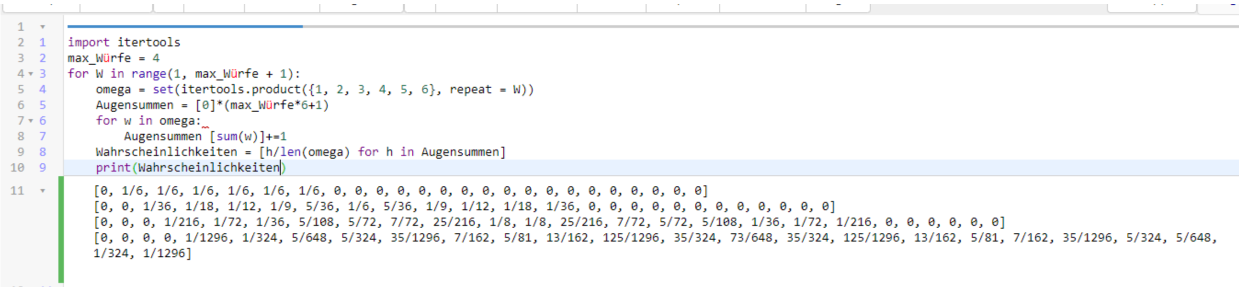
Übungsblatt 7

Betrachten wir folgendes Programm:

```
import itertools
max_Würfe = 4
for W in range(1, max_Würfe + 1):
    Ω = set(itertools.product({1, 2, 3, 4, 5, 6}, repeat=W))
    Augensummen = [0] * (max_Würfe * 6 + 1)
    for ω in Ω:
        Augensummen[sum(ω)] += 1
    Wahrscheinlichkeiten = [h/len(Ω) for h in Augensummen]
    print(Wahrscheinlichkeiten)
```

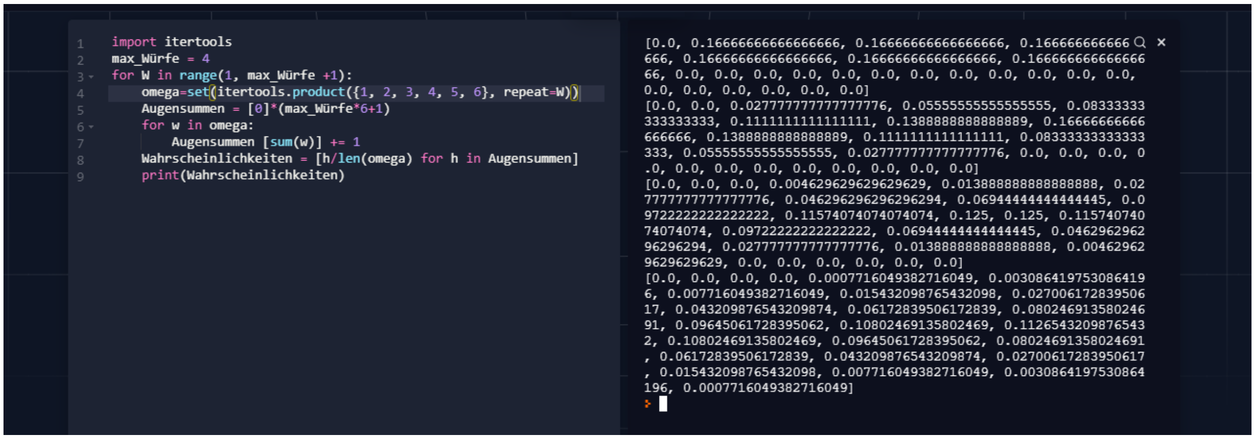
Eingabe in Cocalc



```
import itertools
max_Würfe = 4
for W in range(1, max_Würfe + 1):
    omega = set(itertools.product({1, 2, 3, 4, 5, 6}, repeat = W))
    Augensummen = [0]*(max_Würfe*6+1)
    for w in omega:
        Augensummen [sum(w)]+=1
    Wahrscheinlichkeiten = [h/len(omega) for h in Augensummen]
    print(Wahrscheinlichkeiten)
```

```
[0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1/216, 1/72, 1/36, 5/108, 5/72, 7/72, 25/216, 1/8, 1/8, 25/216, 7/72, 5/72, 5/108, 1/36, 1/72, 1/216, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0, 1/1296, 1/324, 5/648, 5/324, 35/1296, 7/162, 5/81, 13/162, 125/1296, 35/324, 73/648, 35/324, 125/1296, 13/162, 5/81, 7/162, 35/1296, 5/324, 5/648,
1/324, 1/1296]
```

