Analysis

4. August 2020

Teil I
Folgen und Reihen

1 Konvergenz von Folgen

Def. (1) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\colon\ |a_n - a| < \epsilon.$$

Für $\mathbb{R}^d$ muss gelten $\|a_n - a\| < \epsilon$.

Def. (2) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbf{N}^* : a_n \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ endlich ist.

Thm. (Monotone) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}$.

Thm. (Cauchy) Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$

Thm. (Sandwich) Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert zu a, falls $(b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ existieren mit Grenzwert a und $\forall n \geq 1 : b_n \leq a_n \leq c_n$.

2 Konvergenz von Reihen

Def. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut ($\Rightarrow$ konvergent), falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kovergiert.

Thm. (Cauchy) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ mit $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$

Thm. (Ratio) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf\limits_{n\to\infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

Thm. (Root) Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

Thm. (Alternating) Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert zu $\log(2)$.

Bsp. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ konvergiert zu $\log(1+x)$ für $-1 < x < 1$.

Thm. (McLaurin) Sei $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ monoton fallend.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konv.}$$

und in diesem Fall gilt
$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_1^{\infty} f(x)dx \leq f(1)$

Kor. (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

3 Eigenschaften

Lem. (Bernouilli) $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Thm. (Teilfolge) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Thm. (Vektorfolge) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$.

Def. (LimSup, LimInf) Sei a_n beschränkt, definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geqslant n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geqslant n\}$$

Thm. (Umordnung) Falls eine Reihe absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Thm. (2.7.23) Falls $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B, \quad \forall m \geq 0$

$$\text{dann konvergiert } S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

$$\text{dann konvergiert } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

$$\text{und es gilt } \sum_{i=0}^{m} S_i = \sum_{j=0}^{m} U_j$$

Thm. (2.7.24) Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i,\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots$$

Thm. (2.7.26) Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i,\ \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergieren, so knovergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

4 Wichtige Beispiele

Bsp. (Geometrische Reihe) Für $q < 1$, konvergiert $\sum_{n=0}^{N} q^n$ zu $\frac{1-q^N}{1-q}$

Bsp. (Potenzreihe) Eine Potenzreihe kann man als eine Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

auffassen. Es gilt:

$$\begin{cases} |x - x_0| < \rho & \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \\ |x - x_0| > \rho & \implies \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Wobei je nach Eignung:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \qquad n!,\ \alpha^n \text{ oder Polynom}$$

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (b_n)^n$$

Beachte: Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzbereichs stetig.

Bsp. (Zeta-Funktion) Die Funktion konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s = 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$	$= 1$
$\lim_{n\to\infty} n^a q^n,\ 0 \leq q \leq 1,\ a \in \mathbb{Z}$	$= 0$
$\lim_{n\to\pm\infty} (1 \pm \frac{x}{n})^n$	$= e^{\pm x}$
$\lim\limits_{n\to\infty \wedge f(n)\to\infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}$	$= e$
$\lim_{x\to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$	$= e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$	$= 1$

Teil II
Stetige Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig, falls $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

. Insbesondere ist eine auf einem kompaktem Intervall stetige Funktion auch gleichmässig stetig.

1 Stetigkeit an einem Punkt

Def. (Epsilon) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

Thm. (Sequence) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

Thm. (Sidewise) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

gilt.

Thm. (Differentiable) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls sie $\boldsymbol{x_0}$ differenzierbar ist.

2 Eigenschaften

Thm. (Zwischenwertsatz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a, b, \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein x zwischen a und b mit $f(x) = y$.

Thm. (Min-Max) Sei $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall I. Dann gibt es $u \in I$ und $v \in I$ mit

$$f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \quad \forall x \in I$$

und f ist beschränkt.

Thm. (Umkehrabbildung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton. Dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist stetig, streng monoton.

3 Konvergenz von Funktionenfolgen

Def. (Punktweise) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$, falls

$$\forall x \in \Omega \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Def. (Gleichmässig) Eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig gegen f, falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

bzw. falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$, so dass:

$$\forall n \geqslant N, \quad \forall x \in D : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Thm. (Stetige Funktionenfolge) Sei $D \subset R$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge bestehend aus (in D) stetigen Funktionen die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist f (in D) stetig.

Thm. (Beschränkte Funktionenfolge) Sei $D \subset R$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls $|f_n(x)| \leqslant c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$$

ebenfalls und deren Grenzwert f ist eine in D stetige Funktion.

