

---

# Funktionentheorie II

im Wintersemester 2017 / 18  
Vorlesung von Prof. Dr. Winfried Kohnen

---

Vorlesungsmitschrieb von  
Jonas Müller  
Heidelberg, den 26. Oktober 2017



# Vorwort

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung Funktionentheorie II von Prof. Winfried Kohnen aus dem Wintersemester 2017 / 18. Bei Fehlern meldet euch gerne bei mir

Dieses Skript befindet sich (bald) auf GitHub.



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Wiederholung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Konstruktion meromorpher und holomorpher Funktionen</b>	<b>3</b>
1.1	Partialbruchzerlegung . . . . .	3
1.2	Unendliche Produkte . . . . .	9



# 0 Wiederholung

**Definition 0.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  heißt HOLOMORPH, falls  $f$  in jedem  $z_0 \in D$  komplex differenzierbar ist, d. h.

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert.

**Satz 0.2 (CAUCHYSCHER INTEGRALSATZ FÜR STERNGEBIETE).** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Sterngebiet,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

(i)  $f$  hat auf  $D$  eine Stammfunktion.

(ii)  $\int_C f(z) dz = 0$  für jede stückweise glatte, geschlossene Kurve  $C \subseteq D$ .

**Satz 0.3 (CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL).** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ . Dann gilt für alle  $z \in U_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

wobei  $C$  gegeben ist durch  $z_0 + re^{2\pi i t}$  für  $t \in [0, 1]$ .

Daraus folgen einige Aussagen:

- $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann ist  $f \in \mathcal{C}^\infty$ .
- Satz von Taylor:  $f: U_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

- $f$  ist genau dann auf  $D$  holomorph, wenn  $f$  auf  $D$  analytisch ist.
- Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen
  - Identitätssatz
  - Satz von der Gebietstreue
  - Maximumsprinzip

**Definition 0.4 (SINGULARITÄTEN).** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $a \notin D$ ,  $\dot{U}_r(a) \subseteq D$ . Dann heißt  $a$  eine SINGULARITÄT von  $f$ . Die Klassifikationen einer Singularität sind

- 
- $a$  ist *hebbar* (Riemannscher Hebbarkeitssatz)
  - $a$  ist ein *Pol* ( $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$  wobei  $z \neq a$  gelten muss)
  - $a$  ist *wesentlich* (Casorati-Weierstraß)

**Satz 0.5 (LAURENTZERLEGUNG).** Sei  $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$  ein Ringgebiet mit  $0 \leq r < R \leq \infty$ ,  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung

$$f(z) = g(z - a) + h\left(\frac{1}{z - a}\right) \quad z \in \mathcal{R}$$

wobei  $g: U_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  der NEBENTEIL und  $h: U_{r^{-1}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$  der HAUPTTEIL holomorph mit  $h(0) = 0$ .

Anwendung auf Singularitäten:  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $a$  eine Singularität von  $f$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  mit  $\dot{U}_\delta(a) \subseteq D$ . Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n \quad z \in \dot{U}_\delta(a)$$

→  $a$  ist genau dann hebbar, wenn  $a_n = 0$  für alle  $n \leq -1$ .

→  $a$  ist genau dann ein Pol der Ordnung  $m \geq 1$ , wenn  $a_{-m} \neq 0$  und  $a_n = 0$  für alle  $n < -m$ .

→  $a$  ist genau dann wesentlich, wenn es unendlich viele  $n < 0$  gibt mit  $a_n \neq 0$ .

**Satz 0.6 (RESIDUENSATZ).** Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  ein Elementargebiet,  $z_1, \dots, z_h \in D$ ,  $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_h\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $C$  eine glatte geschlossene Kurve in  $D \setminus \{z_1, \dots, z_h\}$ . Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^h \operatorname{res}_{z=z_j} f \cdot \mathcal{X}(C, z_j)$$

wobei  $\operatorname{res}_{z=z_j} f$  das Residuum von  $f$  ist und  $\mathcal{X}(C, z_j)$  die Umlaufzahl von  $C$  um  $z_j$  ist.



