数理综合课程复习报告

摘要： 本报告系统梳理了数理综合课程的主要知识模块，包括多元函数微分学、二重积分、三重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程以及向量代数与解析几何。各模块详细阐述关键概念和定理，严格推导重要公式，并总结常见考点与典型题型，以期帮助读者全面理解课程内容并做好备考准备。

一、多元函数微分学

多元函数微分学研究多元函数（通常是二元或三元函数）的微分性质和变化率。本模块涵盖**偏导数**、**全微分**、**方向导数与梯度**、**隐函数及参数方程求导**以及**多元函数的极值与拉格朗日乘子法**等内容。

1. 偏导数与全微分

对于二元函数 $z = f(x,y)$，**偏导数**描述 z 随其中一个自变量变化的瞬时变化率，而将其他自变量保持不变。形式上，f 关于 x 的偏导数定义为：

$$f_x(x,y) \ = \ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\, y)-f(x,y)}{\Delta x}\,,$$

类似地，f 关于 y 的偏导数：

$$f_y(x,y) \ = \ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\,.$$

偏导数的几何意义是：在点 (x,y) 处，沿x轴方向（平行于x轴线）截取曲面 $z=f(x,y)$ 的切线斜率，或沿y轴方向截面曲线的切线斜率。一个二元函数通常有两个一阶偏导数 f_x, f_y（若存在）。偏导数的计算遵循和一元函数求导类似的规则：对某一变量求导时，将其他变量视为常数处理。

全微分： 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在，并且在该点附近满足适当的连续性条件，则 f 在该点是**可微**的，其增量可以近似表示为各偏导的线性组合：

$$dz \approx f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy\,,$$

其中 dx 和 dy 是自变量的微小增量。若偏导连续，则近似可提升为等式，称为全微分公式：$dz = f_x dx + f_y dy$。这表示在点附近，函数增量近似由一个平面（切平面）的线性变化给出。

可微性判定充分条件： 若二元函数 $f(x,y)$ 在区域内偏导数存在且连续，则 f 在该区域内可微，因而全微分存在且表达式如上。这也意味着函数曲面在每点都有惟一的切平面，其方程可写为 $z - z_0 =$

$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$。切平面的斜率由偏导给出，反映了函数局部的一阶线性变化特征。

2. 方向导数与梯度

现实中我们关心函数在任意方向上的变化率。**方向导数**定义为函数在给定方向单位向量 $\mathbf{u}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 方向上的导数，即：

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cos\alpha,\,y+h\sin\alpha)-f(x,y)}{h}\,.$$

通过偏导，方向导数可计算为偏导数的线性组合：若 $\mathbf{u}=(a,b)$ 为单位向量，则

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=f_x(x,y)\,a+f_y(x,y)\,b\,,$$

这一定理表明**方向导数等于梯度与方向向量的点积**。**梯度**是由各偏导数组成的向量，记为 $\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)$。于是 $D_{\mathbf{u}}f=\nabla f\cdot\mathbf{u}$。梯度方向（$\nabla f$ 的方向）是函数增长最快的方向，而该方向上的方向导数的数值等于梯度的模长。换言之，在点 (x,y) 处，$\nabla f(x,y)$ **指向** f 增长最快方向，其长度给出最大增长率；相反方向是下降最快方向（这在多元优化和机器学习中有重要应用）。

方向导数的几何解释：图中绿色曲面表示 $z=f(x,y)$，在点 A' 处沿某一方向 $\vec{h}$（蓝色箭头）的方向导数，可通过考虑包含该方向的一条平面与曲面的交线（黄色曲线）的斜率求得。偏导数可视为特殊方向（坐标轴方向）的方向导数。当方向与梯度方向一致时，方向导数取得最大值；梯度方向垂直于等高线（等值曲线）或等势面。

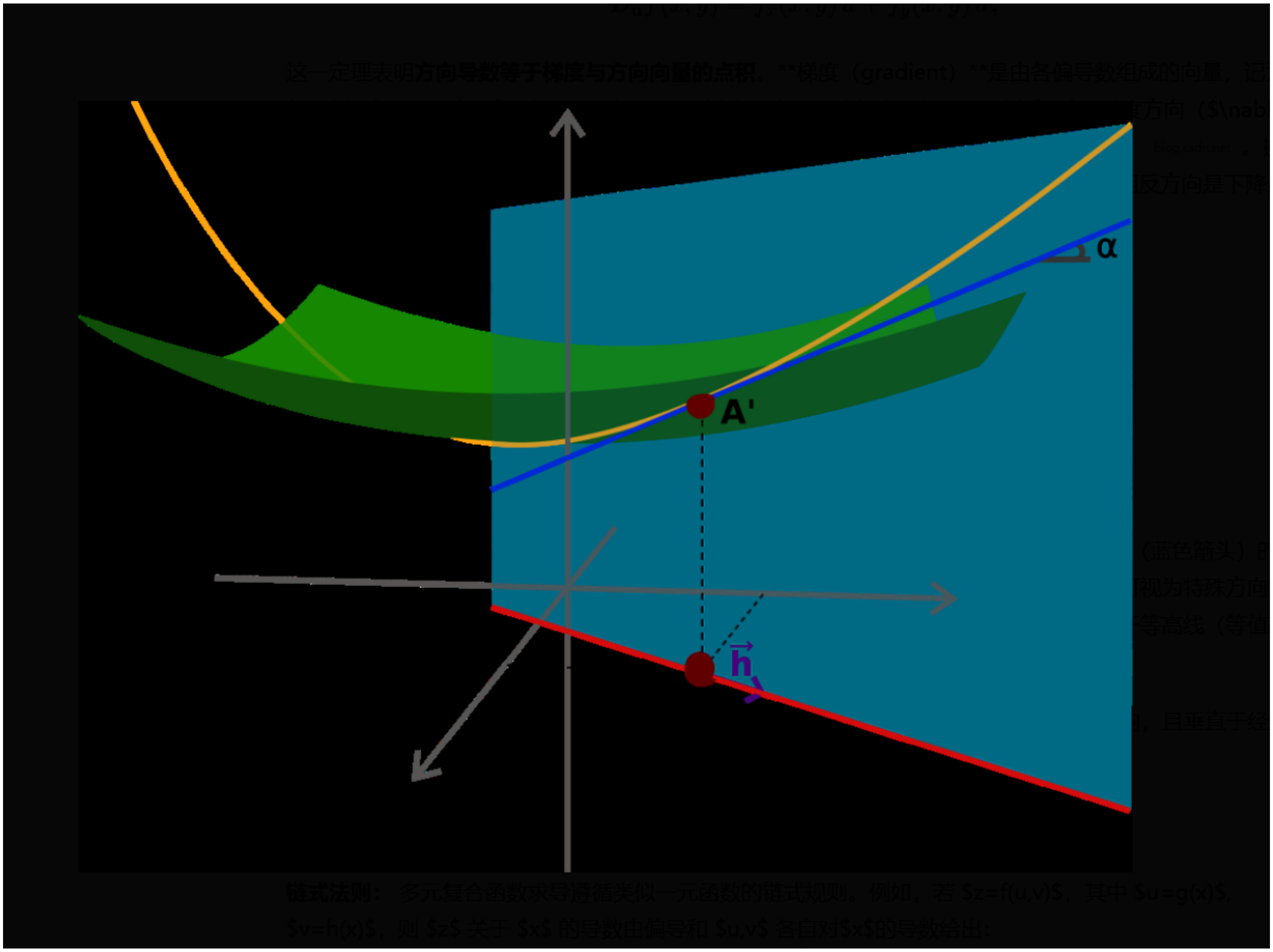

图 1：方向导数的几何示意。梯度 ∇f 在 A' 处指向函数增长最快的方向，且垂直于经过 A' 的等值线；沿梯度方向的方向导数达到最大。

3. 链式求导法与隐函数求导

链式法则： 多元复合函数求导遵循类似一元函数的链式规则。例如，若 $z=f(u,v)$，其中 $u=g(x)$, $v=h(x)$，则 z 关于 x 的导数由偏导和 u,v 各自对x的导数给出：

$$\frac{dz}{dx}=f_u\,\frac{du}{dx}+f_v\,\frac{dv}{dx}\,,$$

其中 $f_u=\partial f/\partial u, f_v=\partial f/\partial v$。更一般地，若 $z=f(x,y)$ 且 $x=x(t), y=y(t)$，则 $dz/dt=f_x dx/dt+f_y dy/dt$。这种求导方法在参数方程和高阶偏导的计算中非常有用。