Eingabe in Python3:



```
import itertools
max_Würfe = 4
for W in range(1, max_Würfe +1):
    omega=set(itertools.product({1, 2, 3, 4, 5, 6}, repeat=W))
    Augensummen = [0]*(max_Würfe*6+1)
    for w in omega:
        Augensummen [sum(w)] += 1
    Wahrscheinlichkeiten = [h/len(omega) for h in Augensummen]
    print(Wahrscheinlichkeiten)
```

```
[0.0, 0.16666666666666666, 0.16666666666666666, 0.166666666666
666, 0.16666666666666666, 0.16666666666666666, 0.1666666666666666
66, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 0.027777777777777776, 0.05555555555555555, 0.08333333
333333333, 0.1111111111111111, 0.1388888888888889, 0.16666666666
666666, 0.1388888888888889, 0.1111111111111111, 0.08333333333333
333, 0.05555555555555555, 0.027777777777777776, 0.0, 0.0, 0.0, 0
.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 0.0, 0.004629629629629629, 0.013888888888888888, 0.02
7777777777777776, 0.046296296296296294, 0.06944444444444445, 0.0
9722222222222222, 0.11574074074074074, 0.125, 0.125, 0.115740740
74074074, 0.09722222222222222, 0.06944444444444445, 0.0462962962
96296294, 0.027777777777777776, 0.013888888888888888, 0.00462962
9629629629, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0]
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0007716049382716049, 0.003086419753086419
6, 0.007716049382716049, 0.015432098765432098, 0.027006172839506
17, 0.043209876543209874, 0.06172839506172839, 0.080246913580246
91, 0.09645061728395062, 0.10802469135802469, 0.112654320987654
2, 0.10802469135802469, 0.09645061728395062, 0.08024691358024691
, 0.06172839506172839, 0.043209876543209874, 0.02700617283950617
, 0.015432098765432098, 0.007716049382716049, 0.003086419753086
196, 0.0007716049382716049]
```

Welche Resultate werden vom Programm berechnet?

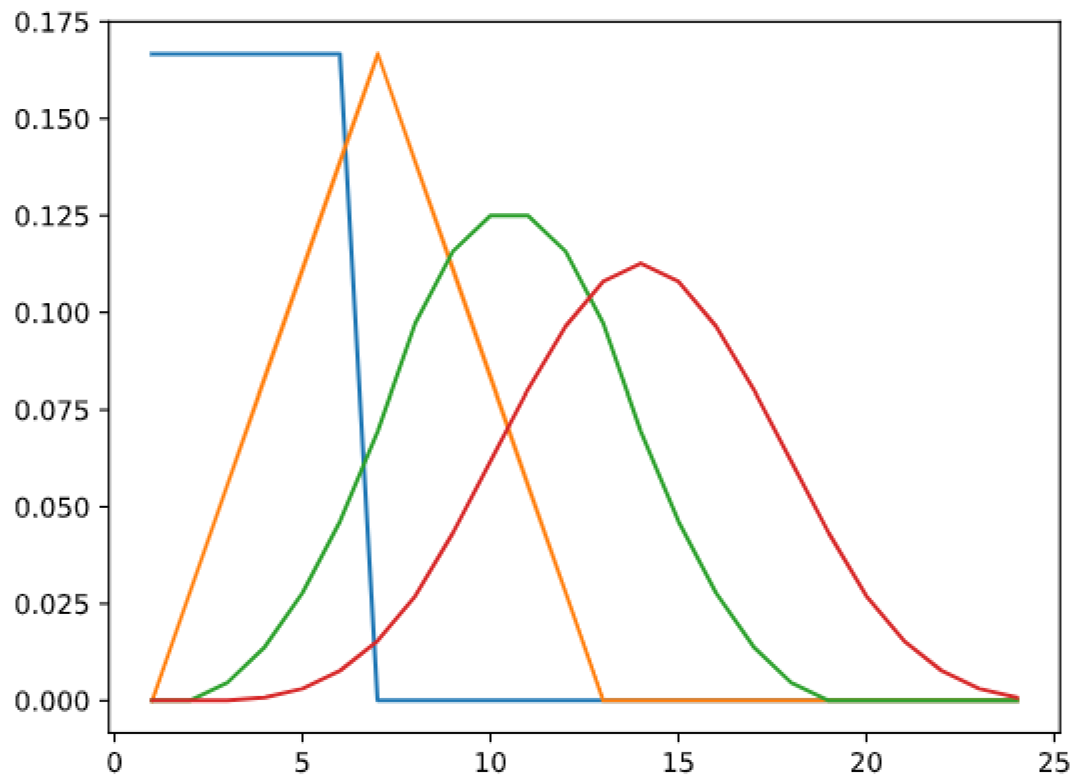
Es wird die Verteilung der Wahrscheinlichkeit berechnet bei einem Würfel, zwei Würfel, drei Würfel und vier Würfel.

