ gibt mit $f(x,y) > C$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Daher

$$\frac{1}{|x\omega_1 + y\omega_2|^r} < \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{|xi+y|^r} \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Man wende dies an mit $(x,y) = (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, $(m,n) \neq (0,0)$. Damit genügt es die Konvergenz für $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ zu zeigen, d. h.

$$\sum_{m,n}' \frac{1}{|mi+n|^r} < \infty\,.$$

Die euklidische Norm ist äquivalent zur Maximusmnorm auf $\mathbb{R}^2$. Also genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{m,n}' \frac{1}{\|(m,n)\|_\infty^r} < \infty\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{m,n}' \frac{1}{\|(m,n)\|_\infty^r} &= \sum_{N=1}^{\infty} \underbrace{\#\{\,(m,n) \in \mathbb{Z} \mid \|(m,n)\|_\infty^r = N\,\}}_{=8N} \frac{1}{N^r} \\ &\leqslant 8 \sum_{N=1} \frac{1}{N^{r-1}} < \infty \qquad \text{für } r > 2\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 2.20.

(i) Die Reihe

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \qquad \textit{für } z \in \mathbb{C}\setminus L$$

ist auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}\setminus L$ gleichmäßig, absolut konvergent und heißt WEIERSTRASS'SCHE $\wp$-FUNKTION. *Sie ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus L$ und hat doppelte Pole in allen $w \in L$.*

(ii) Es gilt

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \qquad \textit{für } z \in \mathbb{C}\setminus L$$

wobei die Reihe absolut konvergiert. Insbesondere ist $\wp'$ ungerade und elliptisch.

(iii) $\wp$ ist elliptisch zum Gitter L mit Ordnung 2.

(iv) Um $z = 0$ hat $\wp(z)$ die Laurententwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\geqslant 1}(2n+1)G_{2n+2}z^{2n} \qquad \textit{für } 0 < |z| < \rho\,,$$

wobei

$$G_{2k} = \sum_{w\in L}{}' \frac{1}{\omega^{2k}} \qquad \textit{für } k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$$

die sogeannten HOMOGENEN EISENSTEINREIHEN *vom Gewicht $2k$ zu L sind. Und*

$$\rho := \min\{\, |\omega| \mid \omega \in L, \omega \neq 0 \,\}\ .$$

Beweis.

(i) Sei $K \subseteq \mathbb{C}\setminus L$ kompakt. Es gelte $|z| < R$ für alle $z \in K$. Sei $\omega \in L$ mit $|\omega| > 2R$. Durch Abschätzen ergibt sich

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - z^2 + 2\omega z - \omega^2}{(z-\omega)^2\omega^2} \right| = \frac{|z(2\omega - z)|}{|\omega|^2|z-\omega|^2}$$

$$\leqslant \frac{R(2|\omega| + R)}{|\omega|^2(|\omega| - R)^2} \leqslant \frac{R(2|\omega| + \frac{|\omega|}{2})}{|\omega|^2(|\omega| - \frac{|\omega|}{2})^2} = \frac{10R}{|\omega|^3}\,.$$

Denn es gilt $|z| \leqslant R < 2R < |w|$ also $R < \frac{|\omega|}{2}$ und

$$|z-\omega|^2 = |\omega - z|^2 \geqslant (|\omega| - |z|)^2 \geqslant (|\omega| - R)^2\,.$$

Damit folgt die Behauptung wegen Lemma 2.19 mit $r = 3$.

Nach dem Satz von Weierstraß (Funktionentheorie 1) ist somit $\wp(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}\setminus L$. Nach Definition hat $\wp(z)$ Pole zweiter Ordnung in $\omega \in L$. Der Hauptteil ist gerade $\frac{1}{(z-\omega)^2}$.

(ii) Wegen lokaler gleichmäßiger Konvergent darf man die Reihe $\wp(z)$ gliedweise differenzieren

$$\wp'(z) = -2\frac{1}{z^3} - 2\sum_{\omega\in L}{}' \frac{1}{(z-\omega)^3} = -2\sum_{\omega\in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus L\,.$$

Die absolute Konvergent lässt sich wie in (i) zeigen (Beachte Exponent 3 und Lemma 2.19).

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\wp'$ ist $\wp'$ elliptisch, denn sei $\omega_0 \in L$:

$$\begin{aligned}\wp'(z+\omega_0) &= -2\sum_{\omega\in L} \frac{1}{(z+\omega_0-\omega)^3}\\ &= -2\sum_{\omega\in L} \frac{1}{(z-(\omega-\omega_0))^3} = -2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}\,,\end{aligned}$$

denn die Reihe ist absolut also auch unbedingt konvergent und mit ω durchläuft auch $\omega - \omega_0$ ganz L.