# 1 Konstruktion meromorpher und holomorpher Funktionen

## 1.1 Partialbruchzerlegung

**Satz 1.1 (PARTIALBRUCHZERLEGUNG RATIONALER FUNKTIONEN).** Seien  $p, q$  zwei Polynome über  $\mathbb{C}$ ,  $q \neq 0$  und  $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $q(z) \neq 0$  die zugehörige rationale Funktion. Seien  $z_1, \dots, z_h$  die verschiedenen Polstellen mit den Ordnungen  $\mu_1, \dots, \mu_h$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome  $p_1(z), \dots, p_h(z)$  mit  $p_r(0) = 0$  ( $r = 1, \dots, h$ ) und ein eindeutig bestimmtes Polynom  $p_0$ , so dass gilt

$$R(z) = \sum_{r=1}^h p_r \left( \frac{1}{z - z_r} \right) + p_0(z) \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_h\}$$

Außerdem gilt  $\deg p_r = \mu_r$  für  $r = 1, \dots, h$ .

*Beweis.* Für jedes  $r = 1, \dots, h$  sei  $p_r$  der Hauptteil der Laurententwicklung von  $R$  bezüglich der Polstelle  $z_r$ . Dann ist  $p_r$  ein Polynom vom Grad  $\mu_r$ . Sei

$$p_0(z) := R(z) - \sum_{r=1}^h p_r \left( \frac{1}{z - z_r} \right).$$

Dann hat  $p_0$  keinen Hauptteil mehr, d. h.  $p_0$  hat in  $z_1, \dots, z_h$  hebbare Singularitäten, ist also auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph. Aber  $p_0$  ist nach Konstruktion eine rationale Funktion. Also ist  $p_0$  ein Polynom. Das heißt es existieren  $p_0, \dots, p_h$  wie behauptet, es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei eine weitere Darstellung wie oben gegeben durch  $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_h$ . Sei  $\nu \in \{1, \dots, h\}$ . Dann gilt

$$R(z) = \tilde{p}_\nu \left( \frac{1}{1 - z_\nu} \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \nu}}^h \tilde{p}_r \left( \frac{1}{1 - z_r} \right) + \tilde{p}_0(z) \quad (1.1)$$

$$= p_\nu \left( \frac{1}{1 - z_\nu} \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq \nu}}^h p_r \left( \frac{1}{1 - z_r} \right) + p_0(z). \quad (1.2)$$

Die ersten Summanden sind in einer kleinen punktierten Umgebungen von  $z_0$  holomorph, der Rest in der gesamten Umgebung. Also ist (1) die Laurentzerlegung von  $R$  bezüglich  $z_\nu$ . Da die Laurententwicklung eindeutig ist, folgt  $p_\nu u = \tilde{p}_\nu u$ . Da dies für alle  $\nu \in \{1, \dots, h\}$  gilt, folgt bereits  $p_0 = \tilde{p}_0$ . *g.e.d.*

## 1.1. Partialbruchzerlegung

*Ziel:* Man beweise einen ähnlichen Satz für beliebige meromorphe Funktionen auf  $\mathbb{C}$ . (Erinnerung: eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$  wird gegeben durch eine holomorphe Abbildung  $f: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $S \subseteq \mathbb{C}$  diskret ist, d. h.  $S$  hat in  $\mathbb{C}$  keinen Häufungspunkt (insbesondere ist  $\mathbb{C} \setminus S$  offen), und die Punkte aus  $S$  sind Pole von  $f$ .)

*Problem:* Ist  $S$  unendlich, so ist die Summe über die Hauptteile  $\sum_{s \in S} p_s \frac{1}{z-s}$  im Allgemeinen nicht mehr konvergent.

*Lösung:* Man addiere konvergenz erzeugende Summanden!

