Funktionentheorie II

im Wintersemster 2017 / 18
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Jonas Müller
Heidelberg, den 31. Oktober 2017

Vorwort

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung Funktionentheorie II von Prof. Winfried Kohnen aus dem Wintersemster 2017 / 18. Bei Fehlern meldet euch gerne bei mir

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

https://github.com/jenuk/funktheo2/blob/master/script.pdf

Die LaTeX-Source Dateien findet man hier

https://github.com/jenuk/funktheo2/tree/master

Inhaltsverzeichnis

0 Wiederholung

Definition 0.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt HOLOMORPH, falls f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, d. h.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(z_o + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert.

Satz 0.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

(i) f hat auf D eine Stammfunktion.

(ii) $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $C \subseteq D$.

Satz 0.3 (Cauchysche Integralformel). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w$$

wobei C gegeben ist durch $z_0 + re^{2\pi i t}$ für $t \in [0, 1]$.

Daraus folgen einige Aussagen:

- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty$.
- *Satz von Taylor*: $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

- f ist genau dann auf D holomorph, wenn f auf D analytisch ist ist.
- Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen
  - Identitätssatz
  - Satz von der Gebietstreue
  - Maximumsprinzip

Definition 0.4 (Singularitäten). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \notin D$, $\dot{U}_r(a) \subseteq D$. Dann heißt a eine SINGULARITÄT von f. Die Klassifikationen einer Singularität sind

- a ist *hebbar* (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
- a ist ein *Pol* ($\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$ wobei $z \neq a$ gelten muss)
- a ist wesentlich (Casorati-Weierstraß)

Satz 0.5 (Laurentzerlegung). *Sei $\mathcal{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R \}$ ein Ringgebiet mit $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad z \in \mathcal{R}$$

wobei $g\colon U_R(0) \to \mathbb{C}$ der Nebenteil *und $h\colon U_{r^{-1}}(0) \to \mathbb{C}$ der* Hauptteil *holomorph mit $h(0) = 0$.*

Anwendung auf Singularitäten: $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subseteq D$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad z \in \dot{U}_\delta(a)$$

→ a ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n \leqslant -1$.

→ a ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \geqslant 1$, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$.

→ a ist genau dann wesentlich, wenn es unendlich viele $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$.

Satz 0.6 (Residuensatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_1, \dots, z_h \in D$, $f\colon D \setminus \{ z_1, \dots, z_h \} \to \mathbb{C}$ holomorph und C eine glatte geschlossene Kurve in $D \setminus \{ z_1, \dots, z_h \}$. Dann gilt*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{h} \operatorname*{res}_{z=z_j} f \cdot \mathcal{X}(C, z_j)$$

wobei $\operatorname*{res}_{z=z_j} f$ das Residuum von f ist und $\mathcal{X}(C, z_j)$ die Umlaufzahl von C um z_j ist.

1 Konstruktion meromorpher und holomorpher Funktionen

1.1 Partialbruchzerlegung

Satz 1.1 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien p, q zwei Polynome über $\mathbb{C}$, $q \not\equiv 0$ und $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $g(q) \neq 0$ die zugehörige rationale Funktion. Seien $z_1, \ldots, z_h$ die verschiedenen Polstellen mit den Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_h$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $p_1(z), \ldots, p_h(z)$ mit $p_r(0) = 0$ ($r = 1, \ldots, h$) und ein eindeutig bestimmtes Polynom p_0, so dass gilt*

$$R(z) = \sum_{r=0}^{h} p_r \left(\frac{1}{z - z_r} \right) + p_0(z) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{ z_1, \ldots, z_h \}$$

Außerdem gilt $\operatorname{grad} p_r = \mu_r$ *für* $r = 1, \ldots, h$.

