חדו"א 1ת – קיץ תשפ"ה

דן קצוב-פייגין dan.k@campus.technion.ac.il

תוכן עניינים

1 הרצאה 1 | 25/08/25

קישור להקלטה

1.1 קבוצות

סימון של קבוצה: $\{\}$. בקבוצה אין חזרות ואין חשיבות לסדר, כלומר $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,1,2,3\}$.

נראה כמה סימונים בסיסיים. יהיו A ו-B קבוצות כאשר $A = \{1,2,7\}, B = \{1,3,7\}$. כדי לסמן שאף קבוצה לא מכילה את השנייה נסמן $A \not\subseteq B, B \not\subseteq A$.

את **החיתוך** של הקבוצות, כלומר הקבוצה שמכילים את האיברים המשותפים לשתי הקבוצות, נסמן ב-$A \cap B = \{1,7\}$. **האיחוד** שלהן יכיל את האיברים שקיימים בלפחות קבוצה אחת ויסומן ב-$A \cup B = \{1,3,2,7\}$

נראה כמה קבוצות בסיסיות של מספרים.

המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}, \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,...\}$

$$2 \in A = \{1,2,7\} \subseteq \mathbb{N}, 4 \notin A$$

$$\mathbb{N}_{\text{even}} = \{2,4,6,8\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{זוגי } n\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{N}_{\text{even}} \cup \mathbb{N}_{\text{odd}} = \mathbb{N}, \mathbb{N}_{\text{even}} \cap \mathbb{N}_{\text{odd}} = \{\} = \emptyset = \text{קבוצה ריקה}$$

המספרים השלמים $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$

שבר $\frac{m}{n}$ ייקרא **מצומצם** אם לא קיימים שלמים המקיימים:

$$a, b, k, k > 1, m = k \cdot a, m = k \cdot b$$

נראה ש-$\frac{84}{27}$ אינו שבר מצומצם: $\frac{84}{27} = \frac{28 \cdot \cancel{3}}{9 \cdot \cancel{3}}$. האם כעת קיבלנו שבר מצומצם? $\frac{28}{9} = \frac{7 \cdot 2^2}{3}$, כלומר אין גורם משותף למונה ולמכנה גדול מ-1.

מספרים ממשיים $\mathbb{R}$: "כל המספרים שניתן למקם על הציר": $2, -\frac{84}{27}, \pi, e, \sqrt{2}$. כל שבר עשרוני סופי או אינסופי.

מתקיים: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.2 קטעים

נרצה דרך נוחה לסמן קטעים שתחומים בין שני מספרים ממשיים. יהיו $a < ba, b \in \mathbb{R}$. נסמן את הקטעים הבאים:

1. **קטע פתוח**: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. אפשר גם לוותר על $x \in \mathbb{R}$.
2. **קטע סגור**: $[a,b] = \{a \leq x \leq b\}$
3. **קטע חצי סגור/פתוח**: $[a,b) = \{a \leq x < b\}, (a,b] = \{a < x \leq b\}$

ניתן לקחת גם את ∞ בתור אחד הקצוות, כאשר קצה זה פתוח:

$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

לא נתעסק בקטע מהצורה $[a,\infty]$.

הגדרה 1.2.1 (סביבת-ε / ε-סביבה): סביבת ε של $x_0 \in \mathbb{R}$ הוא קטע מהצורה $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

הגדרה 1.2.2 (סביבת-ε נקובה / ε-סביבה נקובה): סביבת ε **נקובה** של $x_0 \in \mathbb{R}$ הוא קטע מהצורה:

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

משפט 1.2.1 (צפיפות המספרים הרציונליים) : לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ שמקיים $|x-q| < \varepsilon$.

