Eficiência de Mercado e Random Walk

João Gabriel de Moraes Souza
Johnathan Milagres

LAMFO/UnB

2 de outubro de 2021

Estrutura da Oficina

Preço de Mercado

Preço é uma medida de valor enunciada em termos de um ativo líquido.

Preço de Mercado

Preço é uma medida de valor enunciada em termos de um ativo líquido.

- A formação do preço de mercado se dá pelo mecanismo da **oferta** e **demanda**.
- Se o preço não é considerado "justo" por ambas as partes, a transação não é realizada.

Preço de Mercado

O que acontece se existirem dois preços diferentes pelo mesmo bem?

Preço de Mercado

O que acontece se existirem dois preços diferentes pelo mesmo bem?

- Os agentes têm **incentivos** para comprar pelo preço menor e vender pelo preço maior.
  - O agente econômico que efetuar essa operação poderá obter ganhos sem correr riscos.

Equilíbrio

Para cada agente i, um equilíbrio no mercado de ativos consiste de um vetor de preços de ativos p, uma alocação $\{h^i\}$ e uma alocação de consumo $\{(c_0^i, c_1^i)\}$ tal que $\{h^i\}$ e $\{(c_0^i, c_1^i)\}$ sejam soluções do problema de escolha dos agentes nos preços p e

Equilíbrio

Para cada agente i, um equilíbrio no mercado de ativos consiste de um vetor de preços de ativos p, uma alocação $\{h^i\}$ e uma alocação de consumo $\{(c_0^i, c_1^i)\}$ tal que $\{h^i\}$ e $\{(c_0^i, c_1^i)\}$ sejam soluções do problema de escolha dos agentes nos preços p e

$$\sum_i h^i = 0$$

$$\sum_i c_0^i \leqslant \sum_i w_0^i$$

$$\sum_i c_1^i \leqslant \sum_i w_1^i$$

A existência de equilıbrio pode ser garantida sob determinadas condições de regularidade, usando o Teorema do Ponto Fixo de *Brower*.

Lei do Preço Único

Lei do Preço Único

Desconsiderados os custos de transação, o mesmo bem deve ser transacionado ao mesmo preço em todos os mercados.

Lei do Preço Único

Definição

Carteiras que têm o mesmo *payoff* têm o mesmo preço:

Lei do Preço Único

Definição

Carteiras que têm o mesmo *payoff* têm o mesmo preço:

$$Se \ Xh = Xh^{'} \ então \ \sum_{j=1}^{J} p_j h_j = \sum_{j=1}^{J} p_j h_j^{'}$$

Lei do Preço Único

Definição

A forma funcional de apreçamento de *payoffs* é um mapa $q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada *payoff* o preço da carteira que gerou aquele *payoff*, isto é,

$$q(z) = \{w \in \mathbb{R} : w = \sum_{j=1}^{J} p_j h_j \; para \; algum \; h \; tal \; que \; z = xh\}$$

Lei do Preço Único

Teorema

A Lei do Preço Único é valida se, e somente se, q for um funcional linear.

Lei do Preço Único

Demostração

Suponha que a Lei do Preço Único é válida. Logo, para cada *payoff* $z = \mathbf{Xh}$, temos apenas um único $q(z)$. Para provar linearidade, suponha que z e $z^{'} \in \mathcal{M}$ tal que $z = \mathbf{Xh}$ e $z^{'} = \mathbf{xh}^{'}$ para cada carteira h e $h^{'}$.

Para quaisquer números reais λ e $\mu \in \mathbb{R}$, o *payoff* pode ser gerado pela carteira $\lambda h + \mu h^{'}$ com preço $\lambda p \cdot h + \mu p \cdot h^{'}$.

Uma vez que a Lei do Preço Único é válida e, portanto, q é univalente, então $q(\lambda z + \mu z^{'}) = \lambda ph + \mu ph^{'} = \lambda q(z) + \mu q(z^{'})$. $\square$

Lei do Preço Único

Demostração

Suponha agora que q é linear.