隐函数求导： 若由方程 $F(x,y)=0$ 隐式定义 y 为 x 的函数，当 F 对 x,y 一阶偏导连续且 $F_y\neq 0$ 时，根据**隐函数定理**，可求导得到：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\,.$$

这个公式来自对方程 $F(x,y(x)) \equiv 0$ 两边求导并解出 dy/dx。在实际计算中，只需对原方程分别对 x,y求偏导，然后取负比值即可。隐函数求导在处理圆、椭圆等曲线方程的切线斜率时非常方便。

4. 多元函数的极值与拉格朗日乘子法

无约束极值： 多元函数 $f(x,y)$ 在某点取得局部极值的必要条件是该点的一阶偏导为零（或不存在）——即**驻点**：$f_x = 0, f_y = 0$。求二元函数极值的步骤类似于一元微分学：先求驻点，然后利用二阶导数判别其性质。对二元函数来说，判别法涉及**Hessian行列式** $D = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$：

- 若 $D > 0$ 且 $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$，则该驻点为**局部极小值点**。
- 若 $D > 0$ 且 $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$，则为**局部极大值点**。
- 若 $D < 0$，则该点为**鞍点**（既不是极大也不是极小）。
- 若 $D = 0$，判别法不确定，需其他方法进一步分析。

有约束极值（拉格朗日乘子法）： 当 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y) = 0$ 下要求极值，可构造拉格朗日函数 $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$。其中 λ 是引入的拉格朗日乘子。必要条件是在极值点 (x_0,y_0) 存在某 λ_0 使得：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) = 0, \end{cases}$$

这组条件展开即为：

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = \lambda_0\, g_x(x_0,y_0), \\ f_y(x_0,y_0) = \lambda_0\, g_y(x_0,y_0), \\ g(x_0,y_0) = 0\,. \end{cases}$$

前两式说明在极值点，∇f 与 ∇g 共线，即 $\nabla f = \lambda \nabla g$。几何上表示目标函数的等高线在该点与约束曲线相切。因此，可以通过求解上述方程组得到候选极值点，然后再判别极值性质。在应用中，拉格朗日乘子法可推广到多元函数多个约束的情况。

5. 常见考点归纳

- **偏导数的计算与意义：** 根据定义计算偏导、判断偏导存在性；几何意义（切平面斜率）和微分近似问题。
- **全微分与可微性：** 利用偏导判断函数可微，写出全微分公式，求切平面方程等。

- **方向导数与梯度：** 计算给定方向的方向导数；理解梯度方向、模长的意义；求函数在某点增加最快方向。
- **链式法则与隐函数求导：** 复合函数求导计算，隐函数方程下导数的求取。
- **多元极值：** 求函数的驻点并利用 Hessian 判定极值或鞍点；识别无极值情形（例如函数未封闭区域上的最大最小值）。
- **约束极值：** 利用拉格朗日乘子法求约束条件下的极值，特别是在经济学、物理等背景下的应用。

6. 典型题型示例

- *例题1：* 求函数 $f(x,y)=x^2e^y+\sin x\cdot\cos y$ 的各一阶偏导数和二阶偏导数。
- *例题2：* 已知隐函数方程 $x^3+y^3-3xy=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$（隐函数求导）。
- *例题3：* 设 $u(x,y)=x^2+y^2,;v(x,y)=xy$，令 $z=F(u,v)=u^2+3v$，求 dz/dx 和 dz/dy（链式法则应用）。
- *例题4：* 求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$ 的全部驻点，并判断其极值性质。
- *例题5：* 利用拉格朗日乘子法，求在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下函数 $f(x,y)=x+2y$ 的极值。

二、二重积分

二重积分是对定义在平面区域上的二元函数进行的积分运算，其本质是对区域进行"面"元素的累加。二重积分不仅在计算空间曲柱体体积、平面区域面积等几何量中扮演重要角色，也用于物理中计算质量、电量等。下面系统介绍二重积分的概念、计算方法、性质及应用。

1. 二重积分的定义与几何意义

定义： 设 $f(x,y)$ 是定义在闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 划分为 n 个小子区域 $\Delta D_1,\Delta D_2,\dots,\Delta D_n$，取第 k 个子区域面积为 $\Delta\sigma_k$，并在每个小区域内选取一点 (ξ_k,η_k)。构造和式 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$。如果当网格细分最大直径 $\lambda=\max_k \operatorname{diam}(\Delta D_k)$ 趋于0时，该和式极限存在且与选取点方式无关，那么这个极限称为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分**，记作：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma \;=\; \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k,\eta_k)\,\Delta\sigma_k\,.$$

直观上，$f(x,y)$ 可以理解为在平面区域 D 上分布的"密度"或"高度"，二重积分实质上对区域 D 每一小面积元素的函数值进行累加。若 $f(x,y)\ge 0$，则 $\iint_D f d\sigma$ 等于以 f 为顶面的曲顶柱体的体积；特别地，当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$\iint_D 1d\sigma$ 就是区域 D 的面积。因此，**二重积分的几何意义**可概括为：对一般$f(x,y)$，积分结果可解释为"带权面积"或"体积"。在物理上，若 $f(x,y)$ 表示密度函数，则二重积分给出薄板的质量等。

可积条件： 若 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续（或仅在有限个点、有限条光滑曲线上有间断），则 f 在 D 上黎曼可积。这保证了绝大多数常见函数都可以在有限区域上进行二重积分。

2. 二重积分的计算（直角坐标）

在实际计算中，二重积分通常转化为**二次定积分**来求解。根据累次积分理论（Fubini 定理），如果 $f(x,y)$ 在矩形区域上连续，则：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=C}^{D}\left(\int_{x=A(y)}^{B(y)} f(x,y)\,dx\right)dy\,,$$

其中 D 可以表示成通常的"直积分区域"形式，如 $D = (x,y) \mid a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)$。计算时需要根据区域形状，选择**适当的积分次序**（先 x 后 y 或先 y 后 x）。一般而言，应尽量选取能使积分限简单明确的次序。

步骤概述：

1. **区域描绘：** 先确定积分区域 D 在平面上的范围和边界曲线方程，可尝试画出区域示意图。
2. **选定次序并列出限：** 根据 D 的投影和形状，选定先对 x 或 y 积分，使内层积分的上下限是常数或简单函数。写出相应的积分限形式。
3. **执行积分计算：** 先算内层不定积分，再算外层定积分。必要时可借助积分表或技巧化简。
4. **注意积分性质：** 应用线性性、区域可加性、对称性等性质来简化计算。

在计算时，注意二重积分的基本性质，如线性性、可加性等。尤其对某些对称区域和函数，利用**对称性**可以减少计算量：若 D 关于某轴对称且 f 为奇偶特定形式，可判定积分值为0或简化为一半区域的两倍等。

3. 二重积分的极坐标变换

当积分区域 D 是圆形、环形或扇形等，与极坐标系自然契合时，采用**极坐标**计算二重积分更方便。极坐标变换关系：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，面元微分 $d\sigma$ 的转换公式为：

$$d\sigma \;=\; r\,dr\,d\theta : contentReference[oaicite:12]index=12.$$

在极坐标下，区域 D 由 r 和 θ 的范围描述。二重积分变换为：

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{\theta=\alpha}^{\beta}\int_{r=u(\theta)}^{v(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\;r\,dr\,d\theta\,.$$

应用步骤：根据原来的直角坐标区域，转换成极坐标的径向范围 $[u(\theta), v(\theta)]$ 和角度范围 $[\alpha, \beta]$，将 integrand $f(x,y)$ 换成 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 并乘以 r，然后按极坐标次序积分。

使用情景： 当 D 是圆盘、扇形或由 $x^2+y^2=a^2$ 等式限定时，极坐标能极大简化积分限和 integrand。例如，积分区域为圆 $x^2+y^2\le R^2$ 时，极坐标下 $r:0\to R, \theta:0\to 2\pi$，计算更直接。此外，某些 integrand 在极坐标下也更容易积分，比如涉及 x^2+y^2 的函数。