Beweis. Für jedes $r = 1, \ldots, h$ sei p_r der Hauptteil der Laurententwicklung von R bezüglich der Polstelle z_r. Dann ist p_r ein Polynom vom Grad μ_r. Sei

$$p_0(z) := R(z) - \sum_{r=1}^{h} p_r \left(\frac{1}{z - z_r} \right) .$$

Dann hat p_0 keinen Hauptteil mehr, d. h. p_0 hat in $z_1, \ldots, z_h$ hebbare Singularitäten, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Aber p_0 ist nach Konstruktion eine rationale Funktion. Also ist p_0 ein Polynom. Das heißt es existieren $p_0, \ldots, p_h$ wie behauptet, es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei eine weitere Darstellung wie oben gegeben durch $\tilde{p_0}, \ldots, \tilde{p_h}$. Sei $\nu \in \{ 1, \ldots, k \}$. Dann gilt

$$R(z) = \tilde{p_\nu} \left(\frac{1}{1 - z_\nu} \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \nu}}^{h} \tilde{p_r} \left(\frac{1}{1 - z_r} \right) + \tilde{p_0}(z) \tag{1.1}$$

$$= p_\nu \left(\frac{1}{1 - z_\nu} \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \nu}}^{h} p_r \left(\frac{1}{1 - z_r} \right) + p_0(z) .$$

Die ersten Summanden sind in einer kleinen punktierten Umgebungen von z_0 holomorph, der Rest in der gesamten Umgebung. Also ist (1.1) die Laurentzerlegung von

R bezüglich $z_n u$. Da die Laurententwicklung eindeutig ist, folgt $p_n u = \tilde{p_n} u$. Da dies für alle $\nu \in \{ 1, \ldots, k \}$ gilt, folgt bereits $p_0 = \tilde{p_0}$. *q.e.d.*

Ziel: Man beweise einen ähnlichen Satz für beliebige meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. (Erinnerung: eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ wird gegeben durch eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, wobei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret ist, d. h. S hat in $\mathbb{C}$ keinen Häufungspunkt (insbesondere ist $\mathbb{C} \setminus S$ offen), und die Punkte aus S sind Pole von f.)

Problem: Ist S unendlich, so ist die Summe über die Hauptteile $\sum_{s \in S} p_s \frac{1}{z-s})$ im Allgemeinen nicht mehr konvergent.

Lösung: Man addiere konvergenz erzeugende Summanden!

Satz 1.2 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler). *(i) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Jedem $s \in S$ sei eine ganze Funktion $h_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h_s(0) = 0$ zugeordnet. (Man nennt $\{ h_s \}_{s \in S}$ eine* Hauptteilverteilung.*) Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, deren Hauptteil in $s \in S$ durch $h_s(\frac{1}{z-s})$ gegeben wird. (Man nennt h eine Lösung der Hauptteilverteilung.) Ist H eine weitere Lösung, so existiert eine ganze Funktion g mit $H = h + g$.*

(ii) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einer Polstellenmenge S und Hauptteilen p_s $(s \in S)$. (Beachte: p_s ist ein Polynom mit $p_s(0) = 0$.) Dann existieren Polynome q_s $(s \in S)$ und eine ganze Funktion g, sodass gilt

$$f(z) = \sum_{s \in S} \left(p_s \left(\frac{1}{z-s} \right) - q_s(z) \right) + g(z)$$

wobei die Summe in der Klammer auf kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ absolut gleichmäßig konvergiert.

Beweis. (i) Ist S endlich, so ist $h(z) = \sum_{s \in S} h_s(\frac{1}{z-s})$ eine Lösung (siehe Beweis von Satz 1.1).

Sei nun S unendlich. Zeige dafür zunächst, dass S abzählbar ist. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, dann ist $K \cap S$ beschränkt.

Angenommen $K \cap S$ ist unendlich. Nach Bolzano-Weierstraß hat dann $K \cap S$, also auch S, einen Häufungspunkt. $\lightning$

Also ist $S \cap K$ endlich. Da $\mathbb{C} = \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{U_n(0)}$ und $\overline{U_n(0)}$ kompakt, ist S abzählbar.

Sei $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ eine Abzählung derart, dass

$$|s_0| \leqslant |s_1| \leqslant \ldots \leqslant |s_n| \leqslant \ldots \to \infty$$

(Beachte: falls $0 \in S$, dann $s_0 = 0$, ferner $|s_n| > 0$ für $n \geqslant 1$.) Schreibe $h_n := h_{s_n}$ für $n \geqslant 0$.

