Lista 2 - Programação Linear e Inteira

João Lucas Duim
Raphael Felberg Levy

08 de Março de 2022

Obs.: Todos os arquivos gerados no RStudio estão anexados, nomeados como *L2-Qx.R*, quando usamos o método de Solver **lp.transport** do pacote **lpSolve**, e *L2-QxB.R*, quando usamos o método **lp** apenas.

Questão 2

On a particular day during the tourist season a rent-a-car company must supply cars to four destinations according to the following schedule:

Destination	*Cars required*
A	2
B	3
C	5
D	7

The company has three branches from which the cars may be supplied. On the day in question, the inventory status of each of the branches was as follows:

Branch	*Cars available*
1	6
2	1
3	10

The distances between branches and destinations are given by the following table:

	Destination			
Branch	A	B	C	D
1	7	11	3	2
2	1	6	0	1
3	9	15	8	5

Plan the day's activity such that supply requirements are met at a minimum cost (assumed proportional to car-miles travelled).

Solução:

Nosso problema linear é:

Minimize $z = 7x_{1A} + 11x_{1B} + 3x_{1C} + 2x_{1D} + 1x_{2A} + 6x_{2B} + 1x_{2D} + 9x_{3A} + 15x_{3B} + 8x_{3C} + 5x_{3D}$ sujeito a:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 6$$
$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 1$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 10$$
$$- x_{1A} - x_{2A} - x_{3A} \leq -2$$
$$- x_{1B} - x_{2B} - x_{3B} \leq -3$$
$$- x_{1C} - x_{2C} - x_{3C} \leq -5$$
$$- x_{1D} - x_{2D} - x_{3D} \leq -7$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}; j \in \{A, B, C, D\}$$

Minimizando o custo do transporte entre filiais e destinos, encontramos que a solução ótima será uma distância total percorrida de 100 milhas, da seguinte maneira:

	A	**B**	**C**	**D**
1	0	1	5	0
2	0	1	0	0
3	2	1	0	7

Questão 4

A large retail sporting-goods chain desires to purchase 300, 200, 150, 500 and 400 tennis racquets of five differente types. Inquires are received from four manufacturers who will supply not more than the following quantities (all five types of racquets combined).

$M1$ 600

$M2$ 500

$M3$ 300

$M4$ 400

The store estimates that its profit per racquet will vary with the manufacturer as shown below:

	Racquets				
Manufacturer	R1	R2	R3	R4	R5
M1	5.50	7.00	8.50	4.50	3.00
M2	6.00	6.50	9.00	3.50	2.00
M3	5.00	7.00	9.50	4.00	2.50
M4	6.50	5.50	8.00	5.00	3.50

How should the orders be placed?

Solução: Aqui, queremos maximizar o lucro das lojas, porém nota-se que a oferta aqui está maior que a demanda:

Quantidade de raquetes disponíveis para venda: $600 + 500 + 300 + 400 = 1800$

Quantidade de raquetes a serem compradas: $300 + 200 + 150 + 500 + 400 = 1550$

Sendo assim, é preciso equilibrar essas quantidades, nesse caso criando uma coluna auxiliar de demanda (R6Aux) com demanda 250 e custos de entrega 0.

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**
M1	5.5	7.0	8.5	4.5	3.0
M2	6.0	6.5	9.0	3.5	2.0
M3	5.0	7.0	9.5	4.0	2.5
M4	6.5	5.5	8.0	5.0	3.5

$\Rightarrow$

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6Aux**
M1	5.5	7.0	8.5	4.5	3.0	0.0
M2	6.0	6.5	9.0	3.5	2.0	0.0
M3	5.0	7.0	9.5	4.0	2.5	0.0
M4	6.5	5.5	8.0	5.0	3.5	0.0

Assim, maximizando os lucros, encontramos como solução ótima um lucro de $8275, com as seguintes quantidades de raquetes sendo transferidas entre os fabricantes e a loja:

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6Aux**
M1	0	50	0	150	400	0
M2	250	0	0	0	0	250
M3	0	150	150	0	0	0
M4	50	0	0	350	0	0

Questão 5

A construction project involves 13 tasks; the tasks, their estimated duration, and their immediate predecessors are shown in the table below:

Task	*Immediate predecessors*	*Duration*
Task 1	—	1
Task 2	1	2
Task 3	—	3
Task 4	—	4
Task 5	1	2
Task 6	2,3	1
Task 7	4	2
Task 8	5	6
Task 9	5	10
Task 10	6,7	5
Task 11	8,10	3
Task 12	8,10	3
Task 13	12	2