Se $z = z^{'}$, então $z - z^{'} = 0$. Logo, $q(z - z^{'}) = q(0) = 0$ e, consequentemente, $q(z) - q(z^{'}) = 0$ $\square$

Estrutura da Oficina

Arbitragem

Arbitragem

Operação que permite obter ganhos sem correr riscos aproveitando-se de diferentes níveis de preço.

Arbitragem

Arbitragem

Operação que permite obter ganhos sem correr riscos aproveitando-se de diferentes níveis de preço.

- Oportunidades de arbitragem tendem a ser breves.
  - Eventualmente, o mecanismo da oferta e demanda levaria o preço de volta ao equilíbrio.

Arbitragem

Definição

Arbitragem : Uma **arbitragem** é uma carteira h que satisfaz $\mathbf{Xh} \geqslant 0$ e $\sum_{j=1}^{J} p_j h_j \leqslant 0$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

Arbitragem

Definição

Arbitragem : Uma **arbitragem** é uma carteira h que satisfaz $\mathbf{Xh} \geqslant 0$ e $\sum_{j=1}^{J} p_j h_j \leqslant 0$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

Definição

Arbitragem Forte : Uma **arbitragem forte** é uma carteira h que satisfaz $\mathbf{Xh} \geqslant 0$ e $\sum_{j=1}^{J} p_j h_j < 0$ com pelo menos uma desigualdade estrita.

Arbitragem

Teorema

Se não existem oportunidades de Arbitragem Forte então a Lei do Preço Único é <u>válida</u>.

Arbitragem

Demonstração

Suponha que a Lei do Preço Único não é válida, isto é, existem duas carteiras h e $h^{'}$ tais que:

$$\mathbf{Xh} = \mathbf{Xh}^{'}$$
$$p \cdot h \neq p \cdot h^{'}$$

Rearrumando as equações acima temos duas carteiras $h_{01} = h - h^{'}$ e $h_{02} = h - h^{'}$. Ambas tem preços não nulos e uma delas tem preço negativo e, consequentemente, é uma oportunidade de Arbitragem Forte.

□

Preço de Ativos Arriscados

Na teoria econômica, o preço atrelado a um ativo arriscado é usualmente modelado como uma trajetória difusa em um dado espaço de probabilidade, ou seja, existirá no processo de apreçamento de ativos arriscados um processo que segue movimento browniano [Horst, 2005].

Estes agentes acreditam em um processo dinâmico de equilíbrio dos preços, em que exista um desconto instantâneo das informações observadas [Bick, 1987].

Preço de Ativos Arriscados

Para [Campbell et al., 1997], existe um vetor de estados positivos de preços em que não existirá possibilidade de arbitragem. Se existe um vetor de estados positivos de preço, p_s , e que satisfaça uma variável aleatória positiva M. Existirá para qualquer ativo a relação a seguir.

$$1 = \mathbb{E}\left[(1 + R_i)M\right] = \sum_{s=1}^{S} p_s(1 + R_{st})$$
$$1 = \mathbb{E}_t\left[(1 + R_{i,t+1})M_{t+1}\right]$$

Em que M_{t+1} é conhecido como fator de desconto estocástico ou "Preço de Kernel". Sendo $M_{t+1} = \frac{\partial U'(C_{t+1})}{\partial U(C_t)}$.

Estrutura da Oficina

Eficiência de Mercado

Uma das grandes questões em finanças é o estudo sobre a possibilidade de previsão de preços. De fato, a Econometria Financeira moderna está firmemente enraizada em tentativas de "bater o mercado" (*Beat the Market*), um esforço que ainda é de interesse atual, discutido e debatido em artigos, conferências, e em bares!

Hipótese do Mercado Eficiente

A Hipótese dos Mercados Eficientes (HME) tem sua origem na tese de doutoramento em Matemática de Louis Bachelier, *Theorie de la speculation*, sob a supervisão do matemático Henry Poincary. Nela, Bachalier compara os preços dos ativos financeiros a um *random walk (RW)*, por isso a *HME*, em Finanças, é chamada de *Random Walk Theory*. Entretanto, a tese de Bachelier permaneceu no esquecimento, até que [Samuelson, 1965] descobre o trabalho de Bachelier e o aplica aos mercados financeiros.

