Problem online - wypożyczanie nart

Wybrane zagadnienia informatyki

Adrian Mucha

December 21, 2020

Zadanie ⚅

Rozważmy algorytm A dla problemu wypożyczania nart, który w każdym kroku kupuje narty z prawdopodobieństwem $\frac{1}{B}$ (kupno nart kosztuje B a pożyczenie 1, po zakupie nart nie ponosimy już żadnych kosztów). Pokaż, że współczynnik konkurencyjności A jest nie mniejszy niż $2 - \frac{1}{B}$ przeciwko adwersarzowi aktywnemu.

Współczynnik konkurencyjności

Jeśli dla każdych możliwych danych algorytm online daje wynik co najwyżej c razy gorszy niż optymalny, mówimy, że algorytm jest c-**konkurencyjny**. Liczba c nazywa się **współczynnikiem konkurencyjności** algorytmu.

Rozwiązanie

Łatwo możemy zauważyć, że optymalną strategią aktywnego adwersarza jest przerwanie urlopu w momencie gdy narty zostaną zakupione w k-tym dniu. W każdym dniu możemy podjąć decyzję o kupnie nart (robimy to z prawdopodobieństwem $\frac{1}{B}$), jeżeli to zrobimy to gra się kończy i nasz koszt całkowity to $(k-1)+B$.

Ten model możemy opisać rozkładem prawdopodobieństwa geometrycznego (pierwszy sukces w k-tej próbie w procesie Bernoulliego). Niech

- $X \sim Geo(\frac{1}{B})$ będzie zmienną losową oznaczającą koszt całkowity (koszt w dniu kupna nart)
- $x_k = (k-1) + B$
- $p_k = P(X = k) = \frac{1}{B}(1 - \frac{1}{B})^{k-1}$ będzie prawdopodobieństwem kupna nart w k-tym dniu.

Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{B}\left(1 - \frac{1}{B}\right)^{i-1} \cdot ((i-1) + B) \\
&= \frac{1}{B} \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right)^{i} \cdot (B + i) \\
&= \frac{1}{B} \sum_{i=0}^{\infty} i \left(1 - \frac{1}{B}\right)^{i} + \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right)^{i} = \star
\end{aligned}
$$

Do rozwiązania $\star$ ($|p| < 1$):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} p^i &= \frac{1}{1-p} \\
\sum_{i=0}^{\infty} i p^{i-1} &= \frac{1}{(1-p)^2} && \text{pochodna } \tfrac{\partial}{\partial p} \\
\sum_{i=0}^{\infty} i p^{i} &= \frac{p}{(1-p)^2}
\end{aligned}
$$

Wracając:

$$
\begin{aligned}
\star &= \frac{1}{B} \cdot \frac{1 - \frac{1}{B}}{(1 - 1 + \frac{1}{B})^2} + \frac{1}{1 - 1 + \frac{1}{B}} \\
&= \frac{1}{B} \cdot \frac{1 - \frac{1}{B}}{(\frac{1}{B})^2} + \frac{1}{\frac{1}{B}} \\
&= B - 1 + B \\
&= 2B - 1
\end{aligned}
$$

Ponieważ algorytm optymalny nie przekroczy B (kosztu całkowitego)

- bo narty możemy wypożyczać codziennie jeżeli trwa mniej niż B dni
- lub narty można kupić na samym początku jeżeli będzie trwał więcej niż B dni

to współczynnik konkurencyjności c wynosi:

$$
c = \frac{2B - 1}{B} = 2 - \frac{1}{B}
$$