Funktionentheorie II

im Wintersemster 2017 / 18
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

Vorlesungsmitschrieb von
Jonas Müller
Heidelberg, den 22. November 2017

Vorwort

Dies ist ein nicht offizielles Skript der Vorlesung Funktionentheorie 2 aus dem Wintersemester 2017 / 18 gehalten von Professor Winfried Kohnen an der Universität Heidelberg. Das Skript wurde von mir in der Vorlesung mitgetext und mit pdflatex kompiliert. Deshalb kann es Fehler enthalten und ich übernehme keine Garantie für Richtigkeit.
Bei Fehlern, kannst du mir gerne unter folgender Mailadresse schreiben:

jj@mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Die aktuellste Version des Skriptes befindet sich immer unter

https://github.com/jenuk/funktheo2/blob/master/script.pdf

Die LaTeX-Source Dateien findet man hier, Fehler kannst du alternativ hier auch als neues Issue öffnen:

https://github.com/jenuk/funktheo2/tree/master

Inhaltsverzeichnis

0 Wiederholung

Definition 0.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt HOLOMORPH, falls f in jedem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist, d. h.

$$f'(z_0) = \lim_{h \to \infty} \frac{f(z_o + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert.

Satz 0.2 (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

(i) f hat auf D eine Stammfunktion.

(ii) $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve $C \subseteq D$.

Satz 0.3 (Cauchysche Integralformel). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w\,,$$

wobei C gegeben ist durch $z_0 + re^{2\pi it}$ für $t \in [0, 1]$.

Daraus folgen einige Aussagen:

- $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty$.
- *Satz von Taylor*: $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

- f ist genau dann auf D holomorph, wenn f auf D analytisch ist ist.
- Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen
  - Identitätssatz
  - Satz von der Gebietstreue
  - Maximumsprinzip

Definition 0.4 (Singularitäten). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, $a \notin D$, $\dot{U}_r(a) \subseteq D$. Dann heißt a eine SINGULARITÄT von f. Die Klassifikationen einer Singularität sind

- a ist *hebbar* (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
- a ist ein *Pol* ($\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = \infty$ wobei $z \neq a$ gelten muss)
- a ist wesentlich (Casorati-Weierstraß)

Satz 0.5 (Laurentzerlegung). *Sei $\mathcal{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R \}$ ein Ringgebiet mit $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung*

$$f(z) = g(z-a) + h\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad z \in \mathcal{R}\,,$$

wobei $g\colon U_R(0) \to \mathbb{C}$ der Nebenteil *und $h\colon U_{r^{-1}}(0) \to \mathbb{C}$ der* Hauptteil *holomorph mit $h(0) = 0$.*

Anwendung auf Singularitäten: $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph und a eine Singularität von f. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subseteq D$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad z \in \dot{U}_\delta(a)$$

→ a ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n \leqslant -1$.

→ a ist genau dann ein Pol der Ordnung $m \geqslant 1$, wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$.

→ a ist genau dann wesentlich, wenn es unendlich viele $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$.

Satz 0.6 (Residuensatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $z_1, \dots, z_k \in D$*

$$f\colon D \setminus \{ z_1, \dots, z_k \} \to \mathbb{C}$$

holomorph und C eine glatte geschlossene Kurve in $D \setminus \{ z_1, \dots, z_k \}$. Dann gilt

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=z_j} f \cdot \mathcal{X}(C, z_j)\,,$$

wobei $\operatorname*{res}\limits_{z=z_j} f$ das Residuum von f ist und $\mathcal{X}(C, z_j)$ die Umlaufzahl von C um z_j ist.

1 Konstruktion meromorpher und holomorpher Funktionen

1.1 Partialbruchzerlegung

Satz 1.1 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien p, q zwei Polynome über $\mathbb{C}$, $q \not\equiv 0$ und $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $g(q) \neq 0$ die zugehörige rationale Funktion. Seien $z_1, \ldots, z_k$ die verschiedenen Polstellen mit den Ordnungen $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $p_1(z), \ldots, p_k(z)$ mit $p_r(0) = 0$ $(r = 1, \ldots, k)$ und ein eindeutig bestimmtes Polynom p_0, so dass gilt*

$$R(z) = \sum_{r=0}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) + p_0(z) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{ z_1, \ldots, z_k \} .$$

Außerdem gilt $\operatorname{grad} p_r = \mu_r$ *für* $r = 1, \ldots, k$.

Beweis. Für jedes $r = 1, \ldots, k$ sei p_r der Hauptteil der Laurententwicklung von R bezüglich der Polstelle z_r. Dann ist p_r ein Polynom vom Grad μ_r. Sei

$$p_0(z) := R(z) - \sum_{r=1}^{k} p_r\left(\frac{1}{z - z_r}\right) .$$

Dann hat p_0 keinen Hauptteil mehr, d. h. p_0 hat in $z_1, \ldots, z_k$ hebbare Singularitäten, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Aber p_0 ist nach Konstruktion eine rationale Funktion. Also ist p_0 ein Polynom.

Das heißt es existieren $p_0, \ldots, p_k$ wie behauptet, es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei eine weitere Darstellung wie oben gegeben durch $\widetilde{p}_0, \ldots, \widetilde{p}_h$. Sei $\nu \in \{ 1, \ldots, k \}$. Dann gilt

$$R(z) = \widetilde{p}_\nu\left(\frac{1}{1 - z_\nu}\right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq\nu}}^{h} \widetilde{p}_r\left(\frac{1}{1 - z_r}\right) + \widetilde{p}_0(z) \tag{1.1}$$

$$= p_\nu\left(\frac{1}{1 - z_\nu}\right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq\nu}}^{h} p_r\left(\frac{1}{1 - z_r}\right) + p_0(z) .$$

Die ersten Summanden sind in einer kleinen punktierten Umgebungen von z_ν holomorph, der Rest in der gesamten Umgebung. Also ist (1.1) die Laurentzerlegung von

R bezüglich z_ν. Da die Laurententwicklung eindeutig ist, folgt $p_\nu = \widetilde{p}_\nu$. Da dies für alle $\nu \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, folgt bereits $p_0 = \widetilde{p}_0$. *q.e.d.*

Ziel: Man beweise einen ähnlichen Satz für beliebige meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ wird gegeben durch eine holomorphe Abbildung $f\colon \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, wobei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret ist, d. h. S hat in $\mathbb{C}$ keinen Häufungspunkt (insbesondere ist $\mathbb{C} \setminus S$ offen), und die Punkte aus S sind Pole von f.

Problem: Ist S unendlich, so ist die Summe über die Hauptteile $\sum_{s \in S} p_s(\frac{1}{z-s})$ im Allgemeinen nicht mehr konvergent.

Lösung: Man addiere konvergenz erzeugende Summanden!

Satz 1.2 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler). *(i) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Jedem $s \in S$ sei eine ganze Funktion $h_s\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h_s(0) = 0$ zugeordnet. (Man nennt $\{h_s\}_{s \in S}$ eine* HAUPTTEILVERTEILUNG*.) Dann gibt es eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$, deren Hauptteil in $s \in S$ durch $h_s(\frac{1}{z-s})$ gegeben wird. (Man nennt h eine Lösung der Hauptteilverteilung.) Ist H eine weitere Lösung, so existiert eine ganze Funktion g mit $H = h + g$.*

(ii) Sei f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einer Polstellenmenge S und Hauptteilen p_s $(s \in S)$. (Beachte: p_s ist ein Polynom mit $p_s(0) = 0$.) Dann existieren Polynome q_s $(s \in S)$ und eine ganze Funktion g, sodass gilt

$$f(z) = \sum_{s \in S} \left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - q_s(z) \right) + g(z)$$

wobei die Summe in der Klammer auf kompakten Teilmengen $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ absolut gleichmäßig konvergiert.

Beweis. (i) Ist S endlich, so ist $h(z) = \sum_{s \in S} h_s(\frac{1}{z-s})$ eine Lösung (siehe Beweis von Satz 1.1).

Sei nun S unendlich. Zeige dafür zunächst, dass S abzählbar ist. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, dann ist $K \cap S$ beschränkt.

Angenommen $K \cap S$ ist unendlich. Nach Bolzano-Weierstraß hat dann $K \cap S$, also auch S, einen Häufungspunkt. ↯

Also ist $S \cap K$ endlich. Da $\mathbb{C} = \bigcup_{n \geqslant 1} \overline{U_n(0)}$ und $\overline{U_n(0)}$ kompakt, ist S abzählbar.

Sei $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ eine Abzählung derart, dass

$$|s_0| \leqslant |s_1| \leqslant \ldots \leqslant |s_n| \leqslant \ldots \to \infty$$

(Beachte: falls $0 \in S$, dann $s_0 = 0$, ferner $|s_n| > 0$ für $n \geqslant 1$.) Schreibe $h_n := h_{s_n}$ für $n \geqslant 0$.

Sei nun $n \geqslant 1$ fest. Dann ist die auf der offenen nichtleeren Kreisschreibe $U_{|s_n|}(0)$ holomorphe Funktion $h_n(\frac{1}{z-s_n})$ um den Ursprung in eine Potenzreihe entwickelbar (Taylor), welche auf kompakten Teilmengen gleichmäßig absolut

konvergiert. Nach Definition der Konvergenz existiert daher ein Polynom $q_n(z)$ sodass
$$\left|h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)-q_n(z)\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall z\in\mathbb{C}\colon |z|\leqslant\frac{|s_n|}{2}$$
Sei $K\subseteq\mathbb{C}$ kompakt. Dann existiert $N\in\mathbb{N}$ sodass für $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geqslant N$ und $z\in K$ gilt $|z|\leqslant\frac{|s_n|}{2}$ (denn $|s_n|\to\infty$). Es folgt dass die Reihe
$$h(z):=h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right)+\sum_{n\geqslant 1}\left(h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right)-q_n(z)\right)$$
auf Kompakta $K\subseteq\mathbb{C}\setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert, denn $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}<\infty$. Nach Weierstraß ist daher $h(z)$ auf $\mathbb{C}\setminus S$ holomorph. Schreibt man $h(z) = h_m(\frac{1}{z-s_m})+\text{Rest}$ ($m\geqslant 0$ fest), so folgt, dass $h(z)$ eine Lösung der Hauptteilverteilung ist.

