

Simulación de Eventos Discretos, Teoría de Colas

José Miguel Zayas Pérez (tlgrm: @nex25k) C312
Adrián Hernández Santos (tlgrm: @ahdez929) C311

June 9, 2024

[Enlace en GitHub](#)

1 Introducción

El problema que hemos decidido abordar es el 6.10(Central Telefónica) del libro "Aplicando Teoría de Colas en Dirección de Operaciones".

La compañía aérea "Siberia" tiene una centralita de teléfonos con 3 líneas. La empresa tiene un pico de llamadas durante 3 horas, en las que algunos clientes no pueden ponerse en contacto con la empresa debido al intenso tráfico de llamadas (se sabe que si las tres líneas están siendo utilizadas al cliente no se le puede retener). La compañía estima que, debido a la fuerte competencia, el 60% de las llamadas no respondidas utiliza otra compañía. Durante las horas punta las llamadas siguen una distribución de Poisson con una media de 20 llamadas hora y cada telefonista emplea 6 minutos por cada llamada (distribución exponencial). El beneficio medio de un viaje es de 210 euros, ¿cuánto dinero se pierde diariamente debido a llamadas no contestadas? Se supone que durante las horas que no son críticas se cogen todas las llamadas. Si cada empleado cuesta a la compañía 24 euros/hora y un empleado debe trabajar 8 horas al día, ¿cuál es el número óptimo de empleados? Las horas punta siempre son a la misma hora. La centralita no se cierra nunca y la puede atender un solo empleado cuando no hay hora punta. Se asume que el coste de añadir una línea es despreciable.

2 Objetivos y Metas

El objetivo de este proyecto es simular el sistema de la centralita de la compañía aérea "Siberia" para poder responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas llamadas se pierden diariamente debido a llamadas no contestadas?
- ¿Cuál es el número óptimo de empleados?

Además también se desea:

- Comparar los resultados obtenidos con los resultados experimentales.
- Realizar un análisis estadístico de la simulación.
- Analizar como varían los resultados al modificar los valores de las variables del sistema.

3 Sistema y Variables de Interés

- Patrón de llegada de llamadas: Poisson con una media de 20 llamadas por hora. (Como se trata de un proceso de Poisson, el tiempo entre llegadas de llamadas sigue una distribución exponencial con media igual al inverso de la original, la cual es $1/3$ (lo que representa 1 llamada cada 3 minutos de media). Por lo tanto, el tiempo entre llegadas de llamadas es una variable aleatoria exponencial con media 3 minutos.)
- Tiempo de atención de llamadas: Exponencial con media de 6 minutos.
- Número de líneas inicial: 3. En la descripción del problema se asume que el coste de añadir una línea es despreciable, por lo que no se tiene en cuenta para la simulación. (Si todas las líneas están ocupadas, el cliente no puede ser retenido.)
- Horas punta: 3 horas al día. Durante estas horas, el 0.6 de las llamadas no contestadas utiliza otra compañía.
- Beneficio medio de un viaje: 210 euros.
- Coste de cada empleado: 24 euros por hora.
- Horas de trabajo de cada empleado: 8 horas al día.

Nuestro problema se puede modelar como un sistema de colas M/M/c/c/FIFO, donde:

- M: Llegada de llamadas con distribución de Poisson.
- M: Tiempo de atención con distribución exponencial.
- c: Número de servidores (Lineas o empleados en horario pico).
- c: Capacidad del sistema. Existen restricciones respecto al número de clientes que pueden esperar en la cola, la cual es 0, no hay cola pues como se refiere a llamadas telefónicas, si las tres líneas están ocupadas, el cliente no puede ser retenido, por lo que la capacidad total del sistema es igual a la cantidad de servidores.
- FIFO: First In First Out. Las llamadas se atienden en el orden en que llegan, siempre y cuando haya un servidor disponible.

Todas las variables son modificables en el código de la simulación para poder analizar cómo varían los resultados al modificar los valores de las variables del sistema. Estos valores iniciales son los propuestos en el problema.

4 Detalles de Implementación

Para la implementación de la simulación, se ha utilizado el lenguaje de programación Python y la librería SimPy. SimPy es una biblioteca de simulación de eventos discretos basada en procesos que se ejecutan en un entorno de simulación. Permite modelar y simular sistemas complejos y es muy útil para la simulación de sistemas de colas.

El código de la simulación se divide en las siguientes partes:

- ‘simulation.py’: Contiene la implementación de la simulación y devuelve un array de duplas que corresponde a la cantidad de llamadas atendidas, siendo el primer valor el momento en que llegó la llamada y el segundo valor el tiempo de duración de la llamada.
- ‘analysis.py’: Contiene la clase Analyzer que se encarga de separar los resultados obtenidos de la simulación.

- ‘utils.py’: Contiene funciones útiles para el manejo de los datos obtenidos de la simulación así como para la generación de gráficos.
- ‘queue-simulation.ipynb’: Jupyter Notebook que contiene la simulación principal y el análisis de los resultados.
- ‘requirements.txt’: Archivo que contiene las dependencias necesarias para ejecutar el código.

Se llevan a cabo una cantidad determinada de simulaciones para diferente cantidad de empleados, luego se recogen los resultados y se analizan para determinar el número óptimo de empleados.

5 Resultados y Experimentos

Dado que el objetivo principal de la simulación es determinar el número óptimo de empleados, se realizan varias simulaciones variando el número de empleados y se analizan los resultados obtenidos. Se busca determinar cuánto dinero se pierde diariamente debido a llamadas no contestadas y cuál es el número óptimo de empleados para minimizar estas pérdidas.

Importante tener en cuenta que el valor de un empleado es de 24 euros por hora y debe trabajar 8 horas al día, siendo un total de 192 euros por día.