注意： 极坐标下的 θ 范围需根据区域在平面中的角度范围确定（通常 0 到 2π 或一个扇形角度）。积分过程中勿忘 r Jacobian（即 r 因子）。

4. 二重积分的性质与其他坐标系

二重积分的性质： (1) 线性性：$\iint_D (af+bg)d\sigma = a\iint_D fd\sigma + b\iint_D gd\sigma$。(2) 可加性：若 D 拆分为互不重叠的 D_1, D_2，则 $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$。(3) 保序性：若 $f(x,y)\ge 0$ 则积分≥ 0；若 $f(x,y)\le g(x,y)$ 则 $\iint_D f \le \iint_D g$。(4) 中值定理：若 f 在 D 连续，则存在点使 $f(\xi,\eta)\mathrm{Area}(D)=\iint_D f$。（这些性质在证明积分不等式、交换积分顺序等时有帮助。）

直角坐标以外的变换： 除极坐标外，在直角坐标计算二重积分可能遇到**参数变换**的情形：利用更一般的坐标变换 $(u,v)\to(x,y)$ 简化区域。例如矩形区域映射为曲边区域，这涉及**Jacobian行列式**公式：$\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy = \iint_{(u,v)\in D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$。在高等数学中常见特例是极坐标。

5. 二重积分的应用

二重积分在几何和物理中有广泛应用。

- **曲面面积：** 给定以 $z=f(x,y)$ 表示的曲面（假定 f_x, f_y 连续），落在区域 D 上的曲面片面积公式为：

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\;dxdy\,.$$

  这是将曲面片划分小块并近似为平面计算所得，对应于以积分方式累加每个微元面积。
- **质量与质心：** 若区域 D 为薄板且密度分布为 $\mu(x,y)$，则薄板总质量 $M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$。质心坐标可由**静矩**公式求出：

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\,\mu(x,y)\,d\sigma,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\,\mu(x,y)\,d\sigma\,,$$

  其中分子为对坐标加权的积分，分母M为总质量。
- **平面图形静力学矩：** 如惯性矩 $I_x=\iint_D y^2\rho d\sigma$， $I_y=\iint_D x^2\rho d\sigma$ 等，用于力学分析。
- **概率面积：** 若 (X,Y) 在区域 D 上均匀随机分布，则 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 也可代表联合分布的期望等量。

6. 常见考点归纳

- **区域划分与积分次序：** 给定不规则积分区域，要求写出二重积分（确定积分上下限）；或考查交换积分次序的正确性。
- **极坐标应用：** 圆域、环域及扇形区域上的积分计算，如计算圆盘内函数的积分、圆环面积、圆域上的重心等，需熟练变换。
- **二重积分计算技巧：** 利用对称性判断积分值（奇偶函数在对称区域积分为0等）；拆分区域或函数求积分；迭次积分的计算步骤和细节正确性。
- **面积与体积计算：** 用二重积分计算平面图形面积、旋转体体积（通常通过二重积分中先积分一方向得到体积公式）。
- **实际应用问题：** 质心计算、质量计算、静矩和惯性矩等，需要搭配物理概念和积分知识。

7. 典型题型示例

- *例题1：* 计算由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=4$ 所围区域上的二重积分 $\iint_D (x+2y)dxdy$。(*提示：*画出区域，选择先对 x 积分或 y 积分皆可)。
- *例题2：* 将二重积分 $\iint_D \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}dxdy$ 转换为极坐标并计算，其中 D 为圆环域 $1\le x^2+y^2\le 4$。
- *例题3：* 设 D 是第一象限中由曲线 $x^2+y^2=4$ 和坐标轴围成的扇形区域。计算 $\iint_D xe^{x^2+y^2}dxdy$。（**提示：** 用极坐标，注意积分函数形式）。
- *例题4：* 求由 $y=x^2$ 与 $y=2-x$ 围成的封闭区域的面积。（将 1 看作 integrand 的特例）。
- *例题5：* 一薄板占据区域 $D: x^2+y^2\le 9$（单位：cm），面密度分布为 $\mu(x,y)=5+0.1x$（g/cm²）。求此薄板的总质量和质心位置。

三、三重积分

三重积分推广了定积分和二重积分的概念，用于对三维空间区域上函数进行积分运算。它可以用于计算空间区域的体积、质量、重心等。三重积分常需要在**直角坐标、柱面坐标**或**球面坐标**下计算，以配合不同对称性的区域。下面分坐标系介绍计算方法及其应用。

1. 三重积分的概念

类似二重积分，**三重积分**将空间区域划分小体积元，对函数值累加求和取极限。设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 V 上有界，将 V 划分为 n 个小体积 ΔV_i，取样点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 在细分极限下的极限定义为三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)dV$。当 $f(x,y,z)\equiv 1$ 时，三重积分结果即为区域 V 的体积。

物理意义： 若 $f(x,y,z)$ 表示空间密度（质量密度、电荷密度等），则三重积分 $\iiint_V f dV$ 给出整个体的总量。若 $f(x,y,z) \geq 0$ 则三重积分可视为累加"柱体"体积：对体内每点体积元的函数值相加。

2. 三重积分的直角坐标计算

在直角坐标中，累次积分将三重积分化为三个定积分的连续计算。例如，若区域 V 可表示为：

$$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ \phi_1(x,y) \leq z \leq \phi_2(x,y)\},$$

其中投影区域 D 在 xy 平面。则：

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{(x,y)\in D} \left(\int_{z=\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy\,.$$

也可以选择不同次序，如 z-x-y 等共6种可能（对应三个变量的排列）。**柱体法**通常指先对 z 积分，也称"先一后二"——先处理高度方向，再对底面区域进行二重积分。**截面法**指先固定高度做面积积分，但一般只在某些特殊情况下使用。

技巧： 三重积分的次序选择对计算复杂度影响显著。一般根据区域 V 在坐标轴投影的形状来定。如 V 投影在 xy 平面给出简单区域，则先积分 z；若投影在 xz 或 yz 平面简单也可相应调整次序。可以尝试不同次序使积分简化，但要小心积分限设置正确。必要时，利用对称性（若f在区域V具有对称性）可简化计算。

3. 柱面坐标系计算

柱面坐标是指在水平面用极坐标，在垂直方向保持 z 轴直角坐标的坐标系。柱坐标用 (r,θ,z) 表示，其中 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$。柱坐标的体积元为：

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz\,,$$

因为在水平面上 $d\sigma = r dr d\theta$，再乘上垂直方向 dz。若空间区域 V 投影在 xy 平面为某极坐标区域，则柱坐标积分非常便利。一般步骤：

- 写出投影区域在极坐标下的范围 (r,θ) 及 z 的上下限（常数或关于r,θ的函数）。
- 构造积分：$\int_\theta \int_r \int_z f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta$。
- 先对 z 积分，再对 r,θ 积分。

柱坐标综合了直角与极坐标的优点，适用于**柱体形状**的区域，例如圆柱、圆柱截断的实体等。它本质上仍是"先一后二"的思想：先对高度方向积分，再对底面极坐标区域积分。

4. 球面坐标系计算

球面坐标对具有球对称或球形边界的区域最为简洁。常用定义（数学界常用约定）：球坐标 (ρ, θ, φ) 中，ρ 表示点到原点的距离，θ 表示角度在 xy 平面的投影与x轴正向的夹角（即方位角），φ 表示点与正z轴的夹角（即**极角**，从 z 轴向下测量）。对应转换关系可设为：

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\varphi\,,$$

其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$。球坐标的**体积元**为：

$$dV = \rho^2 \sin\varphi\; d\rho\, d\varphi\, d\theta\,.:contentReference[oaicite:21]index=21$$

推导来自柱坐标基础上再将 z 轴方向的角度变换成 φ。换元公式要求加入 $\rho^2 \sin\varphi$ 作为Jacobian因子。

球坐标下，半径方向积分范围通常由球面或球层确定，角度 φ 和 θ 由区域在球面上的覆盖范围确定。**典型应用**：

- 完整球体：ρ 从0到R，φ 0到π，θ 0到2π。
- 球的一部分：如上半球 φ从0到$\pi/2$，或有限锥形截取的球则 φ 有限区间。
- 球层：ρ 在 $[R_1, R_2]$。

球面坐标系示意图：空间中一点 P 可以用球坐标 (ρ, θ, φ) 表示，其中 ρ 是原点到 P 的距离（绿色半径），φ 是 OP 与 z 轴的夹角（红色弧线），θ 是 OP 在 xy 平面投影与 x轴正向的夹角（蓝色箭头弧线）。球坐标的体积微元在这三个方向上的尺度乘积为 $\rho^2 \sin\varphi$，需在积分中乘入。