Sei H eine weitere Lösung. Dann haben h und H dieselbe Postellenmenge S und die gleichen Hauptteile für $s\in S$. Daraus folgt $g(z):=H(z)-h(z)$ hat in allen Punkten $s\in S$ hebbare Singularitäten, ist also ganz.

(ii) Sei $\{\,p_s\,\}_{s\in S}$ die angegebene Hauptteilverteilung. Dieser hat als Lösung per Definition f. Ferner existiert die im Beweis von (i) konstruierte Lösung. Nach der Eindeutigkeit stimmen daher beide Lösung bis auf eine ganze Funktion g überein.

q.e.d.

Praktische Anwendung von Satz 1.2 Gegeben sei eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit Polstellenmenge S.

(i) Man bestimme die Hauptteile für alle $s\in S$.

(ii) Man untersuche $\sum_{s\in S}p_s(\frac{1}{z-s})$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls Polynome q_s ($s\in S$) (durch Abbruch der entsprechenden Taylor-Reihe), sodass $\sum_{s\in S}(p_s(\frac{1}{z-s})-q_s(z))$ auf Kompakta $K\subseteq\mathbb{C}\setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

(iii) Man bestimme eine ganze Funktion g, so dass
$$f(z)=\sum_{s\in S}\left(p_s\left(\frac{1}{z-s}\right)-q_s(z)\right)+g(z) \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus S$$

Beispiel 1.3.

(i) Es gilt
$$\frac{\pi^2}{(\sin\pi z)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{für } z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \tag{1.2}$$
wobei die Summe rechts auf Kompakta $K\subseteq\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. Siehe unten. *q.e.d.*

(ii) PARTIALBRUCHZERLEGUNG DES KOTANGENS

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \tag{1.3}$$

Beweis. Siehe unten. *q.e.d.*

Beweis. (i) Die Polstellenmenge ist offensichtlich $S = \mathbb{Z}$.

Bestimmung der Hauptteile: Sei $z \neq 0$, z nahe bei Null. Dann ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot (1 + a_2 z^2 + \dots)$$

wobei $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ in $z = 0$ eine hebbare Singularität dort den Wert 1 hat und eine gerade Funktion ist. Also

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots$$

Also ist der Hauptteil in $z = 0$ bereits $\frac{1}{z^2}$.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ fest. Für $z \neq n$, z nahe bei n gilt

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} \\ &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \\ &= \frac{1}{(z-n)^2} + 2a_2 + \dots \end{aligned}$$

Also ist der Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$ von $z = n$ bereits $\frac{1}{(z-n)^2}$.

Konvergenz der Reihe in (1.2): Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Es gelte $|z| \leqslant c$ für $z \in K$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geqslant 2c$ gilt

$$|z - n| = |n - z| \geqslant |n| - |z| \geqslant |z| - c \geqslant \frac{|n|}{2} \qquad \forall z \in K$$

Also

$$\sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \sum_{|n| \geqslant 2c} \frac{4}{|n|^2} < \infty$$

Daher ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$$

auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergent.

Folgerung: Beide Seiten von (1.2) sind auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ holomorphe Funktionen mit den gleichen Polstellen und gleichen Hauptteilen. Daher folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

wobei g ganz ist.

Zeige $g \equiv 0$. Es gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\sin^2 \pi z &= \left| \frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})\overline{(e^{\pi i z} - e^{-\pi i z})} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{4}(e^{-2\pi y} + e^{2\pi y}) - \frac{1}{2}\cos(2\pi x) \\
&\xrightarrow{|y|\to\infty} \infty \quad \text{gleichmäßig in } x
\end{aligned}$$

denn $\cos(2\pi x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist beschränkt. Also $\left|\frac{\pi^2}{sin^2 \pi z}\right| \to 0$ für $|y| \to \infty$ gleichmäßig in x. Insbesondere ist $\frac{\pi^2}{sin(\pi z)^2}$ beschränkt auf

$$R := \{\, z = x + iy \mid |x| \leqslant 1, |y| \geqslant 1 \,\}$$

Zeige rechte Seite von (1.2) ebenfalls auf R beschränkt. Sei $z \in R, n \neq 0$. Dann

$$\begin{aligned}
|z-n|^2 &= (x-n)^2 + y^2 = |n-x|^2 + y^2 \\
&\geqslant (|n| - |x|)^2 + y^2 \geqslant (|n|-1)^2 + y^2 \\
&\geqslant (|n|-1)^2 + 1
\end{aligned}$$

Also für $z \in R$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(|n|-1)^2 + 1} < \infty \tag{1.4}$$

Daher ist $g(z)$ auf R beschränkt. Aber $g(z+1) = g(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Trivialerweise ist g auf $\{\, z = x + iy \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1 \,\}$ beschränkt. Also ist g auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach Liouville ist $g \equiv c$ konstant.

Aus (1.4) folgt, dass $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann folgt

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = 0\,,$$

da

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} = 0\,.$$

Und wir wissen bereits, dass $\frac{\pi^2}{sin^2\pi z} \to 0$ für $|y| \to \infty$. Also muss bereits gelten $c = 0$. *q.e.d.*

(ii) Vorgehen wie in (i): Man sieht $S = \mathbb{Z}$ und der Hauptteil in $z = n \in \mathbb{Z}$ ist $\frac{1}{z-n}$. Da $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$ schlechte Konvergenzeigenschaften hat, muss man Polynome abziehen. Beachte für $n \neq 0$ ist $\frac{1}{z-n}|_{z=0} = -\frac{1}{n}$. Damit folgt dann die Behauptung.

Alternativ kann man (i) + Trick benutzen: Differenziere beide Seiten von (1.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-n)^2} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\pi\cot(\pi z)\right) &= \pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right) \\
&= \pi \frac{-\pi\sin(\pi z)\sin(\pi z) - \pi\cos(\pi z)\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}\,.
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ ein Gebiet ist, unterscheiden sich die rechte und linke Seite (da die Ableitungen nach (i) gleich sind) nur um eine Konstante c. Zeige $c = 0$. Hierfür zeige, dass $\pi\cot(\pi z)$ und $\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ ungerade sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{-z-n}+\frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= -\left(\frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt folgt, wenn wir $n\mapsto -n$ ersetzen, was eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ auf sich selbst ist.

Es muss also gelten, dass c ungerade ist. Für eine ungerade Konstante gilt bereits $c=0$.

q.e.d.

1.2 Unendliche Produkte

Gegeben sei eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Wir wollen nun in sinnvoller Weise das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

definieren. Ein naheliegender Vorschlag dafür ist: $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ heißt konvergent, falls die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialprodukte $P_N=\prod_{n=1}^{N} p_n$ konvergent ist. In diesem Fall setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \lim_{N\to\infty} P_n =: P\,.$$

Das Problem was sich mit dieser Definition stellt ist, dass falls einer der Faktoren Null ist, so ist der Wert des Produktes gleich 0. Dieses hängt also gar nicht von der Gesamtheit der Faktoren ab. Ferner möchte man oft $\prod_{n=1}^{N} p_n$ bzw. P mit der Summe $\sum_{n=1}^{N}\log p_n$ bzw. mit $\log P$ vergleichen. Und das geht nur falls $p_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und entsprechend $P\neq 0$. Später wollen wir allerdings holomorphe Funktionen als Produkte darstellen, dies sollte auch möglich sein, wenn diese Nullstellen haben.

Definition 1.4 (Unendliches Produkt). Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ derart, dass nur endlich viele der p_n Null sind. Sei $m\in\mathbb{N}$ der größte Index mit $p_m=0$ (und $m:=0$, falls $p_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$). Dann heißt das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

konvergent, falls der Limes

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant m+1}} P_n \text{ mit } P_N=\prod_{n=m+1}^{N} p_n$$

existiert und ungleich Null ist. Man setzt dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \begin{cases} \lim\limits_{N\to\infty} P_n & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dabei ist zu beachten, dass nach Definition ein konvergentes unendliches Produkt den Wert 0 genau dann hat, wenn ein Faktor gleich Null ist.

Beispiel 1.5. (i) Das unendliche Produkt $\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat den Wert $\frac{1}{2}$.

Beweis. Zunächst sind alle Faktoren ungleich Null und

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(N-1))\ \cdot\ (3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot(N+1)}{(2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot N)\ \cdot\ (2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot N)} \\ &= \frac{1}{N}\frac{N+1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{N}\right) \\ &\xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

q.e.d.

(ii) $\prod_{n\geqslant 1}(1-\frac{1}{n^2}) = 0\cdot\prod_{n\geqslant 2}(1-\frac{1}{n^2})$ ist konvergent und hat Wert 0

(iii) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist nicht konvergent in unserem Sinn. Denn

$$P_N = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N\to\infty} 0\,.$$

Satz 1.6. *Für eine unendliche Reihe $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ gilt:*

(i) Ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent, so gilt notwendigerweise $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

(ii) Sei $p_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergent genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$$

konvergiert. (Erinnerung $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z$ der Hauptwert des Logarithmus und $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ das Argument von z.) Insbesondere ist $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$, so *existiert $h \in \mathbb{Z}$ so dass*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$$

gilt. Ist umgekehrt $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$, so gilt

$$e^S = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

Beweis. (i) Es ist

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{P}{P} = 1\,.$$

für $N \geqslant m+1$, hierbei benutzt man $p_n \neq 0$ für $n \geqslant m+1$ und $P \neq 0$.