So zeigt sich, dass bei einem Würfel die Augenzahlen 1 bis 6 gleich Wahrscheinlich sind, während beim Würfeln mit zwei Würfeln die Augensumme 7 eher wahrscheinlich ist, da die Wahrscheinlichkeit höher ist.

Erstellen Sie Liniendiagramme, welche die Resultate grafisch darstellen. Für jede Dichtefunktion sollten Sie eine einzige Kurve erstellen und alle Kurven in demselben Graphen darstellen. Tipp: Falls Sie die Website cocalc.com nutzen und ein Sage Worksheet erstellen, können Sie alle Liniendiagramme automatisch darstellen:

Eingabe in cocalc

```
import itertools
import matplotlib.pyplot as p
max_Würfe = 4
for W in range(1, max_Würfe + 1):
    omega = set(itertools.product({1, 2, 3, 4, 5, 6}, repeat = W))
    Augensummen = [0]*(max_Würfe*6+1)
    for w in omega:
        Augensummen [sum(w)]+=1
    Wahrscheinlichkeiten = [h/len(omega) for h in Augensummen]
    p.plot(range(1, max_Würfe*6+1), Wahrscheinlichkeiten [1:])
    p.show()
```

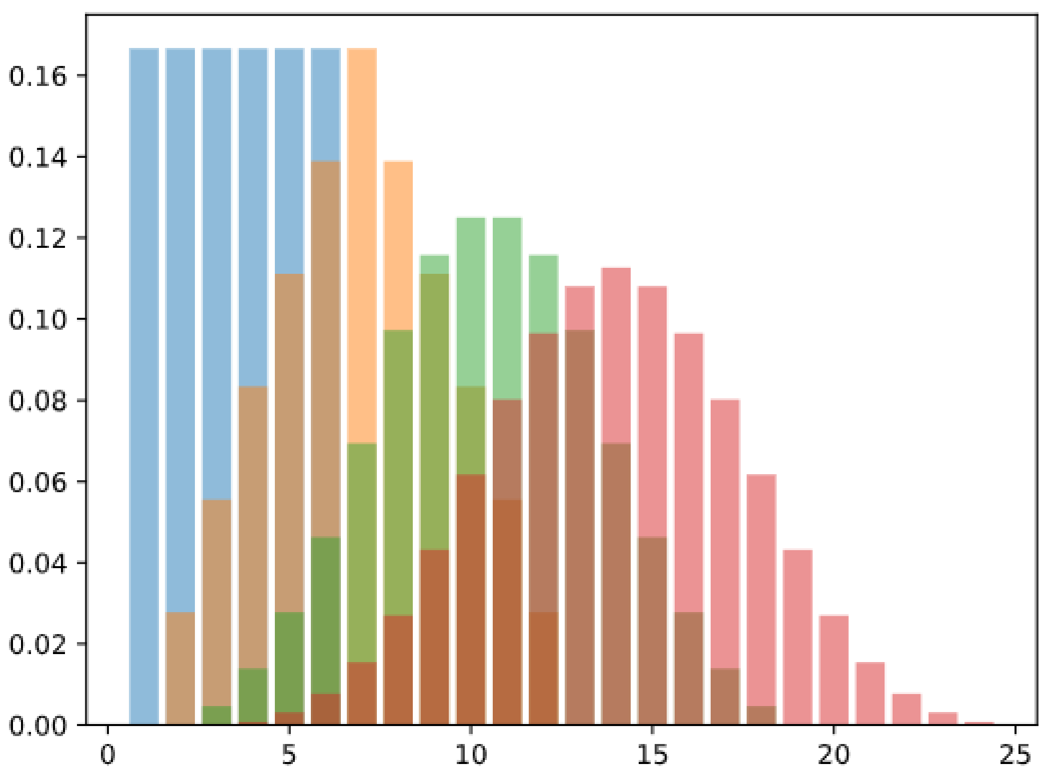


Legende:

- Blaue Linie = 1 Würfel
- Gelbe Linie = 2 Würfel
- Grüne Linie = 3 Würfel
- Rote Linie = 4 Würfel

Eine andere graphische Darstellung

```
import itertools
import matplotlib.pyplot as p
max_Würfe = 4
for W in range(1, max_Würfe + 1):
    omega = set(itertools.product({1, 2, 3, 4, 5, 6}, repeat = W))
    Augensummen = [0]*(max_Würfe*6+1)
    for w in omega:
        Augensummen [sum(w)]+=1
    Wahrscheinlichkeiten = [h/len(omega) for h in Augensummen]
    p.bar(range(1, max_Würfe*6+1), Wahrscheinlichkeiten [1:], alpha=0.5)
    p.show()
```



Farben bleiben die gleichen wie oben!