משפט 1.2.2 : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

הוכחה : נניח בשלילה שקיים מספר רציונלי מצומצם $r = \frac{m}{n}$ המקיים $r^2 = 2$. מכאן נקבל:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2$$

כלומר m^2 מספר זוגי, ולכן m זוגי, כלומר קייחם $a \in \mathbb{N}$ המקיים $m = 2 \cdot a$. מכאן:

$$2n^2 = m^2 = (2a)^2 = 4a^2 \Rightarrow n^2 = 2a^2 \Rightarrow n = 2 \cdot b$$

כלומר m וגם n זוגיים ולכן השבר $r = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot b}$ אינו שבר מצומצם. הגענו לסתירה לנתון כנדרש. ■

קיבלנו גם ש-$\mathbb{R} \not\subseteq \mathbb{Q}$.

לֶמה 1.2.3 : אם m^2 זוגי, אז גם m זוגי.

1.3 חסימות

הגדרה 1.3.1 (חסימות) : תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נאמר ש-A:

1. **חסומה מלמעלה / מלעיל** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ שמקיים $\forall x \in A, x \leq M$. M נקרא **חסם מלמעלה / מלעיל**.
2. **חסומה מלמטה / מלרע** אםA קיים $m \in \mathbb{R}$ שמקיים $\forall x \in A, m \leq x$. m נקרא **חסם מלמטה / מלרע**.
3. **חסומה** אם היא חסומה למעלה וגם מלמטה $\Leftrightarrow |A| \leq d \Leftrightarrow A \subseteq [m, M]$.

דוגמאות 1.3.1 :

1. $(a, b]$ חסומה על ידי b מלמעלה ועל ידי a מלמטה, אך גם על ידי $b+1$ מלמעלה ועל ידי $a-1$ מלמטה.
2. $\mathbb{N}$ חסומה מלמטה על ידי 0 אך לא חסומה.

1.4 סדרות

הגדרה 1.4.1 (סדרה) : אוסף אינסופי ממוספר (סדור) של מספרים : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. מסמנים סדרה ב-$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, או $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

דוגמאות 1.4.1:

1. $a_n = 7$: $7, 7, 7, \ldots$
2. $$a_n = \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$$
3. p_n = המספר הראשוני ה-n-י: $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$
4. $\sqrt{2}$ = d_n = הספרה ה-n-ית אחרי הנקודה של $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1.d_1d_2d_3\ldots \Rightarrow a_n = 1.d_1d_2\ldots d_n$$

1. נוסחאות נסיגה / רקורסיה:
   1. $a_1 = 1, n \geq 1, a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$. זאת נוסחת העצרת: $a_n = n!$.
   2. $$b_1 = \sqrt{2}, n \geq 1, b_{n+1} = \sqrt{2+b_n} \Rightarrow b_1 = \sqrt{2}, b_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, b_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$$

1.4.1 פעולות על סדרות

- חיבור/חיסור: $c_n = a_n \pm b_n$
- ערך מוחלט: $x_n = |a_n|$
- כפל: $c_n = a_n \cdot b_n$
- חילוק: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$

1.5 גבול של סדרה

$\sqrt{2}$ הוא הגבול של סדרת הקירובים $\ldots ,1.4, 1.41, 1.414$. מה זה אומר?

הגדרה 1.5.1 (גבול של סדרה): נאמר ש-$L \in \mathbb{R}$ הוא **גבול של סדרה** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |a_n - L| < \varepsilon$$

במקרה זה מסמנים:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = L \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$$

המשמעות היא שלכל $\varepsilon > 0$, כל איברי הסדרה למעט מספר סופי ("כמעט כל איברי הסדרה") נמצאים בסביבת-ε של L.

דוגמאות 1.5.1 :

1. שבר עשרוני של שורש 2 עד המקום ה-n-י $\rightarrow a_n = 1.d_1 d_2 ... d_n$.

הוכחה : יהי $\varepsilon > 0$. קיים n_0 כך ש-$\frac{1}{\varepsilon} < 10^{n_0} \Leftrightarrow 10^{-n_0} < \varepsilon$. מתקיים לכל $n \geq n_0$:

$$|a_n - \sqrt{2}| = |1.d_1 d_2 ... d_n - 1.d_1 d_2 d_3 ...| = 0.\underbrace{0...0}_{\text{n times}} d_{n+1} d_{n+2} ... < 10^{-n} < \varepsilon$$

■

2. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$:

$a_0 = 0$, $a_1 = 1.5$, $a_2 = 0.67$, $a_3 = 1.25$, $a_4 = 0.8$, $a_5 = 1.17$, $\lim_{n\to\infty} = 1$.