4 Grenzwert an einem Punkt

Def. (Häufungspunkt) $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungs -punkt der Menge D falls $\forall \delta > 0$ gilt:

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$$

Def. (Grenzwert) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ mit $A \in \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, falls $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt ist und $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\forall x \in D \cap (]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Thm. (Variablenwechel) Seien f, g Funktionen, wobei f stetig (ergänzbar) in y_0 und g stetig (ergänzbar) in x_0, mit $y_0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

Teil III Differenzierbare Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar falls sie in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

1 Differenzierbarkeit

Def. f ist in x_0 differenzierbar falls

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Falls $x = x_0 + h$, ist dies äquivalent zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Thm. $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in genau dann in x_0 differenzierbar falls es eine in x_0 stetige Funktion $\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D$$

2 Ableitungen

Thm. (Ableitungsregeln)

- Summenregel
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
- Produktregel
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
- Quotientenregel
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$
- Kettenregel
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Kor. (Inverse) Sei $f : D \longrightarrow E$ eine bijektive Funktion, f in x_0 differenzierbar, $f'(x_0) \neq 0$ und f^{-1} ist in $y_0 = f(x_0)$ stetig, dann gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

3 Zentrale Sätze

Thm. (Extrema) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Max./Min. in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$f(x) \lesseqgtr f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

In beiden Fällen gilt $f'(x_0) = 0$.

Thm. Falls $f'(x_0) \lesseqgtr 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) \lesseqgtr f(x_0) \qquad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$$
$$f(x) \gtreqless f(x_0) \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$$

Thm. (Lagrange/Mean) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff., dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Thm. (L'Hospital) Seien $f, g \ :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$. Falls

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$$

dann folgt

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Def. (Konvex) f ist konvex (auf I) falls $\forall x \leq y$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Lem. (Konvex) Seie $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^2$

$$f \text{ konvex} \iff \forall x \quad f''(x) \geq 0$$

Def. (Glatt) Die Funktion f ist glatt falls sie $\forall n \geq 1$, n-mal differenzierbar ist. Kompositionen von glatten Funktionen sind glatt.

Thm. (Funktionenfolgen) Sei $f_n \ :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge wobei $f_n \forall n$ einmal stetig differenzierbar ist. Falls $(f_n)_{n\geqslant 1}$ und $(f_n')_{n\geqslant 1}$ gleichässig in $]a,b[$ konvergieren gilt:

$$(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

Thm. (Taylor Approximation) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ (n+1)-mal diff.. Für jedes $a < x \leqslant b$ gibt es $\xi \in]a,x[$ mit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

4 Wichtige Beispiele

Bsp. (Exponentialfunktion)

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \exp(z)' = \exp(z)$$

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, differenzierbar, und surjektiv. Die Umkehrabbildung ist

$$\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \ln(x)' = 1/x$$

wobei ln eine streng monoton wachsende, differenzierbare, bijektive Funktion ist.

Lem. $e^x \geq 1 + x$ und $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bsp. (Trigonometrische Funkt.)

$$\sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \sin(\varphi)' = \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} \qquad \cos(\varphi)' = -\sin(\varphi)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \qquad \tan(\varphi)' = \frac{1}{\cos(\varphi)^2}$$

Merke dass $\int \tan(x) = -\ln(|\cos(x)|)$.

Kor.

$$\forall \varphi > 0 \quad \exists \tau \in [0, \varphi] \quad \sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}\cos(\tau)$$

Thm. $\forall z \in \mathbb{C}$

- $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$
- $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
- $\sin(z+w) = sin(z)cos(w) + sin(w)cos(z)$
  $\cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sin(w)sin(z)$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Lem.

$$\arcsin(y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos(y)' = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2} \qquad [-\infty, \infty] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

Lem.

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) \quad = \sqrt{1-x^2}$$
$$\arcsin(\cos(x)) = x + \pi/2$$

Bsp. (Hyperbolische Funkt.)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arcsinh}(y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{arccosh}(y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{arctanh}(y)' = \frac{1}{1-y^2}$$

wobei $\text{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\text{arcosh} : [1, \infty[\to [0, \infty[$ und $\text{artanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$.

- $\cosh(z)^2 - \sinh(z)^2 = 1$
- $\sinh(x)' = \cosh(x)$
- $\cosh(x)' = \sinh(x)$

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)dx &= x\ln(x) - x + C \\
\int xe^x dx &= xe^x - x + C \\
\int x\cos(x)dx &= x\sin(x) + \cos(x) + C \\
\int x\sin(x)dx &= sin(x) - x\cos(x) + C \\
\int \sin(x)^2 dx &= (2x - sin(2x))/4 + C \\
\int \cos(x)^2 dx &= (\cos(x)\sin(x) + x)/2 + C
\end{aligned}$$

Teil IV
Riemann Integral

1 Integrationskriterien

Def. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, P eine Partition ($P \subset [a,b]$ und $\{a,b\} \subset P$), $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, und $\mathcal{P}(I)$ die Menge der Partitionen, wir definieren die Untersummen:

$$s(f,P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i \quad , f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f,P)$$

und die Obersummen:

$$S(f,P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i \quad , F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f,P)$$

Def. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$s(f) = S(f) \quad := \int_a^b f(x)dx$$

Thm. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \quad \text{mit} \quad S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

Thm. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ integrierbar.

Thm. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow$ integrierbar.

Thm. Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $|f|$, f/g (falls $g(x) \geq \beta > 0 \quad \forall x$) integrierbar.

