João Viktor de Carvalho Mota 160127823

Controle Digital - Prova 2

1) $G(s) = \dfrac{300e^{-15s}}{(10s+1)(25s+1)}$ $T = 15\,min$ $G_c(z) = K_p + K_i\dfrac{z+1}{z-1} + K_D\dfrac{z-1}{z+1}$

$$G(z) = Z\{G_{ZOH} \cdot G(s)\} = (1-z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1}) \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{\frac{300}{s(10s+1)(25s+1)}\right\}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(z-1)}{z^2} Z\left\{\frac{1,2}{s(s+0,1)(s+0,04)}\right\} \Rightarrow A(s+0,1)(s+0,04) + Bs(s+0,04) + C(s(s+0,1)) = 1,2$$

$A = 300$ $B = 200$ $C = -500$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{(z-1)}{z^2} \cdot Z\left\{\frac{300}{s} + \frac{200}{s+0,1} - \frac{500}{s+0,04}\right\} = \frac{(z-1)}{z^2} \cdot \left(\frac{300z}{z-1} + \frac{200z}{z-e^{-0,1 \cdot 15}} - \frac{500z}{z-e^{-0,04 \cdot 15}}\right)$$

$$= \left(\frac{300}{z} + \frac{200(z-1)}{z(z-0,2231)} - \frac{500(z-1)}{z(z-0,5488)}\right) = \frac{300(z-0,2231)(0,5488) + 200(z-1)(z-0,5488) \ldots}{z(z-0,2231)(z-0,5488)}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{70,22z + 34,93}{z^2 - 0,7719z + 0,1225} \cdot z^{-1} = \frac{70,22z + 34,93}{z(z^2 - 0,7719z + 0,1225)}$$

a) K_i e $K_D = 0$ $M_f = 50,0° \pm 0,2°$

Como queremos Margem de Fase de 50°:

Fazendo $G(w) = G(z)\Big|_{z = \frac{1+7,5w}{1-7,5w}} = \dfrac{70,22 \cdot \left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right) + 34,93}{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right)^3 - \left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right)^2 \cdot 0,7719 + \left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}\right) \cdot 0,1225}$

$$G(w) = \frac{70,22 \cdot (1+7,5w)(1-7,5w)^2 + 34,93 \cdot (1-7,5w)^3}{(1+7,5w)^3 - 0,7719 \cdot (1+7,5w)^2 \cdot (1-7,5w) + 0,1225 \cdot (1+7,5w)(1-7,5w)^2}$$

$$G(w) = \frac{18,63w^3 + 2,434w^2 - 1,642w + 0,1316}{w^3 + 0,2569w^2 + 0,01976w + 0,0004386}$$

Com G(w) se faz o Bode no Matlab e percebemos que Margem de fase é infinito, como (mostrado no final)
nós queremos $50° \pm 0,2$ de Margem de fase, logo queremos 0 dB na frequência onde a fase é 230 (180+50°). A frequência vista pelo gráfico é 0,0463 rad/s e então a magnitude nesta frequência é 45,1 dB. Isso significa que queremos descer o gráfico de magnitude em 45,1 dB. Usando $Mag = 10^{-45,1/20} \Rightarrow 0,0056$ Logo $K_p = 0,0056$
Fazendo bode no Matlab de $K_p \cdot G(w)$ chegamos em Margem de fase de $50,2°$ que está dentro dos requisitos

Erro estacionário: $\dfrac{1}{1+K_p'}$ com $K_p' = \lim_{w \to 0} G(w) \cdot K_p \Rightarrow$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\left(\frac{0,0056 \cdot 0,1316}{0,0004386}\right)} = \frac{1}{1+1,6803} = 0,3731$$

$$|G(w) \cdot K_p| = 1 \Rightarrow G(w) \cdot K_p = 0,0056 \cdot \frac{(-18,63jw^3 - 2,434w^2 - 1,642jw + 0,1316)}{-jw^3 - 0,2569w^2 + 0,01976jw + 0,0004386}$$

Fazendo módulo $= \dfrac{\sqrt{(-2,434w^2+0,1316)^2 + (-18,63w^3 - 1,642w)^2}}{\sqrt{(-0,2569w^2+0,0004386)^2 + (-w^3+0,01976w)^2}} = \dfrac{1}{0,0056}$

Usando Wolfram Alpha chegamos em $w = 0,0469438$
Ou olhando no bode do resultado no ponto onde é 0 dB no Matlab (gráfico no final)

b) Considerando $G_c(z) = K_p + K_i\frac{(z+1)}{(z-1)} + K_D\frac{(z-1)}{(z+1)}$

e $G(w) = \frac{18,63w^3 + 2,434w^2 - 1,642w + 0,1616}{w^3 + 0,2569w^2 + 0,01976w + 0,0004386}$

Ess nulo para entrada degrau: $K_p' = \lim_{w \to 0} G(w)\cdot G_c(w)$

$$G_c(w) = K_p + K_i\frac{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}+1\right)}{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}-1\right)} + K_D\frac{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}-1\right)}{\left(\frac{1+7,5w}{1-7,5w}+1\right)} = K_p + \frac{K_i\cdot 2}{15w} + \frac{K_D\,15w}{2}$$

$$G_c(w) = K_p + \frac{0,133\,K_i}{w} + K_d 7,5w = \frac{K_p w + 0,133\,K_i + K_d 7,5w^2}{w}$$

$$K_p' = \lim_{w \to 0} G(w)\cdot G_c(w) = \frac{0,1616}{0,0004386}\cdot K_p + \frac{0,133\,K_i}{0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p'} = 0 \quad \text{se } K_i \neq 0$$

frequência de cruzamento $\nu = 0,0469438/2 = 0,0235$

Como $G_c(j\nu) = \frac{K_p j\nu + K_i\cdot 0,133 - 7,5K_d\nu^2}{j\nu}$

Logo $|G(w)\cdot G_c(w)| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{(K_p\nu - 7,5\nu^2 K_d)^2 + (K_i 0,133)^2}}{\sqrt{\nu^2}} \cdot \overset{251,621}{|G(\nu i)|} = 1$

em $w = 0,0235i$

$\Rightarrow$ Feito em Wolfram alpha:

$$K_d^2 - 11,4634K_dK_p + 1052,29K_i^2 + 32,8525K_p^2 = 0,00052$$

Como queremos frequência de cruzamento em $0,0235 \Rightarrow 48$ dB $\Rightarrow 0,004$ de mag

Logo $K_d 7,5 = 0,004 \Rightarrow K_d = 0,0005$ 7 troca

Usando Wolfram tiro $K_p = 0,000087$ e $K_i = 0,0007$ substituindo na equação