Geometria obliczeniowa - Ćwiczenia

Adrian Mucha 236526, Politechnika Wrocławska WPPT 06.06.2020

Zadanie 15

Załóżmy, że kolejne n wierzchołków wielokąta wypukłego zostały podane w tablicy. Pokazać, że w czasie $O(\log n)$ można sprawdzić, czy dany punkt leży wewnątrz tego wielokąta.

Rozwiązanie

Ustalmy punkt z najmniejszą składową x. Jeżeli istnieje kilka, wybieramy tę z najmniejszą składową y. Oznaczmy ten punkt jako p_0. Reszta punktów to $p_1, \ldots, p_n$ w kolejności według ich kąta od ustalonego punktu (wielokąt jest numerowany przeciwnie do ruchu wskazkówek zegara).

Jeżeli punkt należy do wielokąto, to należy do jakiegoś trójkąta p_0, p_i, p_{i+1} (lub dwóch, jeśli leży na brzegu trójątów). Rozważmy trójkąt p_0, p_i, p_{i+1}, taki że p należy do tego trójkąta, oraz i jest największe spośród takich trójkątów.

Istnieje specjalny przypadek, że p leży na odcinku (p_0, p_n), ale będzie on rozważany osobno. W pozostałych przypadkach, wszystkie punkty p_j dla których $j \leq i$ są po lewej stronie p (przeciwnie do ruchu wskazkówek zegara) w stosunku do p_0 oraz wszystkie pozostałe, które nie leżą przeciwnie do ruchu wskazówek w stosunku do p. Dzięki tej własności można stosować *przeszukiwanie binarne* by znaleźć punkt p_i, taki że p_i nie leży przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od p w stosunku do p_0 oraz i jest największe spośród tych punktów. Na sam koniec sprawdzane jest czy rzeczywiście punkt p leży wewnątrz znalezionego trójkąta.

Znak $(a - c) \times (b - c)$ mówi o tym, czy punkt a jest po lewej (przeciw wskazówkom zegara) lub po prawej (zgodnie ze wskazówkami zegara) od punktu b w stosunku do punktu c.

1. $(a - c) \times (b - c) > 0$ - punkt a leży na prawo od wektora biegnącego z c do b, co oznacza ruch zgodny ze wskazówkami zegara od b w stosunku do c.
2. $(a - c) \times (b - c) < 0$ - punkt a leży na lewo od wektora biegnącego z c do b, co oznacza ruch przeiwny do wskazówkek zegara

Rozważmy zapytanie o punkt p. Najpierw sprawdzamy czy punkt leży między p_1 a p_n. W przeciwnym wypadku, będziemy wiedzieć że nie może być częścią wielokąta. Można to sprawdzić sprawdzając iloczyn wektorowy $(p_1 - p_0) \times (p - p_0) = 0$ lub ma ten sam znak co $(p_1 - p_0) \times (p_n - p_0)$ oraz że $(p_n - p_0) \times (p - p_0) = 0$ lub ma ten sam znak co $(p_n - p_0) \times (p_1 - p_0)$. Następnie sprawdzamy specjalny przypadek gdy p leży na (p_0, p_1). Ostatecznie szukamy ostatniego punktu z $p_1, \ldots, p_n$, który nie jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara od p w stosunku do p_0. Dla punktu p_i sprawdzamy to za pomocą $(p_i - p_0) \times (pip_0) \leq 0$. Po znalezieniu takiego punktu p_i, sprawdzamy czy p leży wewnątrz trójkąta p_0, p_i, p_{i+1}.