הוכחה : יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ ואז לכל $n \geq n_0$:

$$|a_n - 1| = |1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

לכן $\lim_{n\to\infty} = 1$. ■

הגדרה 1.5.2 (סדרה מתכנסת) : נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת** אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$. אחרת, אומרים שהסדרה **מתבדרת**.

דוגמאות 1.5.2 :

1. $n!, (-1)^n n!$ מתבדרות.
2. $(-1)^n$ מתבדרת : למשל עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ נקבל לכל n שכבר a_{n+1} לא מקיים את הגדרת הגבול.

הגדרה 1.5.3 (חסימות של סדרה) : סדרה נקראת **חסומה** אם הקבוצה של איברי הסדרה היא חסומה.

דוגמאות 1.5.3 :

1. $a_n = 7$: $\{7\}$
2. $a_n = (-1)^n$: $\{1, -1\}$

הגדרה 1.5.4 (מונוטוניות של סדרה) : סדרה נקראת :

1. **מונוטונית עולה** אם לכל n מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$, או **עולה ממש** אם $a_n > a_{n+1}$.
2. **מונוטונית יורדת** אם לכל n מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$, או **יורדת ממש** אם $a_{n+1} > a_n$.
3. **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

דוגמה 1.5.4 : $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$, $n\ge 1$, $b_1=\sqrt{2}$ נוכיח באינדוקציה שהסדרה עולה ממש.

- <u>בסיס</u>: $b_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=b_1$ ✓
- <u>צעד</u>: נניח כי $b_n \ge b_{n+1}$ עבור n כלשהו.
- <u>הוכחה</u>: נוכיח כי $b_{n+2}\ge b_{n+1}$:

$$b_{n+2}=\sqrt{2+b_{n+1}}\ge\sqrt{2+b_n}=b_{n+1}\ \blacksquare$$

האם הסדרה חסומה?

$$b_1=\sqrt{2}=1.414, b_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}=1.848, b_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=1.962, b_4=1.99, b_5=1.998, \ldots$$

נוכיח באינדוקציה כי $b_n\le 2$.

- <u>בסיס</u>: $b_1=\sqrt{2}<2$ ✓
- <u>צעד</u>: נניח כי $b_n\le 2$ עבור n כלשהו.
- <u>הוכחה</u>: נוכיח כי $b_{n+1}\le 2$:

$$b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}\le\sqrt{2+b_n}\le\sqrt{2+2}=2\ \blacksquare$$

נניח שאנחנו יודעים כי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$. נמצא את L:

$$b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+b_n}\ \underset{\lim b_n=\lim b_{n+1}}{=\!=\!=\!=}\ \lim_{n\to\infty} b_n=$$

$$L=\sqrt{\lim_{n\to\infty} 2+b_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty} b_n}=\sqrt{2+L}$$

$$L=\sqrt{2+L}\Rightarrow L^2=2+L\Rightarrow L^2-L-2=(L-2)(L+1)=0\Rightarrow$$

$$\cancel{L=-1}\Rightarrow L=2$$

כפי שציפינו.

משפט 1.5.1 (יחידות הגבול) : אם $a_n\to L_2$, $a_n\to L_1$, אז $L_1=L_2$.

הוכחה : יהי $\varepsilon>0$. קיימים $N_2 N_1$, עבורם ניקח $n_0=\max\{N_1,N_2\}$ שמקיים

$$\forall n\ge N_1, |a_n-L_1|<\varepsilon, \forall n\ge N_2, |a_n-L_2|<\varepsilon$$

ואז לכל $n\ge n_0$:

$$|L_1-L_2|=|L_1-a_n+a_n-L_2]\underset{\text{אי-שוויון המשולש}}{\le}|L_1-a_n|+|a_n-L_2|<2\varepsilon$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $|L_1-L_2|<\varepsilon$. כלומר ההפרש קטן ממספר חיובי קטן כרצוננו, ולכן $L_1=L_2$. $\blacksquare$

משפט 1.5.2 : אם סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי היא חסומה.