**Satz 1.2 (PARTIALBRUCHSATZ VON MITTAG-LEFFLER).** (i) Sei  $S \subseteq \mathbb{C}$  diskret. Jedem  $s \in S$  sei eine ganze Funktion  $h_s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h_s(0) = 0$  zugeordnet. (Man nennt  $\{h_s\}_{s \in S}$  eine HAUPTTEILVERTEILUNG.) Dann gibt es eine holomorphe Funktion  $h: \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Hauptteil in  $s \in S$  durch  $h_s(\frac{1}{z-s})$  gegeben wird. (Man nennt  $h$  eine Lösung der Hauptteilverteilung.) Ist  $H$  eine weitere Lösung, so existiert eine ganze Funktion  $g$  mit  $H = h + g$ .

(ii) Sei  $f$  eine auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion mit einer Polstellenmenge  $S$  und Hauptteilen  $p_s$  ( $s \in S$ ). (Beachte:  $p_s$  ist ein Polynom mit  $p_s(0) = 0$ .) Dann existieren Polynome  $q_s$  ( $s \in S$ ) und eine ganze Funktion  $g$ , sodass gilt

$$f(z) = \sum_{s \in S} \left( p_s \left( \frac{1}{z-s} \right) - q_s(z) \right) + g(z)$$

wobei die Summe in der Klammer auf kompakten Teilmengen  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  absolut gleichmäßig konvergiert.

*Beweis.* (i) Ist  $S$  endlich, so ist  $h(z) = \sum_{s \in S} h_s(\frac{1}{z-s})$  eine Lösung (siehe Beweis von Satz 1.1).

Sei nun  $S$  unendlich. Zeige dafür zunächst, dass  $S$  abzählbar ist. Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt, dann ist  $K \cap S$  beschränkt.

Angenommen  $K \cap S$  ist unendlich. Nach Bolzano-Weierstraß hat dann  $K \cap S$ , also auch  $S$ , einen Häufungspunkt.  $\nmid$

Also ist  $S \cap K$  endlich. Da  $\mathbb{C} = \bigcap_{n \geq 1} \overline{U_n(0)}$  und  $\overline{U_n(0)}$  kompakt, ist  $S$  abzählbar.

Sei  $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$  eine Abzählung derart, dass

$$|s_0| \leq |s_1| \leq \dots \leq |s_n| \leq \dots \rightarrow \infty$$

(Beachte: falls  $0 \in S$ , dann  $s_0 = 0$ , ferner  $|s_n| > 0$  für  $n \geq 1$ .) Schreibe  $h_n := h_{s_n}$  für  $n \geq 0$ .

Sei nun  $n \geq 1$  fest. Dann ist die auf der offenen nichtleeren Kreisscheibe  $U_{|s_n|}(0)$  holomorphe Funktion  $h_n(\frac{1}{z-s_n})$  um den Ursprung in eine Potenzreihe entwickelbar (Taylor), welche auf kompakten Teilmengen gleichmäßig absolut konvergiert. Nach Definition der Konvergenz existiert daher ein Polynom  $q_n(z)$  sodass

$$\left| h_n \left( \frac{1}{z-s_n} \right) - q_n(z) \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall z \in \mathbb{C}: |z| \leq \frac{|s_n|}{2}$$

Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt. Dann existiert  $N \in \mathbb{N}$  sodass für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  und  $z \in K$  gilt  $|z| \leq \frac{|s_n|}{2}$  (denn  $|s_n| \rightarrow \infty$ ). Es folgt dass die Reihe

$$h(z) := h_0 \left( \frac{1}{z - s_0} \right) + \sum_{n \geq 1} \left( h_n \left( \frac{1}{z - s_n} \right) - q_n(z) \right)$$

auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  gleichmäßig absolut konvergiert, denn  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$ . Nach Weierstraß ist daher  $h(z)$  auf  $\mathbb{C} \setminus S$  holomorph. Schreibt man  $h(z) = h_m(\frac{1}{z-s_m}) + \text{Rest}$  ( $m \geq 0$  fest), so folgt, dass  $h(z)$  eine Lösung der Hauptteilverteilung ist.