(ii) Es gelte

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n\,.$$

Also $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$ mit $S_n = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n$. Da exp stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 \neq e^S &= \lim_{N\to\infty} e^{S_n} = \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1 + \ldots + \log p_n} \\ &= \lim_{N\to\infty} e^{\log p_1} \cdot \ldots \cdot e^{\log p_n} = \lim_{N\to\infty} (p_1 \cdot \ldots \cdot p_N) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} p_n = P\,. \end{aligned}$$

Gelte nun andererseits $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$.

Aus $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ folgt

$$\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Sei

$$\varepsilon_N := \operatorname{Log}\left(\frac{\prod_{n=1}^{N} p_n}{P}\right)$$

Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{Log} z$ in $z = 1$ und $\operatorname{Log} 1 = 0$ folgt

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = \operatorname{Log} 1 = 0$$

Wir wollen nun zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $h_N \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_N \tag{1.5}$$

Zunächst gilt offensichtlich $\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{P}$. Nach den Additionstheoremen und wegen $\exp \operatorname{Log} z = z$ gilt außerdem

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P\right) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{P}$$

Für $z, z' \in \mathbb{C}$ folgt aus $\exp z = \exp z'$ stets, dass $z - z' \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Damit folgt dann (1.5).

Es gilt

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = \operatorname{Log} p_{N+1} + \varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

da alle Einzelterme der rechten Seite gegen 0 gehen. Da $h_{N+1}, h_N \in \mathbb{Z}$ folgt $(h_{N+1} - h_N)_{N\geqslant 1}$ ist konstant für große N, also $h_{N+1} = h_N$ für alle großen N, d. h. $h_n = h$ für N groß.

Nun gilt wegen (1.5) und $\lim \varepsilon_N = 0$, dass

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Log} p_n \xrightarrow{N\to\infty} \operatorname{Log} P - 2\pi i h\,.$$

q.e.d.

Notation 1.7. Man schreibt oft $p_n = 1 + a_n$. Dann lautet die notwendige Konvergenzbedingung aus dem Satz, dass $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Satz 1.8. *Es gilt folgender Zusammenhang*

(i) Sei $1 + a_n \neq 0$ für $n \geqslant 1$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$$

genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

(ii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Dann ist $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergent. Außerdem ist das Produkt unbedingt konvergent, d. h. jede Umordnung konvergiert und hat den gleichen Limes.

Beweis. (i) Es gilt

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log} 1}{z}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{Log} z \bigg|_{z=1} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=1} = 1\,. \tag{1.6}$$

Daher auch
$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{\operatorname{Log}(1+h)}{h}\right| = 1\,.$$
Falls (Fall 1) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ oder (Fall 2) $\sum_{n=1}^{\infty}|\operatorname{Log}(1+a_n)|$ konvergent ist, so folgt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. *Denn* für Fall 1 ist dies gerade die notwendige Konvergenz-Bedingung. Und für Fall 2 lautet die entsprechende Bedingung $\operatorname{Log}(1+a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da exp stetig ist, folgt
$$1 + a_n = e^{\operatorname{Log}(1+a_n)} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1\,.$$
Also $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Damit folgt wegen (1.6) für alle a_n, mit n groß genug und für $\varepsilon > 0$ beliebig, dass
$$(1-\varepsilon)|a_n| \leqslant |\operatorname{Log}(1+a_n)| \leqslant (1+\varepsilon)|a_n|\,.$$

Die Aussage des Satzes folgt jetzt aus dem Majoranten-Kriterium.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent, dann gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $|a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$. Dann $1 + a_n \neq 0$ für alle $n > N$, also folgt die Konvergenz von $\prod_{k=N+1}^{\infty}(1+a_n)$ aus (i) und Satz 1.6 (ii). Also ist insbesondere $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergent.

Die unbedingte Konvergenz von $\prod_{n\geqslant N+1}(1+a_n)$ (also auch von $\prod_{n\geqslant 1}(1+a_n)$) folgt wegen (Satz 1.6 (ii)):
$$\sum|\operatorname{Log}(1+a_n)| < \infty \iff \sum \operatorname{Log}(1+a_n) \text{ ist unbedingt konvergent}$$

q.e.d.

Satz 1.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ derart, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf jedem Kompaktum $K \subseteq D$ gleichmäßig, absolut konvergiert. Dann ist*
$$F(z) := \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \qquad z \in D$$
ein unbedingt konvergentes Produkt und F ist eine auf D holomorphe Funktion. Insbesondere gilt $F(z) = 0$ genau dann wenn $1 + f_n(z) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Unbedingte Konvergenz des Produktes folgt aus Satz 1.8 (ii) mit $a_n = f_n(z)$ für $z \in D$.

Es verbleibt zu zeigen, dass F holomorph auf D ist.

Sei $U \subseteq D$ offen mit $\overline{U} \subseteq D$ kompakt. Es genügt Holomorphie von F für beliebiges solches U zu zeigen. Da $\overline{U}$ kompakt ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ auf $\overline{U}$ (also auch auf U) absolut gleichmäßig konvergent. Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz konvergiert daher $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig gegen Null.

Es gibt also ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für $n > m$ für $z \in U$ gilt
$$|f_n(z)| < 1 \tag{1.7}$$

Also (siehe Beweis von Satz 1.8 (i) mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$|\mathrm{Log}(1 + f_n(z))| \leqslant \frac{3}{2}|f_n(z)|$$

Die Reihe $\sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(z)$ ist auf U gleichmäßig absolut konvergent, nach dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz und wegen (1.7) ist daher

$$S_m(z) := \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathrm{Log}(1 + f_n(z))$$

auf U gleichmäßig konvergent.

Nach dem Satz von Weierstraß (FT 1) folgt, dass $S_m(z)$ auf U holomorph ist. Also ist $e^{S_m(z)} = \prod_{n=m+1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ auf U holomorph (siehe Beweis von Satz 1.6 (ii)). Damit ist

$$F(z) = (1 + f_1(z)) \cdot \ldots \cdot (1 + f_m(z)) \prod_{n=m+1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

auf U holomorph. *q.e.d.*

Erinnerung. Ist $h\colon U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, h nicht identisch Null, $h(z) = (z - z_0)^m g(z)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $g(z_0) \neq 0$, so nennt man $\mathrm{ord}_{z=z_0} h = m$ die Ordnung von z_0 bezüglich h.

Problem: Gegeben $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret. Zu jedem $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben.
Frage: Gibt es eine ganze Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derart, dass (i) $h(z) = 0$ genau dann, wenn $z \in S$ und (ii) $\mathrm{ord}_{z=s} h = m_s$ für alle $s \in S$.

Man nennt $\{\, (s, m_s) \mid s \in S \,\}$ eine Nullstellenverteilung. Und eine Funktion h wie oben heißt Lösung der Nullstellenverteilung.

Antwort: Ja! Solche h kann man mit Hilfe von Weierstraß-Produkten konstruieren!

Satz 1.10 (Weierstrass'scher Produktsatz). *(i) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ diskret und für jedes $s \in S$ sei ein $m_s \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann hat die Nullstellenverteilung $\{\, (s, m_s) \mid s \in S \,\}$ eine Lösung h. Alle Lösungen erhält man als $H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)}$ wobei h eine gegebene Lösung und g ganz ist.*

(ii) Sei f ganz und nicht identisch Null, $S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0 \,\} \subseteq \mathbb{C}$ (Beachte S ist diskret). Für $s \in S$ sei $m_s := \mathrm{ord}_{z=s} f(z)$. Dann gibt es zu jedem $s \in S$ ein Polynom P_s und eine ganze Funktion g, so dass gilt

$$f(z) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{s \in S} \left(1 - \frac{z}{s}\right)^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \notin S \\ \displaystyle z^{m_0} \cdot \prod_{\substack{s \in S \\ s \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{s}\right)^{m_s} \cdot e^{P_s(z)} \cdot e^{g(z)} & 0 \in S \end{cases}$$

wobei die Produkte rechts Weierstrass-Produkte *genannt werden, diese sind auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}$ unbedingt konvergent.*

Beweis. (i) Falls S endlich ist, so ist das Produkt $\prod_{s\in S}(z-s)^{m_s}$ eine Lösung. Sei S nun unendlich. Wir können außerdem annehmen, dass $0 \notin S$, denn eine Nullstelle in $z = 0$ der Ordnung m_0 kann man immer durch Multiplikation mit z^{m_0} erzeugen.

Sei $s_1, \ s_2, \ \ldots, s_n, \ \ldots$ nun eine Abzählung von S mit

$$0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots \to \infty\,,$$

und sei $m_n := m_{s_n}$.

Da die holomorphe Funktion $(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n}$ auf dem Elementargebiet $U_{|s_n|}(0)$ keine Nullstellen hat, kann man eine holomorphe Funktion $A_k \colon U_{|s_n|}(0) \to \mathbb{C}$ finden (nach Funktionentheorie 1), so dass

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} = e^{-A_n(z)} \qquad \text{für } |z| < |s_n|$$

Es ist $e^{-A_n(0)} = 1$, also $A_n(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Also kann durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ erreicht werden, dass $A_n(0) = 0$. Die Potenzreihenentwicklung von A_n um $z = 0$ ist auf das Kompaktum $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ absolut gleichmäßig konvergent. Also können wir durch Abbruch dieser Reihe ein Polynom P_n finden, so dass für $|z| \leqslant \frac{|s_n|}{2}$ gilt

$$\left|\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1\right| = \left|e^{P_n(z) - A_n(z)} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1\right|$$

auf Kompakta gleichmäßig, absolut konvergent. Durch anwenden von Satz 1.9 erhalten wir, dass das Produkt

$$h(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} \cdot e^{P_n(z)}$$

auf $\mathbb{C}$ unbedingt konvergiert und eine holomorphe Funktion ist. Offenbar ist h eine Lösung der Nullstellenverteilung (Beachte $(1 - \frac{z}{s_n})^{m_n} = s_n^{-m_n}(z - s_n)^{m_n}(-1)^{m_n}$).

