

PROGRAMOWANIE LINIOWE I KWADRATOWE

Laboratorium 14

1. W zakładzie doświadczalnym wyhodowano nową odmianę pszenicy, która daje wysokie plony z hektara. Konieczne jest jednak stosowanie trzech nawozów: fosforowego, potasowego i naturalnego. Nawozy te zawierają cztery istotne składniki: A, B, C, D. Zawartość tych składników w 1 kg poszczególnych nawozów oraz minimalna ilość składników odżywczych jakie powinny być dostarczone pszenicy w ciągu okresu wegetatywnego (na 1 ha) przedstawia poniższa tabela. Określić

Składniki	Zawartość składników odżywczych w 1 kg nawozu			Minimalna ilość składnika
	fosforowy	potasowy	naturalny	
A	6	2	26	96
B	40	4	20	160
C	3	20	60	120
D	18	12	13	152

optymalną dawkę nawozów ze względu na wielkość kosztów, jeżeli ceny 1 kg poszczególnych nawozów kształtują się odpowiednio: 5 zł, 6 zł i 2 zł. Proporcje użytych nawozów muszą wynosić 2 : 1 : 8

2. Złodziej włamał się do mieszkania z torbami, do których może załadować przedmioty o łącznej wadze nie przekraczającej 10 kg. W mieszkaniu znajdują się:
- 2 laptopy o wadze 2 kg każdy oraz wartości 2000 zł każdy
 - sprzęt audio o wadze 3 kg oraz wartości 2500 zł
 - telewizor o wadze 3,5 kg oraz wartości 1000 zł
 - 4 antyczne wazy o wadze 1 kg każda oraz wartości 1500 zł każda
 - 10 zabytkowych książek o wadze 0,5 każda oraz wartości 700 zł każda
 - DVD o wadze 1,5 kg i wartości 1200 zł

Które przedmioty powinien zabrać, aby wyjść z najcenniejszym łupem?

3. Rolą firmy w systemie ekonomicznym jest transformacja kupowanych czynników produkcji (nakładów) na towary i usługi, by w końcowym etapie wytworzone

towary i usługi sprzedawać konsumentom na rynku. Przyjmując, że celem firmy jest maksymalizacja zysku należy go wyznaczyć określając koszty produkcji i uzyskane przychody.

Wielkość produkcji pewnej firmy jest opisana funkcją kwadratową z dwoma czynnikami wejściowymi (czyli nakładami) o postaci

$$y = f(x_1, x_2) = x^T A x + b^T x$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Koszty jakie ponosi firma są dane funkcją $C(y) = p^T x$, gdzie p jest wektorem cen nakładów i

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jeżeli $c = 1$ będzie ceną produkowanych wyrobów, wtedy przychód firmy można opisać jako

$$R(y) = cy$$

Zysk firmy jest opisywany zależnością przychód - koszt, czyli

$$Z(x) = cy - p^T x$$

Wyznaczyć optymalny wektor wielkości nakładów x maksymalizujący zysk firmy.

4. Dwa wyroby A i B produkowane są z tego samego surowca, którego zapas 12 tys. ton powinien zostać w pełni zużyty. Na 1 tysiąc sztuk wyrobu A zużywa się 2 tony surowca, a na 1 tysiąc sztuk wyrobu B - 1 tonę surowca. Ustalić wielkość produkcji tych wyrobów tak, aby zminimalizować funkcję kosztu jednostkowego określoną wzorem

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - x_2 + 48$$

Podać wysokość kosztu przy optymalnych rozmiarach produkcji.

5. Energia z elektrociepłowni przesyłana jest do dwóch zużywających ją zakładów produkcyjnych. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłu (odpowiednio do zakładu I - x_1 i do zakładu II - x_2) dana jest wzorem

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81.$$

Rozdzielić dzienną produkcję energii $16MWh$ pomiędzy te dwa zakłady tak, aby zminimalizować koszty przesyłu energii. Podać wysokość tych kosztów.

6. (Optymalizacja portfela akcji) Bardzo popularnym przykładem problemu programowania kwadratowego jest problem optymalizacji portfela akcji. Zadanie polega na określeniu takiego składu portfela złożonego z akcji n spółek, aby przy założonym z góry poziomie zysku zminimalizować ryzyko portfela.