Sei nun $n \geqslant 1$ fest. Dann ist die auf der offenen nichtleeren Kreisschreibe $U_{|s_n|}(0)$ holomorphe Funktion $h_n(\frac{1}{z-s_n})$ um den Ursprung in eine Potenzreihe entwickelbar (Taylor), welche auf kompakten Teilmengen gleichmäßig absolut konvergiert. Nach Definition der Konvergenz existiert daher ein Polynom $q_n(z)$ sodass

$$\left| h_n \left(\frac{1}{z-s_n} \right) - q_n(z) \right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$$

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$ und $z \in K$ gilt $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ (denn $|s_n| \to \infty$). Es folgt dass die Reihe

$$h(z) := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n\geqslant 1}\left(h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - q_n(z)\right)$$

auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert, denn $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} < \infty$. Nach Weierstraß ist daher $h(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph. Schreibt man $h(z) = h_m(\frac{1}{z-s_m}) + \text{Rest}$ ($m \geqslant 0$ fest), so folgt, dass $h(z)$ eine Lösung der Hauptteilverteilung ist.

Sei H eine weitere Lösung. Dann haben h und H dieselbe Postellenmenge S und die gleichen Hauptteile für $s \in S$. Daraus folgt $g(z) := H(z) - h(z)$ hat in allen Punkten $s \in S$ hebbare Singularitäten, ist also ganz.

(ii) Sei $\{ p_s \}_{s\in S}$ die angegebene Hauptteilverteilung. Dieser hat als Lösung per Definition f. Ferner existiert die im Beweis von Satz 2, (i) konstruierte Lösung. Nach der Eindeutigkeit stimmen daher beide Lösung bis auf eine ganze Funktion g überein.

q.e.d.

Praktische Anwendung von Satz 2 Gegeben sei eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit Polstellenmenge S.

(i) Man bestimme die Hauptteile für alle $s \in S$.

(ii) Man untersuche $\sum_{s\in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls Polynome q_s ($s \in S$) (durch Abbruch der entsprechenden Taylor-Reihe), sodass $\sum_{s\in S}(p_s(\frac{1}{z-s}) - q_s(z))$ auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

(iii) Man bestimme eine ganze Funktion g, so dass

$$f(z) = \sum_{s\in S}\left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - q_s(z)\right) + g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S$$

Beispiel 1.3. (i) Es gilt

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

wobei die Summe rechts auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. Siehe unten. *q.e.d.*

(ii) *Partialbruchzerlegung des Kotangens*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

Beweis. Siehe unten. *q.e.d.*

Beweis. (i) Die Polstellenmenge ist offensichtlich $S = \mathbb{Z}$.

Bestimmung der Hauptteile: Sei $z \neq 0$, z nahe bei Null. Dann ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot (1 + a_2 z^2 + \dots)$$

wobei $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität dort den Wert 1 hat und eine gerade Funktion ist. Also

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots$$

Also ist der Hauptteil in $z = 0$ bereits $\frac{1}{z^2}$.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Für $z \neq n$, z nahe bei n gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} \\
&= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \\
&= \frac{1}{(z-n)^2} + 2a_2 + \dots
\end{aligned}$$

Also ist der Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$ von $z = n$ bereits $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Konvergenz der Reihe in (1.2): Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Es gelte $|z| \leqslant c$ für $z \in K$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geqslant 2c$ gilt

$$|z - n| = |n - z| \geqslant |n| - |z| \geqslant |z| - c \geqslant \frac{|n|}{2} \qquad \forall z \in K$$

Also

$$\sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{4}{|n|^2} < \infty$$

Daher ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$$

auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergent.

Folgerung: Beide Seiten von (1.2) sind auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorphe Funktionen mit den gleichen Polstellen und gleichen Hauptteilen. Daher folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

wobei g ganz ist.

Zeige $g \equiv 0$. Es gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \pi z &= \left| \frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})\overline{(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{4}(e^{-2\pi y} + e^{2\pi y}) - \frac{1}{2}\cos(2\pi x) \\
&\xrightarrow{|y| \to \infty} \infty \quad \text{gleichmäßig in } x
\end{aligned}$$

denn $\cos(2\pi x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist beschränkt. Also $\left| \frac{\pi^2}{sin^2 \pi z} \right| \to 0$ für $|y| \to \infty$ gleichmäßig in x. Insbesondere ist $\frac{\pi^2}{sin(\pi z)^2}$ beschränkt auf

$$R := \{ z = x + iy \mid |x| \leqslant 1, |y| \geqslant 1 \}$$

Zeige rechte Seite von (1.2) ebenfalls auf R beschränkt. Sei $z \in R, n \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned}
|z - n|^2 = (x - n)^2 + y^2 &= |n - x|^2 + y^2 \\
&\geqslant (|n| - |x|)^2 + y^2 \geqslant (|n| - 1)^2 + y^2 \\
&\geqslant (|n| - 1)^2 + 1
\end{aligned}$$

