João Vitor de Carvalho Mota 160127823

3) $G(s) = \dfrac{e^{-s}}{s-0{,}125} = \dfrac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow e^{-s}U(s) = sY(s) - 0{,}125\,Y(s)$ $\qquad T = 1\,h$

$u(t-1) = \dot{y}(t) - 0{,}125\,y(t)$

Escolhendo $x_1(t) = y(t)$, $x_2 = u(t-1)$ $\quad \dot{x}_2(t) = u(t)$

$\Downarrow$

$\dot{y}(t) = u(t-1) - 0{,}125\,y(t)$

$\dot{y}(t) = u(t-1) - 0{,}125\,y(t)$

$\dot{x}_1(t) = x_2 - 0{,}125\,x_1$ $\qquad$ com $X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$$\dot{x}(t) = \overset{A}{\begin{bmatrix} -0{,}125 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} x(t) + \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} u(t) \qquad y(t) = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} x(t)$$

$$G = e^{AT} = e^{\begin{bmatrix} -0{,}125T & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\det(A - \lambda . I) = \det\begin{pmatrix} -0{,}125T-\lambda & 1T \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (-0{,}125T-\lambda)(-\lambda) = 0{,}125T\lambda + \lambda^2 = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = -0{,}125T$

para $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}125T & 1T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -0{,}125Tx_1 + Tx_2 = 0$ $\qquad v_1 = \begin{bmatrix} T \\ 0{,}125T \end{bmatrix}$

$x_2 = 0{,}125\,x_1 T$

para $\lambda_2 = -0{,}125T = 0 \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & +0{,}125T \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow Tx_2 = 0$ $\qquad v_2 = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix}$

$T0{,}125x_2 = 0$

$P = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix} T & T \\ 0{,}125T & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ T & -8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}125 \end{pmatrix}$

Como $e^A = P e^D P^{-1} \Rightarrow e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}125 & 0 \end{bmatrix} . e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}125T \end{bmatrix}} . \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{T} \\ \frac{1}{T} & \frac{-8}{T} \end{bmatrix}$

Como $e^D = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^{-0{,}125T} \end{pmatrix} \Rightarrow e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-0{,}125T} \end{pmatrix}$

Fazendo $e^{A} = \begin{bmatrix} T & T \\ 0{,}125T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-0{,}125T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{T} \\ 1 & -\frac{8}{T} \end{bmatrix}$

$e^{A} = \begin{bmatrix} 0{,}8825 & 0{,}94 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ com $T = 1$

$H(t) \cdot e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-0{,}125T} & 8 - 8 \cdot e^{-0{,}125T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$H(T) = \left(\int_0^T e^{AT} dT\right) \cdot B \Rightarrow \begin{bmatrix} \int_0^T e^{-0{,}125T} dt & \int_0^T 8 - 8 \cdot e^{-0{,}125T} dt \\ 0 & \int_0^T 1\, dT \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 - 8e^{-0{,}125T} & 8T - 8 - e^{-0{,}125T} \\ 0 & T \end{bmatrix}$

Com $T = 1$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad H(T) = \left(\int_0^T e^{AT} dT\right) \cdot B$ $\quad \overset{H,\ T=1}{\begin{bmatrix} 0{,}94 & 0{,}8825 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Logo $H(1) = \begin{bmatrix} 0{,}8825 \\ 1 \end{bmatrix}$

Logo: $x[K+1] = \begin{bmatrix} 0{,}8825 & 0{,}94 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x[K] + \overset{H}{\begin{bmatrix} 0{,}8825 \\ 1 \end{bmatrix}} u[K]$

$y[K] = \overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} x[K]$

b) $u(KT) = Nr(KT) - Fx(KT) - l_3 w(KT)$ $\quad F\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ $\quad$ * Somar perturbação no $U(K)$

$=0$

$x[K+1] = \begin{bmatrix} 0{,}8825 & 0{,}94 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x[K] + \begin{bmatrix} 0{,}8825 \cdot N \\ 1 \cdot N \end{bmatrix} r(k) - HFx(k) - l_3 H w(k) + H w(k)$

Somando perturbação em U

$x[K+1] = (G - HF)\, x[K] + N H r(k) - l_3 H w(K) + H w(K)$

Fazendo controlabilidade $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} H & GH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8825 & 1{,}7188 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ det $\neq 0$

rank $= 2$

Controlável

Fazendo $\det(zI - G + HF) = \det\begin{bmatrix} 0{,}8825 l_1 + z - 0{,}8825 & 0{,}8825 l_2 - 0{,}94 \\ l_1 & l_2 + z - 1 \end{bmatrix}$

