João Viktor de Carvalho Mota 160127823

Controle Digital - Prova 2

1) $G(s) = \dfrac{300e^{-15s}}{(10s+1)(25s+1)}$ $T = 15\,min$ $G_c(z) = K_p + K_i\dfrac{z+1}{z-1} + K_D\dfrac{z-1}{z+1}$

$$G(z) = Z\{G_{ZOH}\cdot G(s)\} = (1-z^{-1}).Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1}).z^{-1}.Z\left\{\frac{300}{s(10s+1)(25s+1)}\right\}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(z-1)}{z^2}Z\left\{\frac{1,2}{s(s+0,1)(s+0,04)}\right\} \Rightarrow A(s+0,1)(s+0,04) + Bs(s+0,04) + C(s(s+0,1)) = 1,2$$

$A = 300$ $B = 200$ $C = -500$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(z-1)}{z^2}.Z\left\{\frac{300}{s} + \frac{200}{s+0,1} - \frac{500}{s+0,04}\right\} = \frac{(z-1)}{z^2}.\left(\frac{300z}{z-1} + \frac{200z}{z-e^{-0,1.15}} - \frac{500z}{z-e^{-0,04.15}}\right)$$

$$= \left(\frac{300}{z} + \frac{200(z-1)}{z(z-0,2231)} - \frac{500(z-1)}{z(z-0,5488)}\right) = \frac{300(z-0,2231)(0,5488) + 200(z-1)(z-0,5488)\ldots}{z(z-0,2231)(z-0,5488)}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{70,22z+34,93}{z^2-0,7719z+0,1225}.z^{-1} = \frac{70,22z+34,93}{z(z^2-0,7719z+0,1225)}$$

a) K_i e $K_D = 0$ $Mf = 50,0° \pm 0,2°$

Como queremos Margem de Fase de 50°:

Fazendo $G(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1+7,5w}{1-7,5w}} = \dfrac{70,22\cdot\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right) + 34,93}{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right)^3 - \left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right)^2.0,7719 + \left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right).0,1225}$

$$G(w) = \frac{70,22.(1+7,5w)(1-7,5w)^2 + 34,93.(1-7,5w)^3}{(1+7,5w)^3 - 0,7719.(1+7,5w)^2.(1-7,5w) + 0,1225.(1+7,5w)(1-7,5w)^2}$$

$$G(w) = \frac{18,63w^3 + 2,434w^2 - 1,642w + 0,1316}{w^3 + 0,2569w^2 + 0,01976w + 0,0004386}$$

Com G(w) se faz o Bode no Matlab e percebemos que Margem de fase é infinito, como (mostrado no final)

nós queremos 50° ± 0,2 de Margem de fase, logo queremos 0 dB na frequência onde a fase é 230 (180 + 50°). A frequência vista pelo gráfico é 0,0463 rad/s e então a magnitude nesta frequência é 45,1 dB. Isso significa que queremos descer o gráfico de magnitude em 45,1 dB. Usando $Mag = 10^{-45,1/20} \Rightarrow 0,0056$ Logo $K_p = 0,0056$

Fazendo bode no Matlab de $K_p \cdot G(w)$ chegamos em Margem de fase de 50,2° que está dentro dos requisitos

Erro estacionário: $\dfrac{1}{1+K_p'}$ com $K_p' = \lim_{w \to 0} G(w) \cdot K_p \Rightarrow$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\left(\frac{0,0056 \cdot 0,1316}{0,0004386}\right)} = \frac{1}{1+1,6803} = 0,3731$$

$$|G(w) \cdot K_p| = 1 \Rightarrow G(w) \cdot K_p = 0,0056 \cdot \frac{(-18,63 jw^3 - 2,434 w^2 - 1,642 jw + 0,1316)}{-jw^3 - 0,2569 w^2 + 0,01976 jw + 0,0004386}$$

$$\text{Fazendo módulo} = \frac{\sqrt{(-2,434 w^2 + 0,1316)^2 + (-18,63 w^3 - 1,642 w)^2}}{\sqrt{(-0,2569 w^2 + 0,0004386)^2 + (-w^3 + 0,01976 w)^2}} = \frac{1}{0,0056}$$