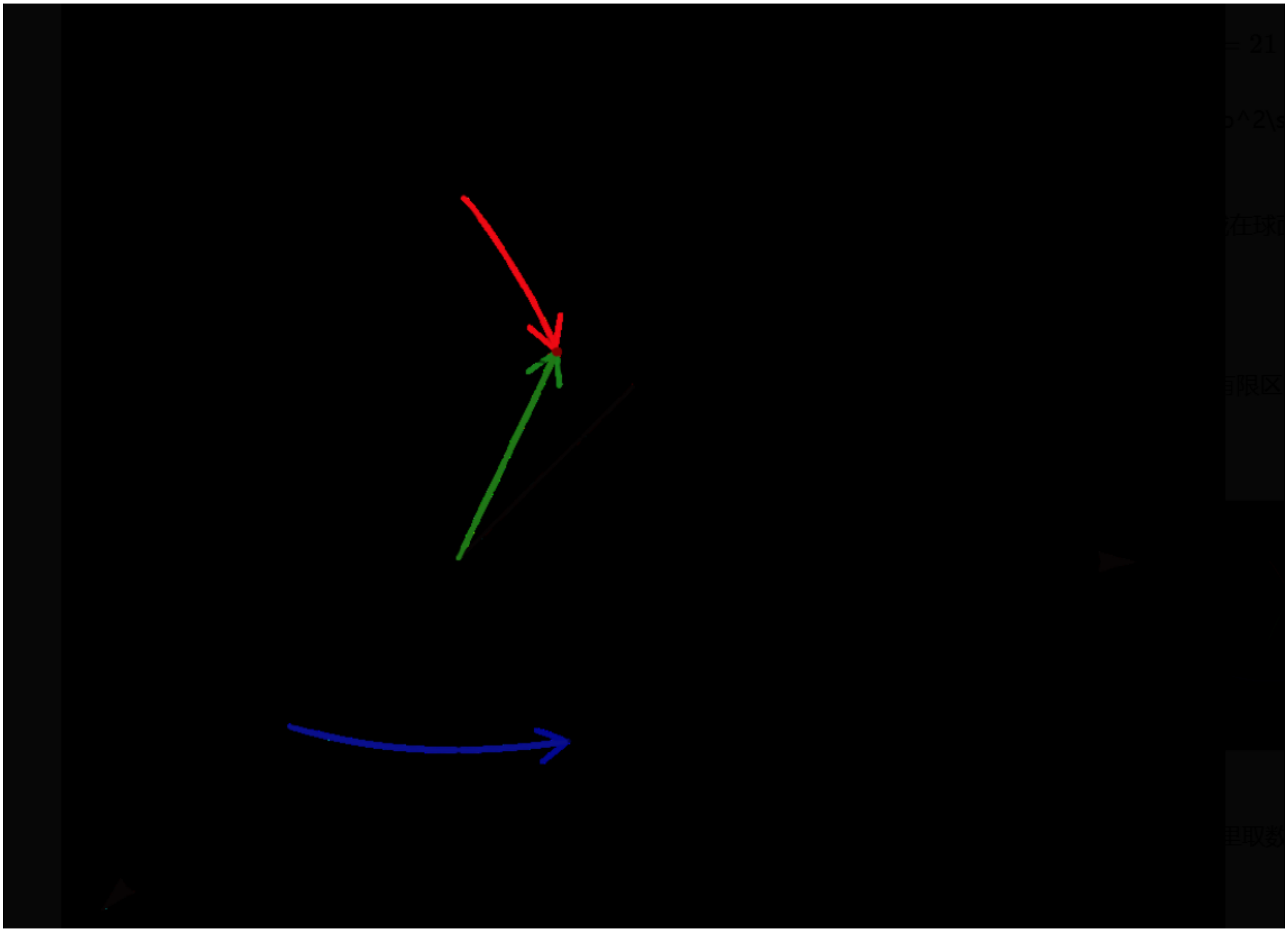

图 2：球面坐标参数及其意义。注意有多种符号约定，这里取数学常用的 φ 为极角、θ 为方位角。

球坐标积分示例： 计算球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 内的三重积分时，用球坐标非常便捷。例如体积V：

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \,,$$

或计算质心、引力等具有球对称性的量。要注意 $\sin\varphi$ 的存在使积分次序一般选择 φ 在内层较方便。

5. 三重积分的应用

- **体积计算：** 三重积分最直接的应用是算空间区域的体积（取 integrand = 1）。如用柱坐标计算斜圆柱、锥体的体积，用球坐标计算球段体积等。
- **质心与惯性矩：** 对于密度为 $\rho(x, y, z)$ 的立体，质量 $M = \iiint_V \rho dV$，质心坐标 $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x\rho dV$ 等类似二重积分情形。惯性矩如 $I_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dV$ 等需要三重积分求值。
- **引力和场计算：** 万有引力场或静电场等，由体密度积分得到场强（续前）**引力和场计算：** 例如，可通过对体密度进行三重积分来计算物体在空间中某点产生的万有引力或电场强度分布（结合相应

物理公式）。以上应用表明，三重积分在工程和科学领域具有重要价值。

6. 常见考点归纳

- **积分次序调整：** 复杂区域的三重积分常要求改变积分顺序或改用更便利的坐标系。考查准确写出积分上下限和顺序的能力。
- **柱坐标与球坐标变换：** 判断何时使用柱坐标或球坐标简化计算，正确写出Jacobian因子 r 或 $\rho^2 \sin\varphi$ 并进行积分。例如求球体、圆柱体内的函数积分。
- **对称性利用：** 利用区域和 integrand 的对称性，快速判断积分值或将积分转化简便形式（如奇偶函数积分为零）。
- **体积计算：** 用三重积分直接计算立体体积，或通过二重积分计算旋转体体积等（如先二重积分求截面积，再一重积分累加厚度）。
- **综合应用：** 结合物理背景求质量、质心位置（需要写成积分表达式），或计算简单形体的惯性矩等。

7. 典型题型示例

- *例题1：* 求由平面 $z=0$、 $z=4$ 与柱面 $x^2+y^2=1$ 围成的柱体的体积（使用柱坐标）。
- *例题2：* 计算球体 $x^2+y^2+z^2 \le 9$ 内函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 的三重积分值（使用球坐标）。
- *例题3：* 已知锥体区域 V 由 $x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 3$ 围成，求 $\iiint_V z dx dy dz$。（**提示：** 转换为柱坐标积分）。
- *例题4：* 密度 $\rho(x,y,z)=k$（常数）的半球体（上半径为 R）质量是多少？其质心到平面底部的距离是多少？(*提示：* 利用对称性，质心在中心轴上；计算 z 坐标)。
- *例题5：* 求质量分布 $\rho(x,y,z)=x^2$ 的球层 $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$ 的总质量（注意使用球坐标并分上下限积分）。

四、曲线积分与曲面积分

曲线积分和**曲面积分**将积分概念推广到曲线和曲面上，对应地累加线段或面片上的函数取值。这两类积分在场论和物理学中非常重要，连接着**格林公式**、**高斯散度定理**和**斯托克斯公式**等著名定理。本模块介绍标量场和向量场的曲线/曲面积分定义及计算方法，并给出这些定理。

1. 曲线积分（沿曲线的积分）

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）： 给定光滑曲线 $C: \mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ ($a \le t \le b$) 和函数 $f(x,y)$，第一类曲线积分定义为沿曲线对函数值加权弧长的积分：

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{t=a}^{b} f(x(t),y(t))\,\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt\,.$$

几何上，它累加了曲线上每一小段长度乘以函数值的贡献。因此若 $f(x,y)\equiv 1$，该积分即为曲线 C 的弧长。应用中，可用于计算变密度细丝的质量等。

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）： 针对向量场 $\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 定义的**环路积分**或**线积分**：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy\,,$$

这里 dx,dy 是曲线切向位移分量。将曲线参数化 $\mathbf{r}(t)$，则：

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy) = \int_{t=a}^{b} [\,P(x(t),y(t))\,x'(t)+Q(x(t),y(t))\,y'(t)\,]\,dt\,.$$

此曲线积分与路径方向有关（方向相反则积分变号），常用于计算沿曲线的**功**或**环量**。当 $\mathbf{F}=\nabla\phi$ 为某标量的梯度场时，第二类曲线积分等于 ϕ 的增量，且与路径无关；反之若沿任意闭合曲线积分为0，则场保守，可表为梯度场。这与**场的旋度**密切相关（见格林公式）。

