

# Controle Digital Projeto

João Viktor de Carvalho Mota  
Universidade de Brasília  
Email: joaoviktor22@hotmail.com

**Abstract**—Este projeto consiste na modelagem, discretização e implementação de um sistema de levitação magnética de um objeto. Como o sistema é instável e não-linear foi utilizado linearização e controle em espaço e estados para deixá-lo estável. Foram feitos dois controladores, uma realimentação de estados com rastreamento e um observador. Foi observado que a realimentação de estados fez o sistema atender os requisitos desejados logo foi uma boa solução para o problema, além do observador para estimar os estados desejados.

## 1. Introdução

Um objeto que esteja suspenso apenas por uma força eletromagnética seria uma levitação magnética. Um sistema de levitação magnética é muito usado para diversas aplicações hoje em dia por não ter atrito como a levitação de trem. A vantagem de usar um sistema de levitação para movimentação de um trem é, além de não ter atrito, custo de manutenção e operação são menores e também menos poluição. Porém o sistema é normalmente instável e não-linear sendo mais difícil montar um controlador para ele. O sistema utilizado será o da figura abaixo:

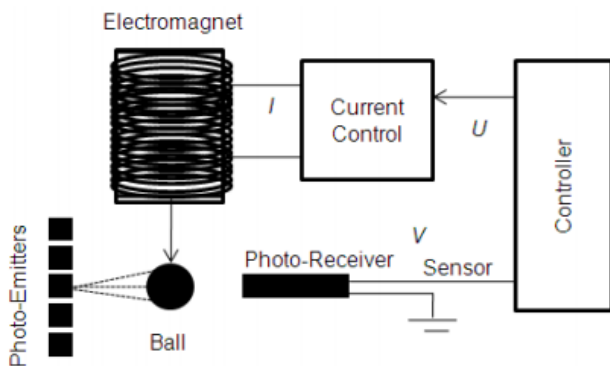


Figure 1. Sistema de Levitação Magnética

Podemos observar que há uma bobina em que se passa uma corrente controlada e com isso gera uma força magnética que suspenso um objeto, há também um sensor optoeletrônico para obter a posição do objeto para passar para o controlador.

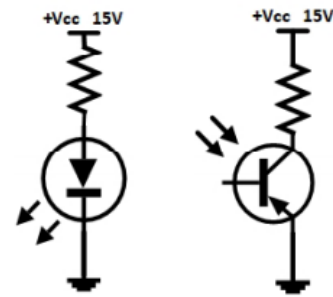


Figure 2. a) Photo-Emitter b) Photo-Receiver

Este sistema será linearizado e depois discretizado para montar um controlador em espaço e estados. O controlador será o de alocação de polos (rastreamento) e um observador para estimar os estados internos do sistema. O projeto será feito nos softwares MatLab e Simulink.

O rastreamento serve para que o sistema em malha fechada possua polos nas posições desejadas tornando o sistema estável e atendendo os requisitos de projetos desejados. Será utilizado o rastreamento em que adiciona mais uma variável de estado para garantir que o sistema tenha erro estacionário nulo para tanto entrada e perturbação diferentes de zero.

O observador não interfere com o sistema em si, ele serve para estimar os estados internos do sistema real logo considerando as perturbações. Com ele se pode montar um controlador para estabilizar o sistema de forma mais correta por exemplo.

Tanto o rastreamento e o observador serão implementadas a tempo discreto enquanto que a planta continuará a tempo contínuo.

## 2. Modelagem Matemática

Considerando a figura 1 do sistema de levitação magnética e a fórmula de força eletromagnética é calculada usando a fórmula de Kirchhoff abaixo:

$$V(t) = Ri + \frac{d[L(x)i]}{dt} \quad (1)$$

Considerando R como Resistência da bobina, i como corrente que passa na bobina e L(x) uma função não-linear da

posição do objeto que pode ser aproximada pela equação abaixo:

$$L(x) = L + \frac{L_0 x_0}{x} \quad (2)$$

Essa aproximação considera que a indutância varia com o inverso da distância do objeto.

