Oficina de Medidas Default

João Gabriel de Moraes Souza

LAMFO/UnB

25 de maio de 2019

Estrutura da Oficina

Objetivos

- Apresentar o principais modelos de *default* da área de *Banking*.

Objetivos

- Apresentar o principais modelos de *default* da área de *Banking*.
- Expor a utilização dos modelos de Dados em Painel .

Objetivos

- Apresentar o principais modelos de *default* da área de *Banking*.
- Expor a utilização dos modelos de Dados em Painel .
- Comentar com exemplos os modelos apresentados.

Estrutura da Oficina

1 Objetivo

2 Modelos de Default
- Modelo de Merton
- Modelo KMV
- Modelo Z-Score
- Aplicação em R
- Aplicação em Bancos

3 Referências Bibliográficas

Modelo de Merton

- O Modelo de [Merton, 1974] tem como objetivo encontrar os valores dos ativos bem como a volatilidades destes em um processo dinâmico de [Black and Scholes, 1973].

Modelo de Merton

- O Modelo de [Merton, 1974] tem como objetivo encontrar os valores dos ativos bem como a volatilidades destes em um processo dinâmico de [Black and Scholes, 1973].
- O Modelo de [Merton, 1974] assume que o valor total da firma segue um processo geométrico do tipo Browniano.

Modelo de Merton

$$dV = \mu V dt + \sigma_V V dw \tag{1}$$

Modelo de Merton

$$dV = \mu V dt + \sigma_V V dw \qquad (1)$$

- Em que na equação 1 V é o valor total dos ativos da firma (variável aleatória), μ é o retorno esperado contínuo de V, σ_V é avolatilidade do valor da firma e dW é o processo padrão de Gauss-Wiener.

Modelo de Merton

- O Modelo de [Merton, 1974] utiliza-se do modelo de [Black and Scholes, 1973] de opções em que o valor do Patrimônio Líquido da firma segue o processo estipulado [Black and Scholes, 1973] para opções de compra (*call*).

Modelo de Merton

- O Modelo de [Merton, 1974] utiliza-se do modelo de [Black and Scholes, 1973] de opções em que o valor do Patrimônio Líquido da firma segue o processo estipulado [Black and Scholes, 1973] para opções de compra (*call*).
- Uma opção *call* sobre os ativos subjacentes tem as mesmas propriedades que um detentor de uma *call* tem, uma demanda sobre os ativos após alcançar o preço de exercício da opção.

Modelo de Merton

- Nesse caso, o preço de exercício da opção é igual ao valor de livro das obrigações da firma.

Modelo de Merton

- Nesse caso, o preço de exercício da opção é igual ao valor de livro das obrigações da firma.
- Se o valor dos ativos é insuficiente para cobrir as obrigações da firma, então os acionistas, portadores de uma opção *call*, não irão exercer sua opção e deixarão a firma aos seus credores.

Modelo de Merton

$$E = V\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}F\mathcal{N}(d_2) \tag{2}$$

Modelo de Merton

$$E = V\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}F\mathcal{N}(d_2) \tag{2}$$

- No qual E é o valor de mercado do Patrimônio Líquido da firma (ou Fluxo de Caixa Livre do Acionista), F é o valor de face dos títulos da dívida, r é taxa de juros livre de risco e $\mathcal{N}(.)$ é a distribuição normal padronizada acumulada. Com isso d_1 é dado por:

Modelo de Merton

$$E = V\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}F\mathcal{N}(d_2) \tag{2}$$

- No qual E é o valor de mercado do Patrimônio Líquido da firma (ou Fluxo de Caixa Livre do Acionista), F é o valor de face dos títulos da dívida, r é taxa de juros livre de risco e $\mathcal{N}(.)$ é a distribuição normal padronizada acumulada. Com isso d_1 é dado por:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{V}{F}) + (r + 0.5\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \tag{3}$$

Modelo de Merton

$$E = V\mathcal{N}(d_1) - e^{-rT}F\mathcal{N}(d_2) \tag{2}$$

- No qual E é o valor de mercado do Patrimônio Líquido da firma (ou Fluxo de Caixa Livre do Acionista), F é o valor de face dos títulos da dívida, r é taxa de juros livre de risco e $\mathcal{N}(.)$ é a distribuição normal padronizada acumulada. Com isso d_1 é dado por:

$$d_1 = \frac{ln(\frac{V}{F}) + (r + 0.5\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \tag{3}$$

e d_2 é simplesmente $d_1 - \sigma_V\sqrt{T}$.