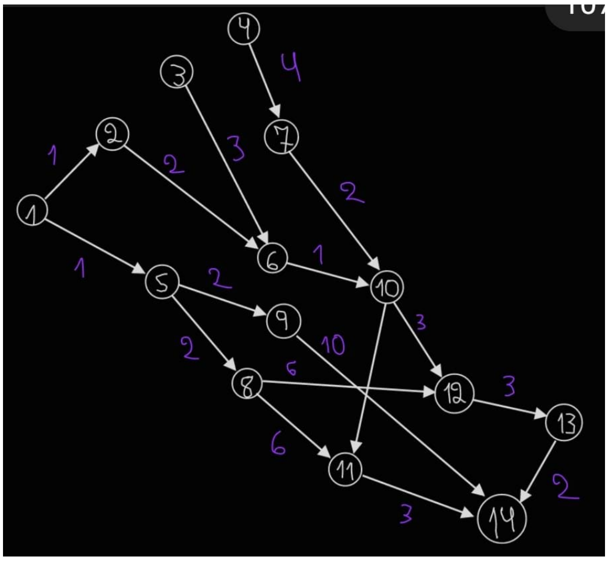
Our objective is to find the schedule of tasks that minimizes the total elapsed time of the project

a) Draw the event- and task-oriented networks for this problem and formulate the corresponding linear program.

b) Solve to find the critical path.

Solução:

a) Veja, nas figuras a seguir, os desenhos das rede pedida:



Para que tenhamos um nó final, considere a tarefa 14 com duração 0 como tendo pré-requisitos 9, 11 e 13. Para $i \in \{1, 2, ..., 13, 14\}$, seja t_i o momento mais cedo possível para que a tarefa i seja iniciada. Desejamos minimizar o tempo total da construção, ou seja, a função objetivo é minimizar $t_{14} - t_1$. Utilizando as restrições de pré-requisitos, a programação linear pedida é:

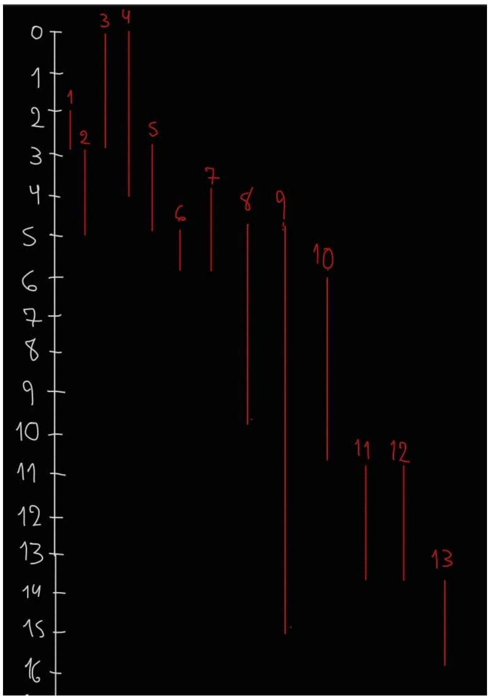
Minimize $t_{14} - t_1$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
& t_2 - t_1 \geq 1 \\
& t_5 - t_1 \geq 1 \\
& t_6 - t_2 \geq 2 \\
& t_6 - t_3 \geq 3 \\
& t_7 - t_4 \geq 4 \\
& t_8 - t_5 \geq 2 \\
& t_9 - t_5 \geq 2 \\
& t_{10} - t_6 \geq 1 \\
& t_{10} - t_7 \geq 2 \\
& t_{11} - t_8 \geq 6 \\
& t_{11} - t_{10} \geq 5 \\
& t_{12} - t_8 \geq 6 \\
& t_{12} - t_{10} \geq 5 \\
& t_{13} - t_{12} \geq 3 \\
& t_{14} - t_9 \geq 10 \\
& t_{14} - t_{11} \geq 3 \\
& t_{14} - t_{13} \geq 2 \\
& t_i \geq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., 14\}
\end{aligned}
$$