Sei H nun eine weitere Lösung. Betrachte $\frac{H(z)}{h(z)}$ für $z \notin S$. Diese Funktion hat in allen Punkten $s \in S$ hebbare Singularitäten und ist nullstellenfrei. Da $\mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist, existiert eine ganze Funktion g mit $\frac{H(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$, also $H(z) = h(z) \cdot e^{g(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Betrachte die Nullstellenverteilung $\{\,(s, m_s) \mid s \in S\,\}$. Diese hat f nach Definition als Lösung und auch die in (i) konstruierte Lösung. Nach (i) unterscheiden sich beide Lösungen nur um einen Faktor $e^{g(z)}$ mit g ganz. Daraus folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 1.11. Die holomorphen Funktionen $A_n(z)$ für $|z| < |s_n|$ sind durch die Bedingung

$$\left(1 - \frac{z}{s_n}\right)^{m_n} = e^{-A_n(z)} \text{ und } A_n(0) = 0$$

eindeutig bestimmt.

Denn wäre $\widetilde{A}_n$ eine weitere solche Funktion, so würde gelten $e^{-\widetilde{A}_n(z)} = e^{-A_n(z)}$. Damit folgt $e^{\widetilde{A}_n(z)-A_n(z)} = 1$. Also $\widetilde{A}_n(z) - A_n(z) = 2\pi i t_z$ mit $t_z \in \mathbb{Z}$. Da $U_{|s_n|}(0)$ zusammenhängend und $\widetilde{A}_n - A_n$ stetig ist, ist $z \mapsto 2\pi i t_z$ stetig, also folgt $B := t_z$ konstant. Also gilt $\widetilde{A_n}(z) - A_n(z) = B$. Und mit $z = 0$ folgt $B = 0$.

Daher muss gelten $A_n(z) = -m_n \operatorname{Log}(1 - \frac{z}{s_n})$ für $|z| \leqslant |s_n|$. *Denn* zunächst ist $-m_n \operatorname{Log}(1 - \frac{0}{s_n}) = 0$ klar, außerdem folgt mit den Additionstheoremen

$$e^{m_n \operatorname{Log}(1-\frac{z}{s_n})} = e^{\operatorname{Log}(1-\frac{z}{s_n})} \cdot \ldots \cdot e^{\operatorname{Log}(1-\frac{z}{s_n})} = (1 - \frac{z}{s_n})^{m_n} .$$

Es ist $-\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu}$ für $|z| < 1$. Also $A_n(z) = m_n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}(\frac{z}{s_n})^\nu$ für $|z| < |s_n|$, die Polynome P_n erhält man durch Abbruch dieser Reihe.

Korollar 1.12. *Jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f ist als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellbar.*

Beweis. Sei f auf $\mathbb{C}$ meromorph, S die Polstellenmenge von f. Gelte $S \neq \emptyset$, sonst ist die Aussage klar. Für $s \in S$ sei $m_s := -\operatorname{ord}_{z=s} f(z) \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.10 existiert eine ganze Funktion h mit Nullstellen genau in den Punkten aus S und so dass die Nullstellenordnung von h in $z = s$ genau m_s ist.

Sei $g := f \cdot h$. Dann ist g ganz, denn die Nullstellen kürzen sich gegen Polstellen. Es folgt $f = \frac{g}{h}$. *q.e.d.*

Beispiel 1.13. Nullstellenverteilungen kann man beispielsweise so berechnen:

(i) Sei $S = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$, $m_s = 1$ für alle $s \in S$. Dann ist

$$h(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

eine Lösung der Nullstellenverteilung, denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2}$ ist auf Kompakta gleichmäßig, absolut konvergent.

(ii) $S = \mathbb{Z}$, $m_s = 1$ für alle $s \in S$. Die Reihe $\sum_{n\neq 0} \frac{z}{n}$ hat schlechte Konvergenzeigenschaften, man muss also konvergenzerzeugende Faktoren einbauen. Der lineare Term von A_n ist gleich $\frac{z}{n}$ mit $n \neq 0$. Betrachte also

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} &= \left(1 - \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \ldots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2 + \text{ höhere Terme}\end{aligned}$$

($formal = 1 + (\frac{z}{n})^2 B(\frac{z}{n})$, wobei $B(z) = \frac{(1-z)e^z - 1}{z^2}$, $B(0) = -\frac{1}{2}$).

Die Reihe $\sum_{n \neq 0} (\frac{z}{n})^2 B(\frac{z}{n})$ ist auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergent, *denn* gelte $|z| \leqslant c$, dann gilt $\left|\frac{z}{n}\right| \leqslant c$ und B ist als stetige Funktion auf Kompakta beschränkt, damit gilt

$$\sum_{n \neq 0} \left| \left(\frac{z}{n}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right) \right| \leqslant C \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Also ist

$$h(z) = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

eine Lösung der gegebenen Verteilung.

Beachte $h(z) = z \prod_{n \geqslant 1} (1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}} \cdot \prod_{n \leqslant 1} (1 - \frac{z}{n}) \cdot e^{\frac{z}{n}} = z \prod_{n \geqslant 1} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ da die Produkte unbedingt konvergent sind.

(iii) Es gilt

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

Denn: Beide Seiten sind Lösungen der Nullstellenverteilung $\{ (n, 1) \mid n \in \mathbb{Z} \}$. Nach Satz 1.10 existiert eine ganze Funktion g, so dass

$$e^{g(z)} \sin \pi z = \pi z \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C}$$

Beachte $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ hat in $z = 0$ eine hebbare Singularität (Taylorentwicklung) und dort den Wert 1. Schreibe

$$e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad z \in \mathbb{C} .$$

Zeige nun g konstant und $g \equiv 0$. Zweites folgt aus erstem durch auswerten in $z = 0$ aus, dann gilt $e^{g(0)} = 1$, also $g(0) \in 2\pi i \mathbb{Z}$. Addiere ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ und erreiche $g(0) = 0$. Im folgenden gelte deshalb $g(0) = 0$.

Für $|z| < 1$ sind alle Faktoren rechts ungleich Null, damit folgt aus Satz 1.6 (ii):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{Log}\left(e^{g(z)} \cdot \frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z$$

mit $t_z \in \mathbb{Z}$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \operatorname{Log} e^{g(z)} + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z$$

für $|z| < \delta$ und $0 < \delta$ klein. *Denn* $\operatorname{Log}(w_1 w_2) = \operatorname{Log} w_1 + \operatorname{Log} w_2$ für w_1, w_2 nahe bei 1, beachte $g(0) = 0$ und g stetig. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = g(z) + \operatorname{Log}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right) + 2\pi i t_z\,,$$

da $\operatorname{Log} e^{g(z)} = g(z)$ für z bei 0, denn Log und exp sind zueinander invers.

Da die Reihe links absolut lokal gleichmäßig konvergiert, ist die Funktion stetig, also ist auch $z \mapsto 2\pi i t_z$ stetig. Aber $t_z \in \mathbb{Z}$ und $U_\delta(0)$ ist zusammenhängend, also ist $t_z = t \in \mathbb{Z}$ konstant.

Nach Weierstraß darf gliedweise differenziert werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\frac{z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} = g'(z) + \frac{1}{\frac{\sin \pi z}{\pi z}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right)$$

Also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} &= g'(z) + \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cos(\pi z) \cdot \pi z - \pi \sin(\pi z)}{\pi^2 z^2} \\ &= g'(z) + \pi \cot \pi z - \frac{1}{z} \qquad z \in \dot{U}_\delta(0)\,. \end{aligned}$$

Wir kennen bereits die Partialbruchzerlegung des Kotangens (Beispiel 1.3):

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt $g'(z) = 0$ für $z \in \dot{U}_\delta(0)$. Also ist g konstant auf $\dot{U}_\delta(0)$. Damit ist g bereits auf ganz $\mathbb{C}$ konstant, wegen des Identitätssatz. Insgesamt haben wir also $g \equiv 0$ (wegen $g(0) = 0$).

1.3 Gamma-Funktion

Ausgangsproblem: Man gebe eine *vernünftige* Interpolationsfunktion für die Fakultät $n \mapsto n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ an. D. h. man sucht eine (zumindest stetige Funktion) Γ auf $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ mit

a) $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$,

b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ (Grundeigenschaft der Fakultät).

Welche Eigenschaften hat Γ? Kann Γ auf $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \}$ holomorph oder meromorph fortgesetzt werden? Vielleicht sogar auf ganz $\mathbb{C}$? Durch welche Eigenschaften ist Γ charakterisiert?

Heuristische Vorgehensweise: Für n klein ist $(n-1)! = \Gamma(n)$ „klein“, nicht klar wie man interpolieren sollte. Für n groß ist $\Gamma(n) = (n-1)!$ „riesengroß“, also wächst die Funktion „gleichmäßiger“und sollte daher einfacher zu interpolieren sein!

Sei $x \in \mathbb{N}$ fest, $N \in \mathbb{N}$. Dann soll gelten

$$\begin{aligned}\Gamma(x+N) &= (N+x-1) \cdot \ldots \cdot (N+1) \cdot N \cdot (N-1)! \\ &= N^x \underbrace{\left(1 + \frac{x-1}{N}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(1 + \frac{x-2}{N}\right)}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{N}\right)}_{\to 1} \cdot 1 \cdot (N-1)!\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N^x (N-1)!}{\Gamma(x+N)} = 1\,.$$

Außerdem soll gelten

$$\begin{aligned}\Gamma(x+N) &= (x+N-1)! \\ &= (x+N-1) \cdot (x+N-2) \cdot \ldots \cdot (x+1) \cdot x \cdot \Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

Durch einsetzen erhalten wir

$$\Gamma(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{N^x (N-1)!}{x(x+1)\ldots(x+N-1)}\,. \tag{1.8}$$

Also probiere man (1.8) als Definition für $\Gamma(x)$ oder sogar für $\Gamma(z)$ mit $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, -1, -2, \ldots$ aus, vorausgesetzt der Limes existiert.