Considerando que a força aplicada na bola é a da gravidade menos a força eletromagnética da bobina.

$$F_{net} = F_g + F_{em} \quad (3)$$

Com as equações acima conseguimos gerar duas equações que são:

$$m\ddot{x} = mg - k \left\{ \frac{i}{x} \right\}^2 \quad (4)$$

$$u = iR + L \frac{di}{dt} - k \left\{ \frac{i}{x} \right\}^2 \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

E então considerando as variáveis de estados abaixo

$$x_1 = x \quad (6)$$

$$x_2 = v \quad (7)$$

$$x_3 = i \quad (8)$$

Lembrando que  $x$  é a posição do objeto,  $v$  é a velocidade,  $i$  a corrente na bobina e que:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (9)$$

E com isso chegamos na equação de espaço e estados abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ g - \frac{k}{m} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 \\ -\frac{R}{L} x_3 + \frac{2k}{L} \left( \frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (10)$$

$$y = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Podemos perceber que a equação não é linear logo é preciso lineariza-la.

Mudando as variáveis de estado para:

$$X_0 = [x_{01} \quad x_{02} \quad x_{03}]^T \quad (11)$$

Linearizando no ponto  $x = x_{01}$ , com isso a velocidade ou variação da posição do objeto fica nula em equilíbrio e com isso chegamos na condição de equilíbrio:

$$x_{03} = x_{01} \sqrt{\frac{gm}{k}} \quad (12)$$

Utilizando algumas aproximações de primeira ordem para pequenas perturbações em torno do equilíbrio, se chega na equação:

$$m\ddot{x} = 2k \frac{x_{03}^2}{x_{01}^3} x_{01} - 2k \frac{x_{03}}{x_{01}^2} x_{03} \quad (13)$$

E então se consegue chegar nas equações de espaço e estados linear abaixo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{Cx_{03}^2}{mx_{01}^3} & 0 & -2\frac{Cx_{03}}{mx_{01}^2} \\ 0 & 2\frac{Cx_{03}}{Lx_{01}^2} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (14)$$

### 3. Especificações e Discretização de Projeto

Primeiramente os parâmetros reais do projeto e as condições de equilíbrio dos estados do sistema:

Parâmetro	Valor
m	0.04 kg
g	9.81 m/s <sup>2</sup>
L	0.01 H
m	0.04 kg
k	0.0001
R	1.2 Ohm
$x_{01}$	0.012 m
$x_{02}$	0 m/s
$x_{03}$	0.7517 A

A posição do objeto no equilíbrio é 0.012 metros e considerando a fórmula 12 chegamos na corrente de equilíbrio. Foi considerado as condições iniciais dos estados como nulo.

As condições de resposta de sistema foram de tempo de subida  $t_s = 0.05s$  e sobressinal de 5% e com esses dados chegamos nos polos em  $s$  de malha fechada em  $-8 \pm 9.3895i$ . No plano  $z$  esse polos ficam em  $0.9199 \pm 0.0774i$  dentro do círculo unitário e se o controlador precisar de outros polos foi colocado na posição 0 do plano  $z$ . No observador foi colocado os polos na metade do valor dos polos no controlador no plano  $z$ , logo os valores dos polos são  $0.46 \pm 0.0387i$  no plano  $z$ .

A discretização foi feita no MatLab, considerando sample time  $T$  de 0.01s, substituindo os parâmetros acima nas equações de espaço e estados (equação 14) e depois utilizando a função `c2d` do matlab chegamos nas equações de espaço estados discreta abaixo:

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} 1.0404 & 0.0098 & -0.0009 \\ 8.0057 & 0.9468 & -0.1480 \\ 2.9324 & 0.5920 & 0.2383 \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} -0.0003 \\ -0.0897 \\ 0.5567 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0] \end{aligned} \quad (15)$$

### 4. Implementação de Projeto

Primeiramente se conferiu se o sistema é controlável e observável. Com o software Matlab, se calculou o posto da

matriz de controlabilidade e de Observabilidade:

$$Controlabilidade = \begin{bmatrix} H & GH & G^2H \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$Observabilidade = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ambas tiveram posto = 3 que é igual a  $n = 3$ , logo o sistema é controlável e observável.