Usando Wolfram Alpha chegamos em $w = 0,0469438$

Ou olhando no bode do resultado no ponto onde é 0 dB no Matlab (gráfico no final)

b) Considerando $G_c(z) = K_p + K_i \frac{(z+1)}{(z-1)} + K_D \frac{(z-1)}{(z+1)}$

e $G(w) = \frac{18{,}63w^3 + 2{,}434w^2 - 1{,}642w + 0{,}1616}{w^3 + 0{,}2569w^2 + 0{,}01976w + 0{,}0004386}$

Ess nulo para entrada degrau: $K_p' = \lim_{w \to 0} G(w) \cdot G_c(w)$

$G_c(w) = K_p + K_i \frac{\left(\frac{1+7{,}5w}{1-7{,}5w} + 1\right)}{\left(\frac{1+7{,}5w}{1-7{,}5w} - 1\right)} + K_D \frac{\left(\frac{1+7{,}5w}{1-7{,}5w} - 1\right)}{\left(\frac{1+7{,}5w}{1-7{,}5w} + 1\right)} = K_p + \frac{K_i \cdot 2}{15w} + \frac{K_D\, 15w}{2}$

$G_c(w) = K_p + \frac{0{,}133\,K_i}{w} + K_d 7{,}5w = \frac{K_p w + 0{,}133 K_i + K_d 7{,}5w^2}{w}$

$K_p' = \lim_{w \to 0} G(w) \cdot G_c(w) = \frac{0{,}1616}{0{,}0004386} \cdot K_p + \frac{0{,}133 K_i}{\cancel{0}}$

$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p \to \infty} = 0$ se $K_i \neq 0$

frequência de cruzamento $w = 0{,}0469438/2 = 0{,}0235$

Como $G_c(jw) = \frac{K_p jw + K_i \cdot 0{,}133 - 7{,}5 K_d \cdot w^2}{jw}$

Logo $|G(w) \cdot G_c(w)| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{(K_p w - 7{,}5w^2 K_d)^2 + (K_i\, 0{,}133)^2}}{\sqrt{w^2}} \cdot \underbrace{|G(w_i)|}_{251{,}621} = 1$

em $w = 0{,}0235i$

$\Rightarrow$ Feito em Wolfram alpha:

$K_d^2 - 11{,}4634 K_d K_p + 1052{,}29 K_i^2 + 32{,}8525 K_p^2 = 0{,}00052$

Como queremos frequência de cruzamento em $0{,}0235 \Rightarrow 48\,dB \Rightarrow 0{,}004$ de mag