Modelo de Merton

Aplicando-se o Lema de Itô no processo dinâmico de V e manipulando os termos tem-se a seguinte equação da variabilidade dos fluxos de caixa livres dos acionistas (σ_E) [Bharath and Shumway, 2008].

Modelo de Merton

Aplicando-se o Lema de Itô no processo dinâmico de V e manipulando os termos tem-se a seguinte equação da variabilidade dos fluxos de caixa livres dos acionistas (σ_E) [Bharath and Shumway, 2008].

$$\sigma_E = \left(\frac{V}{E}\right)\mathcal{N}(d_1)\sigma_V \tag{4}$$

Modelo de Merton

Aplicando-se o Lema de Itô no processo dinâmico de V e manipulando os termos tem-se a seguinte equação da variabilidade dos fluxos de caixa livres dos acionistas (σ_E) [Bharath and Shumway, 2008].

$$\sigma_E = \left(\frac{V}{E}\right) \mathcal{N}(d_1)\sigma_V \tag{4}$$

Basicamente o algoritmo trabalha com as equações 2 e 4 para encontrar os termos de valor do ativo V e volatilidade do valor do ativo σ_V. No artigo utilizou-se o método de Newton para solução das equações 2 e 4, este mesmo algoritmo foi utilizado por [Anginer and Demirguc-Kunt, 2014].

Modelo de Merton

Método de Newton

Definição

Dada uma função diferenciável f e uma aproximação inicial $x^{(0)}$ da raiz ξ de f, defina a sequência

$$x^{(k+1)} = x^k - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)}), \forall k = 0, 1, \ldots}$$

Espera-se que a sequência $x^{(k)}$ convirja para raíz de ξ!

Modelo de Merton

Método de Newton

Theorem (Teorema)

Seja f *uma função contínua com derivadas de primeira e segunda ordem* $f^{'}$ *e* $f^{''}$ *contínuas em intervalo* I *que contém a raíz* ξ *de* f. *Se* $f^{'}(\xi) \neq 0$ *então existe um subintervalo* $^{-}I \subseteq I$, *que contém* ξ, *tal que a sequência* $\{x^{(k)}\}$ *gerada pelo método de Newton converge pelo menos quadraticamente para* ξ $\forall x^{(0)} \in^{-} I$.

Modelo de Merton

- Uma vez encontrada a solução numérica das equações 2 e 4 para valores de V e σ_V a distância de *default* é medida da seguinte maneira:

Modelo de Merton

- Uma vez encontrada a solução numérica das equações 2 e 4 para valores de V e σ_V a distância de *default* é medida da seguinte maneira:

$$DD = \frac{ln\left(\frac{V}{F}\right) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \tag{5}$$

Modelo de Merton

$$\pi_{Merton} = \mathcal{N}(-DD) \tag{6}$$

Modelo de Merton

$$\pi_{Merton} = \mathcal{N}(-DD) \quad (6)$$

- A medida de probabilidade de *default* de [Merton, 1974] é simplesmente a função de probabilidade da normal de menos a distância de *default* Equação 5.

Modelo KMV

- O modelo KMV (Kealhofer, McQuown e Vasicek) é calculado a partir dos dados de valor do ativo V e volatilidade do valor do ativo σ_V oriundos da iteração entre as equações 2 e 5.

Modelo KMV

- A distância do *default* proveniente do modelo KMV é dada pela seguinte relação:

Modelo KMV

- A distância do *default* proveniente do modelo KMV é dada pela seguinte relação:

$$DD_{KMVit} = \frac{(V_{it} - PT_{it})}{(V_{it} \cdot \sigma_{Vit})}$$

Modelo KMV

- A distância do *default* proveniente do modelo KMV é dada pela seguinte relação:

$$DD_{KMV\,it} = \frac{(V_{it} - PT_{it})}{(V_{it} \cdot \sigma_{V\,it})} \tag{7}$$

- Em que V_{it} representa o valor de mercado do ativo i no período t, $\sigma_{V\,it}$ a volatilidade do valor do ativo i no período t, e PT_{it} é o passivo total do ativo i no período t. Conforme indica-se pela Equação 7, quanto maior for o DD_{kmvit} maior será a distância para o *default* do banco i no período t.

Modelo KMV

- A probabilidade de *default* do modelo KMV será:

Modelo KMV

- A probabilidade de *default* do modelo KMV será:

$$\pi_{kmv} = \mathcal{N}(-DD_{KMV}) \quad (8)$$

- A medida de *default* do KMV será a função de probabilidade da normal de menos a distância de *default*, assim como no modelo de [Merton, 1974].

