Reporte de Modelo de Optimización II

Alberto Helguera Fleitas C-412
José Gabriel Navarro Comabella C-412
Juan David Menéndez del Cueto C-412
Karl Lewis Sosa Justiz C-412

November, 2020

Presentación del problema

Se plantea el siguiente problema: Dado un conjunto de objetos geométricos de distintas formas y que pueden tener distintos colores o no, ¿cuál es la mejor forma, visualmente hablando, de ubicarlos en una región rectangular?

Este problema tiene 2 puntos claves a la hora de resolverlo computacionalmente: el primero son los objetos geométricos, esto es debido a la gran variedad de figuras que existen y a la dificultad de representarlas de una manera que sea conveniente a la hora de resolver el problema; y el segundo es definir cuál es la mejor forma de ubicarlos.

El primer punto es solucionado de la siguiente manera: cada objeto es sustituido por el rectángulo, con los lados paralelos a lo ejes de coordenadas, de menor área que lo contiene. Mientras que la mejor forma de ubicarlos es definida como la forma en la cual se maximice la utilización del área y los objetos sean empaquetados ortogonalmente y sin solapamientos.

Entonces el problema original queda reducido al siguiente: Dado un conjunto de rectángulos, encontrar la forma de empaquetarlos ortogonalmente y sin solapamientos en una región rectangular tal que se maximice la utilización del área.

Modelo matemático

Se tiene un conjunto de n rectángulos r_i con dimensiones $w_i \times h_i,\ i = 1, ..., n$ y un rectángulo más grande con dimensiones $W \times H$ donde ubicarlos de la manera planteada en la sección anterior.

Para saber la posición en que fue ubicado cada rectángulo, se define

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r_i \textit{ fue ubicado horizontalmente} \\ 0 & \text{si} \quad r_i \textit{ fue ubicado verticalmente} \end{cases}$$

Sean:

el conjunto $\{(x_i, y_i),\ i = 1, ..., n\}$, donde (x_i, y_i) representa la localización de la esquina inferior izquierda del rectángulo i, una ubicación de los n rectángulos en el rectángulo más grande;

U, el conjunto formado por los rectángulos que tienen un rectángulo ubicado por encima, y para cada elemento de U se define U_i como el recángulo ubicado inmediatamente encima;

R, el conjunto formado por los rectángulos que tienen un rectángulo ubicado a su derecha y para cada uno sus elementos se define R_i como el rectángulo ubicado inmediatamente a su derecha;

$w_{max} = \max\ x_i + w_i * p_i + h_i * (1 - p_i),\ i = 1, ..., n;$

$h_{max} = \max\ y_i + h_i * p_i + w_i * (1 - p_i),\ i = 1, ..., n;$

Entonces podemos modelar el problema como encontrar la ubicación $\{(x_i, y_i),\ i = 1, ..., n\}$ tal que:

$$\max \ f = W * H - w_{max} * h_{max}$$
$$\text{s.a.}$$
$$0 \leq x_i \leq W - (w_i * p_i + h_i * (1 - p_i)) \ \ i \in \{1, ..., n\}$$
$$0 \leq y_i \leq H - (h_i * p_i + w_i * (1 - p_i)) \ \ i \in \{1, ..., n\}$$
$$x_i + w_i * p_i + h_i * (1 - p_i) \leq x_{R_i} \ \ i \in R$$
$$y_i + h_i * p_i + w_i * (1 - p_i) \leq y_{U_i} \ \ i \in U$$
$$x_i \in \mathbb{R}$$
$$y_i \in \mathbb{R}$$
$$p_i \in \{0, 1\}$$

Las dos primeras restricciones del modelo aseguran que todas los rectángulos estén contenidos en el rectángulo más grande, y la tercera y la cuarta garantizan que no exista ningún solapamiento entre los rectángulos a ubicar.

Notemos además que la función objetivo del modelo es equivalente a

$$\min \ g = w_{max} * h_{max}$$

dado que $W * H$ es un valor fijo una vez planteado el problema.

Algoritmo

El algoritmo utilizado en la resolución de este problema es el descrito en la sección 3 de [1].

Bibliography

[1] Lijun, Wei; Lim, Andrew; Zhu, Wenbin. (2011). A Skyline-Based Heuristic for the 2D Rectangular Strip Packing Problem. 6704. 286-295. 10.1007/978-3-642-21827-9_29.