הוכחה : עבור $\varepsilon=1$ קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $L-1\le a_n\le L+1$.
נגדיר $M=\max\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}$ ו-$m=\min\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}$ ואז לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\min\{L-1,m\}\le a_n\le\max\{L+1,M\}$$

$\blacksquare$

יש לשים לב שההפך אינו נכון: חסומה $\nLeftarrow$ מתכנסת. לדוגמה $(-1)^n$. באופן כללי, $A \Rightarrow B \not\Rightarrow B \Rightarrow A$. אך כן מתקיים $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ כאשר $\neg$ מסמל שלילה.

במקרה שלנו למשל, אם סדרה חסומה, זה לא אומר בהכרח שהיא מתכנסת. אולם, מתקיים שאם הסדרה לא חסומה, היא בוודאי לא מתכנסת! אם הייתה מתכנסת, הייתה חייבת להיות חסומה לפי המשפט שהוכחנו.

2 הרצאה 2 | 27/08/25

קישור להקלטה

תזכורת: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. במקרה זה נאמר ש-L הוא **הגבול** של $\{a_n\}$ ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

2.1 יחס סדר בין גבולות

משפט 2.1.1 (סדר בין גבולות): תהיינה a_n, b_n סדרות כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$. אזי:

1. אם $a_n \geq b_n$ כמעט לכל n אזי $L \geq M$.
2. אם $L > M$ אזי $a_n > b_n$ החל ממקום מסוים $\Leftrightarrow \exists n_0, \forall n \geq n_0, a_n > b_n$.

הוכחה:

1. יהי $\varepsilon > 0$. קיים n_a כך שלכל $n \geq n_a$ מתקיים $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$. באופן דומה, קיים n_b כך שלכל $n \geq n_b$ מתקיים $M - \varepsilon < b_n < M + \varepsilon$.
ניקח $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$ ואז לכל $n \geq n_0$ מתקיים $M - \varepsilon < b_n \leq a_n < L + \varepsilon$ ומכאן $M - L < 2\varepsilon$. זה נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $M - L \leq 0 \Leftrightarrow M \leq L$.
2. עבור $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon), b_n \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$.
לפי הגדרת הגבול, לכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$b_n < M + \varepsilon = M + \frac{L-M}{2} = \frac{2M+L-M}{2} = \frac{M+L}{2} = \frac{M+L+L-L}{2} = L - \varepsilon < a_n$$

■

הערות:

1. אם $a_n > b_n$ לכל n, לא ניתן להסיק כי $L > M$. למשל $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n}$ אך $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
2. אם $L \geq M$ לא ניתן להסיק ש-$a_n \leq b_n$ החל ממקום מסוים. למשל $a_n = b_n = 0$.

מסקנות:

1. אם $a_n \geq 0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0$. ניקח $b_n = 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ואז נשתמש בסעיף 1 של משפט 2.1.1.
2. אם $a \leq a_n \leq b$ כמעט לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [a,b]$.
3. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ אז $a_n > 0$ כמעט לכל n.

לֶמה 2.1.2 (אי שוויון המשולש): $|a-b| \leq |a| + |b|, \||a| - |b|\| \leq |a-b|, |b| - |a| \leq |a-b|$

משפט 2.1.3: תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ו-$\{|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת הערכים המוחלטים. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אז $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |L|$ ובפרט $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. ניקח n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. ואז לפי אי-שוויון המשולש,

$$\||a_n| - |L|\| \underset{\forall n \geq n_0}{\leq} |a_n - L| < \varepsilon$$

■

לֶמה 2.1.4 : $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \Leftrightarrow |a_n - L| \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הוכחה : $\varepsilon > |a_n - L| = ||a_n - L| - 0|$ ואז לפי הגדרת הגבול. ■