Modelo Z-score

- Outra medida de dimensionamento de *default* é o indicador Z-score similar ao de [Lown et al., 2000] e [Tabak et al., 2013].

Modelo Z-score

- Outra medida de dimensionamento de *default* é o indicador Z-score similar ao de [Lown et al., 2000] e [Tabak et al., 2013].

$$Z - score_{it} = \frac{ROA_{it} + EQUAS_{it}}{\sigma_{ROAit}}$$

Modelo Z-score

- Outra medida de dimensionamento de *default* é o indicador Z-score similar ao de [Lown et al., 2000] e [Tabak et al., 2013].

$$Z - score_{it} = \frac{ROA_{it} + EQUAS_{it}}{\sigma_{ROAit}} \tag{9}$$

- Em que $EQUAS = \left(\frac{E_{it} - E_{it-1}}{AT_{it} - AT_{it-1}}\right)$. Nesse modelo E_{it} representa o Patrimônio Líquido do banco i no período t, E_{it-1} representa o Patrimônio Líquido do banco i no período $t-1$, A_{it} representa o Ativo Total para o banco i no período t e A_{it-1} representa o Ativo Total para o banco i no período $t-1$.

Modelo Z-score

- O parâmetro ROA_{it} é expresso como a seguinte relação:

Modelo Z-score

- O parâmetro ROA_{it} é expresso como a seguinte relação:

$$ROA_{it} = \frac{2\pi_{it}}{(AT_{it} - AT_{it-1})} \tag{10}$$

- ROA_{it} é o retorno sobre os ativos no período t para o banco i e σ_{ROAit} é o desvio-padrão do ROA do banco i no período t.

Modelo Z-score

- Conforme a fórmula indica, quanto maior for o valor de Z-score menor será a probabilidade de falência do banco i. Para [Tabak et al., 2013] o indicador Z-score é uma medida de risco aceita pela literatura. A medida do Z-score afere o número de desvios-padrão do ROA que deve decrescer de um banco para que o banco se torne insolvente, o que pode ser interpretado como o inverso da probabilidade de insolvência [Tabak et al., 2013].

Modelo de Merton

Aplicação em R

```
# Script Merton Model

# read the bank data
bank_panel_2000<- read.csv2("D:/PPGA/Doutorado_Financas/Tese - Financas
    Bancarias/Dados - Blooberg/Script e Base de Dados/new_bank_panel_2000_v11.
    csv", stringsAsFactors=FALSE, sep = ";")
```

Modelos de Default

Aplicação em R

```
# new start point - with cumulative quarter return for mu

 DD_base_start_cum<- DD_base[which(DD_base$sd != 0),]
     base_merton_start_cum<- DD_base_start_cum[,which(colnames(DD_base_start_cum)
            %in%c("acao", "tempo", "quarter", "year")) == TRUE)]
     base_merton_start_cum$valor_ativo_s_cum<- NA
     base_merton_start_cum$vol_impl_ativo_s_cum<- NA
     base_merton_start_cum$DD_merton_s_cum<- NA
     base_merton_start_cum$p_merton_s_cum<- NA
     pb <- txtProgressBar(min = 0, max = nrow(base_merton_start_cum), style = 3)
     index <- 1
```

Modelos de Default

Aplicação em R

```
for (i in 1:nrow(DD_base_start))
    { D1<- DD_base_start_cum$passivo_total[i]
      t<- DD_base_start_cum$t[i]
      R<- DD_base_start_cum$t_bill[i]
      Sigmas<- DD_base_start_cum$sd[i]
      SO1<- DD_base_start_cum$cap_mercado[i]

      fnewton <- function(x){
        y <- numeric(2)
        d1 <- (log(x[1]/D1)+(R+0.5*(x[2]^2))*t)/(x[2]*sqrt(t))
        d2 <- d1-x[2]*sqrt(t)
        y[1] <- SO1 - (x[1]*pnorm(d1) - (exp(-R*t))*D1*pnorm(d2))
        y[2] <- sigmaS*SO1 - pnorm(d1)*x[2]*d1
        y }
```