Depois foi feita uma realimentação de estados de forma:

$$u[k] = f_a x_a[k] - F x[k] \quad (18)$$

Sendo que :

$$x_a[k+1] = x_a[k] + r[k] - y[k] \quad (19)$$

E então para se calcular o  $f_a$  e  $F$  foi feita as novas equações de estados adicionando esse novo estado da realimentação e ficou:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G - HF & Hf_a \\ -C & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando novas equações de estados:

$$x_b[k+1] = \begin{bmatrix} X_0[k+1] \\ x_a[k+1] \end{bmatrix} \quad (21)$$

E então foi resolvida no Matlab fazendo  $\det(zI - \hat{G}) = 0$  e igualando com a equação desejada que são os 2 polos em  $z$  ditos acima e também dois polos em 0 no plano  $z$ . Resolvendo o sistema linear chegamos no resultado:

$$f_a = -8.2877 \quad (22)$$

$$F = \begin{bmatrix} -191.0138 & -7.0467 & 1.2416 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Depois foi feito os cálculos para o observador que foi resolvida no Matlab fazendo  $\det(zI - G + LC) = 0$  e então igualando com os 2 polos em  $z$  (divido por 2 por ser o observador) e também um polo em 0 no plano  $z$ . Resolvendo o sistema linear chegamos no resultado:

$$L = \begin{bmatrix} 1.3056 \\ 32.0409 \\ 26.6330 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Com todos esse valores se foi feito o script usando MATLAB function do Simulink, do observador e do rastreamento (realimentação de estados).

```
function y = fcn(u,x,fa,F)
persistent u_d y_d;
if isempty(u_d)
    u_d = cast(0, 'like', u);
end
if isempty(y_d)
    y_d = cast(0, 'like', u);
end
y2 = u_d + y_d;
u_d = u;
y_d = y2;
y = (y2*fa) - (F*x);
```

Figure 3. Script do Rastreamento

```
function y = fcn(u,s,C,L,G,H)
persistent u_d y_d;
if isempty(u_d)
    u_d = cast(0, 'like', u);
end
if isempty(y_d)
    y_d = cast([0;0;0], 'like', [0;0;0]);
end
y = (u_d*H) + L*(s - C*y_d) + G*y_d;
u_d = u;
y_d = y;
```

Figure 4. Script do observador, s = saída do sistema

E com isso chegamos na implementação final do projeto no Simulink.

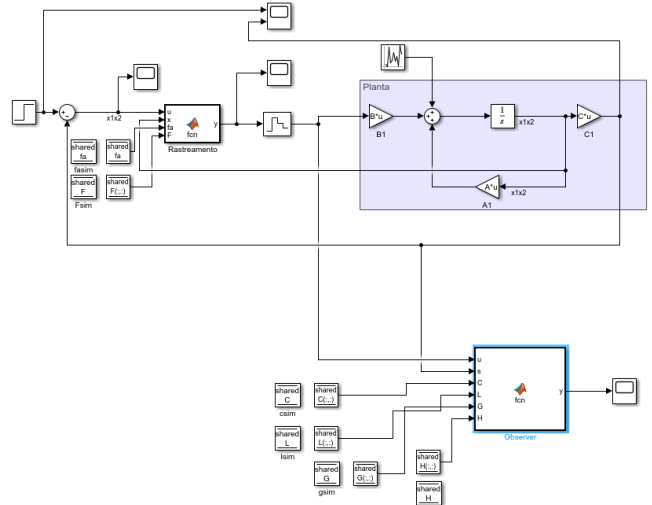


Figure 5. Projeto Completo com scripts

Também foi feito o sistema apenas com blocos e ganhos no simulink para uma implementação mais didática.