Welchen grafischen Unterschied gibt es zwischen den zwei Darstellungen?

In der ersten Visualisierung verwenden wir ein Liniendiagramm. Dies verbindet im Grunde die Wahrscheinlichkeit von 1 auf 2 usw. immer, dadurch kann ein falsches Bild entstehen, denn man könnte daraus ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit von 1,3 auch 1/6 ist, dies wäre aber inkorrekt.

In der zweiten Grafik verwendet man ein einfaches Histogramm ohne große Intervalle, die Intervallbreite ist genau 1. Die Balken des Histogramms vermitteln uns einen meiner Meinung nach besseren Eindruck.

Erklären Sie mit möglichst präzisen mathematischen Begriffen, wie die Liniendiagramme interpretiert werden können:

a) Lesen Sie so viele Eigenschaften ab, wie möglich:
b) Verallgemeinern Sie die Resultate.
c) Nutzen Sie nur solche Begriffe, die in der Schule (Unter- und Oberstufe) erklärt werden können. (Wir nehmen an, dass folgende Begriffe schon bekannt sind: Folge, Grenzwert, Funktion, Dichtefunktion, Erwartungswert, Varianz, Streuung, Normalverteilung.)

Beginnen wir mit der blauen Linie. Wir würfeln mit nur einem Würfel und wollen uns die Wahrscheinlichkeit dazu ansehen (dies visualisiert das Liniendiagramm). Wir sehen hier, dass die Wahrscheinlichkeit eine Zahl zwischen eins und fünf zu werfen gleichverteilt ist, immer 1/6. Weiters erkennen wir, dass die Augensummen 7 bis 24 nicht vorkommen – daher null sind, weil die blaue Funktion dann sich der Null asymptotisch annähert.

In der gelben Funktion können wir bereits mehr ablesen. Hier würfeln wir mit zwei Würfel, das bedeutet, dass die Augensummen zwei bis zwölf möglich sind. Wir können hier den Erwartungswert schon ablesen (Erwartungswert = Maximum der Funktion). Unser Erwartungswert für die gelbe Funktion lautet 7. Die Wahrscheinlichkeit sieben zu würfeln ist am größten. Weiters sehen wir, dass auch die gelbe Funktion den Grenzwert 0 in Richtung + unendlich besitzt. Darüber hinaus können wir über die Streuung sagen, dass sich die Werte von zwei bis zwölf verteilen.

Für die grüne Funktion haben wir schon mit drei Würfel geworfen. Das bedeutet, dass die Streuung dieser Funktion von drei bis 18 reicht. Der Erwartungswert liegt bei 10,5 – natürlich kann man nicht 10,5 werfen, aber die Wahrscheinlichkeit einen 10 oder 11 zu werfen ist gleich hoch. Hier haben wir schon eine annähernde Gaußsche Glockenkurve (Standardnormalverteilung). Die Grenzwerte in beide Richtungen + - sind null, da auch keine anderen Augenzahlen in Frage kommen können.

In der vierten Funktion (rot) sehen wir bereits eine schöne Normalverteilung, mit einem Erwartungswert von 14. Das bedeutet, dass 14 von allem möglichen Augensummen am ehesten eintreten wird. Die Standardabweichung ist genau an den Wendestellen der Funktion und beträgt: $\Phi \frac{(x-\mu)}{\sigma}$

$\Phi \frac{18-14}{\sigma} = 0{,}6827 \Phi \frac{4}{\sigma} = 0{,}6827 \frac{4}{\sigma} = 0{,}48 \frac{4}{0{,}48} = \sigma 8{,}33 = \sigma$ Die Standardabweichung ist bei 8, 33.

Auch bei dieser Funktion können wir sehen, dass Werte unter oder über der Spannweite Null sind, und daher die Grenzwerte der Funktion auch gegen Null verlaufen.

Weiters gilt noch dazu zu sagen, dass alle vier Funktion den Flächeninhalt 1 besitzen. Das ein sicheres Ereignis eintritt bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit = 1 ist. Da wir hier Dichtefunktionen haben und wir, ist der Flächeninhalt 1. Alle Wahrscheinlichkeiten (pro Funktion) zusammen addiert müssen 1 ergeben.