Los siguientes análisis se realizaron con 2000 simulaciones por cada cantidad de empleados, al volver a ejecutar el notebook se obtendrán valores muy ligeramente diferentes.

Se recomienda visualizar las gráficas correspondientes en el notebook de los resultados que se muestran a continuación.

Resultados para diferentes números de empleados (c)

Table 1: Resultados de la simulación

Empleados	Llamadas Perdidas (Promedio)	Dinero Perdido (Promedio)	Ganancia Total
3	12.0785	1521.891	7600.539
4	5.4185	682.731	9631.494
5	2.0635	260.001	10529.499
6	0.647	81.522	10823.313
7	0.164	20.664	10723.146
8	0.0385	4.851	10648.914
9	0.007	0.882	10465.083

5.1 Análisis de los Resultados

Como se observa en la tabla anterior, a medida que se aumenta la cantidad de empleados, la cantidad de llamadas perdidas disminuye, lo que resulta en una menor cantidad de dinero perdido y una mayor ganancia total. Además se aprecia que a partir de los 6 empleados el costo de añadir un nuevo empleado es mayor que el dinero que aportaría su llegada, por lo que las ganancias comienzan a disminuir lo que parece indicar que:

- Número óptimo de empleados(durante horario pico): 6

6 Parada de la simulación

Dada la naturaleza del problema la parada de la simulación se realiza por una cantidad de tiempo fija, en este caso son 3 horas o debido a que el tiempo de la simulación es en minutos, 180 minutos.

Dicho valor puede ser modificado y analizado para otros casos. (Debe ser un valor menor o igual a 8h, pues se asume que un empleado trabaja 8 horas al día).

7 Supuestos y Restricciones

- En la descripción del problema se asume que el coste de añadir una línea es despreciable, por lo que no se tiene en cuenta para la simulación.
- Además se dice que fuera de las horas punta se cogen todas las llamadas y un solo empleado puede atender la central, por lo que no se tienen en cuenta las llamadas no contestadas fuera de las horas punta.
- Solo se considera el análisis durante el horario pico.
- Se tiene en cuenta que un empleado tiene que trabajar 8 horas al día, por lo que al añadir nuevos empleados en la hora pico su costo es por las 8 horas que debería trabajar.
- Se asume que el horario pico($j=8h$) está dentro de una jornada laboral de 8 horas y no ocupa dos de ellas.
- Se dice que el 60% de las llamadas no respondidas las utiliza otra compañía, por lo que de las llamadas perdidas solo se cuenta el 60% como dinero perdido. (Se asume que el 40% restante se atiende en otro momento).

8 Pruebas de hipótesis

Luego de obtener los resultados decidimos realizar varias pruebas de hipótesis basadas en estos.

8.1 La cantidad óptima de líneas en el horario pico debe ser mayor o igual que 5

- $H_0 : c \geq 5$
- $H_1 : c < 5$

Tomando $\alpha = 0.05$ y viendo que la fórmula P_c es decreciente a medida que los valores de c aumentan, como para $c = 5$ el p-value es 0.0367, entonces podemos deducir que la hipótesis nula es cierta. Por tanto la cantidad óptima de líneas en el horario pico c , debe ser mayor o igual que 5.

8.2

9 Modelo Matemático

El sistema se puede modelar como un sistema de colas M/M/c/c/FIFO, donde:

- M: Llegada de llamadas con distribución de Poisson. - M: Tiempo de atención con distribución exponencial. - c: Número de servidores (líneas o empleados). - c: Capacidad del sistema (0, sin cola). - FIFO: Primero en entrar, primero en salir.

9.1 Parámetros del Modelo

- λ : Tasa de llegada de llamadas (20 llamadas/hora). - μ : Tasa de servicio (10 llamadas/hora). - c : Número de servidores (variado en la simulación).

9.2 Fórmulas de Erlang

Dado que nuestro problema es un clásico problema de teoría de colas de la forma **M/M/c/c** (Como mencionamos anteriormente), podemos aplicar el modelo de Erlang, el cual queda definido por las siguientes fórmulas:

- Probabilidad de sistema lleno:

$$P_c = \frac{\frac{r^c}{c!}}{\sum_{i=0}^c \frac{r^i}{i!}}$$

- Número medio de clientes en el sistema:

$$L = r * (1 - P_c)$$

- Tiempo medio de estancia en el sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda(1 - P_c)}$$

Resultados Teóricos

Nuestro sistema posee los siguientes parámetros iniciales:

- $\lambda = 1/3$
- $\mu = 1/6$

Análisis para diferentes valores de cantidad de empleados (c)

Table 2: Resultados de la simulación

Empleados	P_c	L	W
3	0.21	1.5789	6
4	0.095	1.809	6
5	0.0367	1.9266	6
6	0.0121	1.9758	6
7	0.00344	1.9931	6

10 Formas de Mejora a la Simulación

Un conocimiento más profundo del problema permitiría realizar una n más precisa y detallada. Por ejemplo, el conocimiento de como llegan las llamadas fuera del horario pico permitiría realizar un análisis más completo. También considerar otros detalles como retraso de las llamadas, congestión de la red, la variación de las ganancias por llamadas atendidas, entre otros.

11 Conclusiones

Los resultados teóricos son similares a los obtenidos en la simulación, para una cantidad de empleados mayor P_c tiende a 0, lo que indica que el sistema no se llenará. Importante tener en cuenta que dicho análisis teórico no tiene en cuenta el costo de añadir un empleado adicional.

Se concluye que el número óptimo de empleados es 6 con vistas a maximizar las ganancias a largo plazo y teniendo un conocimiento más profundo del problema. Sin embargo, como comentamos anteriormente 5 empleados maximiza las ganancias a corto plazo.