Sei  $H$  eine weitere Lösung. Dann haben  $h$  und  $H$  dieselbe Postellenmenge  $S$  und die gleichen Hauptteile für  $s \in S$ . Daraus folgt  $g(z) := H(z) - h(z)$  hat in allen Punkten  $s \in S$  hebbare Singularitäten, ist also ganz.

- (ii) Sei  $\{p_s\}_{s \in S}$  die angegebene Hauptteilverteilung. Dieser hat als Lösung per Definition  $f$ . Ferner existiert die im Beweis von Satz 2, (i) konstruierte Lösung. Nach der Eindeutigkeit stimmen daher beide Lösung bis auf eine ganze Funktion  $g$  überein.

*g.e.d.*

*Praktische Anwendung von Satz 2* Gegeben sei eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $\mathbb{C}$  mit Polstellenmenge  $S$ .

- (i) Man bestimme die Hauptteile für alle  $s \in S$ .
- (ii) Man untersuche  $\sum_{s \in S} p_s(\frac{1}{z-s})$  auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls Polynome  $q_s$  ( $s \in S$ ) (durch Abbruch der entsprechenden Taylor-Reihe), sodass  $\sum_{s \in S} (p_s(\frac{1}{z-s}) - q_s(z))$  auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$  gleichmäßig absolut konvergiert.
- (iii) Man bestimme eine ganze Funktion  $g$ , so dass

$$f(z) = \sum_{s \in S} \left( p_s \left( \frac{1}{z - s} \right) - q_s(z) \right) + g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus S$$

**Beispiel 1.3.** (i) Es gilt

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

wobei die Summe rechts auf Kompakta  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut konvergiert.

*Beweis.* Siehe unten.

*g.e.d.*

- (ii) *Partialbruchzerlegung des Kotangens*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}) \quad (1.4)$$

## 1.1. Partialbruchzerlegung

---

*Beweis.* Siehe unten.

*g.e.d.*

*Beweis.* (i) Die Polstellenmenge ist offensichtlich  $S = \mathbb{Z}$ .

Bestimmung der Hauptteile: Sei  $z \neq 0$ ,  $z$  nahe bei Null. Dann ist

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot (1 + a_2 z^2 + \dots)$$

wobei  $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$  in  $z = 0$  eine hebbare Singularität dort den Wert 1 hat und eine gerade Funktion ist. Also

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \frac{1}{z^2} \cdot (1 + 2a_2 z^2 + \dots) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \dots$$

Also ist der Hauptteil in  $z = 0$  bereits  $\frac{1}{z^2}$ .

Sei  $n \in \mathbb{Z}$  fest. Für  $z \neq n$ ,  $z$  nahe bei  $n$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z - n) + \pi n)} \\ &= \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z - n))} \\ &= \frac{1}{(z - n)^2} + 2a_2 + \dots \end{aligned}$$

Also ist der Hauptteil von  $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$  von  $z = n$  bereits  $\frac{1}{(z - n)^2}$ .

Konvergenz der Reihe in (3): Sei  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt. Es gelte  $|z| \leq c$  für  $z \in K$ . Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $|n| \geq 2c$  gilt

$$|z - n| = |n - z| \geq |n| - |z| \geq |z| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \forall z \in K$$

Also

$$\sum_{|n| \geq 2c} \frac{1}{|z - n|^2} \leq \sum_{|n| \geq 2c} \frac{4}{|n|^2} < \infty$$

Daher ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2}$$

auf Kompakta in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gleichmäßig absolut konvergent.

*Folgerung:* Beide Seiten von (3) sind auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  holomorphe Funktionen mit den gleichen Polstellen und gleichen Hauptteilen. Daher folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} + g(z) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z})$$

wobei  $g$  ganz ist.