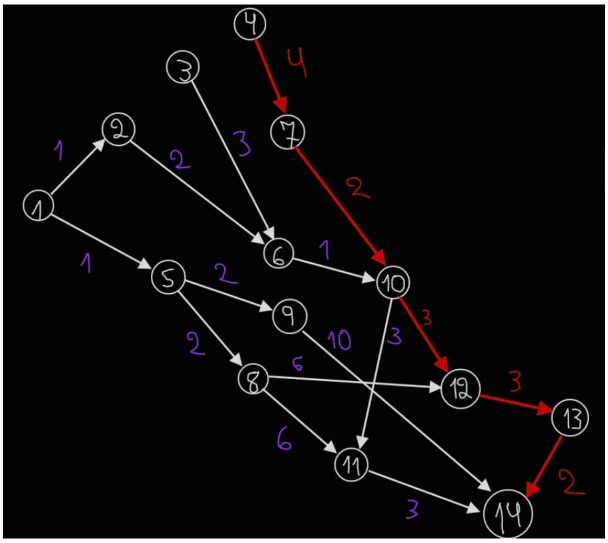
b) Veja a seguir a solução da programação linear acima:

t_1	0
t_2	2
t_3	0
t_4	0
t_5	2
t_6	3
t_7	2
t_8	8
t_9	13
t_{10}	8
t_{11}	11
t_{12}	11
t_{13}	13
t_{14}	13

Veja a linha do tempo de realização das tarefas:



Finalmente, podemos encontrar o caminho crítico:



Observação: A questão 5 foi resolvida usando apenas o método **lp**, ver arquivo *L2-Q5.R*. Além disso, a questão foi refeita incluindo um 14^o nó auxiliar, podendo ser encontrada no arquivo *L2-Q5B.R*.

Nota: Revendo a resolução da questão 5, notamos que as inequações estavam usando os valores incorretos. O código corrigido está no arquivo *L2-Q5_Final.R*, também usando o método **lp**.

Questão 6

The Egserk Catering Company manages a moderate-sized luncheon cafeteria featuring prompt service, delectable cuisine, and luxurious surroundings. The desired atmosphere requires fresh linen napkins, which must be available at the start of each day. Normal laundry takes one full day at 1.5 cents per napkin; rapid laundry can be performed overnight but costs 2.5 cents a napkin. Under usual usage rates, the current napkin supply of 350 is adequate to permit complete dependence upon the normal laundry; however, the additional usage resulting from a three-day seminar to begin tomorrow poses a problem. It is known that the napkin requirements for the next three days will be 300, 325, and 275, in that order. It is now midafternoon and there are 175 fresh napkins, and 175 soiled napkins ready to be sent to the laundry. It is against the health code to have dirty napkins linger overnight. The cafeteria will be closed the day after the seminar and, as a result, all soiled napkins on the third day can be sent to normal laundry and be ready for the next business day. The caterer wants to plan for the napkin laundering so as to minimize total cost, subject to meeting all his fresh napkin requirements and complying with the health code.

a) What are the decision variables?

b) Formulate the problem as a linear program.

c) Interpret the resulting model as a network-flow problem. Draw the corresponding network diagram.

d) For the optimal solution, do you expect the dual variable associated with tomorrow's requirement of 300 to be positive, zero, or negative, and why?

e) Suppose you could hold over dirty napkins at no charge; how would your formulation change?

Solução:

a) Seja dia 0 o dia antes do início dos seminários. As variáveis de decisão são x_{0R}, x_{1R}, x_{2R} e x_{3R}, as quantidades de guardanapos sujos enviados para lavagem rápida, respectivamente, nos dias 0, 1, 2 e 3.

b) Ao fim do dia 0, temos 175 guardanapos sujos e 175 limpos. No início do dia 1, teremos $175 + x_{0R}$, pois é a soma de guardanapos limpos do dia anterior com os guardanapos sujos do dia anterior enviados para a lavagem rápida. Como a demanda do dia 1 é de 300, ao fim do dia haverão 300 guardanapos sujos e $175 + x_{0R} - 300 = x_{0R} - 125$ guardanapos limpos.

Seguindo esse raciocínio, no início do dia 2, haverá $(x_{0R} - 125) + (175 - x_{0R}) + x_{1R} = x_{1R} + 50$, pois soma os guardanapos limpos ao fim do dia anterior com os enviados à lavagem rápida no dia anterior e com os enviados à lavagem normal ao fim do dia 0. Ao fim do dia 2, haverão 325 guardanapos sujos e $x_{1R} + 50 - 325 = x_{1R} - 275$. No início do dia 3, haverá $(x_{1R} - 275) + (300 - x_{1R}) + x_{2R} = x_{2R} + 25$ guardanapos limpos. Ao fim desse dia, haverão 275 guardanapos sujos e $x_{2R} + 25 - 275 = x_{2R} - 250$ guardanapos limpos.