Satz 1.14. *Sei*

$$D_{-\mathbb{N}_0} := \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, -1, -2, \ldots \}\,.$$

(i) Durch

$$\Gamma(z) = \lim_{N \to \infty} \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)\ldots(z+N-1)}$$

für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ wird eine holomorphe Funktion erklärt, diese heißt Gamma-Funktion. *Obige Darstellung heißt* Gauss'sche Produktdarstellung *von $\Gamma(z)$.*

(ii) Es gilt für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}$$

die Eulersche Produktdarstellung. *(Beachte $N^z = e^{z \operatorname{Log} N}$ für $z \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$.)*

(iii) Es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *für alle* $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ *und* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zeige zunächst (i) und (ii):

(i)+(ii) Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$\Gamma_N(z) := \frac{N^z (N-1)!}{z(z+1)\dots(z+N-1)} \,.$$

Dann gilt

$$\frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} = \frac{(N+1)^z N!}{z(z+1)\dots(z+N)} \cdot \frac{z(z+1)\dots(z+N-1)}{N^z (N-1)!}$$

$$= \frac{(N+1)^z}{N^z} \cdot \frac{N}{z+N} = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} \,.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ fest sei $(1+w)^z = e^{z \operatorname{Log}(1+w)}$ für $|w| < 1$. Dies ist eine holomorphe Funktion und hat um $w = 0$ die Taylorentwicklung für $|w| < 1$

$$(1+w)^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{z}{n} w^n \,.$$

wobei $\binom{z}{n} = \frac{z(z+1)\cdot\ldots\cdot(z-n+1)}{n!}$ der VERALLGEMEINERTE BINOMINALKOEFFIZIENT ist (Beweis diese Aussage durch Induktion). Schreibe nun

$$(1+w)^z = 1 + zw + w^2 A(z,w)$$

wobei

$$A(z,w) = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{z}{n} w^{n-2} \qquad |w| < 1$$

Behauptung $A(z,w)$ ist auf Mengen der Form

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant c \,\} \times \{\, w \in \mathbb{C} \mid |w| \leqslant \alpha \,\} \qquad 0 < c, 0 < \alpha < 1$$

beschränkt, denn

$$|A(z,w)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left| \binom{z}{n} \right| \cdot |w|^{n-2}$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{c(c+1)\dots(c+n-1)}{n!}}_{=(-1)^n \cdot \binom{-c}{n}} \alpha^{n-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \binom{-c}{n} (-\alpha)^{n-2}$$

$$= A(-c, -\alpha) < \infty \,.$$

Sei $K \subseteq D_{-\mathbb{N}_0}$ kompakt. Dann gilt für alle $z \in K$ und $N \in \mathbb{N}$ (mit N groß genug) unter Benutzung der geometrischen Reihe und mit $w = \frac{1}{N}$, dass

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} \\
&= \left(1+\frac{z}{N}+\frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\right)\left(1-\frac{z}{N}+\left(\frac{z}{N}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)\right) \\
&= 1-\frac{z^2}{N^2}+\left(1+\frac{z}{N}\right)\left(\frac{z}{N}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)+\frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{z}{N}\right) \\
&\quad + \frac{1}{N^2}A\left(z,\frac{1}{N}\right)\cdot\left(\frac{z}{N}\right)^2 \cdot B\left(\frac{z}{n}\right)
\end{aligned}$$

Also $\left|\left(1+\frac{1}{N}\right)^z \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{N}} - 1\right| \leqslant \frac{C}{N^2}$ für ein $C > 0$. Wegen $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} < \infty$ und Satz 1.9 folgt, dass

$$\prod_{N=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)}$$

unbedingt konvergent und eine holomorphe Funktion definiert auf $D_{-\mathbb{N}_0}$. Alle Faktoren sind ungleich Null, also nach Definition

$$\begin{aligned}
\prod_{N=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} &= \lim_{M\to\infty} \prod_{N=1}^{M} \frac{\Gamma_{N+1}(z)}{\Gamma_N(z)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\Gamma_2(z)}{\Gamma_1(z)} \cdot \frac{\Gamma_3(z)}{\Gamma_2(z)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma_{M+1}(z)}{\Gamma_M(z)} \\
&= \lim_{M\to\infty} \frac{\Gamma_{M+1}(z)}{\Gamma_1(z)} = z \lim_{M\to\infty} \Gamma_M(z)\,,
\end{aligned}$$

dies zeigt die Behauptungen (i) und (ii).

(iii) Es gilt für alle $z+1 \in D_{-\mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+N)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{N}{z+N} \cdot \frac{zN^z(N-1)!}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+N-1)} = z\Gamma(z)\,.
\end{aligned}$$

Es gilt weiter
$$\Gamma(1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)!}{N!} = 1\,.$$
Induktiv folgt damit $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

q.e.d.

Satz 1.15. *Für die Γ-Funktion gelten folgende Eigenschaften:*

(i) Die Gammafunktion lässt sich in ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen mit einfachen Polstellen in $-\mathbb{N}_0$ und holomorph in $D_{-\mathbb{N}_0}$. Und es gilt
$$\operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

(ii) die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ ist ganz mit hebbaren Singularitäten in $z \in -\mathbb{N}_0$. Es gilt die WEIERSTRASS-PRODUKTENTWICKLUNG
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$
mit $\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n) = 0{,}57721\ldots$ *die* EULER-MASCHERONI-KONSTANTE.

(iii) Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ der ERGÄNZUNGSSATZ*:*
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Beweis. (i) Es gilt mit Satz 1.14 (iii) für $N \in \mathbb{N}_0$:
$$\Gamma(z+N+1) = (z+N)\ldots(z+1)z\Gamma(z)\,.$$
Damit erhält man
$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+N+1)}{z(z+1)\ldots(z+N)}\,.$$
Also
$$\Gamma(z) = \frac{g(z)}{z-(-N)}\,,$$
wobei g lokal holomorph und $g(-N) \neq 0$.

Also besitzt Γ in $z = -N$ einen Pol der Ordnung 1 mit Residuen
$$\begin{aligned}\operatorname*{res}_{z=-N} \Gamma(z) &= \lim_{z\to -N} (z+N)\Gamma(z) = g(-N) \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-N)(-N+1)(-N+2)\ldots(-1)} \\ &= \frac{(-1)^N}{N!}\,.\end{aligned}$$

(ii) Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)$.

Zeige zunächst a_n ist eine konvergente Folge. Zunächst gilt

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0\,.$$

denn

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

Also ist die Folge a_n monoton fallend. Weiter gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{\nu}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_\nu^{\nu+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \log(n+1) \geqslant \log(n)$$

Also ist $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz über die monotone Folge, folgt, dass die a_n konvergieren. Den Grenzwert bezeichnen wir mit γ.

Nun folgt

$$\frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}} = e^{z(Log(N)-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{N})} \xrightarrow{N\to\infty} e^{-\gamma z}\,,$$

also

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^{z+1}(N-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+N)}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{N^z}{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}} \frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}N!}{(z+1)\ldots(z+N)}$$

$$= e^{-\gamma z} \lim_{N\to\infty} \frac{e^{z(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N})}N!}{(z+1)\ldots(z+N)}$$

$$= e^{-\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\,.$$

Insbesondere gilt diese Schreibweise auch für $z \in -\mathbb{N}_0$.

(iii) Aus $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$ folgt

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z)\,,$$

also für $z \notin \mathbb{Z}$ (Beispiel 1.13)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-z)\Gamma(z)} &= -\frac{1}{z\Gamma(-z)\Gamma(z)} \\
&= -\frac{1}{z}(-z)ze^{-\gamma z}e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\sin(\pi z)\,.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 1.16 (Charakterisierung nach Wielandt).

(i) Die Gammafunktion ist auf jedem Vertikalstreifen

$$\{\, z = x + iy \in \mathbb{C} \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}$$

mit $0 < a \leqslant b$ beschränkt.

(ii) Es sei $D \subseteq D_{-\mathbb{N}_0}$ ein Gebiet, welches den Vertikalstreifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ enthält. Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit den Eigenschaften

(a) $zf(z) = f(z+1)$ für alle $z, z+1 \in D$,

(b) f ist auf dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt.

Dann gilt: $f(z) = f(1)\Gamma(z)$ für $z \in D$.

Bemerkung 1.17. Die Voraussetzung D Gebiet darf nicht weggelassen werden. Denn sei $D := \left\{\, z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < x < 3 \,\right\} \dot\cup U_1(10)$ und

$$f(z) := \begin{cases} \Gamma(z) & \text{wenn } \frac{1}{2} < x < 3 \text{ für } z = x + iy \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann erfüllt f offensichtlich die Bedingungen (a) und (b), aber es gilt nicht $f(z) = \Gamma(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis. (i) Für beliebiges $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $0 < a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$ gilt wegen

$$|N^z| = \left|e^{\log(N)(x+iy)}\right| = N^x$$

und $|w| \geqslant \mathrm{Re}(w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
|\Gamma(z)| &= \lim_{N\to\infty}\left|\frac{N^z(N-1)!}{z(z+1)(z+2)\dots(z+N-1)}\right| \\
&\leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{N^x(N-1)!}{x(x+1)\dots(x+N-1)} = \Gamma(x)
\end{aligned}$$

und, da Γ stetig ist und somit auf dem Kompaktum [a,b] beschränkt ist, ist $\Gamma(x)$ beschränkt.

