

Analysis

4. August 2020

Teil I Folgen und Reihen

1 Konvergenz von Folgen

Def. (1) Eine Folge a_n konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon.$$

Für \mathbb{R}^d muss gelten $\|a_n - a\| < \epsilon$.

Def. (2) Eine Folge a_n konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^*: a_n \notin [l - \epsilon, l + \epsilon]\}$ endlich ist.

Thm. (Monotone) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}$.

Thm. (Cauchy) Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

Thm. (Sandwich) Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert zu a , falls $(b_n)_{n \geq 1}, (c_n)_{n \geq 1}$ existieren mit Grenzwert a und $\forall n \geq 1: b_n \leq a_n \leq c_n$.

2 Konvergenz von Reihen

Def. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut (\Rightarrow konvergent), falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Thm. (Cauchy) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$

Thm. (Ratio) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1$. Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

Thm. (Root) Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

Thm. (Alternating) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert zu $\log(2)$.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ konvergiert zu $\log(1+x)$ für $-1 < x < 1$.

Thm. (McLaurin) Sei $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

und in diesem Fall gilt $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_1^{\infty} f(x) dx \leq f(1)$

Kor. (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

3 Eigenschaften

Lem. (Bernoulli) $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Thm. (Teilfolge) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Thm. (Vektorfolge) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leq j \leq d$.

Def. (LimSup, LimInf) Sei a_n beschränkt, definieren wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k : k \geq n\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k : k \geq n\}$$

Thm. (Umordnung) Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der

Reihe und hat denselben Grenzwert.

Thm. (2.7.23) Falls $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B, \quad \forall m \geq 0$

dann konvergiert $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$

dann konvergiert $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$

$$\text{und es gilt } \sum_{i=0}^m S_i = \sum_{j=0}^m U_j$$

Thm. (2.7.24) Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots$$

Thm. (2.7.26) Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

4 Wichtige Beispiele

Bsp. (Geometrische Reihe) Für $q < 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^N q^n$ zu $\frac{1-q^{N+1}}{1-q}$

Bsp. (Potenzreihe) Eine Potenzreihe kann man als eine Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

auffassen. Es gilt:

$$\begin{cases} |x - x_0| < \rho \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \\ |x - x_0| > \rho \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Wobei je nach Eignung:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad n!, \alpha^n \text{ oder Polynom}$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (b_n)^n$$

Beachte: Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzbereichs stetig.

Bsp. (Zeta-Funktion) Die Funktion konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s = 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} & = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^a q^n, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad a \in \mathbb{Z} & = 0 \\ \hline \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n & = e^{\pm x} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \wedge_{f(n) \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} & = e \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} & = e \\ \hline \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} & = 1 \end{array}$$

Teil II Stetige Funktionen

Def. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Def. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

. Insbesondere ist eine auf einem kompaktem Intervall stetige Funktion auch gleichmäßig stetig.

1 Stetigkeit an einem Punkt

Def. (Epsilon) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Thm. (Sequence) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in D

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

Thm. (Sidewise) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

gilt.

Thm. (Differentiable) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig, falls sie x_0 differenzierbar ist.

2 Eigenschaften

Thm. (Zwischenwertsatz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$.

Thm. (Min-Max) Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I . Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$$

und f ist beschränkt.

Thm. (Umkehrabbildung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3 Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. (Punktweise) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$, falls

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Def. (Gleichmässig) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

bzw. falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1$, so dass:

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in D : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Thm. (Stetige Funktionenfolge) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist f (in D) stetig.

Thm. (Beschränkte Funktionenfolge) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$$

ebenfalls und deren Grenzwert f ist eine in D stetige Funktion.

4 Grenzwert an einem Punkt

Def. (Häufungspunkt) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$ gilt:

$$(|x_0 - \delta, x_0 + \delta| \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

Def. (Grenzwert) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ mit $A \in \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt ist und $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\forall x \in D \cap (|x_0 - \delta, x_0 + \delta| \setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Thm. (Variablenwechsel) Seien f, g Funktionen, wobei f stetig (ergänzzbar) in y_0 und g stetig (ergänzzbar) in x_0 , mit $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

Teil III Differenzierbare Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar falls sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

1 Differenzierbarkeit

Def. f ist in x_0 differenzierbar falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Falls $x = x_0 + h$, ist dies äquivalent zu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Thm. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in genau dann in x_0 differenzierbar falls es eine in x_0 stetige Funktion $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

2 Ableitungen

Thm. (Ableitungsregeln)

• Summenregel

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

• Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

• Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

• Kettenregel

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Kor. (Inverse) Sei $f : D \rightarrow E$ eine bijektive Funktion, f in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig, dann gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3 Zentrale Sätze

Thm. (Extrema) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Max./Min. in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

In beiden Fällen gilt $f'(x_0) = 0$.

