Analysis

Teil I
Folgen und Reihen

1 Konvergenz von Folgen

Def. (1) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\colon\ |a_n - a| < \epsilon.$$

Für $\mathbb{R}^d$ muss gelten $\|a_n - a\| < \epsilon$.

Def. (2) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbf{N}^* : a_n \notin]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ endlich ist.

Thm. (Monotone) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}$.

Thm. (Cauchy) Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$

Thm. (Sandwich) Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert zu a, falls $(b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ existieren mit Grenzwert a und $\forall n \geq 1 : b_n \leq a_n \leq c_n$.

2 Konvergenz von Reihen

Def. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut ($\Rightarrow$ konvergent), falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kovergiert.

Thm. (Cauchy) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ mit $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$

Thm. (Ratio) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf\limits_{n\to\infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

Thm. (Root) Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

Thm. (Alternating) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$.

Bsp. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert.

3 Eigenschaften

Lem. (Bernouilli) $(1 + x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Thm. (Teilfolge) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Thm. (Vektorfolge) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$.

Def. (LimSup, LimInf) Sei a_n beschränkt, definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geqslant n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geqslant n\}$$

Thm. (Umordnung) Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert. TODO Copy from R.

4 Wichtige Beispiele

Bsp. (Potenzreihe) Eine Potenzreihe kann man als eine Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

auffassen. Es gilt:

$$\begin{cases} |x - x_0| < \rho & \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \\ |x - x_0| > \rho & \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Wobei je nach Eignung:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad n!,\ \alpha^n \text{ oder Polynom}$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (b_n)^n$$

Bsp. (Zeta-Funktion) Die Funktion konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s = 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\begin{array}{ll}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} & = 1 \\
\lim_{n\to\infty} n^a q^n,\ 0 \leq q \leq 1,\ a \in \mathbb{Z} & = 0 \\
\hline
\lim_{n\to\pm\infty} \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n & = e^{\pm x} \\
\lim\limits_{n\to\infty \wedge f(n)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} & = e \\
\lim_{x\to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} & = e \\
\hline
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} & = 1
\end{array}$$

Teil II
Stetige Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

1 Stetigkeit an einem Punkt

Def. (Epsilon) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

Thm. (Sequence) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

Thm. (Sidewise) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

gilt.

Thm. (Differentiable) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls sie in $\boldsymbol{x_0}$ differenzierbar ist.

2 Eigenschaften

Thm. (Zwischenwertsatz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b, \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$.

Thm. (Min-Max) Sei $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in I$$

und f ist beschränkt.

Thm. (Umkehrabbildung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3 Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. (Punktweise) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$, falls

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Def. (Gleichmässig) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

bzw. falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$, so dass:

$$\forall n \geqslant N, \quad \forall x \in D : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Thm. (Stetige Funktionenfolge) Sei $D \subset R$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist f (in D) stetig.

Thm. (Beschränkte Funktionenfolge) Sei $D \subset R$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls $|f_n(x)| \leqslant c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$$

ebenfalls und deren Grenzwert f ist eine in D stetige Funktion.

4 Grenzwert an einem Punkt

Def. (Häufungspunkt) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungs -punkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$ gilt:

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$$

Def. (Grenzwert) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ mit $A \in \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, falls $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt ist und $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$

Teil III
Differenzierbare Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar falls sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

1 Differenzierbarkeit

Def. f ist in x_0 differenzierbar falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Falls $x = x_0 + h$, ist dies äquivalent zu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2 Ableitungen

Thm. (Ableitungsregeln)

- Summenregel
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
- Produktregel
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
- Quotientenregel
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$
- Kettenregel
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

3 Wichtige Beispiele

Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \exp(z)' = \exp(z)$$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, differenzierbar, und surjektiv. Beobachte dass $\exp(x) \geqslant 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Die Umkehrabbildung ist

$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \ln(x)' = 1/x$$

wobei ln eine streng monoton wachsende, differenzierbare, bijektive Funktion ist.

Trigonometrische Funkt.

$$\sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(\varphi)' = \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \cos(\varphi)' = -\sin(\varphi)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \qquad \tan(\varphi)' = \frac{1}{\cos(\varphi)^2}$$

Thm. $\forall z \in \mathbb{C}$

- $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
- $\sin(z + w) = sin(z)cos(w) + sin(w)cos(z)$
  $\cos(z + w) = cos(z)cos(w) - sin(w)sin(z)$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Hyperbolische Funkt.

TODO