Also für $z \in R$ gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|z - n|^2} \leqslant 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(|n| - 1)^2 + 1} < \infty \tag{1.4}$$

Daher ist $g(z)$ auf R beschränkt. Aber $g(z + 1) = g(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Trivialerweise ist g auf $\{ z = x + iy \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1 \}$ beschränkt. Also ist g auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach Liouville ist $g \equiv c$ konstant.

Aus (1.4) folgt, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann folgt

$$\lim_{y \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{y \to \infty} \frac{1}{|z - n|^2} = 0\,,$$

da

$$\lim_{y \to \infty} \frac{1}{|z - n|^2} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{(x - n)^2 + y^2} = 0\,.$$

Und wir wissen bereits, dass $\frac{\pi^2}{sin^2 \pi z} \to 0$ für $|y| \to \infty$. Also muss bereits gelten $c = 0$. *q.e.d.*

(ii) Vorgehen wie in (i): Man sieht $S = \mathbb{Z}$ und der Hauptteil in $z = n \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{z-n}$. Da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ schlechte Konvergenzeigenschaften hat, muss man Polynome abziehen. Beachte für $n \neq 0$ ist $\frac{1}{z-n}|_{z=0} = -\frac{1}{n}$. Damit folgt dann die Behauptung.

Alternativ kann man (i) + Trick benutzen: Differenziere beide Seiten von (1.3):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-n)^2} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\pi\cot(\pi z)) &= \pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right) \\ &= \pi\frac{-\pi\sin(\pi z)\sin(\pi z) - \pi\cos(\pi z)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}\,.\end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ein Gebiet ist, unterscheiden sich die rechte und linke Seite (da die Ableitungen nach (i) gleich sind) nur um eine Konstante c. Zeige $c = 0$. Hierfür zeige, dass $\pi\cot(\pi z)$ und $\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ ungerade sind. Es gilt

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{-z-n} + \frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt folgt, wenn wir $n \mapsto -n$ ersetzen, was eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ auf sich selbst ist.

Es muss also gelten, dass c ungerade ist. Für eine ungerade Konstante gilt bereits $c = 0$.

q.e.d.

1.2 Unendliche Produkte

Gegeben sei eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Wir wollen nun in sinnvoller Weise das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

definieren. Ein naheliegender Vorschlag dafür ist: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ heißt konvergent, falls die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialprodukte $P_N = \prod_{n=1}^{N} p_n$ konvergent ist. In diesem Fall setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \lim_{N\to\infty} P_n =: P\,.$$

Das Problem was sich mit dieser Definition stellt ist, dass falls einer der Faktoren Null ist, so ist der Wert des Produktes gleich 0. Dieses hängt also gar nicht von der Gesamtheit der Faktoren ab. Ferner möchte man oft $\prod_{n=1}^{N} p_n$ bzw. P mit der Summe $\sum_{n=1}^{N} \log p_n$ bzw. mit $\log P$ vergleichen. Und das geht nur falls $p_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und entsprechend $P \neq 0$. Später wollen wir allerdings holomorphe Funktionen als Produkte darstellen, dies sollte auch möglich sein, wenn diese Nullstellen haben.

Definition 1.4 (Unendliches Produkt). Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass nur endlich viele der p_n Null sind. Sei $m \in \mathbb{N}$ der größte Index mit $p_m = 0$ (und $m := 0$, falls $p_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Dann heißt das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

konvergent, falls der Limes

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\geqslant m+1}} P_n \text{ mit } P_N = \prod_{n=m+1}^{N} p_n$$

existiert und ungleich Null ist. Man setzt dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} P_n & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei ist zu beachten, dass nach Definition ein konvergentes unendliches Produkt den Wert 0 genau dann hat, wenn ein Faktor gleich Null ist.

Beispiel 1.5. (i) Das unendliche Produkt $\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat den Wert $\frac{1}{2}$.

Beweis. Zunächst sind alle Faktoren ungleich Null und

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot(N-1))\ \cdot\ (3\cdot 4\cdot\ \dots\ \cdot(N+1)}{(2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot N)\ \cdot\ (2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot N)} \\ &= \frac{1}{N}\frac{N+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right) \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

q.e.d.