2. 曲面积分（在曲面上的积分）

第一类曲面积分（对面积的曲面积分）： 给定曲面 S（如 $z=f(x,y)$）和函数 $\Phi(x,y,z)$，第一类曲面积分为在曲面上对函数的"面密度"积分：

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\,dS = \iint_D \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\;dxdy\,,$$

其中 D 是曲面在 xy 平面的投影，$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$ 是曲面的面积微元。若 $\Phi\equiv 1$ 则给出曲面面积。一般 Φ 可表示密度、辐射强度等，积分计算总量。对于参数曲面 $\mathbf{r}(u,v)$，有 $dS=|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv$，以便积分。第一类曲面积分常用于求曲面质量等。

第二类曲面积分（通量积分）： 对向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$，定义出过曲面 S 的通量积分：

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S (P,Q,R)\cdot\mathbf{n}\,dS\,,$$

其中 $\mathbf{n}$ 为曲面外法向单位向量，$d\mathbf{S}=\mathbf{n}dS$。用参数 (u,v) 表示曲面 S，则：

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{(u,v)\in D'} (P,Q,R)\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\;du\,dv\,,$$

或对图形 $z=f(x,y)$ 的上表面，外法向可取 $\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}(-f_x,-f_y,1)$。第二类曲面积分物理上表示场$\mathbf{F}$穿过曲面的**通量**，如流体流过曲面的量或电场穿过面的电通量等。

3. 格林公式（Green 定理）

格林公式（平面上的 二维散度定理）：它将闭合曲线的线积分转换为曲线围成区域的面积积分。具体表述：

- 若区域 D 被一光滑简单闭曲线 C 围成，且 $P(x,y),Q(x,y)$ 在包含 D 的开区域上具有一阶连续偏导数，则：

$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

这几何上表示：向量场 (P,Q) 沿闭曲线的环量，等于该区域内场的**旋度**$(\partial_x Q - \partial_y P)$ 的面积积分。绿色区域 D 边界按逆时针方向，红色和黄色箭段代表曲线上各段方向，对应公式中曲线积分的左侧；面积内部散度项积分与区域 D 的整体属性相关。

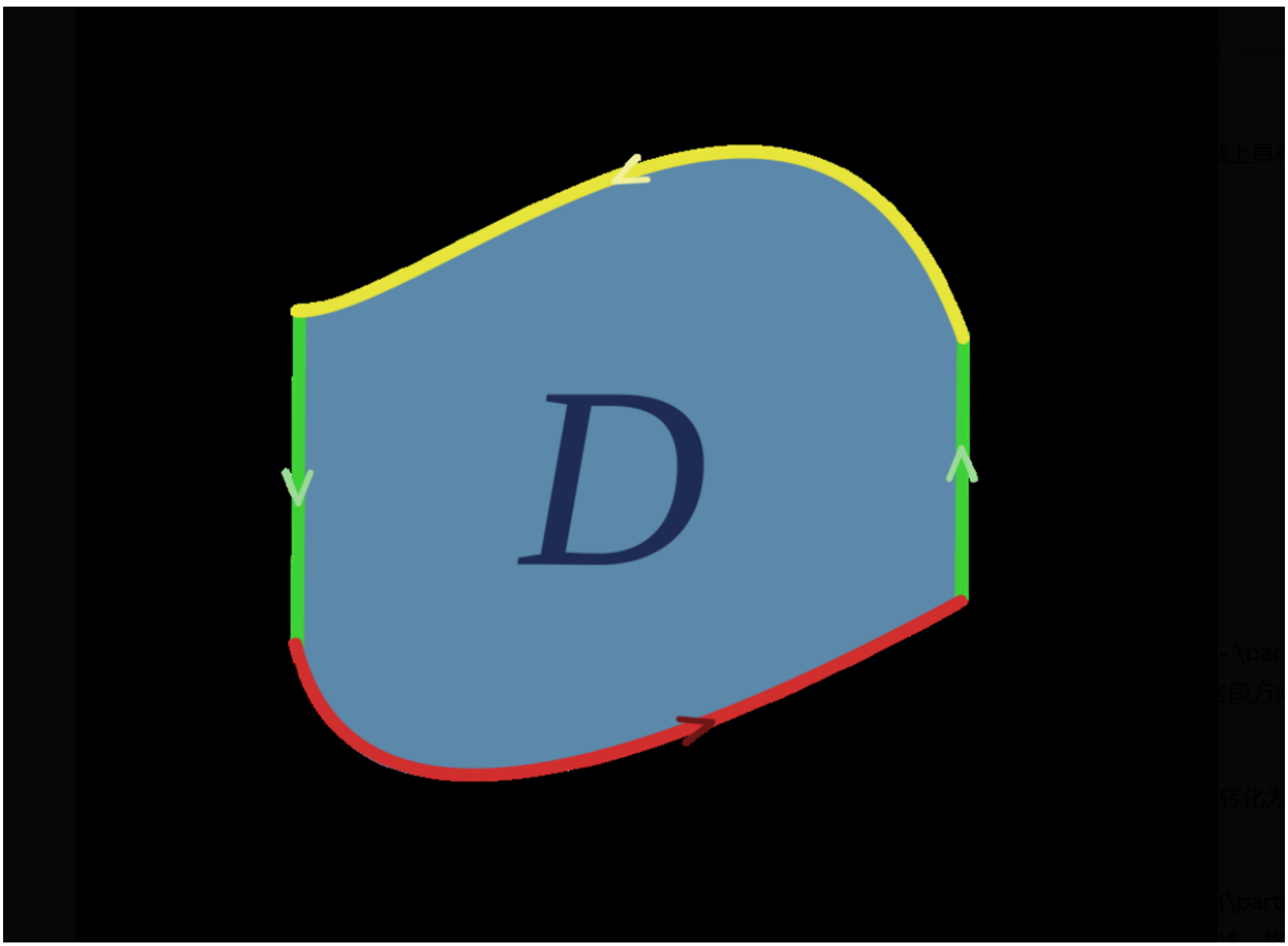

图 3：格林公式示意：曲线 C 围成区域 D，曲线上积分 $\oint_C (Pdx + Qdy)$ 转化为区域内对 $(\partial_x Q - \partial_y P)$ 的二重积分。

推论： 当 $P = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, Q = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ 时，$(\partial_x Q - \partial_y P) = 0$，格林公式给出保守场沿闭合曲线积分为0的结论；又若 $P = P(x), Q = Q(y)$，格林公式则化为计算区域面积的公式 $\oint_C x dy = -\oint_C y dx = 2\iint_D dxdy$。

格林公式是平面上的基本积分定理，证明利用偏导连续可将闭曲线积分拆成两个单积分并应用微积分基本定理。它也是高斯、斯托克斯定理的低维特例。

4. 高斯公式（散度定理）

高斯散度定理（Gauss's Divergence Theorem）： 又称**高斯-奥斯特罗格拉德斯基定理**，联系空间闭曲面的通量积分与体积积分。内容：若 V 是由闭曲面 S 围成的有向区域，$\mathbf{F}(x,y,z)$ 在 V 上具有连续偏导，则：

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, dV \,,$$

其中 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 是**散度**。这表明：**流出闭区域 V 的净通量等于该区域内场源强度的体积分**。直观理解：散度为正表示源头（流出多于流入），负表示汇。（该定理在电磁学中即电场高斯定律的一种形式。）

例如，对于常向外单位法向的球面，左侧为球面通量，而右侧 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 积分为体内源总量。应用中，若场无源（散度零）则闭曲面通量为零。

