# חדו"א 2ת' – אביב תשפ"ה

# גיליון 1

מגיש: דן קצוב-פייגין 323002915

תאריך הגשה: 25/04/2025

## שאלה 1

### סעיף א'

יהיו $\vec{v},\vec{w}$ שני וקטורי יחידה ב-$\mathbb{R}^3$ כך ש-$\vec{v}+\vec{w}$ הוא גם וקטור יחידה. חשבו את $|\vec{v}-\vec{w}|$.

פתרון: מהנתון נסיק כי $|\vec{v}|=|\vec{w}|=|\vec{v}+\vec{w}|=1$. מתכונות מכפלה סקלרית ומהנתון נקבל כי:

$$(\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})=|\vec{v}|^2+2\vec{v}\cdot\vec{w}+|w|^2=1+2\vec{v}\cdot\vec{w}+1=1\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{1}{2}$$

מכאן:

$$(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})=|\vec{v}|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}+|\vec{w}|^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\Rightarrow|\vec{v}-\vec{w}|=\sqrt{3}$$

■

### סעיף ב'

יהי $\hat{a}=(d,e,f)$. לפי הנתונים $|\hat{a}|=1$ ובנוסף מתקיים:

$$\hat{a}\cdot\hat{\imath}=d\cdot1+e\cdot0+f\cdot0=d=|\hat{a}||\hat{\imath}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\hat{a}\cdot\hat{\jmath}=e=|\hat{a}||\hat{\jmath}|\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|\hat{a}|=\sqrt{d^2+e^2+f^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+f^2=1$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+f^2=1\Rightarrow f=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$$

נתון כי $\hat{a}$ יוצר זווית חדה עם $\hat{k}$. לכן, $f>0$ ומכאן $f=\frac{1}{2}$. לסיכום,

$$\hat{a}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

■

## שאלה 2

הוכיחו כי שלוש נקודות שונות $A,B,C$ נמצאות על ישר אחד אם ורק אם קיים קבוע $\lambda$ כך שמתקיים:

$$(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

(כאשר אם $A$ מציין נקודה, אז $\overrightarrow{OA}$ מסמן את הווקטור מהראשית לנקודה זו).

### פתרון כיוון א'

נתון: שלוש נקודות שונות $A,B,C$ נמצאות על אותו ישר. צ"ל: קיים קבוע $\lambda$ כך שמתקיים:

$$(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

נסמן את הישר העובר בנקודות $A$ ו-$B$ ב-$l$. הצגה פרמטרית של $l$ היא $\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$. לפי הנתון $C$ נמצאת על הישר לכן קיים $t=\lambda\in\mathbb{R}$ עבורו מתקיים:

$$\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\lambda\Big(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AO}\Big)=(1-\lambda)\overrightarrow{AO}+\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$$

### פתרון כיוון ב'

נתון: קיים קבוע $\lambda$ כך שמתקיים: $(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$. צ"ל: שלוש הנקודות $A,B,C$ נמצאות על אותו ישר.

$$(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=\lambda\Big(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\Big)+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$$

המשוואה הנ"ל מתארת את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות על הישר העובר בנקודות $A$ ו-$B$, נסמנו $l$. הצגה פרמטרית של הישר $l$ היא $A+t\overrightarrow{AB}$. מהנתון נסיק שהנקודה $C$ מקיימת את משוואת הישר (כאשר $t=\lambda$). כלומר, $C$ נמצאת על הישר שעובר ב-$A$ וב-$B$. לכן, $A,B,C$ נמצאות על ישר אחד.

■

## שאלה 3

יהיו $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ לא על אותו הישר. הראו (ללא שימוש בנוסחא לשטח משולש) כי $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|$.

פתרון:

$$\overrightarrow{QP} = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)$$
$$\overrightarrow{QR} = (r_1 - q_1, r_2 - q_2, r_3 - q_3)$$
$$\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$$
$$\overrightarrow{PR} = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$$

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = \left| \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ r_1 - q_1 & r_2 - q_2 & r_3 - q_3 \end{vmatrix} \right| = a$$

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \left| \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - p_1 & r_2 - p_2 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} \right| \underset{\text{חיבור שורות לא משנה את הדטרמיננטה}}{\overset{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_2 \to -R_2}}{=}}$$
$$= \left| - \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \\ r_1 - q_1 & r_2 - q_2 & r_3 - q_3 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ r_1 - q_1 & r_2 - q_2 & r_3 - q_3 \end{vmatrix} \right| = a$$

■

## שאלה 4

הוכיחו את הטענות הבאות:

### סעיף א'

יהיו $\vec{v},\vec{w}$ וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$. אם לכל וקטור $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$ מתקיים $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ אז $\vec{v}=\vec{w}$.

פתרון: נתונים $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$. יהי $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$. נתון כי $*$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=0$.
נניח בשלילה ש-$\vec{w}\neq\vec{v}$. מכאן, $\vec{0}\neq\vec{v}-\vec{w}$. ניקח $\vec{u}=\vec{v}-\vec{w}\neq\vec{0}$ ואז:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})=|\vec{v}-\vec{w}|^2\neq 0$$

וזאת בסתירה ל-$*$. $\blacksquare$

### סעיף ב'

אם $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ וקטורים שמקיימים $|\vec{v}+\vec{w}|=|\vec{v}-\vec{w}|$ אז $\vec{v},\vec{w}$ ניצבים.