Zeige  $g \equiv 0$ . Es gilt für  $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin^2 \pi z &= \left| \frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}) (\overline{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{4} (e^{-2\pi y} + e^{2\pi y}) - \frac{1}{2} \cos(2\pi x) \\ &\xrightarrow{|y| \rightarrow \infty} \infty \quad \text{gleichmäßig in } x\end{aligned}$$

denn  $\cos(2\pi x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) ist beschränkt. Also  $\left| \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \right| \rightarrow 0$  für  $|y| \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $x$ . Insbesondere ist  $\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}$  beschränkt auf

$$R := \{ z = x + iy \mid |x| \leq 1, |y| \geq 1 \}$$

Zeige rechte Seite von (3) ebenfalls auf  $R$  beschränkt. Sei  $z \in R, n \neq 0$ . Dann

$$\begin{aligned}|z - n|^2 &= (x - n)^2 + y^2 = |n - x|^2 + y^2 \\ &\geq (|n| - |x|)^2 + y^2 \geq (|n| - 1)^2 + y^2 \\ &\geq (|n| - 1)^2 + 1\end{aligned}$$

Also für  $z \in R$  gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|z - n|^2} \leq 1 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(|n| - 1)^2 + 1} < \infty \quad (1.5)$$

Daher ist  $g(z)$  auf  $R$  beschränkt. Aber  $g(z + 1) = g(z)$  für  $z \in \mathbb{C}$ . Trivialerweise ist  $g$  auf  $\{ z = x + iy \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1 \}$  beschränkt. Also ist  $g$  auf  $\mathbb{C}$  beschränkt, nach Liouville ist  $g \equiv c$  konstant.

Aus (5) folgt, dass  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2}$  gleichmäßig absolut konvergiert. Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  mit  $x \in \mathbb{R}$  fest. Dann folgt

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z - n|^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|z - n|^2} = 0,$$

da

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|z - n|^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{(x - n)^2 + y^2} = 0.$$

Und wir wissen bereits, dass  $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} \rightarrow 0$  für  $|y| \rightarrow \infty$ . Also muss bereits gelten  $c = 0$ .

## 1.1. Partialbruchzerlegung

---

- (ii) Vorgehen wie in (i): Man sieht  $S = \mathbb{Z}$  und der Hauptteil in  $z = n \in \mathbb{Z}$  ist  $\frac{1}{z-n}$ . Da  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$  schlechte Konvergenzeigenschaften hat, muss man Polynome abziehen. Beachte für  $n \neq 0$  ist  $\frac{1}{z-n}|_{z=0} = -\frac{1}{n}$ . Damit folgt dann die Behauptung.

Alternativ kann man (i) + Trick benutzen: Differenziere beide Seiten von (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(z-n)^2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\pi \cot(\pi z)) &= \pi \frac{d}{dz} \left( \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right) \\ &= \pi \frac{-\pi \sin(\pi z) \sin(\pi z) - \pi \cos(\pi z) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)^2}. \end{aligned}$$

Da  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ein Gebiet ist, unterscheiden sich die rechte und linke Seite (da die Ableitungen nach (i) gleich sind) nur um eine Konstante  $c$ . Zeige  $c = 0$ . Hierfür zeige, dass  $\pi \cot(\pi z)$  und  $\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$  ungerade sind. Es gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{-z-n} + \frac{1}{n} \right) &= - \left( \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \right) \\ &= - \left( \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt folgt, wenn wir  $n \mapsto -n$  ersetzen, was eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  auf sich selbst ist.

Es muss also gelten, dass  $c$  ungerade ist. Für eine ungerade Konstante gilt bereits  $c = 0$ .