Hipótese do Mercado Eficiente

Hipótese do Mercado Eficiente

Os ativos estão normalmente em equilíbrio e são apreçados de forma justa. Ninguém pode derrotar o mercado, a menos que tenha sorte.

Hipótese do Mercado Eficiente

Hipótese do Mercado Eficiente

Os ativos estão normalmente em equilíbrio e são apreçados de forma justa. Ninguém pode derrotar o mercado, a menos que tenha sorte.

- A hipótese do mercado eficiente é postulada sob três formas:
  1. Forma Fraca.
  2. Forma Semi Forte.
  3. Forma Forte.

Hipótese do Mercado Eficiente

Hipótese do Mercado Eficiente

1. Forma Fraca.
   - Os níveis de preço refletem toda a **informação disponível do passado**.
   - Um declínio recente não é uma razão para achar que as ações irão subir (ou cair) no futuro.

Hipótese do Mercado Eficiente

Hipótese do Mercado Eficiente

2. Forma Semi Forte.
   - Os níveis de preço refletem toda a informação **publicamente disponível**.
   - Além de não ser possível arbitrar considerando o passado, tampouco adianta procurar ativos subavaliados com base em informações públicas.

Hipótese do Mercado Eficiente

Hipótese do Mercado Eficiente

3. Forma Forte.
    - Os níveis de preço refletem toda a informação, mesmo a informação privilegiada (*inside information*).
    - Em geral, essa forma não é aceita, pois na prática é possível ganhar muito com base em informações privilegiadas.

Estrutura da Oficina

Random Walk

Imagine uma sequência de subidas e descidas de preços identicamente e independentemente distribuída ($i.i.d$). Esses valores seguem uma distribuição discreta com $\mathbb{P}\{\epsilon_k = \pm 1\} = \frac{1}{2}$.

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k$$

Esse processo pode ser representado por:

$$\frac{X_N}{\sqrt{N}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

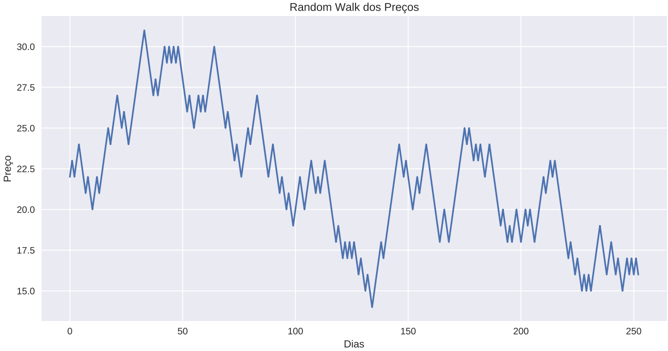
Random Walk

Para o comportamento dos Preços pode-se fazer a seguinte analogia do processo de *Random Walk*.

$$P_t = P_{t-1} + \epsilon_t$$

Em que $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Random Walk


Random Walk dos Preços
Preço
Dias
30.0
27.5
25.0
22.5
20.0
17.5
15.0
0
50
100
150
200
250

Hipótese Martingale

Talvez o modelo mais antigo estipulado como Processo Gerador dos preços de ativos financeiros seja o Modelo Martingale, cuja origem encontra-se na história dos jogos de azar e no nascimento da teoria de probabilidade.

O matemático italiano Girolamo Cardano propôs uma teoria elementar dos jogos de azar em seu manuscrito de 1565 [Cardamo, 1961].

Hipótese Martingale

"O princípio mais fundamental de todos os jogos é simplesmente a igualdade de condições, por exemplo, dos adversários, dos observadores, do dinheiro, da situação, da caixa de dados, e da própria matriz. Na medida em que você se afasta dessa igualdade, se essas chances forem a favor do seu oponente, você é um tolo, e se em seu próprio favor, você é injusto".