$= \det(zI - G + HF) = 0{,}0575 l_1 - 0{,}8825 l_2 - 1{,}8825 z + 0{,}8825 l_1 z + l_2 z + z^2 + 0{,}8825$
$= 0$

Queremos polos em $0{,}4 \pm 0{,}4j$, logo $\Rightarrow z^2 - 0{,}8z + 0{,}32 = 0$

Resolvendo sistema:

$$\begin{cases} -0{,}8 = -1{,}8825 + 0{,}8825 l_1 + l_2 & \Rightarrow l_1 = 0{,}4697 \\ 0{,}32 = 0{,}8825 + 0{,}0575 l_1 - 0{,}8825 l_2 & l_2 = 0{,}6680 \end{cases}$$

Assim $F = [0{,}4697 \quad 0{,}6680]$

Como a perturbação não tem nenhum efeito sobre o sistema:

$x[k+1] = (G - HF)x(k) + NHr(k) - l_3 H w(k) + H w(k)$

$X(z) = [zI - G + HF]^{-1}(x(0) + NHR(z) - l_3 H w(z) + H w(k))$

$Y(z) = CX(z) = C[zI - G + HF]^{-1}(X(0) + NHR(z) - l_3 H w(z) + H w(k))$

$e(kT) = \underset{\text{degrau}}{r(kT)} - y(kT) \Rightarrow, k \to \infty \underset{\text{erro}}{\Rightarrow} 0$

Logo considerando $R(z)$ degrau, $w(z)$ não tem efeito, $X(0) = 0$, $\frac{Y(z)}{R(z)}$ tem polo em $z = 1$

$e[\infty] = 1 - NC(I - G + HF)^{-1}H = 0$

$\Rightarrow C(I - G + HF)^{-1}.H = [1 \quad 0] . \begin{bmatrix} 1{,}2846 & 0{,}6740 \\ -0{,}9032 & 1{,}0231 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0{,}8825 \\ 1 \end{bmatrix}$

$N . 1{,}8077 = 1$

$N = 0{,}5532$

Para que perturbação não tenha efeito $\Rightarrow 0 = (H - l_3 H)$

$\begin{bmatrix} 0{,}8825 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}8825 l_3 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0$, logo $l_3 = 1$

c) Colocando $v[K]$ como outra variável de estado:

$$\hat{x}[K] = \begin{bmatrix} x_1[K] \\ x_2[K] \\ v[K] \end{bmatrix} \qquad x[K+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}8825 & 0{,}94 & 0{,}8825 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{G}} \hat{x}[K] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}8825 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{H}} \hat{u}[K]$$

$$\hat{y}[K+1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}[K]$$

Verificamos se é observável:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{G} \\ \hat{C}\hat{G}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}8825 & 0{,}94 & 0{,}8825 \\ 0{,}7788 & 1{,}7695 & 2{,}6013 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \neq 0 \quad \text{rank} = 3$$

Observável

Fazendo $\det(zI - \hat{G} + LC)$ com $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}8825 & 0{,}94 & 0{,}8825 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 \\ l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 - 0{,}94 l_2 + 0{,}0575 l_3 + 2{,}765 z - 2 l_1 z + 0{,}94 l_2 z + 0{,}8825 l_3 z + \dots +$$
$$+ l_1 z^2 - 2{,}8825 z^2 + z^3 - 0{,}8825 = 0$$

Como queremos polos em $z = 0{,}2 \pm 0{,}2j$ e $z = 0 \Rightarrow z^3 - 0{,}4z^2 + 0{,}08z = 0$

Geramos o sistema:

$$\begin{cases} 0 = l_1 - 0{,}94 l_2 + 0{,}0575 l_3 - 0{,}8825 \\ +0{,}08 = 2{,}765 - 2 l_1 + 0{,}94 l_2 + 0{,}8825 l_3 \\ -0{,}4 = l_1 - 2{,}8825 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} l_1 &= 2{,}4825 \\ l_2 &= 1{,}7464 \\ l_3 &= 0{,}7234 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } L = \begin{bmatrix} 2{,}4825 \\ 1{,}7464 \\ 0{,}7234 \end{bmatrix}$$