Ryzyko portfela określa się jako iloczyn

$$f(x) = xVx^T,$$

gdzie $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ jest wektorem określającym procentowy udział akcji i -tej spółki w portfelu, a V jest macierzą wariancji-kowariancji oczekiwanej stopy zysku z portfela akcji.

Oczekiwany zysk z portfela określa się jako iloczyn

$$R \cdot x$$

gdzie $R = [R_1, R_2, \dots, R_n]$ jest wektorem wartości oczekiwanych stop zysku z i -tej akcji.

Pamiętając, że udziały akcji w portfelu muszą być dodatnie i muszą się sumować do jedynki (cały portfel = 100%) problem optymalizacji portfela akcji przedstawia się następująco

$$\begin{array}{ll} \min_{\underline{x}} & f(x) = xVx^T \\ \text{p.o.} & Rx \geq R_0 \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \text{ dla } i = 1, \dots, n \end{array}$$

gdzie R_0 jest zakładanym z góry poziomem zysku. Mając dane notowania pewnych pięciu spółek i oczekiwane stopy zysku z ich akcji

Notowania					Oczekiwane stopy zysku z akcji w %				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
53.60	15.20	273.00	26.90	67.50	-2.99	3.62	3.66	1.12	-2.22
52.00	15.75	283.00	27.20	66.00	-1.92	-1.59	-2.65	2.21	0.76
51.00	15.50	275.50	27.80	66.50	2.55	0.00	-2.00	5.40	-1.20
52.30	15.50	270.00	29.30	65.70	4.40	-1.61	1.67	7.17	3.50
54.60	15.25	274.50	31.40	68.00	6.78	-0.33	5.65	-5.10	1.47
58.30	15.20	290.00	29.80	69.00	4.63	1.97	-2.24	-3.69	1.45
61.00	15.50	283.50	28.70	70.00	1.48	0.00	-0.88	1.05	-1.43
61.90	15.50	281.00	29.00	69.00	0.00	3.23	1.78	-0.34	-1.01
61.90	16.00	286.00	28.90	68.30	-4.04	0.00	0.00	3.11	-0.29
59.40	16.00	286.00	29.80	68.10	8.08	3.13	-0.35	10.74	1.03
64.20	16.50	285.00	33.00	68.80	3.74	2.42	-4.56	-0.91	3.92
66.60	16.90	272.00	32.70	71.50	-1.35	4.73	-0.55	4.89	5.31
65.70	17.70	270.50	34.30	75.30	-2.13	-2.82	-2.03	0.58	-1.86
64.30	17.20	265.00	34.50	73.90	0.00	0.58	0.75	-1.45	0.14
64.30	17.30	267.00	34.00	74.00	2.95	-0.58	-1.31	-2.06	-2.30
66.20	17.20	263.50	33.30	72.30	2.11	8.14	0.57	-1.20	0.14
67.60	18.60	265.00	32.90	72.40	-0.74	-0.54	1.13	-0.30	-0.28
67.10	18.50	268.00	32.80	72.20	-2.98	-2.97	0.75	-4.57	-1.11
65.10	17.95	270.00	31.30	71.40	-0.15	3.06	-0.19	-7.03	0.98
65.00	18.50	269.50	29.10	72.10	-1.54	3.51	0.37	6.53	1.94
64.00	19.15	270.50	31.00	73.50					

można wyznaczyć oczekiwane stopy zysku z akcji w % i macierz kowariancji stóp zysku

Oczekiwane stopy zysku z akcji w %				
Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
0.94	1.20	-0.02	0.81	0.45

Macierz wariancji-kowariancji stóp zysku					
	Spółka 1	Spółka 2	Spółka 3	Spółka 4	Spółka 5
Spółka 1	11.43125	1.170126	0.123243	1.6619	2.02536
Spółka 2	1.170126	7.772336	0.498296	1.137367	1.705597
Spółka 3	0.123243	0.498296	5.159792	-1.3094	-0.63073
Spółka 4	1.6619	1.137367	-1.3094	20.28577	2.282434
Spółka 5	2.02536	1.705597	-0.63073	2.282434	4.318896

Na podstawie danych powyżej wektora oczekiwanych stóp zysku i macierzy kowariancji stóp zysku określić taki skład portfela złożonego z akcji 5 spółek,

aby przy minimalnym poziomie zysku na poziomie 1% zminimalizować ryzyko portfela akcji.