(ii) Durch die Vorschrift

$$f(z+1) = zf(z)$$

wird f holomorph auf $1+D$ fortgesetzt, man erhält also eine holomorphe Funktion auf $D \cup (D+1)$ Letzteres ist ein Gebiet, da D und $1+D$ Gebiete und $D \cap (1+D)$ enthält die Gerade $\{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x = 2 \}$.

Nach dem Identitätssatz ist die holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf $D \cup (1+D)$ eindeutig bestimmt. Verfährt man nach dem selben Prinzip weiter, so erhält man eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf dem Gebiet

$$D \cup (1+D) \cup (2+D) \cup (3+D) \cup ...$$

Ebenso wird f durch die Vorschrift $f(z+1) = zf(z)$ sukzessive auf

$$D \cup (-1+D) \cup (-2+D) \cup (-3+D) \cup ...$$

meromorph fortgesetzt, mit Polstellen höchstens in den Punkten $-\mathbb{N}_0$. Insgesamt erhält man also eine meromorphe Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{C}$ mit Polen in $-\mathbb{N}_0$. Wegen des Identitätssatzes gilt global die Funktionalgleichung

$$zf(z) = f(z+1)$$

und analog zu Satz 1.15 (i) erhalten wir eine Laurent-Entwicklung von f in jedem Punkt $z = -N \in -\mathbb{N}_0$ der Form

$$f(z) = \frac{(-1)^N}{N!} f(1) \frac{1}{N+z} + \dots .$$

Sei

$$h(z) = f(z) - f(1)\Gamma(z) \qquad \text{für } z \in D_{-\mathbb{N}_0} .$$

Nach Satz 1.15 (i) definiert h dann eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}$ und es gilt

$$h(z+1) = zh(z)$$

aus Stetigkeitsgründen in ganz $\mathbb{C}$.

Wegen (i) und (b) ist $h(z)$ beschränkt auf dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$. Es ist $h(z) = \frac{h(z+2)}{z(z+1)}$ für $z \in D_{-\mathbb{N}_0}$. Sei $-1 \leqslant x \leqslant 0$. Dann ist $1 \leqslant x+2 \leqslant 2$, also folgt aus der Beschränktheit von $h(z)$ in dem Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ und wegen $|z| \geqslant |y|$ die Beschränktheit von $h(z)$ in $\{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid -1 \leqslant x \leqslant 0, 1 \leqslant |y| \}$.

Da h stetig ist und $-1 \leqslant x \leqslant 0, |y| \leqslant 1$ kompakt ist, ist also $h(z)$ auf $-1 \leqslant x \leqslant 0$ beschränkt. Sei

$$H(z) = h(z)h(1-z) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} .$$

Dann ist H in $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Außerdem ist für alle $z \in \mathbb{C}^\times$

$$H(z+1) = h(z+1)h(-z) = \frac{zh(z)h(1-z)}{-z} = -H(z)\,.$$

Also gilt $|H(z+1)| = |H(z)|$ aus Stetigkeitsgründen für alle $z \in \mathbb{C}$. Daher ist H auf $\mathbb{C}$ beschränkt, nach dem Satz von Liouville folgt damit

$$H(z) = H(1) = h(1)h(0) = 0 \qquad z \in \mathbb{C}\,,$$

da $h(1) = f(1) - f(1)\Gamma(1) = 0$.

Hieraus folgt $h \equiv 0$, also die Behauptung. *Denn* wäre $h(z_0) \neq 0$, so gäbe es aus Gründen der Stetigkeit eine Umgebung $U_\delta(z_0)$ mit $h(w) \neq 0$ für alle $w \in U_\delta(z_0)$. Damit folgt $h|_{U_\delta(1-z_0)} \equiv 0$, also da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist mit dem Identitätssatz $h \equiv 0$.

q.e.d.

Satz 1.18 (Legendresche Duplikationsformel). *Es gilt*

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\cdot 2^{1-z}\cdot\Gamma(z) \qquad \textit{für } z \in D_{-\mathbb{N}_0}$$

Beweis. Wir wollen den Satz von Wielandt (Satz 1.16) benutzen mit

$$f(z) := \frac{2^{z-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Dann gilt: $D_{-\mathbb{N}_0}$ enthält den Streifen $1 \leqslant x \leqslant 2$ und f ist dort holomorph. Es gilt

$$f(z+1) = \frac{2^z\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \frac{z2^{z-1}\Gamma(\frac{z}{2})\Gamma(\frac{z+1}{2})}{\sqrt{\pi}} = zf(z)\,.$$

Nach Satz 1.16 (i) ist f beschränkt auf $1 \leqslant x \leqslant 2$. Somit gilt nach dem Satz von Wielandt (Satz 1.16)

$$f(z) = f(1)\Gamma(z)\,.$$

Es gilt weiterhin

$$f(1) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}}$$

und $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$ nach dem Ergänzungssatz (Satz 1.15).

Wegen $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$ (folgt aus der Produktformel von Euler (Satz 1.14) gilt somit $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und damit $f(1) = 1$.

q.e.d.

Lemma 1.19. *Sei* $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ *stetig.* $f(t) \geqslant 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$. *Ist dann*

$$\int_A^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant C \qquad \textit{für } 0 < A < 1\,,$$

so existiert

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = a\,.$$

Sei zunächst $a_n = \frac{1}{n}$. Die Folge

$$\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

ist monoton steigend und nach oben beschränkt, also existiert

$$a = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

als die kleinste obere Schranke.

Sei jetzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a - \varepsilon < \int_{\frac{1}{N_0}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leqslant \frac{1}{N_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $N < n$. Es folgt

$$a - \varepsilon < \int_{\frac{1}{N_0}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{a_n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{N_n}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant a < a + \varepsilon\,.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = a\,.$$

q.e.d.

Satz 1.20 (Eulersches Integral). *(i) Das uneigentliche Integral*

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

mit $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$ *ist für* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *absolut konvergent, d. h.*

$$\lim_{A\to 0} \int_A^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{und}$$

$$\lim_{B\to\infty} \int_1^B t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existieren.

(ii) Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ *ist*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Beweis. (i) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ fest mit $x = \mathrm{Re}(z) > 0$. Es ist

$$\left|t^{z-1}e^{-t}\right| = t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1} \qquad \text{für } t > 0\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\int_A^1 \left|t^{z-1}e^{-t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_A^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\bigg|_A^1 = \frac{1}{x}(1-A^x) \overset{x>0}{\leqslant} \frac{1}{x}$$

Nach dem Majorantenkriterium für Integrale folgt also die Existenz von

$$\lim_{A\to 0}\int_A^1 t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{für } \mathrm{Re}(z) > 0\,.$$

Es gilt weiterhin

$$t^{x-1} \leqslant C \cdot e^{\frac{t}{2}} \qquad \text{für alle } t \geqslant 1$$

mit geeignetem $C = C(x) > 0$. Daher folgt

$$\int_1^B t^{x-1}\,\mathrm{d}t \leqslant C(x)\int_1^B e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2C(x)(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{B}{2}}) \leqslant 2C(x)e^{\frac{1}{2}}\,.$$

Es folgt, dass

$$\lim_{B\to\infty}\int_1^B t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

existiert.

(ii) Wir wollen wieder den Satz von Wielandt (Satz 1.16) benutzen mit

$$f(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Für $\mathrm{Re}(z) > 0$ ist (Partielle Integration!)

$$f(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}t^z\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty z t^{z-1}(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = z f(z)\,.$$

Das geht, wegen Lemma 1.19. Nach dem Leibniz-Kriterium ist das betrachte Integral holomorph, daher ist partielle Integration gerechtfertigt.

Schließlich ist für $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|t^{z-1}e^{-t}\right| &\leqslant \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + C \qquad \text{für ein } C > 0\,.
\end{aligned}$$

Also ist $f(z)$ auf $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt.

Schließlich muss man noch zeigen, dass $f(z)$ für $\mathrm{Re}(z) > 0$ holomorph ist. Es ist leicht zu sehen, dass

$$f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$$

holomorph ist für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ ein kompaktes Intervall ist (Leibniz-Regel). Unter Benutzung ähnlicher Argumente wie in (i) zeigt man, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Kompakta $K \subseteq \{\, Re(z) \geqslant 0 \,\}$ gleichmäßig konvergiert. Damit folgt die Behauptung mit dem Satz von Weierstraß und die Aussage des Satzes folgt mit Wielandt (Satz 1.16), da

$$f(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \,\mathrm{d}t = 1$$

klar ist.

q.e.d.

Problem: Wie verhält sich $\Gamma(z)$ für sehr große Werte $|z|$? Kann man $\Gamma(z)$ dort durch eine „einfache Funktion“ gut approximieren?

Satz 1.21 (Stirlingsche Formel).

(i) Sei $\mathbb{C}_- = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z \neq x \text{ für } x \in \mathbb{R}\colon x \leqslant 0 \,\}$ *die geschlitzte Ebene ohne die negative reelle Achse und* 0*. Für* $z \in \mathbb{C}_-$ *gilt dann die Darstellung*[1]

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} \cdot z^{z-\frac{1}{2}} \cdot e^{-z} \cdot e^{H(z)}$$

mit einer Funktion $H(z)$*, welche in jedem Winkelbereich*

$$W_\delta = \{\, z \in \mathbb{C}_- \mid -\pi + \delta < \mathrm{Arg}(z) < \pi - \delta \,\} \qquad \text{mit } \delta > 0$$

für $|z| \to \infty$ *gegen* 0 *konvergiert.*

(ii) Für $x >$ *ist*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{x-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\vartheta(x)}{12x}}$$

mit $0 < \vartheta(x) < 1$*.*

Für den Beweis zeigen wir zunächst einige Lemma.