2 Eigenschaften

Thm. (Cauchy-Schwarz) Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt integrierbar, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Thm. (Cauchy) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei f stetig, g beschränkt, integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Thm. (Mittelwertsatz) Seien $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \xi \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Thm. (Stammfunktion) Seien $a < b$ und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von f, falls F (stetig) differenzierbar in $[a,b]$ ist und $F' = f$ in $[a,b]$ gilt.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion von f.

Thm. (Fundamentalsatz) Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Thm. (Partielle Int.) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Thm. (Substitution) Sei $a < b$, $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\phi([a,b]) \subset I$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Thm. Sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen die gleichmässig konvergieren, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Thm. (Stirling)

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

$$|R_3(n)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geqslant 1$$

3 Uneigentliche Integrale

Def. Sei $f : [a,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b] \quad \forall b \geq a$, wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

und falls f auf $[a+\epsilon, b], \epsilon > 0$ beschränkt und integrierbar ist, aber nicht beschränkt auf $]a,b]$, dann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Lem. Sei $f : [a,\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b] \quad \forall b \geq a$.

1. Falls $|f(x)| \leqslant g(x) \quad \forall x \geqslant a$ und $g(x)$ ist auf $[a,\infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a,\infty[$ integrierbar.
2. Falls $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^\infty f(x)dx$

4 Partialbruchzerlegung

Trick: Sei $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion und $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$, dann ist

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x^n + a_{n-1}x'n - 1 + \dots \\
&= \prod_{i=1}^{k} (x-\gamma_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{l} \left((x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x-\gamma_i)^j} + \\
&\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x-\alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j}
\end{aligned}$$

5 Wichtige Beispiele

Bsp. (Gamma Funktion)

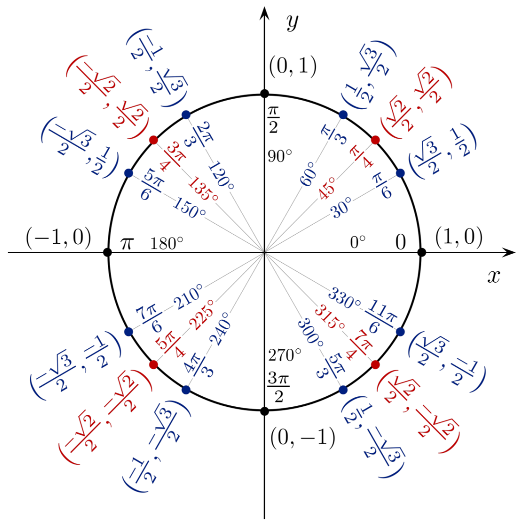
$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

Weitere Eigenschaften sind:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \forall s > 0$
- $\Gamma(n+1) = n!$
- logarithmisch konvex
- $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \forall x > 0$

Teil V
Vermischtes

1 Trigonometrie



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{4 - \tan^2\alpha}$$
$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - \cos\alpha$$
$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$
$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$
$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

2 Quadratic Formula

$$x = \frac{-b+\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3 Weitere McLaurin Reihen

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7) \\
\cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - O(x^6) \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\forall|x|<1 \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - O(x^4) \\
\arcsin &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + O(x^7) \\
\arccos(x) &= \pi/2 - \arcsin(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - O(x^7) \\
\sinh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \\
\cosh(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\
\operatorname{arctanh}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

4 Proofs

Proof: ($\sin(x) < x$) Case distinction → Mean-Value-Theorem
$\forall x \in (0,1)\exists\xi \in (0,1)$ with

$$\begin{aligned}
\sin'(\xi) &= \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \\
\cos(\xi) &= \frac{\sin(x)}{x}
\end{aligned}$$

Note that cos is bounded.

Proof: (Fixpunkt 6.4a) Define $g(x) := f(x) - x \to$ Zwischenwertsatz

Proof: (Sandwich)

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
2. $a_n \le c_n \le b_n\ \forall n \ge K$

Es gilt $|a_n - \alpha| < \epsilon \implies -\epsilon < a_n - \alpha$
Es gilt $|b_n - \alpha| < \epsilon \implies +\epsilon > b_n - \alpha$
$\implies -\epsilon < a_n - \alpha \le c_n - \alpha \le b_n - \alpha < \epsilon$
$\implies |c_n - \alpha| < \epsilon \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

Proof: (Hôpital)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]/(x-a)}{[g(x)-g(a)]/(x-a)} \\
&= \frac{\lim_{x\to a}([f(x)-f(a)]/(x-a))}{\lim_{x\to a}([g(x)-g(a)]/(x-a))} \\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)}
\end{aligned}$$

Proof: (Monotone Konvergenz)

1. Supremum exists
2. $\forall\varepsilon > 0$, there exists N such that $a_N > c - \varepsilon$
3. ...

5 Tricks

Trick:

$$\begin{aligned}
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\
&= (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} b^i a^{n-1-i}
\end{aligned}$$

6 Rezepte

Konvergenz von Reihen

1. Weierstrass (monoton + beschränkt)
2. Vergleichssatz
3. Geometrische Folge
4. Alternierende Reihe
5. Riemann Zeta
6. Teleskopieren
7. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?
8. konvergiert das Integral?

7 Am Schluss

- 'c' nirgends vergessen?