(iii) Für $j = 1, 2$ betrachten wir

$$\wp(z+\omega_j) - \wp(z)\,.$$

Differenziert man nun, erhält man, da $\wp'$ elliptisch ist

$$\wp'(z+\omega_j) - \wp'(z) = 0\,.$$

Da $\mathbb{C}\setminus L$ ein Gebiet ist, folgt, dass

$$\wp(z+\omega_j) - \wp(z) = c_j$$

konstant ist. Für $z = -\frac{\omega_j}{2} \notin L$ gilt dann da $\wp$ gerade ist

$$0 = \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega_j}{2} + \omega_j\right) - \wp\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = c_j\,.$$

Also ist $c_j = 0$ und damit $\wp$ elliptisch. Und $\operatorname{ord}\wp = 2$ folgt, da $\wp$ doppelte Polstellen in L hat und holomorph auf $\mathbb{C}\setminus L$ ist.

(iv) Es gilt $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + g(z)$ mit

$$g(z) = \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \qquad \text{für } |z| < \rho\,.$$

Durch sukzessives ableiten erhält man

$$g^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)! \sum_{\omega\in L}{}' \frac{1}{(z-\omega)^{n+2}} \qquad \text{für } n \geqslant 1\,.$$

Für $z = 0$ gilt dann

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n (n+1)! \sideset{}{'}\sum_{\omega \in L} \frac{1}{(-\omega)^{n+2}}$$

$$= (n+1)! \sideset{}{'}\sum_{\omega \in L} \frac{1}{\omega^{n+2}} = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ (n+1)!\, G_{n+2} & n \text{ gerade} \end{cases} .$$

Es folgt mit dem Satz von Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ n \text{ gerade}}} (n+1) G_{n+2} z^n .$$

q.e.d.

Satz 2.21. *Es gilt die Differentialgleichung*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3 ,$$

wobei $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$, die sogenannten WEIERSTRASS-KONSTANTEN *des Gitters L sind.*

Beweis. Wir wollen beide Seiten in eine Laurentreihe um $z = 0$ entwickeln und die Differenz bilden.

Es ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + \dots$$

Also

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + \dots$$

Damit folgt

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

Ähnlich erhalten wir

$$4\wp(z)^3 = \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + \dots$$

Also

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

Wir erhalten, dass $H(z) := \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) \in K(L)$ eine holomorphe Fortsetzung in $z = 0$ hat, denn H hat kein Hauptteil in $z = 0$. Und hat dort den Wert $-140G_6 = -g_3$. Wegen der Periodizität ist daher $H(z) \in K(L)$ und holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Nach dem 1. Liouvillschen Satz (Satz 2.10) ist H konstant, also $H(z) = H(0) = -g_3$. *q.e.d.*

Bemerkung 2.22. Eine elliptische Kurve $y^2 = 4x^3 + ax - b$ wird für $a = -g_2$ und $b = -g_3$ durch die $\wp$-Funktion parametrisiert.

Korollar 2.23. *Sei $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ und $e_j = \wp(\frac{\omega_j}{2})$ für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt*

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e3)\,.$$

Bemerkung 2.24. Die Punkte $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_3}{2}$ sind *ausgezeichnet* dadurch, dass sie ein Vertretersystem modulo L der sogenannten ZWEITEILUNGSPUNKTEN von L sind, d. h. $z \in \mathbb{C}$ mit

$$2z \equiv 0 \mod L$$

Beweis. Beachte da $\wp'$ elliptisch und ungerade ist, gilt

$$\wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp'\left(\frac{\omega_j}{2} - \omega_j\right) = \wp'\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = -\wp'\left(\frac{\omega_j}{2}\right)$$

Also $\wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0$ für $j = 1, 2, 3$.

Behauptung e_1, e_2, e_3 sind paarweise verschieden. Denn Angenommen es gilt $e_k = e_j$ mit $k \neq j$. So folgt

$$\operatorname{ord}_{\frac{\omega_k}{2}}(\wp - e_k) \geqslant 2\,, \qquad \operatorname{ord}_{\frac{\omega_j}{2}}(\wp - e_j) \geqslant 2\,,$$

denn $\wp(\frac{\omega_j}{2}) = e_j$ und $\wp'(\frac{\omega_j}{2}) = 0$ genauso für k. Da $\frac{\omega_k}{2} \not\equiv \frac{\omega_j}{2} \mod L$, folgt dass $\wp$ den Wert $e_j = e_k$ mindestens vier mal modulo L annimmt. Aber die Ordnung von $\wp$ ist gleich 2. ↯

Das Polynom $4X^3 - g_2X - g_3$ hat also nach Satz 2.21 die paarweise verschiedenen Nullstellen e_1, e_2 und e_3. Also

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)\,.$$

Mit $X = \wp(z)$ folgt die Behauptung mit Satz 2.21. q.e.d.

Index

Liste der Sätze