Thm. Falls $f'(x_0) \leq 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) & \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\\ f(x) &\geq f(x_0) & \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\end{aligned}$$

Thm. (Lagrange/Mean) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ diff., dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Thm. (L'Hospital) Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Def. (Konvex) f ist konvex (auf I) falls $\forall x \leq y$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Lem. (Konvex) Seie $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^2$

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \quad f''(x) \geq 0$$

Def. (Glatt) Die Funktion f ist glatt falls sie $\forall n \geq 1$, n -mal differenzierbar ist. Kompositionen von glatten Funktionen sind glatt.

Thm. (Funktionenfolgen) Sei $f_n :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei $f_n \forall n$ einmal stetig differenzierbar ist. Falls $(f_n)_{n \geq 1}$ und $(f'_n)_{n \geq 1}$ gleichässig in $]a, b[$ konvergieren gilt:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

Thm. (Taylor Approximation) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal diff.. Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} (x - a)^{n+1}$$

4 Wichtige Beispiele

Bsp. (Exponentialfunktion)

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \exp(z)' = \exp(z)$$

$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, differenzierbar, und surjektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad \ln(x)' = 1/x$$

wobei \ln eine streng monoton wachsende, differenzierbare, bijektive Funktion ist.

Lem. $e^x \geq 1 + x$ und $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bsp. (Trigonometrische Funkt.)

$$\sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k + 1)!} \quad \sin(\varphi)' = \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} \quad \cos(\varphi)' = -\sin(\varphi)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \quad \tan(\varphi)' = \frac{1}{\cos^2(\varphi)}$$

Merke dass $\int \tan(x) = -\ln(|\cos(x)|)$.

Kor.

$$\forall \varphi > 0 \quad \exists \tau \in [0, \varphi] \quad \sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} \cos(\tau)$$

Thm. $\forall z \in \mathbb{C}$

- $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$
- $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$
 $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(w)\sin(z)$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Lem.

$$\arcsin(y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos(y)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan(y)' = \frac{1}{1 + y^2} \quad [-\infty, \infty] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

Lem.

$$\begin{aligned} \sin(\arccos(x)) &= \cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1 - x^2} \\ \arcsin(\cos(x)) &= x + \pi/2 \end{aligned}$$

Bsp. (Hyperbolische Funkt.)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arcsinh}(y)' = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \operatorname{arctanh}(y)' = \frac{1}{1 - y^2}$$

wobei $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ und $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

- $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$
- $\sinh(x)' = \cosh(x)$
- $\cosh(x)' = \sinh(x)$

Teil IV Riemann Integral

1 Integrationskriterien

Def. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, P eine Partition ($P \subset [a, b]$ und $\{a, b\} \subset P$), $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, und $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen, wir definieren die Untersummen:

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$

und die Obersummen:

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

Def. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$s(f) = S(f) \quad := \int_a^b f(x) dx$$

Thm. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \quad \text{mit} \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Thm. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\forall P \in \mathcal{P}_\delta(I), \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

Thm. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \Rightarrow integrierbar.

Thm. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton \Rightarrow integrierbar.

Thm. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, f/g (falls $g(x) \geq \beta > 0 \quad \forall x$) integrierbar.

2 Eigenschaften

Thm. (Cauchy-Schwarz) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Thm. (Cauchy) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei f stetig, g beschränkt, integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Thm. (Mittelwertsatz) Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Thm. (Stammfunktion) Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f , falls F (stetig) differenzierbar in $[a, b]$ ist und $F' = f$ in $[a, b]$ gilt.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f .

Thm. (Fundamentalsatz) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Thm. (Partielle Int.) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Thm. (Substitution) Sei $a < b$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a, b]) \subset I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Thm. Sei $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig konvergieren, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx$$

Thm. (Stirling)

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

$$|R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

3 Uneigentliche Integrale

Def. Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b \geq a$, wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

und falls f auf $[a + \epsilon, b]$, $\epsilon > 0$ beschränkt und integrierbar ist, aber nicht beschränkt auf $]a, b]$, dann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Lemma. Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a, b] \quad \forall b \geq a$.

1. Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq a$ und $g(x)$ ist auf $[a, \infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, \infty[$ integrierbar.
2. Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

4 Partialbruchzerlegung

Trick: Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion und $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$, dann ist

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$$

$$= \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i} \prod_{j=1}^l \left((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right)^{m_j}$$

und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x - \gamma_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2 \right)^j}$$

5 Wichtige Beispiele

Bsp. (Gamma Funktion)

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

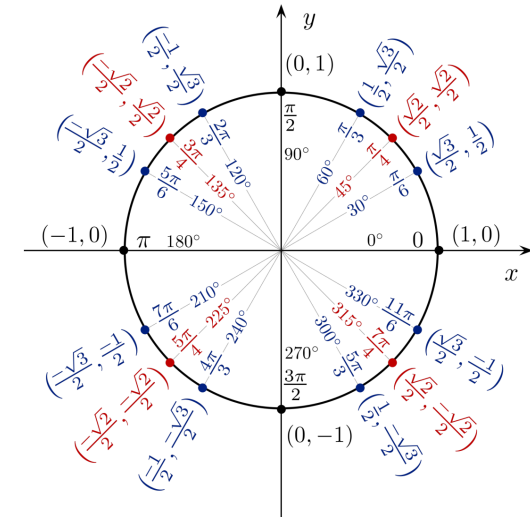
Weitere Eigenschaften sind:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$