משפט 2.1.5 (סנדוויץ') : תהיינה a_n, b_n, c_n סדרות כאשר $a_n \le b_n \le c_n$ לכל n.
אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

הוכחה : יהי $\varepsilon > 0$. נמצא n_0 כזה שמתאים ל-ε עבור שתי הסדרות, a_n ו-c_n. נשתמש בנוסף בנתון ונקבל :

$$\forall n \ge n_0, L-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L+\varepsilon \Rightarrow \forall n \ge n_0, b_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = L$$

■

מסקנה ממשפט הסנדוויץ' : אם $0 \le a_n \le b_n \longrightarrow 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

משפט 2.1.6 (חשבון גבולות) : תהיינה a_n, b_n סדרות כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$. אזי :

1. $a_n + b_n \longrightarrow L + M$
2. $a_n \cdot b_n \longrightarrow L \cdot M$
3. $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{L}{M}$, אם $M \neq 0$
4. $a_n^{b_n} \longrightarrow L^m$, אם $L \neq 0$

הוכחה :

1. יהי $\varepsilon > 0$ ו-n_0 כזה שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $|a_n - L|, |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת מתקיים לכל $n \ge n_0$:

$$|a_n + b_n - (L+M)| \le |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. ידוע ש-a_n חסומה (כי היא מתכנסת). יהי c כך ש- $|a_n| \le c$ לכל n. נבחר n_a כך ש- $|a_n - L| \le \frac{\varepsilon}{2|M|}$ לכל $n > n_a$ ו- n_b כך ש- $|b_n - M| \le \frac{\varepsilon}{2c}$ לכל $n \ge n_b$. יהי $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$ ואז לכל $n \ge n_0$ מתקיים :

$$|a_n \cdot b_n - M \cdot L| = |a_n b_n - a_n M + a_n M - LM| \underset{\text{אי-שוויון המשולש}}{\le} |a_n b_n - a_n M| + |a_n M - LM| =$$

$$= |a_n||b_n - M| + |a_n - L||M| \le c|b_n - M| + |a_n - L||M| \le c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2|M|} \cdot |M| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. ראינו בתרגול ש- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = M^{-1}$ ואז

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

■

משפט 2.1.7 (חסומה כפול אפסה) : אם a_n סדרה חסומה ו-$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

הוכחה : אם $|a_n| \le c$ לכל n אז :

$$0 \le |a_n b_n| \le c|b_n| \longrightarrow 0 \Rightarrow |a_n b_n| \longrightarrow 0$$

■

דוגמאות 2.1.1 (חסומה כפול אפסה):

1. את הסדרה $\sin(n)/n$ נפרק למכפלת שתי סדרות, $a_n = \sin(n)$ ו-$b_n = 1/n$. $|a_n| \le 1$ לכן הסדרה שואפת לאפס.
2. ניתן להוכיח את $a_n \cdot b_n \longrightarrow ML$ בקלות עם משפט זה:

$$|a_n b_n - LM| \le \overbrace{|a_n|}^{\le c}\overbrace{|b_n - M|}^{\to 0} + \overbrace{|a_n - L|}^{\to 0}\overbrace{|M|}^{\text{קבוע חסום}} \longrightarrow 0$$

2.2 סדרת ממוצעים

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נייצר את **סדרות הממוצעים**:

1. חשבוני: $m_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$
2. הנדסי: $g_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$
3. הרמוני: $h_n = \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\right)^{-1} = n/\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$

משפט 2.2.1 (אי-שוויון הממוצעים): $m_n \ge g_n \ge h_n$

לֶמה 2.2.2 (גבולות של סדרות ממוצעים): אם $0 < a_n \longrightarrow L$ אז $m_n, g_n, h_n \longrightarrow L$.