(ii) $\prod_{n\geqslant 1}(1-\frac{1}{n^2}) = 0\cdot\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat Wert 0

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist nicht konvergent in unserem Sinn. Denn

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N\to\infty} 0\,.$$

Satz 1.6. *Für eine unendliche Reihe* $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *gilt:*

(i) Ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *konvergent, so gilt notwendigerweise* $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

(ii) Sei $p_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ *konvergent genau dann, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$$

konvergiert. (Erinnerung $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$ *der Hauptwert des Logarithmus und* $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ *das Argument von* z.*) Insbesondere ist* $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$, *so existiert* $h \in \mathbb{Z}$ *so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$$

gilt. Ist umgekehrt $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$, *so gilt*

$$e^S = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

Beweis. (i) Es ist

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{P}{P} = 1\,.$$

für $N \geqslant m+1$, hierbei benutzt man $p_n \neq 0$ für $n \geqslant m+1$ und $P \neq 0$.

(ii) Es gelte

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n\,.$$

Also $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ mit $S_n = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n$. Da exp stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 \neq e^S &= \lim_{N\to\infty} e^{S_n} = \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1 + \ldots + \log p_n} \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1} \cdot \ldots \cdot e^{\log p_n} = \lim_{N\to\infty} (p_1 \cdot \ldots \cdot p_N) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n = P\,. \end{aligned}$$

Gelte nun andererseits $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$.

Aus $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ folgt

$$\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Sei

$$\varepsilon_N := \operatorname{Log}\left(\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P}\right)$$

Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Log} z$ in $z = 1$ und $\operatorname{Log} 1 = 0$ folgt

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = \operatorname{Log} 1 = 0$$

Wir wollen nun zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $h_N \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_N \tag{1.5}$$

Zunächst gilt offensichtlich $\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{P}$. Nach den Additionstheoremen und wegen $\exp \operatorname{Log} z = z$ gilt außerdem

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P\right) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{P}$$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$ folgt aus $\exp z = \exp z'$ stets, dass $z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Damit folgt dann (1.5).

Es gilt

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = \operatorname{Log} p_{N+1} + \varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

da alle Einzelterme der rechten Seite gegen 0 gehen. Da $h_{N+1}, h_N \in \mathbb{Z}$ folgt $(h_{N+1} - h_N)_{N\geqslant 1}$ ist konstant für große N, also $h_{N+1} = h_N$ für alle großen N, d. h. $h_n = h$ für N groß.

Nun gilt wegen (1.5) und $\lim \varepsilon_N = 0$, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n \xrightarrow{N\to\infty} \operatorname{Log} P - 2\pi i h\,.$$

q.e.d.

Notation 1.7. Man schreibt oft $p_n = 1 + a_n$. Dann lautet die notwendige Konvergenzbedingung aus dem Satz, dass $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Satz 1.8. *Es gilt folgender Zusammenhang*

(i) Sei $1 + a_n \neq 0$ für $n \geqslant 1$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$$

genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(ii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergent. Außerdem ist das Produkt unbedingt konvergent, d. h. jede Umordnung konvergiert und hat den gleichen Limes.

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+h) - \operatorname{Log} 1}{h} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Log} z \bigg|_{z=1} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=1} = 1\,.\end{aligned}$$

Daher auch

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h}\right| = 1\,.$$

Falls (Fall 1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ oder (Fall 2) $\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Log}(1 + a_n)|$ konvergent ist, so folgt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Denn* für Fall 1 ist dies gerade die notwendige Konvergenz-Bedingung. Und für Fall 2 lautet die entsprechende Bedingung $\operatorname{Log}(1 + a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da exp stetig ist, folgt

$$1 + a_n = e^{\operatorname{Log}(1+a_n)} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1\,.$$

Also $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Damit folgt, für $\varepsilon > 0$, gilt für alle a_n mit n groß genug, dass

$$(1-\varepsilon)|a_n| \leqslant |\mathrm{Log}(1+a_n)| \leqslant (1+\varepsilon)|a_n|$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Majoranten-Kriterium.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent, dann gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $|a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$. Dann $1 + a_n \neq 0$ für alle $n > N$, also folgt die Konvergenz von $\prod_{k=N+1}^{\infty}(1+a_n)$ aus (i) und Satz 1.6 (ii). Also ist insbesondere $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergent.