- $\Gamma(n+1) = n!$
- logarithmisch konvex
- $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \forall x > 0$

Teil V Vermischtes

1 Trigonometrie



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{4 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\tan(3\alpha) &= \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \\ \sin(\arccos(x)) &= \sqrt{1 - x^2} \\ \cos(\arcsin(x)) &= \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

2 Quadratic Formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3 Länge von Kurven

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad p(t) = (x(t), y(t))$$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad y = f(x), \quad x \in [c, d]$$

4 Weitere McLaurin Reihen

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7) \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - O(x^6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall |x| < 1 \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - O(x^4) \\ \arcsin &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + O(x^7) \\ \arccos(x) &= \pi/2 - \arcsin(x) \\ \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - O(x^7) \\ \sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \\ \cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\ \operatorname{arctanh}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

5 Proofs

Proof: ($\sin(x) < x$) Case distinction \rightarrow Mean-Value-Theorem

$\forall x \in (0, 1) \exists \xi \in (0, 1)$ with

$$\begin{aligned}\sin'(\xi) &= \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \\ \cos(\xi) &= \frac{\sin(x)}{x}\end{aligned}$$

Note that \cos is bounded.

Proof: (Fixpunkt 6.4a) Define $g(x) := f(x) - x \rightarrow$ Zwischenwertsatz

Proof: (Sandwich)

$$\begin{aligned}1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \\ 2. \quad & a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K \\ \text{Es gilt } & |a_n - \alpha| < \epsilon \implies -\epsilon < a_n - \alpha \\ \text{Es gilt } & |b_n - \alpha| < \epsilon \implies +\epsilon > b_n - \alpha \\ \implies & -\epsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \epsilon \\ \implies & |c_n - \alpha| < \epsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha\end{aligned}$$

Proof: (Hôpital)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - f(a)]/(x-a)}{[g(x) - g(a)]/(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[f(x) - f(a)]/(x-a)}{[g(x) - g(a)]/(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}\end{aligned}$$

Proof: (Monotone Konvergenz)

- Supremum exists
- $\forall \epsilon > 0$, there exists N such that $a_N > c - \epsilon$
- ...

Proof: (Thomae is Integrable)

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is irrational or } x = 0 \\ 1/q & \text{if } x = p/q \text{ where } q \in \mathbb{N}, \text{ and } p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- $s(f, P) = 0$
- $K_M = |\{p/q \in [a, b] | q \leq M\}|$
- $S(f, P_N) \leq 2K_M N^{-1} + M^{-1}(b-a)$
- $S(f, P_N) \leq \epsilon$ for $M = \frac{(b-a)*2}{\epsilon}$, $N = \frac{4K_M}{\epsilon}$

Proof: (Integrierbar \rightarrow Beschränkt)

- Da f Riemann Integrabel ist, folgt aus der Definition dass es ein $I \in \mathbb{R}$ gibt sodass: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass

$$|I| - \epsilon < S(f, P, \xi) < |I| + \epsilon$$

für jede Partition P von $[a, b]$ mit $|x_{i+1} - x_i| < \delta$, und für jede Wahl von Zwischenpunkten ξ

- Angenommen f ist unbeschränkt, dann $\exists \xi_{i_0}$
- $|f(\xi_{i_0})| (x_i - x_{i-1}) > |I| + \epsilon + \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \right|$
- Contradiction

Proof: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$

Wir dürfen dabei verwenden dass:

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_a \quad \forall n \geq n_a : |a_n - a| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_b \quad \forall n \geq n_b : |b_n - b| < \epsilon\end{aligned}$$

Sei also $|a| \geq \epsilon_0 > 0$ beliebig. Setze $n_0 := \max\{n_a, n_b\}$. Dann gilt:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + (a_n b - a_n b) - ab|$$

$$= |a_n (b_n - b) + b (a_n - a)|$$

$$(\Delta - \text{Ungl.}) \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$$

$$(*), (1), (2) < (\epsilon + |a|)\epsilon + |b|\epsilon$$

$$(\epsilon \leq |a|) \leq \underbrace{(2|a| + |b|)\epsilon}_{=: C} = C \cdot \epsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

6 Tricks

Trick:

$$\begin{aligned}a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} b^i a^{n-1-i}\end{aligned}$$

7 Rezepte

Konvergenz von Reihen

- Weierstrass (monoton + beschränkt)
- Vergleichssatz
- Geometrische Folge
- Alternierende Reihe
- Riemann Zeta
- Teleskopieren
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?
- konvergiert das Integral?

8 Am Schluss

- 'c' nirgends vergessen?