Logo $K_d 7{,}5 = 0{,}004 \Rightarrow K_d = 0{,}0005$ 7 trans

Usando Wolfram fica $K_p = 0{,}00087$ e $K_i = 0{,}0007$ substituindo na equação

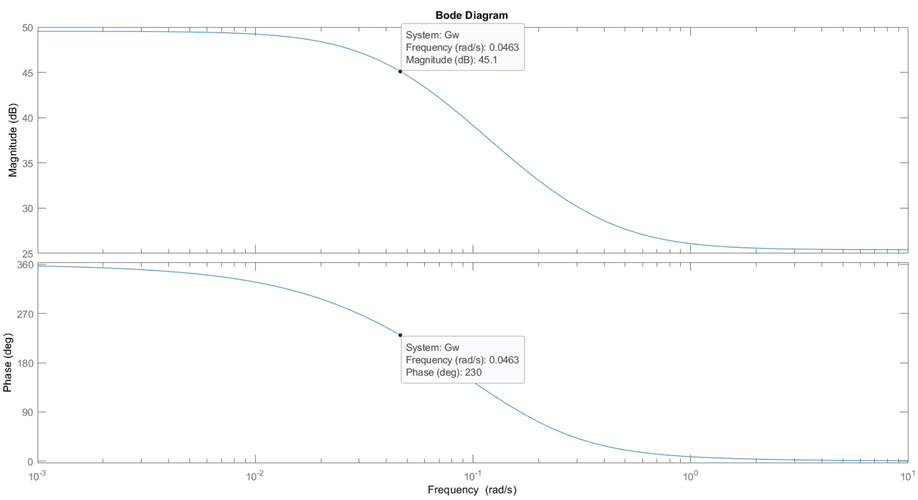
Controle Digital
Prova 2 - Questão 1

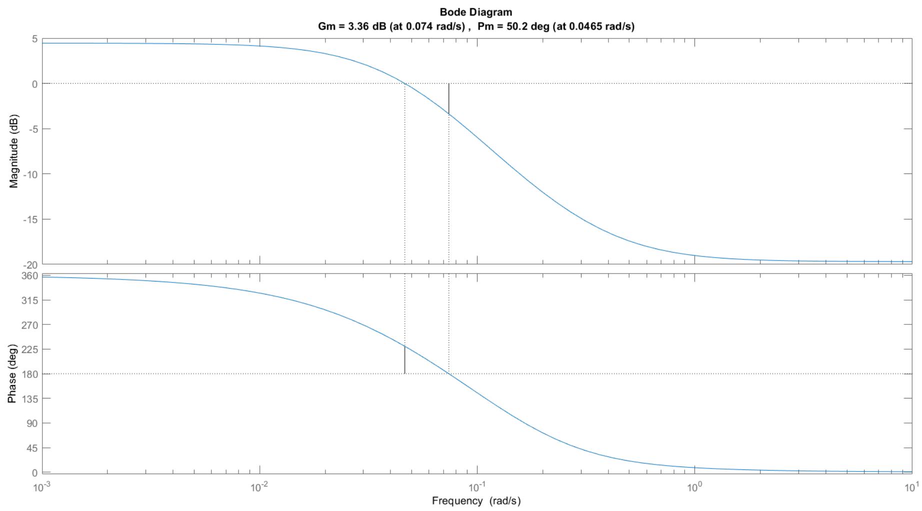
João Viktor de Carvalho Mota - 160127823

1. letra a

```
G1 = tf([300],[250 35 1])
zz = tf([1],[1 0],15)
Gz = c2d(G,15,'zoh')
Gzz = Gz*zz
Gw=d2c(Gzz,'Tustin')
bode(Gw)
c = db2mag(-45.1)
margin(c*Gw)
```

Figure 1. Codigo no Matlab da Questão 1





Input:

$$\frac{\sqrt{(-2.434\,v^2 + 0.1316)^2 + (-18.63\,v^3 - 1.642\,v)^2}}{\sqrt{(-0.2569\,v^2 + 0.0004386)^2 + (-v^3 + 0.01976\,v)^2}} = \frac{1}{0.0056}$$

Result:

$$\frac{\sqrt{(0.1316 - 2.434\,v^2)^2 + (-18.63\,v^3 - 1.642\,v)^2}}{\sqrt{(0.0004386 - 0.2569\,v^2)^2 + (0.01976\,v - v^3)^2}} = 178.571$$

Alternate form:

$$\frac{\sqrt{347.077\,v^6 + 67.1053\,v^4 + 2.05554\,v^2 + 0.0173186}}{\sqrt{v^6 + 0.0264776\,v^4 + 0.000165105\,v^2 + 1.9237\times 10^{-7}}} = 178.571$$

Solutions: Step-by-step solution

$v = -0.0469438$

$v = -0.0950499\,i$

$v = 0.0950499\,i$

$v = -0.133456\,i$

$v = 0.133456\,i$

$v = 0.0469438$

2. letra b

Input interpretation:

$$251.621 \times \frac{\sqrt{(0.0235\,p - 0.0041\,d)^2 + (j \times 0.133)^2}}{0.0235} = 1$$

Result:

$$10\,707.3 \sqrt{(0.0235\,p - 0.0041\,d)^2 + 0.017689\,j^2} = 1$$

Geometric figure:

infinite elliptic cylinder

Alternate forms:

$$d^2 - 11.4634\,d\,p + 1052.29\,j^2 + 32.8525\,p^2 = 0.000518889$$

Input:

$$\frac{\sqrt{(-2.434 \times 0.0235^2 + 0.1316)^2 + (-18.63 \times 0.0235^3 - 1.642 \times 0.0235)^2}}{\sqrt{(-0.2569 \times 0.0235^2 + 0.0004386)^2 + (-0.0235^3 + 0.01976 \times 0.0235)^2}}$$

Result: More digits

251.621…