METODY OPTYMALIZACJI – LABORATORIUM 1

Adrian Mucha, Politechnika Wrocławska 05/04/2014

Problem 1 (Sysło, Deo, Kowalik 1993, macierz Hilberta)

Jednym z testów na dokładność i odporność algorytmów LP jest następujące zagadnienie

$$\min c^T x$$

Przy warunkach

$$Ax = b, x \geq 0,$$

gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = 1, \ldots, n,$$

$$c_i = b_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}, i = 1, \ldots, n$$

Rozwiązaniem tego zagadnienia jest $x_i = 1, i = 1, \ldots, n$. Macierz A występująca w tym teście, zwana macierzą Hilberta, powoduje złe uwarunkowanie zagadnienia nawet dla niezbyt dużych n.

Zadaniem jest określenie rozmiaru problemu n jaki można rozwiązać z dokładnością do co najmniej 2 cyfr.

Model

Model przyjmuje jako parametr n i generuje macierz Hilberta opisaną powyższym wzorem.

Zmienne decyzyjne

$$x_i : i = 1, \ldots, n$$

będący rozwiązaniem równania.

Ograniczenia

Równości postawione przez warunki

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = b_i, i = 1, \ldots, n$$

Funkcja celu

Minimalizujemy funkcję

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i$$

n	$\frac{\|x-\widetilde{x}\|_2}{\|x\|_2}$
2	$1.05325004057301 \cdot 10^{-15}$
3	$3.67157765110227 \cdot 10^{-15}$
4	$3.27016385075681 \cdot 10^{-13}$
5	$3.35139916635905 \cdot 10^{-12}$
6	$6.83335790676898 \cdot 10^{-11}$
7	$1.67868542192291 \cdot 10^{-8}$
8	0.514058972177268
9	0.682911338087722

Table 1: Błędy względne w zależności od n.

Wyniki

Jak pokazuje tabela 1, zaburzenia stają się znaczące dla $n \geq 8$.

Problem 2 (Kampery)

Rozważmy problem przemieszczenia pewnych kamperów między miastami. Kampery różnych typów $t \in T$ (rozróżniamy 'Standard' i 'Vip') należy przemieścić w zależności od zapotrzebowania $d_{c,t}$ i/lub nadmiaru $s_{c,t}$ do innych miast $c \in C$ gdzie C jest zbiorem wszystkich miast, by doprowadzić do równowagi. Odpowiednio $d_{c,t}$ oznacza zapotrzebowania (zamawiający) w mieście c na kampery typu t oraz $s_{c,t}$ oznacza nadmiary (dostawcy). Dodatkowo kampery typu Standard można zastąpić kamperami typu Vip, ale nie na odwrót.

Model

Niech E oznacza zbiór możliwych połączeń między miastami $\{(c_1, c_2) \in C \times C\}$ oraz niech $l_{(c_1,c_2)\in E}$ oznacza dystans między miastem c_1 a c_2.

Zmienne decyzyjne

Zmienne decyzyjne, wyznaczające ile należy przemieścić kamperów typu t z miasta c_1 do miasta c_2 definiujemy następująco

$$\{\forall (c_1, c_2) \in E, \forall t \in T : x_{c_1,c_2,t} \geq 0\}$$

Ograniczenia

1. Ilość wyjeżdżających przyczep z miasta nie może być większa niż jest w nadmiarze w danym mieście
$$\forall c_1 \in C, \forall t \in T : s_{c_1,t} \geq \sum_{c_2 \in C} x_{c_1,c_2,t}$$

2. Ilość przyjeżdżających przyczep z miasta nie może być większa niż jest zapotrzebowanie w danym mieście

$$\forall c_1 \in C, \forall t \in T : d_{c_1,t} \geq \sum_{c_2 \in C} x_{c_2,c_1,t}$$

3. Zapotrzebowanie powinno zostać wyeliminowane, a kampery typu 'Standard' można uzupełnić kamperami 'Vip'.

$$\forall c_1 \in C : d_{c_1,\text{Vip}} = \sum_{c_2 \in C} x_{c_2,c_1,\text{Vip}} - (d_{c_1,\text{Standard}} - \sum_{c_3 \in C} x_{c_3,c_1,\text{Standard}})$$

Funkcja kosztu

Cena przemieszczenia kampera jest wprost proporcjonalna do odległości między miastami c_1 oraz c_2 zdefiniowanymi w macierzy l_{c_1,c_2}. Kampery należy przemieścić w taki sposób, aby zminimalizować koszt ważony

$$\sum_{(c_1,c_2) \in E} \sum_{t \in T} w_t \cdot l_{c_1,c_2} \cdot x_{c_1,c_2,t}$$

gdzie $x_{c_1,c_2,t}$ oznacza liczbę transportowanych kamperów typu t z miasta c_1 do c_2 natomiast w_t oznacza współczynnik kosztu za dany typ kampera. Współczynnik kosztu kampera typu Vip jest droższy o 15%.

Problem 3 (Przedsiębiorstwo)

Pewna firma produkuje cztery mieszanki - produkty końcowe P. Dwa z nich są produktami podstawowymi $P' \subset P$ powstającymi jako mieszanka trzech surowców S. Surowce te miesza się w odpowiednich proporcjach by wytworzyć produkt P. Każdy z tych produktów ma swoją cenę zbytu w_s za kg jak i również każdy surowiec ma swoją cenę kupna c_s. Jednocześnie są nałożone ograniczenia na minimalną oraz maksymalną ilość surowców jaką można kupić.

