Giulia Monchietto, Edoardo Venturini

POLITECNICO DI TORINO

Homework 1

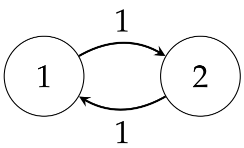
Studente: *Andrea Ruglioni*

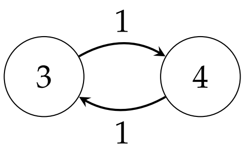
Corso: *Processi stocastici* – Professore: *Enrico Bibbona*
Data consegna: *15 Novembre 2022*
Gruppo:

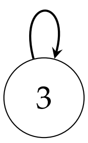
Question 1

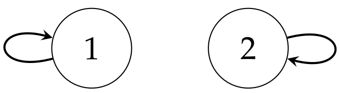
What is the airspeed velocity of an unladen swallow?

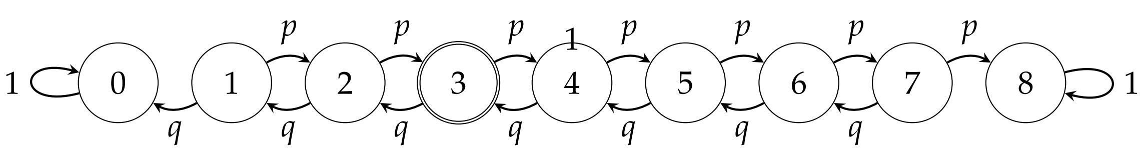
Answer. While this question leaves out the crucial element of the geographic origin of the swallow, according to Jonathan Corum, an unladen European swallow maintains a cruising airspeed velocity of **11 metres per second**, or **24 miles an hour**. The velocity of the corresponding African swallows requires further research as kinematic data is severely lacking for these species.

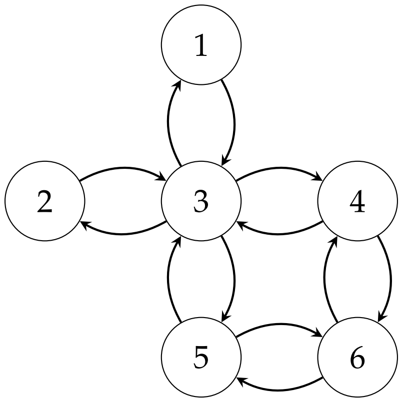












Question 2

How much wood would a woodchuck chuck if a woodchuck could chuck wood?

(*a*) Suppose "chuck" implies throwing.

(*b*) Suppose "chuck" implies vomiting.

Answer.

(*a*) According to the Associated Press (1988), a New York Fish and Wildlife technician named Richard Thomas calculated the volume of dirt in a typical 25–30 foot (7.6–9.1 m) long woodchuck burrow and had determined that if the woodchuck had moved an equivalent volume of wood, it could move "about **700 pounds (320 kg)** on a good day, with the wind at his back".

(*b*) A woodchuck can ingest 361.92 cm^3 (22.09 cu in) of wood per day. Assuming immediate expulsion on ingestion with a 5% retainment rate, a woodchuck could chuck **343.82 cm^3** of wood per day.

Esercizio 3

Mary is in prison and has 3 dollars; she can get out on bail if he has 8 dollars. A guard agrees to make a series of bets with her. If Mary bets A dollars, she wins A dollars with probability 0.4 and loses A dollars with probability 0.6. Find the probability that she wins 8 dollars before losing all of his money if

(*a*) she bets 1 dollar each time (timid strategy).

(*b*) she bets, each time, as much as possible but not more than necessary to bring his fortune up to 8 dollars (bold strategy).

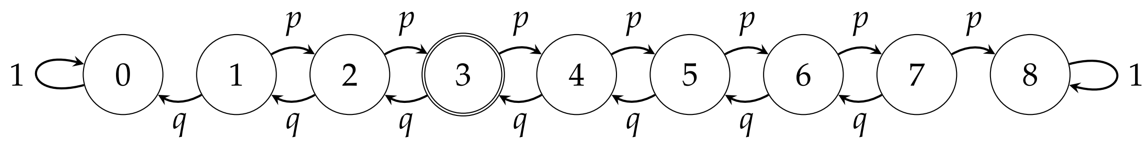
Which strategy gives Mary the better chance of getting out of jail?

Soluzione.

(*a*) La strategia timida definisce una DTMC le cui probabilità di transizione sono date da:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(0,0) = 1, \\
&\mathbb{P}(i,i+1) = p = 0.4 && i = 1,\dots,7, \\
&\mathbb{P}(i,i-1) = q = 1-p = 0.6 && i = 1,\dots,7, \\
&\mathbb{P}(8,8) = 1.
\end{aligned}
$$

Mentre il rispettivo grafo è dato da



Ponendoci nel caso generale, supponiamo di partire con $0 \leq n \leq 8$ dollari. Sia U_n l'evento "uscire dalla prigione partendo con n dollari", V l'evento "Mary vince una scommessa" e $P = \overline{V}$ "Mary perde una scommessa". Allora, per la formula delle probabilità assoluta si ha che

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_n) &= \mathbb{P}(U_n|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(U_n|P)\mathbb{P}(P) \\
&= \mathbb{P}(U_n|V)p + \mathbb{P}(U_n|P)q \\
&= \mathbb{P}(U_{n+1})p + \mathbb{P}(U_{n-1})q.
\end{aligned} \tag{1}
$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che, sapendo di aver vinto una scommessa, avrò $n+1$ dollari, per cui $\mathbb{P}(U_n|V) = \mathbb{P}(U_{n+1})$. Possiamo effettuare un ragionamento simile nel caso in cui Mary perda una scommessa. Definiamo ora per semplicità di notazione $u_n = \mathbb{P}(U_n)$. Otteniamo così l'equazione ricorsiva con condizioni al contorno su u_0, u_8:

$$
\begin{cases}
u_n = u_{n+1}p + u_{n-1}q & n = 1,\dots,7, \\
u_0 = 0, \\
u_8 = 1.
\end{cases}
$$