Hipótese Martingale

A passagem apresentada contém a noção de um "jogo justo" (*Fair Game*) de Bachelier, um jogo que não é a favor do proponente nem do oponente. Esta é a essência de um Martingale, o qual é um processo estocástico $\{P_t\}$ que satisfaz a seguinte condição:

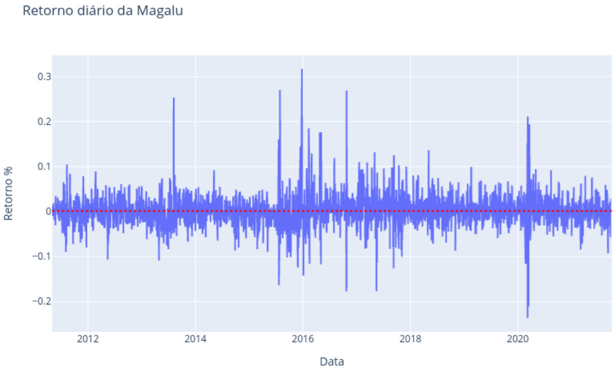
$$\mathbb{E}\left[P_{t+1}|P_t, P_{t-1}, \ldots\right] = P_t$$

ou equivalente:

$$\mathbb{E}\left[P_{t+1} - P_t|P_t, P_{t-1}, \ldots\right] = 0$$

ou seja, a equação acima representa o retorno esperado $\mathbb{E}(R_t)$ do ativo.

Hipótese Martingale



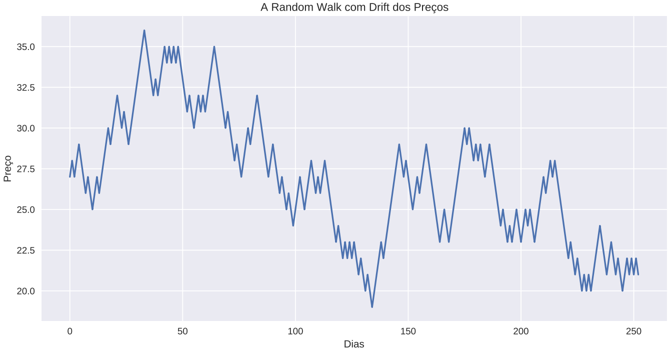
Random Walk 1: Incrementos i.i.d

Segundo [Samuelson, 1965], a hipótese do Passeio Aleatório refere-se aos incrementos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d) do preço $\{P_t\}$ representado pela seguinte equação, que segue um processo auto regressivo de ordem 1, ou seja, $AR(1)$:

$$P_t = +\mu + P_{t-1} + \epsilon_t$$

tal que, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, que corresponde ao resíduo do processo AR(1), que são incrementos i.i.d.

Random Walk 1: Incrementos i.i.d



Random Walk 1: Incrementos i.i.d

Random Walk 1

Incrementos independentes implicam que o modelo de passeio aleatório é também um jogo justo, mas em um sentido mais estrito do que o modelo martingale: a independência implica que os incrementos não só são não-correlacionados como qualquer função não-linear desses incrementos também são não-correlacionadas.

Esse modelo é denominado **Random Walk 1** ou **RW1**.

Testando o Modelo RW1

Um dos primeiros testes para o modelo RW1 é o teste de Cowles e Jones [Campbell et al., 1997]. Os autores consideraram a seguinte estatística:

$$\hat{C}J = \frac{N_s}{N_r}$$

onde $N_s \equiv \sum_{t=1}^{T} Y_t$, $N_r \equiv T - N_s$ para $Y_t = I_t I_{t+1}(1 - I_t)(1 - I_{t+1})$.

Em que:

$$I_t = \begin{cases} 1 \ se \ r_t \equiv p_t - P_{t-1} > 0 \\ 0 \ se \ r_t \equiv p_t - P_{t-1} \leqslant 0 \end{cases}$$

Random Walk 2: Incrementos Independentes

Random Walk 2

A afirmação de que o processo gerador dos retornos das ações diárias permaneceu o mesmo ao longo deste período é simplesmente implausível. Portanto, devemos relaxar os pressupostos do modelo **RW1** para incluir processos com incrementos independentes, mas não identicamente distribuídos.