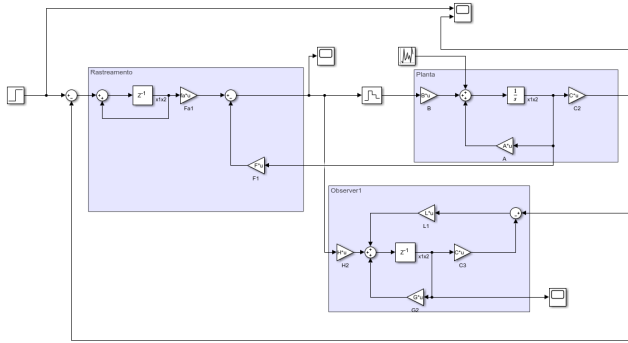


Figure 6. Projeto Completo sem scripts

## 5. Análise de Resultados

Foram feitos 4 casos para fazer a análise de resultados:

- 1) Caso com pequena perturbação, sem estados iniciais e com entrada degrau de amplitude para o equilíbrio da posição (0.012).
- 2) Caso sem pequena perturbação, sem estados iniciais e com entrada degrau de amplitude para o equilíbrio da posição (0.012).
- 3) Caso com perturbação, com estados iniciais já no equilíbrio e com entrada constante equilíbrio de posição (0.012).
- 4) Caso com perturbação, com estados iniciais já no equilíbrio e com entrada de degraus diversos.

Lembrando que a posição (estado 1) está em metros, velocidade (estado 2) está em  $m/s^2$ , corrente (estado 3) está em Amperes. A saída, entrada, erro também estão em metros por causa que C está olhando apenas o primeiro estado e a entrada foi identificada pelo Simulink como um vetor de 1 dimensão.

### 5.1. Caso 1

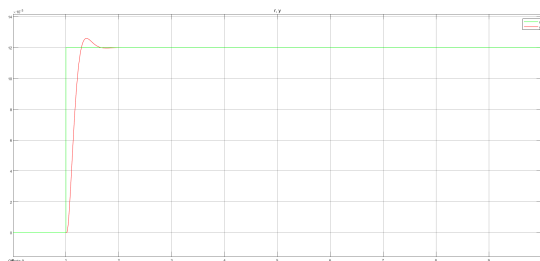


Figure 7. Entrada e Saída do Sistema

Podemos ver pela saída do sistema que os requisitos de sobressinal e tempo de subida foram atendidos e do erro estacionário tendendo a 0 no infinito.

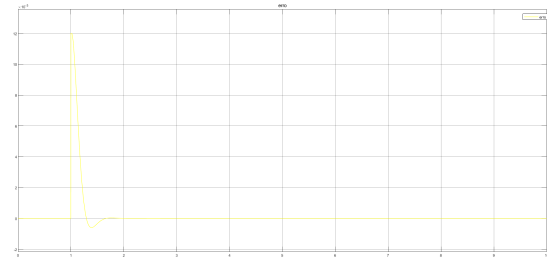


Figure 8. Erro do Sistema

Podemos novamente ver que o erro estacionário tende a 0 no infinito como foi desejado.



Figure 9. Ação de Controle u do Sistema

Se observa que a ação de controle têm mesmo formato que a saída e a amplitude aproximada da corrente (estado 3) observado na figura abaixo.

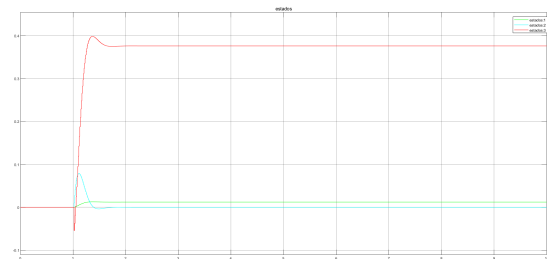


Figure 10. Os estados estimados pelo Observador do Sistema

Olhando os estados estimados pelo observador podemos ver uma corrente que pode existir na vida-real, a velocidade da bola só há grande interferência quando a corrente chega e que a posição do objeto subiu para a posição de equilíbrio como foi desejado.