图 4：向量场（黑色箭头）在球面上的通量由散度定理转换为球体内散度的体积分。图示径向箭头场在球内散度恒为常数正值，故球面外流通量正且等于体积乘以散度。

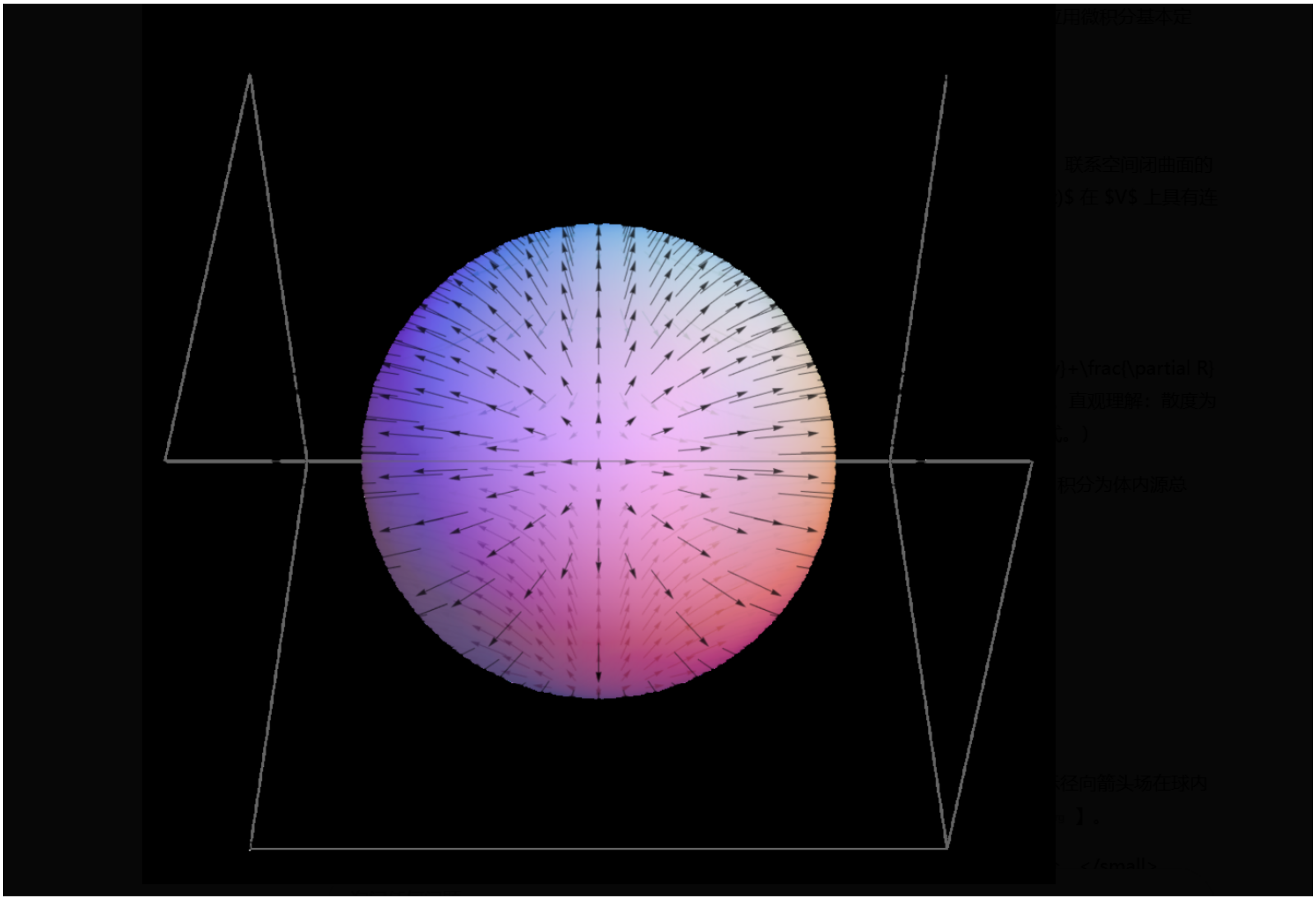

图 4：高斯散度定理说明了向量场在闭曲面上的总出流等于场在体积内的散度积分。

考察： 利用散度定理，可以快速计算封闭曲面通量。例如，计算出过任意闭合曲面的重力场通量应为 $4\pi GM$（M 为内部质量）等。证明散度定理可从格林公式出发并考虑三个方向积分。

5. 斯托克斯公式（Stokes 定理）

斯托克斯公式： 这是高维情形的一般化，但在课程中通常指三维空间中，将开曲面的边界曲线环积分与曲面上的旋度面积分联系起来的定理。表述：若 S 是一带正向单位法线的光滑曲面，其边界为闭曲线 ∂S（取与法线遵右手法则的方向），则对于在 S 附近有连续偏导的向量场 $\mathbf{F}$：

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}\,,$$

即曲线积分等于曲面上**旋度**$(\nabla \times \mathbf{F})$ 的通量。$\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$ 是向量场旋度。

斯托克斯定理的物理意义：向量场沿闭合路径的环量，等于该环路所围曲面上场的旋度通量。若场无旋（旋度零），则沿任何闭合曲线环量为零，即场为保守场。这概括了格林公式（取水平面S）的情况。

斯托克斯公式对于将线积分转为面积分具有重要价值。例如，可通过选择合适曲面简化复杂路径的积分计算。证明需用微分形式和格林公式工具，这里不展开。

6. 常见考点归纳

- **曲线积分计算：** 根据不同类型（第一类或第二类），正确设置积分形式和参数方程。计算物理量如重心坐标、功等常涉及曲线积分。
- **曲面积分计算：** 识别第一类或第二类曲面积分，选取适当参数化求解。尤其是对称曲面（球、圆柱）上的通量计算，往往利用对称性或高斯定理。
- **格林公式应用：** 利用格林公式计算平面闭合曲线积分（将其转化为面积积分）或计算平面区域面积。判断给定场是否保守场以及求势函数。
- **散度定理应用：** 计算封闭曲面的通量（将其转化为散度的体积分），或反之利用对称性和Gauss定理计算体积分。常考如球面上的通量、立方体通量等。
- **斯托克斯定理应用：** 将空间闭合曲线的线积分转化为选定曲面的曲面积分，或用于判别场无旋等。典型如环路复杂但可取方便曲面来计算。
- **综合题：** 常要求综合运用多个定理与方法，如分段曲线积分化为面积积分、结合散度定理分割区域计算通量等。

7. 典型题型示例

- *例题1：* 计算由抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 围成的闭合曲线 C 的积分 $\oint_C (x^3 dx + x^2 y dy)$。（**提示**：用格林公式，将其转化为区域 D 上的二重积分）。
- *例题2：* 判断向量场 $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ 是否为保守场？如果是，求其势函数 $\phi(x, y)$。（提示：检验 $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ 并积分求 ϕ）。
- *例题3：* 设 $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z^2)$，求它通过立方体（顶点$(0,0,0)$到$(1,1,1)$）各面向外的通量总和。【提示：】直接用高斯定理计算 $\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV$。
- *例题4：* 利用散度定理证明：对任意柱面（侧面）$\iint_S (Axdx + Aydy + Bzdz) = A \cdot (\text{底面积}) \cdot h$（$h$为柱体高度常数，$A, B$为常数），并解释其意义。
- *例题5：* 设闭合曲线 C 为圆 $x^2 + y^2 = R^2$，方向为逆时针，求 $\oint_C (ydx - xdy)$ 并说明其物理意义。（提示：结果应为曲线面积的2倍，物理上与旋度有关）。

五、无穷级数

无穷级数是解析学的重要组成，研究无穷多个项之和的收敛性及和的表达。**级数**表示为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其中 a_n 是一般项。级数是否收敛取决于部分和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ 是否有有限极限。本模块讨论**正项级数**、**交错级数**、**幂级数**及**泰勒级数**等，并介绍常用收敛判别法。

1. 级数的基本概念

- **收敛与发散：** 若部分和 S_N 随 $N \to \infty$ 有极限 S，则称级数收敛，其和为 S；否则称发散。必要条件：$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$（否则必发散）。
- **绝对收敛与条件收敛：** 若 $\sum |a_n|$ 收敛，则称 $\sum a_n$ **绝对收敛**。绝对收敛蕴含收敛。若 $\sum a_n$ 收敛但 $\sum |a_n|$ 发散，则称**条件收敛**。条件收敛的级数和对项的排列可能依赖顺序（莱布尼茨级数），而绝对收敛级数可任意重排仍收敛且和不变。

2. 正项级数及其判别法

正项级数是各项 $a_n \geq 0$ 的级数。这类级数单调增加，易判定发散或收敛，可使用以下**判别法**：

- **比较判别法：** 找一简易级数 $\sum b_n$ 作比较：
  - 若 $0 \leq a_n \leq b_n$ 且 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 必收敛。
  - 若 $a_n \geq b_n \geq 0$ 且 $\sum b_n$ 发散，则 $\sum a_n$ 发散。