Die unbedingte Konvergenz von $\prod_{n\geqslant N+1}(1+a_n)$ (also auch von $\prod_{n\geqslant 1}(1+a_n)$) folgt wegen (Satz 1.6 (ii)):

$$\sum|\mathrm{Log}(1+a_n)| < \infty \iff \sum \mathrm{Log}(1+a_n) \text{ ist absolut konvergent}$$

q.e.d.

Satz 1.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ derart, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$ gleichmäßig, absolut konvergiert. Dann ist*

$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \qquad z \in D$$

ein unbedingt konvergentes Produkt und F ist eine auf D holomorphe Funktion. Insbesondere gilt $F(z) = 0$ genau dann wenn $1 + f_n(z) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Unbedingte Konvergenz des Produktes folgt aus Satz 1.8 (ii) mit $a_n = f_n(z)$ für $z \in D$.

Es verbleibt zu zeigen, dass F holomorph auf D ist.

Sei $U \subseteq D$ offen mit $\overline{U} \subseteq D$ kompakt. Es genügt Holomorphie von F für beliebiges solches U zu zeigen. Da U kompakt ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf $\overline{U}$ (also auch auf U) absolut gleichmäßig konvergent. Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig gegen Null.

Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $n > m$ für $z \in U$ gilt

$$|f_n(z)| < 1 \tag{1.6}$$

Also (siehe Beweis von Satz 1.8 (i) mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$|\mathrm{Log}(1+f_n(z))| \leqslant \frac{3}{2}|f_n(z)|$$

Die Reihe $\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)$ ist auf U gleichmäßig absolut konvergent, nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz und wegen (1.6) ist daher

$$S_m(z) := \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathrm{Log}(1+f_n(z))$$

auf U gleichmäßig konvergent.

Nach dem Satz von Weierstraß (FT 1) folgt, dass $S_m(z)$ auf U holomorph ist. Also ist $e^{S_m(z)} = \prod_{n=m+1}^{\infty}(1+f_n(z))$ auf U holomorph (siehe Beweis von Satz 1.6 (ii)). Damit ist

$$F(z) = (1+f_1(z)) \cdot \ldots \cdot (1+f_m(z)) \prod_{n=m+1}^{\infty} (1+f_n(z))$$

auf U holomorph. *q.e.d.*

Erinnerung. Ist $h\colon U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, h nicht identisch Null, $h(z) = (z-z_0)^m g(z)$ mit $m > 0$ und $g(z_0) \neq 0$, so nnent man $\operatorname{ord}_{z=z_0} h = m$ die Ordnung von z_0 bezüglich h.

Problem: Gegeben $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Zu jedem $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben.

Frage: Gibt es eine ganze Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, dass (i) $h(z) = 0$ genau dann, wenn $z \in S$ und (ii) $\operatorname{ord}_{z=s} h = m_s$ für alle $s \in S$.

Man nennt $\{\, (s, m_s) \mid s \in S \,\}$ eine Nullstellenverteilung. Und eine Funktion h wie oben heißt Lösung der Nullstellenverteilung.

Antwort: Ja! Solche h kann man mit Hilfe von Weierstrass-Produkten konstruieren!

Satz 1.10 (Weierstrass'scher Produktsatz). *(i) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret und für jedes $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann hat die Nullstellenverteilung $\{\, (s, m_s) \mid s \in S \,\}$ eine Lösung h. Alle Lösungen erhält man als $H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)}$ wobei h eine gegebene Lösung und g ganz ist.*

(ii) Sei f ganz und nicht identisch Null, $S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0 \,\} \subseteq \mathbb{C}$ (Beachte S ist diskret). Dann gibt es zu jedem $s \in S$ ein Polynom P_s und eine ganze Funktion g, so dass gilt

$$f(z) = \begin{cases} \prod\limits_{s \in S} \left(1 - \dfrac{z}{s}\right)^{m_s} e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \notin S \\ z^{m_0} \cdot \prod\limits_{\substack{s \in S \\ s \neq 0}} \left(1 - \dfrac{z}{s}\right)^{m_s} e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \in S \end{cases}$$

wobei die Produkte rechts auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}$ unbedingt konvergent sind.

Liste der Sätze

Index