

Übungsblatt 5

1. Betrachten wir folgendes Python3 Programm:

```
1 import itertools
2 Ω = list(itertools.product({"K", "Z"}, repeat=5))
3 print(f"Ω={Ω}")
4 E = [ω for ω in Ω if ω.count("K") == 2]
5 print(f"E={E}")
6 print(f"{len(E)} von {len(Ω)}")
7 print(f"p = {len(E)/len(Ω)}")
```

Selbst eingegeben:

```
1 import itertools
2 omega = list(itertools.product({"K", "Z"}, repeat = 5))
3 print (f"omega={omega}")
4 E=[w for w in omega if w.count("K") ==2]
5 print(f"E={E}")
6 print(f"{len(E)} von {len(omega)}")
7 print(f"p={len(E)/len(omega)}")
8
```

omega=[('K', 'K', 'K', 'K', 'K'), ('K', 'K', 'K', 'K', 'Z'), ('K', 'K', 'K', 'Z', 'K'), ('K', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'K', 'Z', 'K', 'K'), ('K', 'K', 'Z', 'K', 'Z'), ('K', 'K', 'Z', 'Z', 'K'), ('K', 'K', 'Z', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'K', 'K', 'K'), ('K', 'Z', 'K', 'K', 'Z'), ('K', 'Z', 'K', 'Z', 'K'), ('K', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'K', 'K'), ('K', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('K', 'Z', 'Z', 'Z', 'Z'), ('Z', 'K', 'K', 'K', 'K'), ('Z', 'K', 'K', 'K', 'Z'), ('Z', 'K', 'K', 'Z', 'K'), ('Z', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'K', 'K'), ('Z', 'K', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'K', 'Z', 'Z', 'Z'), ('Z', 'Z', 'K', 'K', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'K'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'Z')]

E=[('K', 'K', 'Z', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'K'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'Z')]

10 von 32
p=0.3125

(a) Finden Sie eine passende Textaufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche von diesem Programm gelöst wird.

Eine faire Münze („K“ – Kopf, „Z“ – Zahl, wird fünfmal geworfen.

- 1) Stelle den Ereignisraum dar.
- 2) Stelle den Ereignisraum dar, dass Kopf genau zweimal geworfen wird dar.
- 3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünf Würfeln genau zweimal Kopf gewürfelt.

(b) Geben Sie eine kurze mathematische Begründung an, warum die Antwort des Programms $\frac{\binom{5}{2}}{2^5}$ ist.

Der Binomialkoeffizient gibt alle Möglichkeiten an, welche im Ereignisraum sind und die Bedingung erfüllen (Kombination ohne WH) und der Divisor gibt die Anzahl an Möglichkeiten an, welche den Ereignisraum angeben, als alle Möglichkeiten (Variation mit WH).

Rechnerisch:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$2^5=32$$

(c) Wie ändert sich der Output des Programms, wenn folgende Zeile nach der 2. Zeile eingefügt wird?

$$\Omega = \{"".join(\text{Ausgang}) \text{ for Ausgang in } \Omega\}$$

```
1 import itertools
2 omega = list(itertools.product({"K", "Z"}, repeat = 5))
3 omega = ["-".join(Ausgang) for Ausgang in omega]
4 print(f"#{omega={omega}}")
5 E=[w for w in omega if w.count("K")==2]
6 print(f"#{E={E}}")
7 print(f"#{len(E)} von {len(omega)}")
8 print(f"p=#{len(E)/len(omega)}")
```

Es wird zusammengefasst, nicht mehr („K“, „Z“, „K“, „Z“, „K“) sondern „KZKZK“

2. Betrachten wir folgendes Python3 Programm:

```
1 import itertools
2  $\Omega$  = set(itertools.product({"K", "Z"}, repeat=5))
3 Erwartungswert = 0
4 for  $\omega$  in  $\Omega$ :
5     Erwartungswert = Erwartungswert +  $\omega$ .count("K")
6 Erwartungswert = Erwartungswert / len( $\Omega$ )
7 print(f"Erwartungswert = {Erwartungswert}")
```

Selbst eingeben:

[illegible]

(a) Geben Sie die ZV X an, wessen Erwartungswert von diesen zweiten Programm ausgerechnet wird.

Wir berechnen den Erwartungswert, dass X gleich Kopf ist, da wir „K“ zählen in Zeile 5.

(b) Geben Sie eine kurze mathematische Begründung an, warum der Erwartungswert 2,5 ist. Verallgemeinern Sie dieses Resultat auch für unterschiedliche Werte bei der Einstellung repeat = 5 in der 2. Zeile des Programms.

Der Erwartungswert bei einer Münze, um Kopf zu werfen ist immer die Hälfte der Würfe, da die Wahrscheinlichkeit, Kopf zu würfeln 0.5 und Zahl auch 0.5 ist, somit ist es immer die Hälfte der Würfe.

(c) Erweitern Sie dieses zweite Programm, so dass auch die Varianz von X berechnet wird.

```
1 import itertools
2 omega = list(itertools.product({"K", "Z"}, repeat = 5))
3 Erwartungswert = 0
4 for w in omega:
5     Erwartungswert = Erwartungswert + w.count("K")
6 Erwartungswert = Erwartungswert/len(omega)
7
8 Varianz = 0
9 for w in omega:
10     Varianz = w.count("K")-Erwartungswert
11 Varianz = Varianz/len(omega)
12 print(f"Erwartungswert = {Erwartungswert}")
13 print(f"Varianz = {Varianz}")
14
```

omega=[('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'Z', 'K', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'Z', 'K', 'Z', 'K'), ('Z', 'Z', 'K', 'K', 'Z'), ('Z', 'Z', 'K', 'K', 'K'), ('Z', 'K', 'Z', 'Z', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'Z', 'K'), ('Z', 'K', 'Z', 'K', 'Z'), ('Z', 'K', 'Z', 'K', 'K'), ('Z', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('Z', 'K', 'K', 'Z', 'K'), ('Z', 'K', 'K', 'K', 'Z'), ('Z', 'K', 'K', 'K', 'K'), ('K', 'Z', 'Z', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'Z', 'K'), ('K', 'Z', 'Z', 'K', 'Z'), ('K', 'Z', 'Z', 'K', 'K'), ('K', 'Z', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'Z', 'K', 'Z', 'K'), ('K', 'Z', 'K', 'K', 'Z'), ('K', 'Z', 'K', 'K', 'K'), ('K', 'K', 'Z', 'Z', 'Z'), ('K', 'K', 'Z', 'Z', 'K'), ('K', 'K', 'Z', 'K', 'Z'), ('K', 'K', 'Z', 'K', 'K'), ('K', 'K', 'K', 'Z', 'Z'), ('K', 'K', 'K', 'Z', 'K'), ('K', 'K', 'K', 'K', 'Z'), ('K', 'K', 'K', 'K', 'K')]

Erwartungswert = 2.5
Varianz = 0.078125