Z samej natury procesu produkcji wynika fakt, że tylko pewna część każdego z surowców użytych do produkcji produktów podstawowych P' wchodzi bezpośrednio do tych produktów. Reszta (odpady), których ilość wyraża się każdorazowo poprzez znany współczynnik strat $o_{s,p'}$, może być albo użyta ponownie - do produkcji produktów drugorzędnych 'C' i 'D' - albo zniszczona na koszt firmy. Kosz niszczenia surowca z produktu opisuje $d_{s,p'}$.

Drugorzędny produkt 'C' otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu A z oryginalnym surowcem 1, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokladnie 20% mieszanki. Podobnie, drugorzędny produkt D otrzymuje się poprzez wymieszanie dowolnych ilości odpadów z surowców 1, 2, 3 otrzymanych przy wyrobie produktu B z oryginalnym surowcem 2, przy czym ten ostatni musi stanowić (wagowo) dokładnie 30% mieszanki. Przy produkcji produktów drugorzędnych nie powstają żadne odpady.

Rozwiązaniem problemu są odpowiedzi na następujące pytania:

1. Ile zakupić surowców (1, 2, 3)?

2. Jaką część surowców przeznaczyć do produkcji jakiego produktu (A, B, C, D)?
3. Jaką część odpadów z produkcji produktów A i B zniszczyć, a jaką przeznaczyć do produkcji produktów drugorzędnych?

Model

Zdefiniujmy zbiory. Niech S oznacza zbiór dostępnych surowców, P oznacza zbiór produktów powstałych z wymieszania surowców S, a $P' \subset P$ oznacza zbiór produktów podstawowych, które generują odpady.

Określmy parametry. Niech $w_p : p \in P$ oznacza zysk za kg wyprodukowanego produktu p. Niech $c_s : s \in S$ oznacza cenę za kg surowca s. Niech *Minimum*$_s$ oraz *Maximum*$_s$ oznaczają minimalną (maksymalną) ilość surowca $s \in S$ jaki trzeba (można) zakupić. Niech $o_{s,p'}$ oznacza procent produkowanego odpadu z surowca s podczas wytwarzania produktu p'. Niech $d_{s,p'}$ oznacza koszt zniszczenia odpadu surowca s powstałego z wytworzenia produktu p'.

Zmienne decyzyjne

1. $k_s : s \in S$ ile kupić kg surowca s
2. $x_{s,p} : s \in S, p \in P$ ile użyć surowca s do wykonania produktu p
3. $y_{s,p'} : s \in S, p' \in P'$ ile odpadu powstałego z surowca s i produktu p' zniszczyć
4. $z_{s,p'} : s \in S, p' \in P'$ ile odpadu powstałego z surowca s i produktu p' przeznaczyć na tworzenie produktów drugorzędnych $p" \in P \setminus P'$

Ograniczenia

1. Ograniczenie kupna surowców
$$\forall s \in S : \textit{Minimum}_s \leq k_s \leq \textit{Maximum}_s$$
2. Zużyj nie więcej surowca niż kupiłeś
$$\forall s \in S : \sum_{p \in P} x_{s,p} \leq k_s$$
3. Na produkty drugorzędne przeznacz odpadów nie więcej niż wyprodukowałeś
$$\forall s \in S, \forall p' \in P' : z_{s,p'} \leq x_{s,p'} o_{s,p'}$$
4. Pozbądź się wszystkich powstałych odpadów za pomocą niszczenia lub przeznaczenia na produkty drugorzędne
$$\forall s \in S, \forall p' \in P' : x_{s,p'} o_{s,p'} = y_{s,p'} + z_{s,p'}$$

5. Produkcja A wymaga tego aby mieszanka zachowywała odpowiednie proporcje

$$x_{1,\text{'A'}} \geq 0.2 \cdot \sum_{s \in S} x_{s,\text{'A'}}$$
$$x_{2,\text{'A'}} \geq 0.4 \cdot \sum_{s \in S} x_{s,\text{'A'}}$$
$$x_{3,\text{'A'}} \leq 0.1 \cdot \sum_{s \in S} x_{s,\text{'A'}}$$

6. Produkcja B wymaga tego aby mieszanka zachowywała odpowiednie proporcje

$$x_{1,\text{'B'}} \geq 0.1 \cdot \sum_{s \in S} x_{s,\text{'B'}}$$
$$x_{3,\text{'B'}} \leq 0.3 \cdot \sum_{s \in S} x_{s,\text{'B'}}$$

7. Produkcja C wymaga tego aby mieszanka zachowywała odpowiednie proporcje

$$x_{1,\text{'C'}} = 0.2 \cdot (x_{1,\text{'C'}} + \sum_{s \in S} z_{s,\text{'A'}})$$

8. Produkcja D wymaga tego aby mieszanka zachowywała odpowiednie proporcje

$$x_{2,\text{'D'}} = 0.3 \cdot (x_{2,\text{'D'}} + \sum_{s \in S} z_{s,\text{'B'}})$$

Funkcja zysku

Należy maksymalizować zysk z procesu produkcji opisanego następującą funkcją zysku

$$zysk(k,x,y,z) = \sum_{p' \in P'} \sum_{s \in S} w_{p'} x_{s,p'} (1 - o_{s,p'}) + (\sum_{s \in S} z_{s,\text{'A'}} + x_{1,\text{'C'}}) \cdot w_{\text{'C'}} + (\sum_{s \in S} z_{s,\text{'B'}} + x_{2,\text{'D'}}) \cdot w_{\text{'D'}}$$
$$- (\sum_{s \in S} k_s c_s + \sum_{s \in S} \sum_{p' \in P'} y_{s,p'} d_{s,p'})$$