פתרון:

$$\begin{gathered}|\vec{v}-\vec{w}|=|\vec{v}+\vec{w}| \quad /\ (\ )^2\\(\vec{v}-\vec{w})\cdot(\vec{v}-\vec{w})=(\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{v}+\vec{w})\\\cancel{|\vec{v}|^2}-2v\cdot w+\cancel{|\vec{w}|^2}=\cancel{|\vec{v}|^2}+2v\cdot w+\cancel{|w|^2}\\4\vec{v}\cdot\vec{w}=0\\\vec{v}\cdot\vec{w}=0\Rightarrow\vec{v}\perp\vec{w}\end{gathered}$$

$\blacksquare$

## שאלה 5

יהי $\pi$ מישור המתואר על ידי המשוואה $x+y+2z+1=0$.
נתון כי מישור $M$ עובר דרך הנקודות $(1,2,1),(2,-1,-1)$ וניצב למישור $\pi$.
בנוסף, נתון כי קיים $t$ ממשי כך שהנקודה $(t,t,t)$ נמצאת על המישור $M$. מצאו את $t$.

פתרון: נסמן את הנקודות $A=(1,2,1), B=(2,-1,-1), T=(t,t,t)$.
$\vec{N}_M=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AT}$ הוא וקטור הניצב לשניהם ולכן מהווה נורמל למישור $M$ המוגדר ע"י הנקודות $A,B,T$.

$$\overrightarrow{AB}=(2,-1,-1)-(1,2,1)=(1,-3,-2)$$
$$\overrightarrow{AT}=(t-1,t-2,t-1)$$

$$\vec{N}_M=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AT}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ 1 & -3 & -2\\ t-1 & t-2 & t-1\end{vmatrix}=(-3t+3+2t-4,-(t-1+2t-2),t-2+3t-3)=(-t-1,-3t+3,4t-5)$$

נתון כי $\pi\perp M$, לכן הנורמלים שלהם מאונכים. הנורמל למישור $\pi$ הוא $(1,1,2)$. מכאן:

$$\vec{N}_M\cdot\vec{N}_\pi=0$$
$$(-t-1,-3t+3,4t-5)\cdot(1,1,2)=0$$
$$-t-1-3t+3+8t-10=0$$
$$4t=8$$
$$t=2 \ \blacksquare$$

## שאלה 6

נתונים המישור $2x-3y+4z+4=0$ והנקודות $A(k^2,1,k)$ ו-$B(3,-k,-2)$.

### סעיף א'

מצאו את כל ערכי $k$ עבורם הישר העובר דרך הנקודות $A,B$ מקביל למישור הנתון ולא מוכל בו.

פתרון: נסמן את המישור הנתון $M$ ואת הישר העובר דרך הנקודות $A,B$ ב-$l$. הצגה פרמטרית של $l$ היא:

$$l: A+t\overrightarrow{BA}=(k^2,1,k)+t(k^2-3,k+1,k+2)$$

כדי שיתקיים $l \parallel M$, נדרוש כי $\overrightarrow{AB} \perp \vec{N}_M$:

$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{N}_M \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{N}_M=0$$
$$(k^2-3,k+1,k+2)\cdot(2,-3,4)=0$$
$$2k^2-6-3k-3+4k+8=0$$
$$2k^2+k-1=0$$
$$k_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow k_1=-1,k_2=\frac{1}{2}$$

כדי שישר יהיה מוכל במישור, כל הנקודות על הישר צריכות להיות שייכות למישור. לכן, אם הישר מקביל למישור, מספיק שנקודה אחת בישר תהיה שייכת למישור ואז כל הישר יהיה מוכל במישור.
נבדוק כל אחד מערכי $k$ שקיבלנו ע"י הצבת נקודה אחת במישור:

$k_1=-1$: $l_1:(1,1,-1)+t(-2,0,1)$. נציב $t=0$ ונקבל את הנקודה $(1,1,-1)$. נציב אותה במשוואת המישור $M$ ונקבל:

$$2\cdot 1-3\cdot 1+4\cdot(-1)+5=0$$

כלומר הנקודה $(1,1,-1)$ מוכלת במישור ולכן $l_1$ מוכל במישור.

$k_2=\frac{1}{2}$: $l_2:\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}\right)+s\left(-\frac{11}{4},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$. נציב $s=0$ ונקבל את הנקודה $\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}\right)$. נציב אותה במשוואת המישור $M$ ונקבל:

$$2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+5=\frac{5}{2}\neq 0$$

כלומר הנקודה $\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}\right)$ לא מוכלת במישור ולכן $l_2$ לא מוכל במישור.

לסיכום, עבור $k=\frac{1}{2}$ הישר העובר דרך הנקודות $A,B$ מקביל למישור הנתון ולא מוכל בו. $\blacksquare$

### סעיף ב'

עבור ה-$k$ שמצאתם, מצאו את המרחק מהישר העובר דרך הנקודות $A,B$ למישור הנתון.

פתרון: הישר מקביל למישור. לכן, מרחק כל נקודה על הישר מהמישור קבוע. נבחר $s=0$ ונקבל את הנקודה $\left(\frac{1}{4},1,\frac{1}{2}\right)$.
נשתמש בנוסחה למרחק נקודה ממישור:

$$d=\frac{|2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+5|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{|\frac{1}{2}-3+2+5|}{\sqrt{4+9+16}}=\frac{4\frac{1}{2}}{\sqrt{29}}=\frac{9}{2\sqrt{29}}\ \blacksquare$$