### 5.2. Caso 2

Podemos ver pelas imagens abaixo que mesmo com a pequena perturbação ficou bem próximo do caso 1.

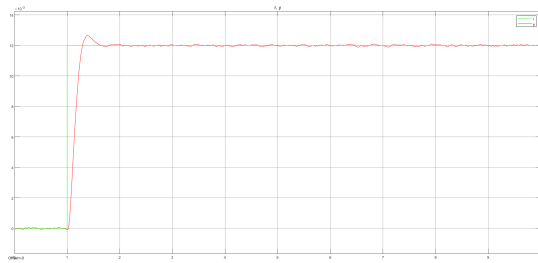


Figure 11. Entrada e Saída do Sistema

Podemos ver pela saída do sistema que os requisitos de sobressinal e tempo de subida foram atendidos e do erro estacionário tendendo a 0 apesar da perturbação.

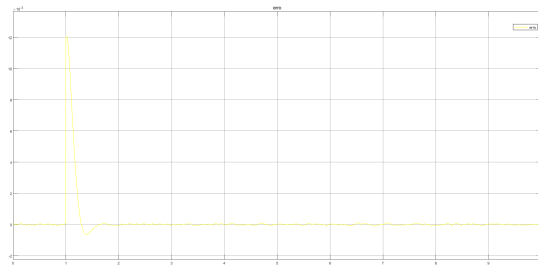


Figure 12. Erro do Sistema

Podemos novamente ver que o erro estacionário tende a 0 no infinito, mesmo que tenha uma perturbação.

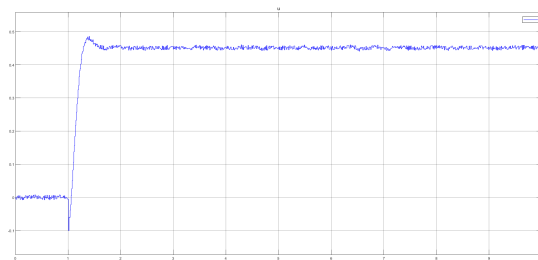


Figure 13. Ação de Controle u do Sistema

Se observa que a ação de controle têm mesmo formato que a saída e a amplitude da corrente (estado 3) observado na figura abaixo.

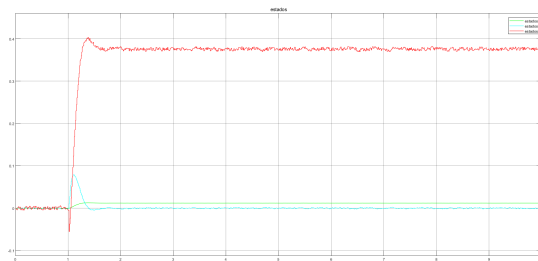


Figure 14. Os estados estimados pelo Observador do Sistema

Olhando os estados estimados pelo observador podemos ver uma corrente que pode existir na vida-real, a velocidade

da bola só há grande interferência quando a corrente chega e que a posição do objeto subiu para a posição de equilíbrio como foi desejado.

### 5.3. Caso 3

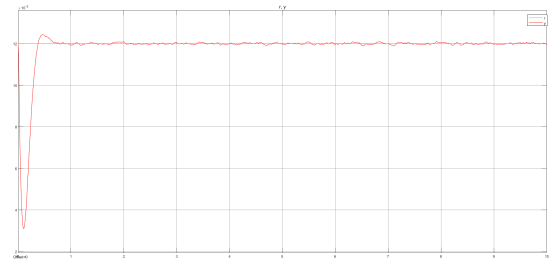


Figure 15. Entrada e Saída do Sistema

Podemos ver pela saída do sistema que os requisitos de sobressinal e tempo de subida foram atendidos e do erro estacionário tendendo a 0 apesar da perturbação porém com uma caída no início como se o objeto estivesse caindo após iniciar.