הוכחה:

- ממוצע חשבוני:

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - L\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nL}{n}\right| = \left|\frac{(a_1 - L) + (a_2 - L) + \cdots + (a_n - L)}{n}\right| =$$

$$\left|\frac{(a_1 - L) + \cdots \left(a_{n_0} - L\right)}{n}\right| + \left|\frac{\left(a_{n_0+1} - L\right) + \cdots + (a_n - L)}{n}\right| = A$$

הסדרה a_n חסומה. נסמן $|a_n| \le c$ לכל n. מכאן $|L| \le c$ (אחרת היינו יכולים לקחת $\varepsilon = \frac{|L|-c}{3}$ ולהראות שקיימים $a_n > c$) ולכן $|a_n - L| \le 2c$ ומכאן:

$$A \le n_0 \frac{2c}{n} + (n - n_0)\frac{\varepsilon}{n}$$

בהנחה שבחרנו n_0 כך ש-$\forall k \ge n_0, |a_k - L| < \varepsilon$. נבחר $n_1 \ge n_0$ שיקיים $n_0 \frac{2c}{n} < \varepsilon$. מתקיים גם כי:

$$\frac{n - n_0}{n} < 1 \Rightarrow (n - n_0)\frac{e}{n} < \varepsilon$$

ואז לכל $n \ge n_1$ $A < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ ולכן $\lim_{n\to\infty} m_n = L$. ■

- ממוצע הרמוני:

הוכחה: מאריתמטיקה של גבולות מספיק להוכיח $\frac{1}{h_n} \longrightarrow \frac{1}{L}$. נסמן סדרה חדשה $b_n = \frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{L}$.

$$\frac{1}{h_n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = \underbrace{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}_{\text{סדרת הממוצעים החשבוניים}} \xrightarrow{\text{המשפט הקודם}} \frac{1}{L}$$

ולכן $h_n \longrightarrow L$. ■

- ממוצע הנדסי:

הוכחה: לפי סנדוויץ' ואי-שוויון הממוצעים. ■

■

דוגמה 2.2.1: תהי סדרה $a_n = \sqrt[n]{n}$. נרצה להוכיח שגבולה 1.

<u>דרך א'</u>: נגדיר $b_n = n^{1/n} - 1$ ומכאן:

$$n = (1 + b_n)^n \underset{\text{בינום}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (b_n)^k \geq \frac{n(n-1)}{2} (b_n)^2$$

כאשר התבססנו על כך הסכום הוא סכום של איברים חיוביים אי-שליליים, ולכן הסכום גדול מכל אחד מהאיברים, בפרט מהאיבר השני. נזכיר את נוסחת הבינום, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. נעביר אגפים ונקבל:

$$b_n \leq \sqrt{\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)}} \longrightarrow 0 \Rightarrow a_n \longrightarrow 1 \blacksquare$$

<u>דרך ב'</u>: ראשית ננסח טענה שימושית:

לֶמה 2.2.3: תהי a_n סדרת חיוביים. אם $\frac{a_n}{a_{n-1}} \longrightarrow L$ אז $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow L$.

הוכחה: נגדיר $n \geq 2$, $q_1 = a_1, q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. ואז נקבל:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = q_1 \cdots q_n$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{q_1 \cdots q_n} \xrightarrow[\text{הממוצעים ההנדסיים}]{\text{כי זו סדרת}} L$$

■

בדוגמה שלנו נגדיר $b_n = n$ ואז:

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n}{n-1} \longrightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{b_n} \longrightarrow 1$$

משפט 2.2.4 : אם $0 < c \in \mathbb{R}$ אז $\sqrt[n]{c} \longrightarrow 1$.

הוכחה : נחלק למקרים :

1. <u>$c \geq 1$</u> : החל מ-$n_0 = \lceil c \rceil$ מתקיים $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{c} \geq 1$. נפעיל את משפט הסנדוויץ' וסיימנו.
2. <u>$c < 1$</u> :

$$c^{1/n} = \left(\frac{1}{c}\right)^{-1/n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{c}\right)^{1/n}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1$$

אפשר גם : $\lim\limits_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}} = c^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)} = c^0 = 1$ ■