Lemma 1.22. *Für* $z \in \mathbb{C}_-$ *sei*

$$H_0(z) := \left(z + \frac{1}{2}\right)(\mathrm{Log}(z+1) - \mathrm{Log}(z)) - 1$$

[1] Insbesondere gilt für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$$

Sei $A = \mathbb{C}_- \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \right\}$*. Für* $z \in A$ *gilt dann*

$$H_0(z) = \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ gerade}}} \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{1}{2z+1} \right)^{\nu} \tag{1.9}$$

Beweis. Sei $K \subseteq A$ kompakt. Dann existiert $c > 1$, so dass $\left|z + \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{c}{2}$ für alle $z \in K$, also konvergiert die Reihe (1.9) auf Kompakta absolut und gleichmäßig und stellt somit eine in A holomorphe Funktion da. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\log(x+1) - \log(x) &= \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{2x+1}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) \\
&= \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\nu} + \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\nu},
\end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit aus $0 < \frac{1}{2x+1} < 1$ und

$$\log(1+\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \qquad |\delta| < 1$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\log(x+1) - \log(x) = 2 \cdot \sum_{\substack{\nu \geqslant 1 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\nu}.$$

Für $x > 0$ folgt also

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= \left(x + \frac{1}{2}\right) (\log(x+1) - \log(x)) - 1 \\
&= \left(\sum_{\substack{\nu \geqslant 1 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\nu-1} \right) - 1 \\
&= \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ ungerade}}} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{\nu-1}
\end{aligned}$$

also gilt (1.9) für $z \in A \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, beide Seiten sind in A holomorphe Funktionen, also gilt (1.9) nach dem Identitätssatz. *q.e.d.*

Lemma 1.23. *Für $z \in \mathbb{C}_-$ mit $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$ ist*

$$|H_0(z)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2z+1|^2}\,.$$

Beweis. Für $\left|z + \frac{1}{2}\right| > 1$ ist $\frac{1}{|2z+1|} < \frac{1}{2}$. Mit $w = \frac{1}{2z+1}$ ist für $|w| < \frac{1}{2}$ dann nach Lemma 1.22

$$\begin{aligned} |H_0(z)| &\leqslant \frac{|w|^2}{3} + \frac{|w|^4}{5} + \frac{|w|^6}{7} + \dots \\ &\leqslant \frac{|w|^2}{3}(1 + |w|^2 + |w|^4 + \dots) \\ &\leqslant \frac{|w|^2}{3}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots\right) \\ &= \frac{|w|^2}{3} \cdot \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{|w|^2}{3} \leqslant \frac{1}{2}|w|^2\,. \end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 1.24. *Sei*

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k) \qquad z \in \mathbb{C}_-\,.$$

(i) Die Reihe $H(z)$ konvergiert auf jeder Teilmenge $\mathbb{C}_-$ absolut und gleichmäßig und ist damit eine holomorphe Funktion in $\mathbb{C}_-$.

(ii) Es gilt

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z \in W_\delta}} H(z) = 0\,. \tag{1.10}$$

Beweis. (i) Sei $K \subseteq \mathbb{C}_-$ kompakt. Für $n \in \mathbb{N}_0$, n groß, ist dann

$$\left|(z+n) + \frac{1}{2}\right| = \left|\left(n + \frac{1}{2}\right) - (-z)\right| \geqslant n + \frac{1}{2} - |z| > 1 \qquad z \in K\,.$$

Also folgt für solche n für alle $z \in K$ nach Lemma 1.23

$$|H_0(z+n)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}\,,$$

falls n zusätzlich noch so groß ist, dass $2(x+n)+1 \geqslant n$, d. h. $x \geqslant \frac{-(n+1)}{2}$. Weil $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ absolut konvergiert, also $H(z)$ auf K gleichmäßig absolut konvergiert, ist $H(z)$ auf $\mathbb{C}_-$ holomorph.

(ii) Es genügt (1.10) für kleines δ, z. B. $\delta < \frac{\pi}{2}$, zu zeigen. Dann ist

$$W_\delta = \{\, z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ oder } |y| > C|x| \,\}$$

mit geeignetem $C = C(\delta) > 0$.
Offenbar gibt es $N(\delta) \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geqslant N(\delta)$ und $z \in W_\delta$ gilt

$$z + n \in \mathbb{C}_- \text{ und } \left|(z+n) + \frac{1}{2}\right| > 1\,.$$

Also folgt nach Lemma 1.23

$$\begin{aligned} |H_0(z+n)| &\leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2x+2n+1)^2+4y^2} \qquad \forall n \geqslant N(\delta), z \in W_\delta \end{aligned}$$

Für $x > 0$ ist

$$(2x+2n+1)^2 + 4y^2 \geqslant (2n+1)^2\,.$$

Für $|y| > c|x|$ ist

$$\begin{aligned} (2x+2n+1)^2 + 4y^2 &\geqslant (2x+2n+1)^2 + 4C^2x^2 \\ &\geqslant (2x_{0,n}+2n+1)^2 + 4C^2x_{0,n}^2 \geqslant 4C^2x_{0,n}^2 \end{aligned}$$

mit $x_{0,n} = -\frac{2n+1}{2+2C^2}$, denn die Funktion $x \mapsto (2x+2n+1)^2 + 4C^2x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum in $x_{0,n}$ an (Analysis 1). Es folgt daher

$$|H_0(z+n)| \leqslant C_1 \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \forall n \geqslant N(\delta), z \in W_\delta$$

mit geeignetem $C_1 = C_1(\delta) > 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} < \infty$, existiert $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n \geqslant N(\varepsilon)} \frac{1}{(2n+1)^2} \leqslant \varepsilon$. Sei $N := \max(N(\delta), N(\varepsilon))$. Für $z \in W_\delta$ folgt dann

$$\sum_{n \geqslant N} |H_0(z+n)| \leqslant C' \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{(2n+1)^2} \leqslant C'\varepsilon\,.$$

Sei $n < N$. Für $z \in W_\delta$, $|z|$ groß, ist dann

$$\left|(z+n) + \frac{1}{2}\right| = \left|z - \left(-n - \frac{1}{2}\right)\right| \geqslant |z| - \left|n + \frac{1}{2}\right| > 1\,.$$

Also gilt nach Lemma 1.23 für solche n und z

$$|H_0(z+n)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{|2(z+n)+1|^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } |z| \to \infty,\ z \in W_\delta$$

Insgesamt folgt also

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in W_\delta}} H(z) = 0\,.$$

q.e.d.

Lemma 1.25. *Sei*

$$h(z) = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{H(z)}\,.$$

(i) Dann gilt

$$h(z+1) = zh(z)$$

(ii) $h(z)$ ist beschränkt in $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Beweis. (i) Es ist $h(z) = \exp((z-\frac{1}{2})\operatorname{Log}(z) - z + H(z))$, also folgt

$$\begin{aligned}\frac{h(z+1)}{h(z)} &= \exp\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(z+1) - (z+1) + H(z+1)\right.\\ &\qquad \left. - \left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(z) - z + H(z)\right)\right)\\ &= \exp((H(z+1) - H(z) + H_0(z) + \operatorname{Log}(z)) = z\,,\end{aligned}$$

wegen der Teleskopsumme

$$\begin{aligned}H(z+1) - H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k+1) - \sum_{k=0}^{\infty} H_0(z+k)\\ &= -H_0(z)\,.\end{aligned}$$

(ii) Die Funktion e^{-z} ist auf $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Im Winkelbereich $W_{\frac{\pi}{2}}$ gilt $H(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$ nach Lemma 1.24, insbesondere ist $e^{H(z)}$ in $1 \leqslant x \leqslant 2$ beschränkt. Es ist

$$\left|z^{z-\frac{1}{2}}\right| = \left|e^{(z-\frac{1}{2})\operatorname{Log}(z)}\right| = e^{\operatorname{Re}\left((z-\frac{1}{2})\operatorname{Log}(z)\right)}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(z)\right) &= \operatorname{Re}\left(\left(x-\frac{1}{2}+iy\right)(\log|z| + i\operatorname{Arg}(z))\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\log|z| - y\operatorname{Arg}(z)\\ &\overset{y\neq 0}{=} y\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\log|z|}{y} - \operatorname{Arg}(z)\right)\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

Beweis (Stirlingsche Formel Satz 1.21).

(i) Nach dem Satz von Wielandt (Satz 1.16) folgt mit Lemma 1.25

$$\Gamma(z) = Ah(z)$$

für ein $A \in \mathbb{C}^\times$. Nach der Legendreschen Duplikationsformel (Satz 1.18) ist für ein $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= 2^{n-1}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n)} = 2^{n-1}\frac{h(\frac{n}{2})h(\frac{n+1}{2})}{h(n)} \cdot A \\
&= A \cdot 2^{n-1}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} e^{H(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{n+1}{2}} e^{H(\frac{n+1}{2})}}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} e^{H(n)}} \\
&= A \cdot 2^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{n}{2}} (1+n)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}} e^{H(\frac{n}{2})+H(\frac{n+1}{2})-H(n)} \\
&= A \cdot (2e)^{-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{H(\frac{n}{2})+H(\frac{n+1}{2})-H(n)} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{A}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Also $A = \sqrt{2\pi}$. Das beweist (i).

(ii) Nach (i) ist für $x > 0$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{H(x)}$$

für $x > 0$ ist mit $w = \frac{1}{2x+1}$ nach Lemma 1.22

$$H_0(x) = \sum_{\substack{\nu \geqslant 2 \\ \nu \text{ gerade}}} \frac{1}{\nu+1} w^\nu = \frac{1}{3}w^2 + \frac{1}{5}w^4 + \ldots$$

also folgt

$$\begin{aligned}
0 < H_0(x) &< \frac{1}{3}w^2(1 + w^2 + w^4 + \ldots) \\
&= \frac{1}{3}w^2\frac{1}{1-w^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2-1} \\
&= \frac{1}{12(x+1)x} = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)
\end{aligned}$$

Daber gilt für $x > 0$

$$
\begin{aligned}
0 < H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_0(x+n) \\
&< \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right) \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+1+n} \right) \\
&= \frac{1}{12} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+N+1} \right) = \frac{1}{12x} \, .
\end{aligned}
$$

Mit $\vartheta(x) = 12x \cdot H(x)$ folgt die Behauptung.

q.e.d.