Este modelo é conhecido como **Random Walk 2** ou **RW2**.

Random Walk 2: Incrementos Independentes

O modelo **RW2** contém claramente o modelo **RW1** como um caso especial, mas também contém consideravelmente mais processos geradores de dados para os preços.

Por exemplo, o modelo **RW2** permite heteroscedasticidade incondicional, o qual é uma característica particularmente útil dado a volatilidade presente em muitas séries de retorno financeiros.

Testando o Modelo RW2

O Teste de habilidade preditiva de Hansen (*Hansen's test for Superior Predictive Ability*) é um caso mais geral, o qual engloba o Teste de realidade de White como um caso particular.

Esse teste compara a performance da previsibilidade de dois ou mais modelos contra os seus M competidores.

Funciona comparando todo o universo de regras da Análise Técnica (ou um subconjunto de modelos candidatos) contra a estratégia proposta para a distribuição de valores da medida de performance escolhida.

Testando o Modelo RW2

Considere alguma medida de performance, neste caso, a estatística teste $\overline{V}_n$ é dada por:

$$V_n = \left(\max_{k=1,\ldots,M} \frac{\sqrt{n f_k}}{\hat{\sigma}_k} \right)_+$$

onde $x_+ = max(x, 0)$ e $\hat{\sigma}_k$ é algum estimador consistente para o desvio-padrão de $\sqrt{n f_k}$.

Random Walk 3: Incrementos Não-Correlacionados

Random Walk 3

Uma das formas mais intuitivas para testar a Hipótese de Passeio Aleatório e Martingale é a averiguação da presença de Correlação Serial.

Isso é, a correlação entre duas observações na mesma série em datas diferentes. Sobre a versão fraca da hipótese de *Random Walk*, os incrementos ou primeiras diferenças são não correlacionadas.

Assim, podemos testar o modelo **RW3** por meio da hipótese nula de que os coeficientes de autocorrelação para as primeiras diferenças entre os incrementos são zeros.

Testando o Modelo RW3

Frequentemente desejamos testar se séries são estacionárias ou não. De fato, o modelo *Random Walk* não é estacionário, e portanto, podemos testar sua factibilidade por meio do Teste de Dickey-Fuller Aumentado (ADF).

Esse teste apresenta as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : Raíz\ Unitária. \\ H_a : Ausência\ de\ raiz\ unitária\ (estacionariedade). \end{cases}$$

Testando o Modelo RW3

Para utilizar o teste ADF considere o modelo:

$$\Delta r_t = \alpha + \beta t + \gamma r_{t-1} + \delta_1 \Delta r_{t-1} + \cdots + \delta_{p-1} \Delta r_{t-p+1} + \epsilon_t$$

onde p é a ordem do processo autoregressivo e o símbolo Δ representa a primeira diferença, isto é, $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$.

Testando o Modelo RW3

A estatística do teste ADF é dada por:

$$ADF = \frac{\hat{\delta}}{EP(\hat{\delta})}$$

onde $EP(\hat{\delta})$ é o erro-padrão do estimador $\hat{\delta}$.

Bibliography I

Bick, A. (1987).
On the Consistency of the Black-Scholes Model with a General Equilibrium Framework.
Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22(3):259–275.

23

Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A. C. (1997).
The Econometrics of Financial Markets.
Princeton University Press, Chichester.
24, 44

Bibliography II

Cardamo, G. (1961).
The book on games of chance: (Liber de ludo aleae).
Holt, Rinehart and Winston; First Thus edition.
37

Horst, U. (2005).
Financial price fluctuations in a stock market model with many interacting agents.
Economic Theory, 25:917–932.
23

Bibliography III

Samuelson, P. (1965).
Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly.
Industrial management review, 2.
27, 41