    （常选取 b_n 为p-级数或几何级数项，以比较大小。）
- **比值判别法（达朗贝尔判别法）：** 设 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$：
  - 若 $L < 1$，则级数绝对收敛。
  - 若 $L > 1$，则级数发散。
  - 若 $L = 1$，此法不定，需要其他方法。
- **根值判别法（柯西判别法）：** 设 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$：
  - 若 $L < 1$，级数绝对收敛。
  - 若 $L > 1$，级数发散。
  - 若 $L = 1$，不定。（此法对指数型a_n效率高）
- **积分判别法：** 若 $a_n = f(n)$，其中 $f(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上单调递减且非负，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 improp 积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 的收敛性一致。比如 $\sum 1/n^p$ 与 $\int x^{-p}dx$ 判断收敛性。
- **p-级数**: $\sum \frac{1}{n^p}$:
  - $p > 1$ 收敛（调和级数 $p = 1$ 发散）。
  - $p \leq 1$ 发散。
- **几何级数**: $\sum ar^{n-1}$:
  - $|r| < 1$ 收敛于 $\frac{a}{1-r}$；
  - $|r| \geq 1$ 发散。

这些判别法中，比值和根值法常用来判断带阶乘、指数、幂的复杂项级数；比较法用于与熟知级数比较；积分法适合连续单调函数的项。

3. 交错级数及收敛性

交错级数：项 a_n 符号交替，例如 $a_n = (-1)^{n-1}b_n$，其中 $b_n \geq 0$。常见判断方法：

- **莱布尼茨判别法：** 若 b_n 单调递减且 $\lim b_n = 0$，则交错级数 $\sum(-1)^{n-1}b_n$ **收敛**。此外，其部分和误差估计：截断后误差的绝对值不超过下一项的绝对值，即 $|S - S_N| < b_{N+1}$，而且误差与符号取决于下一项符号。

交错级数可能条件收敛（如交错调和级数 $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛但绝对值调和级数发散）。莱布尼茨条件的必要性：若不满足单调性或趋0，也可能收敛但需其他法判断。

4. 幂级数与收敛域

幂级数是形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的级数（中心在 a）。其收敛性随 x 值而变，通常存在**收敛半径** R：

- 当 $|x-a| < R$ 时级数收敛；
- 当 $|x-a| > R$ 时发散；
- 边界 $|x-a| = R$ 需逐一判断。

半径 R 可由**阿贝尔公式**确定：$R = 1/\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ 或用比值法 $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$（若极限存在）。收敛区域一般是 $(a-R, a+R)$ 之间，对端点再测试（有可能收敛或发散）。

绝对收敛：在 $|x-a| < R$ 内幂级数绝对收敛。在收敛域内可以逐项积分和微分，且收敛域不变，并得到新的幂级数。这是幂级数强大的原因，可用来表示函数。

5. 泰勒级数与函数展开

泰勒级数（Taylor Series）： 可看作以函数各阶导数定义的特定幂级数。对于充分光滑的函数 $f(x)$，在 $x = a$ 展开：

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots,$$

这就是形式上的泰勒级数。其第n项一般为 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$。**麦克劳林级数**是 $a=0$ 特例。泰勒级数如果在某区间收敛并等于原函数，则称函数**解析**。常见初等函数的泰勒展開包括：

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ （$(-\infty, +\infty)$ 上收敛）；
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ （全域收敛）；
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ （全域收敛）；
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$ （$|x| < 1$ 收敛）。

余项估计： 截断到 n 次多项式的误差（余项）$R_n(x)$ 通常可用拉格朗日余项形式：$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$，其中 ξ 介于 a 与 x 之间。这提供了估计误差的手段。

应用： 泰勒展开用于函数近似计算、求极限（等价无穷小替代）、解微分方程（幂级数解）等场合。在高等数学课本中，着重会推导常用函数的系列展开及余项判断。

6. 常见考点归纳

- **判别法选择：** 根据 a_n 的形式选择合适方法判断收敛性：含指数/阶乘用比值法，含 n 次幂用根值法，与已知级数比较用比较法等。
- **级数收敛域：** 给出一般项，求幂级数的收敛半径和收敛域，测试端点收敛情况（可能用交错判别或比较法）。
- **求和公式：** 简单级数求和（如几何级数求和），或者将复杂级数化为已知类型（拆分或凑形式）。
- **函数展开与求和：** 利用已知泰勒级数展开推导新展开（如代入、微分积分产生新级数），或者将给定幂级数识别为某函数的展开，从而求出其和函数。
- **利用级数求近似和极限：** 泰勒展开用于求极限（高阶无穷小展开比大小）或数值近似（如用多项式逼近函数值，控制余项误差）。
- **验证与证明题：** 检验交错级数的莱布尼茨条件，证明收敛；或证明某级数发散（例如和与调和级数比较）。

7. 典型题型示例

- *例题1：* 判断以下级数的收敛性：(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$；(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$；(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$。（提示：分别使用比值法、莱布尼茨判别、积分判别。）
- *例题2：* 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n+1}$ 的收敛半径和收敛域，并讨论端点 x 的收敛情况。
- *例题3：* 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数（使用已知 $(1+t)^{-1}=1-t+t^2-\cdots$，代入 $t=x^2$），并给出余项估计在 $x=0.1$ 处的数量级。
- *例题4：* 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和。（提示：认识这是 $\arctan x$ 的泰勒展开，选合适 x 值求和）。
- *例题5：* 利用泰勒级数求极限：$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\ln(1+x)}$。（提示：展开 $\cos x$ 和 $\ln(1+x)$ 取代）。

六、微分方程

微分方程刻画含未知函数及其导数的方程，在描述自然规律中极为常见。本模块介绍**一阶常微分方程**和**二阶线性常系数微分方程**的经典解法，包括可分离变量、齐次线性、恰当方程、线性常系数等类型。

1. 一阶微分方程

(1) 可分离变量方程： 形如 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$。通过分离 y 和 x 有:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx\,,$$

两边积分得到 $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C$，再解出 y 的关系。注意积分后要附加积分常数。此法需 $h(y) \neq 0$。

(2) 齐次方程（同类于可分）： 若 $\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$，可设 $v = \frac{y}{x}$（或 $y = vx$）转化为分离变量形式: $dy/dx = v + xdv/dx$，代入原方程后分离积分。

(3) 一阶线性方程： 形如 $y' + P(x)y = Q(x)$。标准解法是乘以**积分因子**$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$，使方程左边变成导数的乘积形式:

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)Q(x)\,,$$

积分得到 $\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C$，继而解出 y。若 $Q(x) = 0$ 则是齐次线性方程，解为 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$。

(4) 恰当方程： 形式 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$。若满足**恰当条件** $M_y = N_x$，则存在势函数 $\Psi(x,y)$ 使 $d\Psi = Mdx + Ndy$。求解时对 M 积分：$\Psi(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$，再对结果对 y 求偏导并与 N 比较确定 $g(y)$。最后 $\Psi(x,y) = C$ 为隐式解。若不恰当，可尝试乘以因子 $\mu(x)$ 或 $\mu(y)$ 使其恰当。

(5) 其他： 还包括特殊可解类型如伯努利方程、全微分方程应用等，但课内以以上几类为主。

2. 二阶线性常系数微分方程

考虑标准形式: $y'' + ay' + by = f(x)$，其中 a, b 为常数。

(1) 齐次方程： $y'' + ay' + by = 0$。其特征方程为 $r^2 + ar + b = 0$，解根 r_1, r_2 分三种情形:

- 若 r_1, r_2 为不相等实根，则通解 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$。
- 若 $r_1 = r_2 = r$ 重根，则 $y = (C_1 + C_2x)e^{rx}$。
- 若 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 为共轭复根，则 $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$。

这些形式可统一写为$y = C_1y_1 + C_2y_2$，其中 y_1, y_2 是两个线性无关的基本解。

(2) 非齐次方程： $y'' + ay' + by = f(x)$。通解 = 齐次通解 $y_{通}$ + **特解** $y_{特}$。常用方法:

- **常数变易法**：假设 $y_{特}=u_1(x)y_1+u_2(x)y_2$，导出一组方程解 u_1,u_2 后积分得到特解。这方法通用但步骤长，在本科阶段对简单右端函数常用待定参数法替代。
- **参数待定法**：针对 $f(x)$ 是指数、多项式、三角等简单形式，假设 $y_{特}$ 为类似形式的函数（若与齐次部分有重复则乘x等处理），带入方程求出待定系数。例如右端为 e^{kx} 则试解 $y_{特}=Ae^{kx}$，为多项式则试以多项式，同频率正弦试三角组合等。