O valor da função objetivo (minimizar custos) é $2,5 \cdot (x_{0R} + x_{1R} + x_{2R} + x_{3R}) + 1,5 \cdot (175 - x_{0R} + 300 - x_{1R} + 325 - x_{2R} + 275 - x_{3R}) = 1612,5 + x_{0R} + x_{1R} + x_{2R} + x_{3R}$. Logo, descartando a constante (por não influenciar no valor das variáveis) e considerando os custos de cada tipo de lavagem e que nunca haverá uma quantidade negativa de guardanapos em algum momento, encontramos a seguinte modelagem para o programa linear:

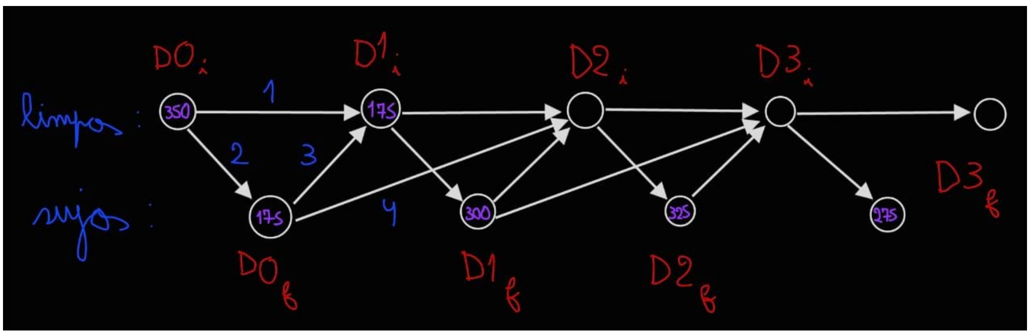
Minimize $x_{0R} + x_{1R} + x_{2R} + x_{3R}$ sujeito a:

$$\begin{aligned}
&x_{0R} - 125 \geq 0 \\
&175 - x_{0R} \geq 0 \\
&x_{1R} - 275 \geq 0 \\
&300 - x_{1R} \geq 0 \\
&x_{2R} - 250 \geq 0 \\
&x_{iR} \geq 0, \forall i \in \{0,1,2,3\}
\end{aligned}$$

Simplificando as restrições:

$$\begin{aligned}
&125 \leq x_{0R} \leq 175 \\
&275 \leq x_{1R} \leq 300 \\
&x_{2R} \geq 250 \\
&x_{iR} \geq 0, \forall i \in \{0,1,2,3\}
\end{aligned}$$

c) Veja, na figura a seguir, a rede que resume o problema.



Cada nó representa a quantidade de guardanapos (limpos se na linha de cima, sujos se na linha de baixo) no início ou fim de um determinado dia, indo da esquerda pra direita em ordem cronológica. Setas do tipo 1 representa guardanapos limpos ao fim de um dia que podem ser utilizados no dia seguinte; setas do tipo 2 representam guardanapos limpos no início do dia que foram utilizados e ficaram sujos ao fim do dia; setas do tipo 3 representam guardanapos que foram enviados à lavagem rápida e estarão disponíveis para uso no dia seguinte; setas do tipo 4 representam guardanapos que foram enviados à lavagem normal e estarão disponíveis para uso 2 dias depois. Setas do tipo 3 têm custo $2,5$ e setas do tipo 4 têm custo $1,5$.

e) Caso seja possível deixar guardanapos sujos de um dia para o outro sem nenhum custo, a rede acima teria 3 novos nós contendo a quantidade de guardanapos sujos no início dos dias 1, 2 e 3, além de que permitiria setas "do tipo 1" ligando os nós que representam os guardanapos sujos do fim de um dia para o início do dia seguinte ou do início de um dia para o fim do mesmo dia. Além disso, na descrição explícita da programação linear, seria necessário incluir as variáveis de decisão sobre quantos guardanapos continuarão sujos no momento seguinte.

Observação: A questão 6 foi resolvida usando apenas o método **lp**, ver arquivo *L2-Q6.R*.

Questão 8

Conway Tractor Company has three plants located in Chicago, Austin (Texas), and Salem (Oregon). Three customers located respectively in Tucson (Arizona), Sacramento (California), and Charlestown (West Virginia) have placed additional orders with Conway Tractor Company for 10, 8, and 10 tractors, respectively. It is customary for Conway Tractor Company to quote to customers a price on a delivered basis, and hence the company absorbs the delivery costs of the tractors. The manufacturing cost does not differ significantly from one plant to another, and the following tableau shows the delivery costs incurred by the firm.

	Destination		
Plant	Tucson	Sacramento	Charlestown
Chicago	150	200	70
Austin	70	120	80
Salem	80	50	170

The firm is now facing the problem of assigning the extra orders to its plants to minimize delivery costs and to meet all orders (The Company, over the years, has established a policy of first-class service, and this includes quick and reliable delivery of all goods ordered). In making the assignment, the company has to take into account the limited additional manufacturing capacity at its plants in Austin and Salem, of 8 and 10 tractors, respectively. There are no limits on the additional production capacity at Chicago (as far as these extra orders are concerned)

a) Formulate as a transportation problem.

b) Solve completely.