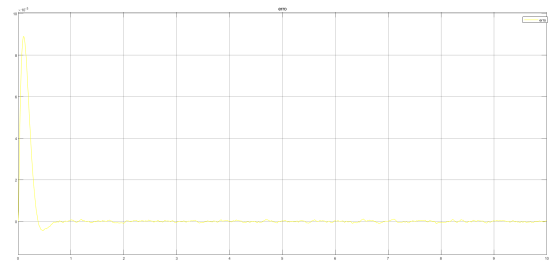


Figure 16. Erro do Sistema

Podemos novamente ver que o erro estacionário tende a 0 no infinito, mesmo que tenha uma perturbação como foi desejado.

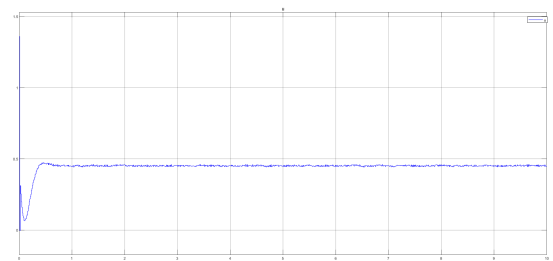


Figure 17. Ação de Controle u do Sistema

Se observa que a ação de controle têm mesmo formato que a saída e a amplitude da corrente (estado 3) observado na figura abaixo.

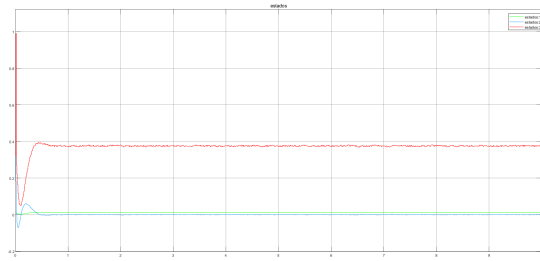


Figure 18. Os estados estimados pelo Observador do Sistema

Olhando os estados estimados pelo observador podemos ver uma corrente que pode existir na vida-real, a velocidade da bola só há grande interferência no início por causa da caída percebida na saída do sistema. Se mostrou que o objeto caiu para a posição 0 e depois voltou a subir para o equilíbrio junto com a subida do sistema.

#### 5.4. Caso 4

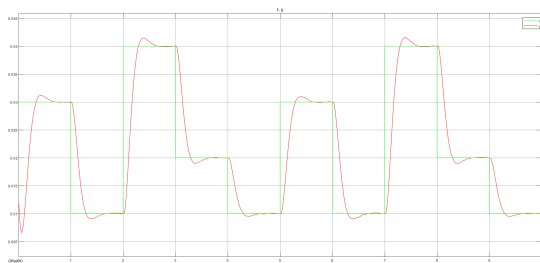


Figure 19. Entrada e Saída do Sistema

Podemos ver que a saída consegue seguir a entrada do sistema porém com o tempo de subida e sobressinal desejado.

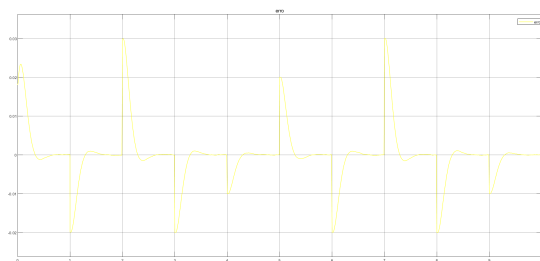


Figure 20. Erro do Sistema

Podemos novamente ver que o erro estacionário tende a 0 no infinito, mesmo que tenha uma perturbação porém se altera muito por causa da grande variedade da entrada.