举例：$y''+4y=\cos 2x$，齐次解 $y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$，因右端频率2与齐次解重复，试特解 $y_{特}=Ax\sin 2x+Bx\cos 2x$。代入求$A,B$。

(3) 初值问题： 给定 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$，将通解中的常数 C_1,C_2解出得到特定解。这类题注重代入和解算正确。

3. 常见考点归纳

- **一阶方程类型判别与解法：** 能判断方程类型（如可分离/线性/恰当）并熟练应用相应方法得到通解或隐式解。尤其对线性方程的积分因子，恰当方程条件熟悉。
- **微分方程建模应用：** 识别现实问题翻译成微分方程并求解，如简单的增长衰减模型（可分）、牛顿冷却（线性）、电路方程（线性二阶）等。
- **常系数二阶齐次：** 熟练求特征根，写出不同根型下的通解形式。注意重根情形和共轭复根情形的表示。
- **常系数二阶非齐：** 针对典型右端项，写出适当形式的特解结构（避免与齐次重复，重复时乘x）。能正确求得待定参数。对于复杂$f(x)$会分解为多个部分处理后叠加。
- **解的结构理解：** 了解线性方程解的线性空间性质，叠加原理（齐次+特解形式）。虽然课程不强调证明，但有时会考简单验证，如将某候选特解代入检查。
- **初值与边值**：给定初始条件解出唯一解，在应用题中从一般解找符合条件的特解。

4. 典型题型示例

- *例题1：* 解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-1}{y^2+1}$。（提示：可分离变量后积分，两边得到反三角函数）。
- *例题2：* 解方程 $(2xy+e^y)dx+(x^2+e^y)dy=0$。（提示：检查恰当性，$M_y=2x+e^y, N_x=2x+e^y$ 相等，故存在势函数 $\Psi(x,y)$）。
- *例题3：* 解微分方程 $y'-\frac{2}{x}y=x^2$。（提示：一阶线性方程，积分因子 $\mu(x)=e^{\int -(2/x)dx}=x^{-2}$，将方程化为 $(x^{-2}y)'=x^0$）。
- *例题4：* 求解 $y''-4y'+4y=0$ 并给出初值 $y(0)=3, y'(0)=5$ 下的特解。（提示：特征根 $r=2$ 重根，通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，代入初值求 C_1,C_2）。
- *例题5：* 解非齐次方程 $y''+9y=6\sin(3x)$。（提示：齐次通解为 $C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$，右端与齐次同频，试特解 $y_{特}=Ax\cos 3x+Bx\sin 3x$，求出 A,B）。

七、向量代数与解析几何

向量代数与空间解析几何是研究空间图形和位置关系的工具。其内容包括**向量的基本运算**、**点积和叉积**、**直线与平面的方程**以及**空间曲面与距离角度计算**等。本模块将重点介绍这些基础知识。

1. 向量的基本概念与运算

向量是既有大小又有方向的量。平面和空间中，可用有向线段表示向量。向量 $\mathbf{a}$ 的**模**$|\mathbf{a}|$表示大小。**零向量**模为0无明确方向。

向量的加减法： 满足平行四边形法则和三角形法则，在坐标形式下就是对应分量相加减。**数乘向量：** 改变大小和（或）方向（负数相反方向）。向量加法满足交换律、结合律。

坐标系中，空间向量一般以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为单位基底向量。若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则:

- 加法 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$，
- 数乘 $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$。

2. 点积（数量积）与叉积（向量积）

点积（数量积）： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$，$\theta$ 是两向量夹角（取 $0 \leq \theta \leq \pi$）。在坐标形式:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \,.$$

性质：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$；与分配律结合律兼容。几何解释：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \cos\theta) = |\mathbf{a}|b_{\mathbf{a}}$，即 $\mathbf{a}$ 的模乘上 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 方向的投影长度（再乘 $|\mathbf{a}|$）。特别地，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 当且仅当 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$（垂直）。

叉积（向量积）：$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一个向量，其方向垂直于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在平面并遵循右手定则（$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 依次，通过右手螺旋转向 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$），大小为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$。坐标形式可用行列式表示:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)\,.$$

性质：$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$（反交换）；$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$；分配律成立。几何意义：$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 等于以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积。。叉积常用于求垂直向量（如平面法向）或计算面积、转矩等。

混合积：$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 是一个标量，等于对应平行六面体的体积（有向），在坐标中可表示为行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$。

3. 空间直线与平面

平面解析几何扩展到三维：

- **直线的参数方程：** 过点 $A(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\mathbf{v}=(a,b,c)$ 的直线 L 可写作
$x=x_0+at,\quad y=y_0+bt,\quad z=z_0+ct,$
t 为参数。亦可写成对称式：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$（当 a,b,c 均非零）。方向向量决定了直线方向，任意平行直线方向向量成比例。
- **平面的方程：** 平面可用**点法式**：已知法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$ 及通过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，平面方程：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,,$$

展开为 $Ax+By+Cz+D=0$，其中 (A,B,C) 为平面法向量。特别地，$Ax+By+Cz+D=0$ 明确给出法向，若 $C\neq 0$ 可解 z 得斜截式 $z=-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y-\frac{D}{C}$。
其他形式：**截距式**（当与轴有截距且不过原点）：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 表示过 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ 的平面（需截距非0）。
- **直线的其他表示：** 一条直线也可表示为两个平面方程联立（每个平面提供一个约束自由度，两平面交线即直线）：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\,.\end{cases}$$

解此联立即得直线参数方程。对称式其实也是这种形式的变体。

距离与角度：

- 两向量夹角由点积公式 $\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ 给出。
- 直线与直线夹角：其方向向量夹角 α 即两线夹角；若给直线方向向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$，则 $\cos\alpha=\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$。
- 直线与平面夹角：定义为直线与其在平面上投影线之间的锐角。若直线方向向量 $\mathbf{v}$ 与平面法向 $\mathbf{n}$ 夹角为 β，则直线与平面夹角 $\alpha=90^\circ-\beta$。可由 $\sin\alpha=\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}$，$\cos\beta$ 同理。
- 平面与平面夹角：由其法向量夹角 θ 描述：$\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$。
- 点到平面距离公式：点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$

直线到平面距离，平行直线间距离也可转化为此公式（取任意一点距离）。两直线距离需判断是异面直线情形，用公式 $d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)|}{|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2|}$，或先求公共垂线法。

特殊曲面： 二次曲面基本形状有：

- 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（球为特例 $a=b=c$）；
- 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$；
- 双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$；
- 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$；
- 双曲面（一叶） $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；
- 双曲面（二叶） $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 等。

掌握这些典型二次曲面的标准方程和名称，在解析几何部分属拓展要求，可用于识别曲面类型。

4. 常见考点归纳

- **向量计算：** 计算向量加减、点积、叉积，应用其物理意义判定垂直、平行关系，或计算面积体积。
- **直线平面关系：** 写直线参数方程或平面方程，判断线线平行/相交/异面，线面平行/垂直，面面平行/垂直。求夹角和距离，如点到平面距离、线到线（异面）距离等。
- **综合问题：** 如求过一定条件（点、线）的平面方程，求两直线交点或异面直线公垂线方程等，需要综合运用向量与方程。
- **曲面识别：** 根据二次方程辨认属于哪种常见曲面，确定其对称轴或中心等特征。

5. 典型题型示例

- *例题1：* 已知向量 $\mathbf{a}=(1,2,3),\mathbf{b}=(-2,1,0)$，求：(a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$；(b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$；(c) $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角。
- *例题2：* 求经过点 $A(1,2,3)$，法向量为 $\mathbf{n}=(2,-1,1)$ 的平面方程。并求该平面与坐标平面 xy 的夹角。
- *例题3：* 写出经过两点 $P_1(0,1,2),P_2(2,2,2)$ 且平行于向量 $\mathbf{v}=(1,-1,0)$ 的直线方程；并判断此直线与平面 $x+y+z=4$ 的位置关系（平行、相交或包含）。
- *例题4：* 已知直线 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ 和 $L_2:\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$，验证 L_1,L_2 异面，并求它们的公垂线方程及距离。
- *例题5：* 判断曲面方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ 的类型并简述其形状特征（中心、对称轴等）。