*g.e.s.*

## 1.2 Unendliche Produkte

Gegeben sei eine Folge  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen. Wir wollen nun in sinnvoller Weise das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

definieren. Ein naheliegender Vorschlag dafür ist:  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  heißt konvergent, falls die Folge  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  der Partialprodukte  $P_N = \prod_{n=1}^N p_n$  konvergent ist. In diesem Fall setzen wir

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \lim_{N \rightarrow \infty} P_N =: P.$$

Das Problem was sich mit dieser Definition stellt ist, dass falls einer der Faktoren Null ist, so ist der Wert des Produktes gleich 0. Dieses hängt also gar nicht von der Gesamtheit der Faktoren ab. Ferner möchte man oft  $\prod_{n=1}^N p_n$  bzw.  $P$  mit der Summe  $\sum_{n=1}^N \log p_n$  bzw. mit  $\log P$  vergleichen. Und das geht nur falls  $p_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und entsprechend  $P \neq 0$ . Später wollen wir allerdings holomorphe Funktionen als Produkte darstellen, dies sollte auch möglich sein, wenn diese Nullstellen haben.

**Definition 1.4 (UNENDLICHES PRODUKT).** Sei  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  derart, dass nur endlich viele der  $p_n$  Null sind. Sei  $m \in \mathbb{N}$  der größte Index mit  $p_m = 0$  (und  $m := 0$ , falls  $p_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ). Dann heißt das UNENDLICHE PRODUKT

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

konvergent, falls der Limes

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ N \geq m+1}} P_N \text{ mit } P_N = \prod_{n=m+1}^N p_n$$

existiert und ungleich Null ist. Man setzt dann

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n := \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} P_N & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dabei ist zu beachten, dass nach Definition ein konvergentes unendliches Produkt den Wert 0 genau dann hat, wenn ein Faktor gleich Null ist.

**Beispiel 1.5.** (i) Das unendliche Produkt  $\prod_{n \geq 2} (1 - \frac{1}{n^2})$  ist konvergent und hat den Wert  $\frac{1}{2}$ .

## 1.2. Unendliche Produkte

---

*Beweis.* Zunächst sind alle Faktoren ungleich Null und

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \\ &= \frac{(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (N-1)) \cdot (3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (N+1))}{(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N) \cdot (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{N+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*g.e.d.*

- (ii)  $\prod_{n \geq 1} (1 - \frac{1}{n^2}) = 0 \cdot \prod_{n \geq 2} (1 - \frac{1}{n^2})$  ist konvergent und hat Wert 0  
 (iii)  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist nicht konvergent in unserem Sinn. Denn

$$P_N = \prod_{n=1}^N \frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

**Satz 1.6.** (i) Ist  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  konvergent, so gilt notwendigerweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ .

(ii) Sei  $p_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  konvergent genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$$

konvergiert. (Erinnerung  $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$  der Hauptwert des Logarithmus und  $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$  das Argument von  $z$ .) Insbesondere ist  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$ , so existiert  $h \in \mathbb{Z}$  so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$$

gilt. Ist umgekehrt  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$ , so gilt

$$e^S = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

*Beweis.* (i) Es ist

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{P}{P} = 1$$

für  $N \geq m+1$ , hierbei benutzt man  $p_n \neq 0$  für  $n \geq m+1$  und  $P \neq 0$ .



(ii) Es gelte

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} p_n$$

Also  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$  mit  $S_N = \sum_{n=1}^N \operatorname{Log} p_n$ . Da  $\exp$  stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 \neq e^S &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{S_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log p_1 + \dots + \log p_N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\log p_1} \cdot \dots \cdot e^{\log p_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} (p_1 \cdot \dots \cdot p_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N p_n = P \end{aligned}$$

*q.e.d.*

**Satz 1.7.** (i) Sei  $1 + a_n \neq 0$  für  $n \geq 1$ . Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + a_n)$$

genau dann absolut konvergent, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert.

(ii) Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergiert. Dann ist  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  konvergent. Außerdem ist das Produkt unbedingt konvergent, d. h. jede Umordnung konvergiert und hat den gleichen Limes.