Possiamo risolvere tale equazione ricorsiva lineare del secondo ordine risolvendo prima l'equazione associata

$$px^2 - x + q = 0.$$

Da cui si ricavano le soluzioni

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p}.$$

Ponendo $p = 0.4$, e quindi $q = 0.6$, si ottiene $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$. Dunque si ha che

$$u_n = Ax_1^n + Bu_2^n = A\left(\frac{3}{2}\right)^n + B,$$

dove A e B sono costanti che si ottengono applicando le condizioni al contorno

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 0 = A + B \Rightarrow B = -A, \\
&u_8 = 1 = A\left(\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1\right) \Rightarrow A = -\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, vale che

$$u_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^8 - 1},$$

ed in particolare, ponendo $n = 3$, si ottiene che $u_3 \approx 0.0964$.

(*b*) La strategia audace consiste invece nel scommettere ad ogni passo una quantità data da $min\{n, 8-n\}$. In questo modo, l'**??** diventa:

$$u_n = u_{min\{2n,8\}}p + u_{max\{0,2n-8\}}q.$$

Partendo dal valore $n = 3$, e ricordando le condizioni iniziali $u_0 = 0, u_8 = 1$, si ricavano le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} u_3 &= u_6 p + u_0 q = u_6 p, \\ u_6 &= u_8 p + u_4 q = p + u_4 q, \\ u_4 &= u_8 p + u_0 q = p. \end{aligned}$$

Da cui, procedendo ricorsivamente e ponendo $p = 0.4$, si ottiene:

$$u_3 = (p + pq)p = p^2(1 + q) = 0.256.$$

In conclusione, la strategia audace è più efficace. In tal caso Mary ha una probabilità di uscire di prigione del 25.6%, contro il 9.64% della strategia timida.

Esercizio 4

Consider a DTMC with state space $S = \{0, ..., N\}$ and transition probabilities $p(i, i+1) = p, p(i, i-1) = q$, for $1 \le i \le N$ where $p + q = 1, 0 < p < 1$; assume $p(0,0) = p(N, N-1) = q$ and $p(0,1) = p(N,N) = p$.

(*a*) Draw the graph (= transition diagram).

(*b*) Is the Markov chain irreducible?

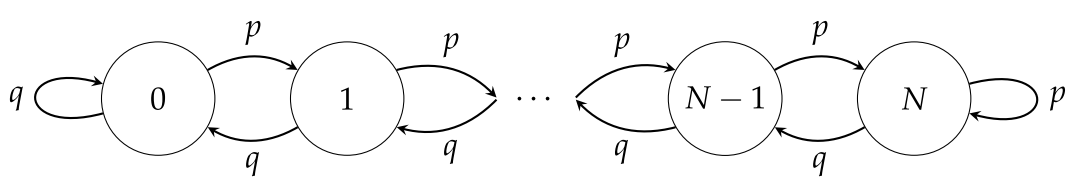
(*c*) Is it aperiodic?

(*d*) What is the period of the chain?

(*e*) Find the stationary distribution.

Soluzione.

(*a*) Il grafo definito dalla DTMC è dato da



Notiamo che tale catena è un processo di nascita e morte definito sull'intervallo $0, \dots, N$.

(b) La catena è irriducibile. Infatti $\forall i, j \in S$, come si può vedere dal grafo, esiste un cammino che congiunge i due nodi, cioé $i \leftrightarrow j$.

(c) La catena è aperiodica. Per mostrarlo ricordiamo che il periodo è una proprietà di classe, e quindi siccome la catena è aperiodica è uguale per tutti gli stati in S. Prendiamo lo stato $i = 0$. Questo ha un self-loop, quindi è aperiodico e di conseguenza la DTMC stessa è aperiodica.

(d) La catena è aperiodica, quindi ha periodo unitario.

(e) La catena è finita e irriducibile, quindi esiste ed è unica la distribuzione stazionaria $\pi = (\pi(i))_{i \in S}$. Inoltre, in quanto è un processo di nascita e morte, segue che la catena stazionaria è anche reversibile. Da qui si può ricavare la distribuzione stazionaria definita da

$$\pi(0) = \frac{1}{M}, \qquad \pi(x) = \pi(0) \left(\prod_{i=0}^{x-1} \frac{p}{q} \right) = \pi(0) \left(\frac{p}{q} \right)^x,$$

dove

$$M = \sum_{x=0}^{N} \prod_{i=0}^{x-1} \left(\frac{p}{q} \right) = \sum_{x=0}^{N} \left(\frac{p}{q} \right)^x.$$

Question 5 (bonus marks)

Listing 1: Luftballons Perl Script

```perl
#!/usr/bin/perl

use strict;
use warnings;

for (1..99) { print $_." Luftballons\n"; }

# This is a commented line

my $string = "Hello World!";

print $string."\n\n";

$string =~ s/Hello/Goodbye Cruel/;

print $string."\n\n";

finale();

exit;

sub finale { print "Fin.\n"; }
```

1. How many luftballons will be output by the Listing **??** above?
2. Identify the regular expression in Listing **??** and explain how it relates to the anti-war sentiments found in the rest of the script.

Answer.

1. 99 luftballons.
2. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullamcorper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.