# Aufgabe 1

## a) $\forall Z \exists Y \forall X (f(X,Y)) \Leftrightarrow (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X))$

Äquivalenz in zwei Implikationen umformen:

$$\forall Z \exists Y \forall X ((f(X,Y) \Rightarrow (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X)))$$
$$\wedge (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X)) \Rightarrow f(X,Y))$$

Implikationen in Disjunktionen umformen:

$$\forall Z \exists Y \forall X (\neg f(X,Y) \vee (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X)))$$
$$\wedge \neg (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X)) \vee f(X,Y))$$

Negation in der zweiten Zeile auflösen:

$$\forall Z \exists Y \forall X (\neg f(X,Y) \vee (f(X,Z) \wedge \neg f(X,X))$$
$$\wedge (\neg f(X,Z) \vee f(X,X) \vee f(X,Y)))$$

erste Zeile aufteilen in Konjunktion von zwei Disjunktionen:

$$\forall Z \exists Y \forall X ((\neg f(X,Y) \vee (f(X,Z))$$
$$\wedge (\neg f(X,Y) \vee \neg f(X,X)))$$
$$\wedge (\neg f(X,Z) \vee f(X,X) \vee f(X,Y)))$$

Skolemisieren, so dass $\exists Y \equiv skY(Z)$:

$$(\neg f(X, skY(Z)) \vee f(X,Z))$$
$$\wedge (\neg f(X, skY(Z)) \vee \neg f(X,X))$$
$$\wedge (\neg f(X,Z) \vee f(X,X) \vee f(X, skY(Z)))$$

schließlich bringen wir das ganze in die Mengenschreibweise der KNF:
$\{\neg f(X, skY(Z)) \vee f(X,Z), \neg f(X, skY(Z)) \vee \neg f(X,X), \neg f(X,Z) \vee f(X,X) \vee f(X, skY(Z))\}$

## b)$\forall X \forall Y (q(X,Y)) \Leftrightarrow \forall Z (f(Z,X) \Leftrightarrow f(Z,Y))$

aufteilen:

$$\forall X \forall Y (q(X,Y)) \Leftrightarrow \forall Z (f(Z,X))$$
$$\forall Z (f(Z,X)) \Leftrightarrow f(Z,Y)$$

## c) $\forall X \exists Y ((p(X,Y) \Leftarrow \forall X \exists T q(Y,X,T)) \Rightarrow r(Y)$

aufteilen:

$$\forall X \exists Y (\forall X \exists T q(Y,X,T)) \Rightarrow r(Y)$$
$$\wedge (\forall X \exists T q(Y,X,T) \Rightarrow p(X,Y))$$

in Disjunktionen umwandeln:

$$\forall X \exists Y (\neg (\forall X \exists T q(Y,X,T))) \vee r(Y)$$
$$\wedge (\neg (\forall X \exists T q(Y,X,T)) \vee p(X,Y))$$

Quantoren nach außen ziehen:

$$\forall X \exists Y ((\exists X \forall T (\neg q(Y, X, T) \vee r(Y))$$
$$\wedge (\exists X \forall T (\neg q(Y, X, T) \vee p(X, Y)))$$

d)

# Aufgabe 3

## gegeben

$$V = \{X, Y\}$$
$$F = \{vater\_von/1, mutter\_von/, max/0\}$$
$$P = \{verheiratet/2\}$$

## gesucht

### Herbrand Universum

$$\begin{aligned}
&max, \\
&vater_von(max), \\
&vater_von(vater_von(max)) \\
&... \\
&mutter_von(max), \\
&mutter_von(mutter_von(max)) \\
&... \\
&vater_von(mutter_von(max)), \\
&vater_von(vater_von(mutter_von(max))), \\
&mutter_von(vater_von(max)), \\
&mutter_von(vater_von(vater_von(max))), \\
&... \\
&mutter_von(vater_von(mutter_von(vater_von(mutter_von(...)))))
\end{aligned}$$

### Herbrand Basis

$$\begin{aligned}
&verheiratet(max, vater_von(max)), \\
&verheiratet(max, mutter_von(max)), \\
&verheiratet(vater_von(max), mutter_von(max)), \\
&verheiratet(vater_von(vater_von(max)), mutter_von(vater_von(max))), \\
&...
\end{aligned}$$

## Herbrand Interpretation

### D

D ist das Herbrand Universum

**F**

Die Identitätsfunktion:

$$\begin{aligned} max \rightarrow max, \\ vater\_von(max) \rightarrow vater\_von(max), \\ ... \end{aligned}$$

**R**

weist den Elementen der Herbrand Basis Wahrheitswerte zu:

$$\begin{aligned} verheiratet(max, vater\_von(max)) \rightarrow FALSE, \\ verheiratet(vater\_von(max), mutter\_von(max)) \rightarrow TRUE, \\ verheiratet(vater\_von(vater\_von(max)), mutter\_von(vater\_von(max))) \rightarrow TRUE, \\ ... \end{aligned}$$