2 Periodische Funktionen

2.1 Einfach periodische Funktionen

Definition 2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Es gebe ein $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, dass aus $z \in D$ folgt, dass $z + \omega \in D$. Sei $f \colon D \to \mathbb{C}$. Gilt dann $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in D$, so heißt f EINFACH PERIODISCH mit Periode ω.

Beispiel 2.2. e^z hat die Periode $2\pi i$ auf ganz $\mathbb{C}$. Und $\sin z, \cos z$ haben Periode 2π.

Hat $f \colon D \to \mathbb{C}$ die Periode ω, so hat $g \colon \frac{1}{\omega}D \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = f(\omega z)$ Periode 1.

Die einfachste nicht-konstante auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit Periode 1 ist $e^{2\pi iz}$. Diese wird eine wichtige Rolle spielen: wir werden periodische Funktionen f mit Periode 1 durch Summen von Potenzen $(e^{2\pi iz})^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ ausdrücken. Wir werden annehmen, dass D ein Streifen $D_{a,b} := \{\, z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im}(z) < b \,\}$ mit $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ ist. Zum Beispiel $D = D_{0,\infty} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \,\} =: \mathbb{H}$ die obere Halbebene.

Satz 2.3. *Sei $f \colon D_{a,b} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1. Dann lässt sich f auf $D_{a,b}$ in eine Fourierreihe entwickeln, d. h. es gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inz} \qquad \text{für } z \in D_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Diese konvergiert gleichmäßig und absolut auf Kompakta. Es gilt

$$a_n = \int_0^1 f(z)e^{-2\pi inz}\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

wobei $z = x + iy_0$ mit $y_0 \in (a,b)$ fest gewählt. (Zu beachten ist hier, dass über die reelle Variable x integriert wird).

Beweis. Schreibe $D = D_{a,b}$. Betrachte die Abbildung

$$D \to \mathbb{C}, z \mapsto q := e^{2\pi iz}\,.$$

Diese bildet D surjektiv auf das Ringgebiet

$$\mathcal{R} = \{\, q \in \mathbb{C} \mid r < |q| < R \,\}$$

mit $r := e^{-2\pi b}$ und $R := e^{-2\pi a}$ ab (*Konvention* $R = \infty$, falls $a = -\infty$ und $r = 0$ falls $b = \infty$). Denn es gilt $r < |q| < R$, genau dann wenn $e^{-2\pi b} < e^{-2\pi y} < e^{-2\pi a}$, also wenn $a < y < b$.

Setze $F\colon \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ mit $F(q) := f(z)$ für $q = e^{2\pi i z}$. Beachte: dies ist wohldefiniert, denn ist $e^{2\pi i z} = e^{2\pi i z'}$, so folgt $z - z' \in \mathbb{Z}$, also $z' = z + n$, aber $f(z+n) = f(z)$, da f periodisch ist.

Behauptung F ist auf $\mathcal{R}$ holomorph.

Denn: Sei $q_0 \in \mathcal{R}$ fest. Betrachte $\lim_{q\to q_0} \frac{F(q)-F(q_0)}{q-q_0}$. Wähle dafür eine beliebige Folge $q_\nu = e^{2\pi i z_\nu}$, $q_0 = e^{2\pi i z_0}$ mit $q_\nu \to q_0$ und $q_\nu \neq q_0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Es ist

$$q_\nu - q_0 = e^{2\pi z_\nu} - e^{2\pi z_0} = e^{2\pi z_0} \cdot (e^{2\pi(z_\nu - z_0)} - 1)$$

Damit folgt $e^{2\pi(z_\nu - z_0)} \xrightarrow{\nu\to\infty} 1$, also $\operatorname{Log} e^{2\pi(z_\nu - z_0)} \xrightarrow{\nu\to\infty} \operatorname{Log} 1 = 0$. Aber es gibt $m_\nu \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$\operatorname{Log} e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} = 2\pi i(z_\nu - z_0) + 2\pi i m_\nu = 2\pi i(\underbrace{z_\nu + m_\nu}_{=:z'_\nu}) + 2\pi i z_0$$

und somit $z'_\nu \to z_0$.

Daher

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} \frac{F(q_\nu) - F(q_0)}{q_\nu - q_0} &= \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i z_\nu} - e^{2\pi i z_0}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{f(z'_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i z'_\nu} - e^{2\pi i z_0}} \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{2\pi i z'_\nu} - e^{2\pi i z_0}}{z'_\nu - z_0}} \cdot \frac{f(z'_\nu) - f(z_0)}{z'_\nu - z_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z_0}} f'(z_0)\,.
\end{aligned}$$

Wende nun den Satz über die Laurent-Entwicklung auf F an, mit diesem gilt:

$$F(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \qquad \text{für } q \in \mathcal{R}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_n, insbesondere ist die Reihe gleichmäßig und absolut konvergent auf Kompakta. Und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|q|=\rho} \frac{F(q)}{q^{n+1}}\,\mathrm{d}q \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\,,$$

wobei über die Kreislinie, die genau einmal im mathematisch positiven Sinn um 0 mit dem Radius ρ läuft, integriert wird. Diese wird gegeben durch $\rho e^{2\pi i x}$ mit $0 \leqslant x \leqslant 1$. Damit folgt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n+1}} \cdot \rho \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{F(\rho e^{2\pi i x})}{(\rho e^{2\pi i x})^{n}}\,\mathrm{d}x$$

Wähle nun $\rho = e^{-2\pi y_0}$ mit $a < y_0 < b$, dann $e^{2\pi i z} = e^{-2\pi y_0} \cdot e^{2\pi i x} = \rho \cdot e^{2\pi i x}$. Also erhalten wir

$$a_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i n z} \, \mathrm{d}x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\,.$$

q.e.d.

Beispiel 2.4. Sei $D = D_{0,\infty} = \mathbb{H}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n \geqslant 1} n^{k-1} e^{2\pi i n z}\,. \tag{2.1}$$

Beweis. Die Reihe links in (2.1) ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergent (Beweis ähnlich wie in Beispiel 1.3 für k=2). Daher ist dies eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ also auch auf $\mathbb{H}$. Wegen der absoluten Konvergenz ist die Reihe periodisch mit Periode 1, hat also eine Fourierentwicklung nach Satz 2.3.

Mit der Partialbruchzerlegung des Kotangens (Beispiel 1.3) folgt nun

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \qquad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Aber es gilt auch

$$\begin{aligned}
\pi \cot \pi z &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \frac{\frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{2}}{\frac{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}{2i}} \\
&= \pi i \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \pi i \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} = \pi i \frac{q+1}{q-1} \\
&= \pi i \frac{q-1+2}{q-1} = \pi i \left(1 - \frac{2}{1-q} \right) \\
&= \pi i - 2\pi i \sum_{n \geqslant 0} q^n\,.
\end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n \geqslant 0} e^{2\pi i n z} \qquad \text{für } z \in \mathbb{H}\,.$$

Ableiten beider Seiten gibt

$$-\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{(z+n)^2} + \frac{1}{(z-n)^2}\right)$$

$$\overset{!}{=} (-2\pi i)(2\pi i)\sum_{n\geqslant 1} n e^{2\pi i n z}$$

Also folgt der Fall $k = 2$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{n\geqslant 1} n e^{2\pi i n z}\,.$$

Für die höheren Fälle $k > 2$ leitet man die Identität für $k = 2$ sukzessive ab. *q.e.d.*

2.2 Elliptische Funktionen

2.2.1 Einführung

Problem Gibt es nicht-konstante holomorphe bzw. meromorphe Funktionen f auf $\mathbb{C}$ mit zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Perioden, d. h. existieren $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, die über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind und so dass $f(z+\omega_1) = f(z) = f(z+\omega_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Erinnerung. Eine auf $\mathbb{C}$ meromophe Funktion ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ derart, dass $S(f) = f^{-1}(\{\infty\})$ diskret in $\mathbb{C}$ ist, die Einschränkung $f_0 = f|_{\mathbb{C}\setminus S(f)}$ holomorph ist und alle Punkte aus $S(f)$ Pole von f_0 sind.

Sind f, g auf $\mathbb{C}$ meromorph, so ist $f_0 + g_0$ auf $\mathbb{C}\setminus(S(f)\cup S(g))$ holomorph und hat in $S(f)\cup S(g)$ nur unwesentliche Singularitäten, also lässt sich $f_0 + g_0$ eindeutig zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $f+g$ fortsetzen. Genauso kann man $f\cdot g$, f' und $\frac{f}{g}$ (für $g \not\equiv 0$) als meromorphe Funktionen definieren. Damit bilden die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen einen Körper.

Definition 2.5. Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{C}$ heißt GITTER[1], falls es über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$L = \{\, m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\,\} =: \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2\,.$$

Man nennt $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$ eine BASIS des Gitters L.

Beispiel 2.6. Ein [Bild, siehe altes Skript]

Bemerkung 2.7. (i) Man zeigt leicht: $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter mit Basis $\{\,\omega_1, \omega_2\,\}$. Dann ist $\{\,\omega_1', \omega_2'\,\}$ genau dann eine weitere Basis von L, wenn es ein $M \in GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{\, A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \mid \det A = \pm 1 \,\right\}$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}\,.$$

[1] Im Englischen *lattice*, deshalb werden Gitter mit L bezeichnet.

Index

Liste der Sätze