Solução:

a) Nessa questão, queremos fazer o transporte entre as plantas de Chicago, Austin e Salem para as filiais de Tucson, Sacramento e Charlestown, onde as plantas oferecem, respectivamente, 10, 8 e 10 tratores (Chicago não possui limite de produção, mas como queremos minimizar o custo de transportes, iremos utilizar o número mínimo necessário de tratores), enquanto as filiais podem receber, respectivamente, 10, 8 e 10 tratores cada uma. Assim, nossa função objetivo será:

Minimize $z = 150x_{1A} + 200x_{1B} + 70x_{1C} + 70x_{2A} + 120x_{2B} + 80x_{2C} + 80x_{3A} + 50x_{3B} + 170x_{3C}$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 10 \\
&x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 8 \\
&x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 10 \\
&-x_{1A} - x_{2A} - x_{3A} \leq -10 \\
&-x_{1B} - x_{2B} - x_{3B} \leq -8 \\
&-x_{1C} - x_{2C} - x_{3C} \leq -10 \\
&x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1,2,3\}; j \in \{A,B,C\}
\end{aligned}
$$

b) Resolvendo o programa, chegamos a seguinte matriz de transporte:

	Tucson	**Sacramento**	**Charlestown**
Chicago	0	0	10
Austin	8	0	0
Salem	2	8	0

Sendo assim, o custo mínimo será de $10.70 + 8.70 + 2.80 + 8.50 = 700 + 560 + 160 + 400 = \$1820$.

Questão 10

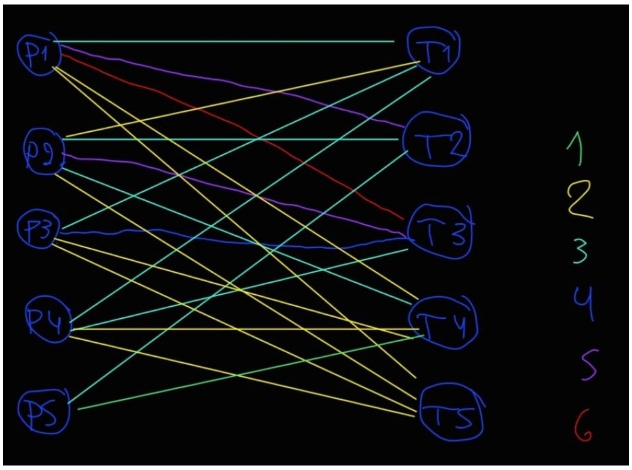
Colonel Cutlass, having just taken command of the brigade, has decided to assign men to his staff based on previous experience. His list of major staff positions to be filled is adjutant (personnel officer), intelligence officer, operations officer, supply officer, and training officer. He has five men he feels could occupy these five positions. Below are their years of experience in the several fields.

	Adjutant	*Intelligence*	*Operations*	*Supply*	*Training*
Major Muddle	3	5	6	2	2
Major Whiteside	2	3	5	3	2
Captain Kid	3	—	4	2	2
Captain Klutch	3	—	3	2	2
Lt. Whiz	—	3	—	1	—

Who, based on experience, should be placed in which positions to give the greatest total years of experience for all jobs? (*Hint*. A basis, even if degenerate, is a spanning tree.)

Solução:

Veja, na figura a seguir, a rede que conecta cada pessoa P_i a uma tarefa T_j que ela pode realizar, tomando como peso da aresta sua experiência com aquela tarefa.



Considere x_{ij} assumindo valor 1 caso a pessoa i seja designada para a tarefa j e assumindo valor 0 caso contrário.

Como uma pessoa realizará 1 e somente 1 trabalho, temos a seguinte modelagem:

Maximize $3x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 2x_{14} + 2x_{15} + 2x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23} + 3x_{24} + 2x_{25} + 3x_{31} + 4x_{33} + 2x_{34} + 2x_{35} + 3x_{41} + 3x_{43} + 2x_{44} + 2x_{45} + 3x_{52} + x_{54}$ sujeito a:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1\\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1\\
&x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1\\
&x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1\\
&x_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Resolvendo o programa, obtemos que a pessoa Captain Kid (3) deve pegar Adjutant (1), Lt. Whiz (5) deve pegar Intelligence (2), Major Muddle (1) deve pegar Operations (3), Major Whiteside (2) deve pegar Supply (4) e Captain Klutch (4) deve pegar Training (5).