Analiza Algorytmów, Ćwiczenia

Adrian Mucha, Politechnika Wrocławska, WPPT 26/04/2020

Zad 25

Niech, $\Lambda > 0$, $m \in \mathbb{N} > 0$, oraz niech $S^{(1)}_{\text{min}}, S^{(2)}_{\text{min}}, \ldots, S^{(m)}_{\text{min}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie wykładniczym

$$S^{(i)}_{\text{min}} \sim Exp(\Lambda)$$

Pokażemy, że zmienna losowa

$$G_m = \sum_{i=1}^{m} S^{(i)}_{\text{min}}$$

ma rozkład gamma zdefiniowany gęstością

$$g_m(x) = \Lambda \frac{(\Lambda x)^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{\Lambda x},\ dla\ x > 0$$

Z zadania 24 mamy co następuję: dla X i Y, będących niezależnymi zmiennymi losowymi o funkcjach gęstości odpowiednio $f_X(x)$ oraz $f_Y(y)$, oraz dla $Z = X + Y$ mamy

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

w szczególności, gdy przyjmiemy $X = S^{(1)}_{\text{min}}$, $Y = S^{(2)}_{\text{min}}$ z uwzględnieniem funkcji gęstości $f(x) = \Lambda e^{-\Lambda x}$ dla rozkładu wykładniczego mamy

$$g_2(x) = \int_0^x f(x) f(x-t) dt = \int_0^x (\Lambda e^{-\Lambda(x-t)} \Lambda e^{-\Lambda t}) dt = \int_0^x \Lambda^2 e^{-\Lambda x} dt = \Lambda^2 x e^{-\Lambda x}$$

podobnie, gdy dokonamy kwolucji x kolejną niezależną zmienną losową $S^{(3)}_{\text{min}}$ otrzymamy

$$g_3(x) = \int_0^x f_2(t) f(x-t) dt = \int_0^x (\Lambda^2 t e^{-\Lambda t} \Lambda e^{-\Lambda(x-t)}) dt = \int_0^x \Lambda^3 t e^{-\Lambda x} dt = \frac{1}{2} \Lambda^3 x^2 e^{-\Lambda x}$$

Za pomocą indukcji matematycznej, udowodnimy następujący wzór

$$g_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Lambda^m x^{m-1} e^{-\Lambda x}$$

Proof. dla $m = 1$, wzór zachodzi

$$g_1(x) = \frac{1}{(1-1)!}\Lambda^1 x^{1-1} e^{-\Lambda x} = \Lambda e^{-\Lambda x} = f(x)$$

Załóżmy, że $g_m(x)$ jest prawdziwa dla sumy m niezależnych zmiennych $G_m = \sum_{i=1}^m S_{\text{min}}^{(i)}$. Następnie, dodając kolejną niezależną zmienną losową $S_{\text{min}}^{(m+1)} \sim Exp(\Lambda)$ o funkcji gęstości $f(x)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^x g_m(t) f(x-t) dt = \int_0^x \frac{1}{(m-1)!}\Lambda^m t^{m-1} e^{-\Lambda t} \Lambda e^{-\Lambda(x-t)} dt = \\ \frac{1}{(m-1)!}\Lambda^m \Lambda e^{-\Lambda x} \int_0^x t^{m-1} dt = \\ \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(m-1)!}\Lambda^{m+1} x^m e^{-\Lambda x} = \\ \frac{1}{m!}\Lambda^{m+1} x^m e^{-\Lambda x} = g_{m+1}(x)\end{aligned}$$

□

Ostatecznie, podstawiając $\Gamma(m) = (m-1)!$, do wzoru otrzymujemy:

$$g_m(x) = \frac{1}{(m-1)!}\Lambda^m x^{m-1} e^{-\Lambda x} = \Lambda \frac{(\Lambda x)^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\Lambda x}$$