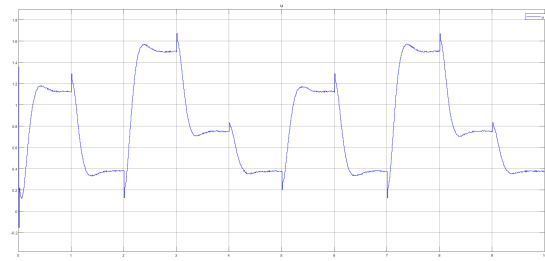


Figure 21. Ação de Controle u do Sistema

Se observa que a ação de controle têm mesmo formato que a saída e a amplitude da corrente (estado 3) observado na figura abaixo porém ainda possui a caída no início apresentada no caso anterior.

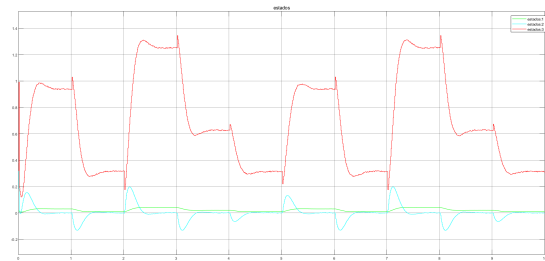


Figure 22. Os estados estimados pelo Observador do Sistema

Olhando os estados estimados pelo observador podemos ver uma corrente que pode existir na vida-real, a velocidade da bola só há grande interferência quando a corrente sobe ou abaixa e que a posição do objeto segue a entrada como desejado.

## 6. Conclusão

Os problemas da levitação magnética eram que o sistema é instável e não-linear. Porém, após linearizar e montar um controlador para torná-lo estável, esses problemas foram solucionados. Ao utilizar o rastreamento e o observador foi obtido os polos aonde foi desejado e então o sistema em malha fechada acabou atendendo todos os requisitos desejados. Podemos ver pelos resultados que além de todos os resultados serem atendidos, a perturbação também não gerou grande impacto no sistema apesar que em alguns casos o objeto deu uma 'caída' no início, a posição do objeto desceu para 0 rapidamente. A corrente e a velocidade não geraram um grande problema observando pelos resultados. As vantagens de se utilizar o controlador de realimentação de estados foi que além de ser fácil a implementação ele atendeu todos os requisitos desejados do sistema. Algumas desvantagens foram que não é o controlador normalmente utilizado e algumas respostas não desejadas como a caída do objeto. Poderia-se usar um controlador feito por LQR ou um controlador PID para ter uma resposta mais utilizada normalmente e uma resposta igual ou até mesmo superior a obtida pela realimentação de estados.

## References

- [1] [https://www.researchgate.net/publication/202073923\\_Nonlinear\\_Model\\_Controller\\_Design\\_for\\_Magnetic\\_Levitation\\_System](https://www.researchgate.net/publication/202073923_Nonlinear_Model_Controller_Design_for_Magnetic_Levitation_System)
- [2] [https://www.researchgate.net/publication/338209615\\_Design\\_and\\_Control\\_of\\_Magnetic\\_Levitation\\_System](https://www.researchgate.net/publication/338209615_Design_and_Control_of_Magnetic_Levitation_System)
- [3] [https://www.researchgate.net/publication/263747891\\_Optimal\\_PID\\_Control\\_of\\_Magnetic\\_Levitation\\_System\\_Using\\_Genetic\\_Algorithm](https://www.researchgate.net/publication/263747891_Optimal_PID_Control_of_Magnetic_Levitation_System_Using_Genetic_Algorithm)
- [4] [https://www.researchgate.net/publication/318474846\\_Modeling\\_of\\_magnetic\\_levitation\\_system](https://www.researchgate.net/publication/318474846_Modeling_of_magnetic_levitation_system)
- [5] [https://www.lehigh.edu/~inconsy/lab/css/ME389/guidelines/ME389\\_MAG01\\_MagLev\\_Guideline.pdf](https://www.lehigh.edu/~inconsy/lab/css/ME389/guidelines/ME389_MAG01_MagLev_Guideline.pdf)
- [6] <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=ControlStateSpace>