Modelos de Default

Aplicação em R

```
xstart <- c(DD_base_start_cum$cap_mercado[i] + DD_base_start_cum$passivo_total[
    i] , DD_base_start_cum$sd[i]*((DD_base_start_cum$cap_mercado[i] + DD_base_
    start_cum$passivo_total[i])))
    var_temp_merton<- nleqslv(xstart, fnewton, control=list(btol=.01), method=
        "Newton")
    base_merton_start_cum$valor_ativo_s_cum[i]<- var_temp_merton$fvec[1]
    base_merton_start_cum$vol_impl_ativo_s_cum[i]<- var_temp_merton$fvec[2]
```

Modelos de Default

Aplicação em R

```
# DD
      DD<- (log(base_merton_start_cum$valor_ativo_s_cum[i]/D1)+(DD_base_start_cum$retorno_tri[i]-(0.5*(base_merton_start_cum$vol_impl_ativo_s_cum[i]^2)))*t)/base_merton_start_cum$vol_impl_ativo_s_cum[i]*sqrt(t)
      base_merton_start_cum$DD_merton_s_cum[i]<- DD
# p_merton
      P_Merton_s_cum<- pnorm(- base_merton_start_cum$DD_merton_s_cum[i])
      base_merton_start_cum$p_merton_s_cum[i]<- P_Merton_s_cum
      index <-index+ 1
      setTxtProgressBar(pb, index)
    }
    close(pb)
```

Modelos de Default

Aplicação em R

```
# clean the base_merton
    base_merton_start_cum[is.na(base_merton_start_cum)] <- NA
    base_merton_start_cum$DD_merton_s_cum[is.infinite(base_merton_start_cum$DD_
         merton_s_cum)]<- NA

   # write the final merton base
    write.csv2(base_merton_start, "C:/Users/JoaoGabriel/Desktop/PPGA/Doutorado_
         Financas/Tese - Financas Bancarias/Dados - Blooberg/Script e Base de
         Dados/base_merton_start_cum.csv", sep = ";", row.names = FALSE)
```

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- A base utilizada foi a Bloomberg.

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- A base utilizada foi a Bloomberg.
- O período de análise contemplou o primeiro trimestre do ano de 2000 ao terceiro trimestre do ano de 2016 com periodicidade de 67 trimestres.

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- A base utilizada foi a Bloomberg.
- O período de análise contemplou o primeiro trimestre do ano de 2000 ao terceiro trimestre do ano de 2016 com periodicidade de 67 trimestres.
- Foram contemplados 2.325 bancos em 93 países, totalizando 155.775 observações não balanceadas.

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- A base utilizada foi a Bloomberg.
- O período de análise contemplou o primeiro trimestre do ano de 2000 ao terceiro trimestre do ano de 2016 com periodicidade de 67 trimestres.
- Foram contemplados 2.325 bancos em 93 países, totalizando 155.775 observações não balanceadas.
- Os dados foram extraídos dos Balanços de Pagamentos, em segundo plano dos Demonstrativos de Resultado de Exercício, e por fim, do histórico de preços dos ativos dos bancos mundiais listados em bolsas.

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- Os parâmetros do modelo de Merton seguiram a aplicação de [Bharath and Shumway, 2008] e [Anginer and Demirguc-Kunt, 2014].

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

- Os parâmetros do modelo de Merton seguiram a aplicação de [Bharath and Shumway, 2008] e [Anginer and Demirguc-Kunt, 2014].
  - i $\sigma_E =$ é a volatilidade anualizada dos retornos dos ativos dos bancos.
  - ii $r =$ utilizou-se da variação da taxa constante do T - Bill do período de 2000-2016 trimestral (Taxa Livre de Risco).
  - iii $E =$ é o valor de mercado de cada banco, utilizou-se o preço de fechamento das ações e a quantidade de ações daquele banco.
  - iv $F =$ utilizou-se dos Passivos Totais (*current liabilities e long term liabilities*).
  - v $T =$ considerou-se o período como unitário, 1 trimestre, assim como foi feito por [Anginer and Demirguc-Kunt, 2014].

Modelos de Default

Aplicação em Bancos

Tabela: Análise Descritiva dos Insumos de π_{Merton} e π_{kmv}

	$r_{i.tri}$	$cap_{merc.it}$	PT_{it}	$T_{bill.it}$	$sd_{i.med.day(tri)}$
Min	$-4,3820$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0056$	$1,600e-07$
1^o $Quartil$	$-0,081587$	70	649	$0,0074$	$1,211e-02$
$Mediana$	$0,0042$	316	2.243	$0,0101$	$2,023e-02$
$Média$	$-0,0067$	12.264	43.255	$0,0098$	$2,066e-02$
3^o $Quartil$	$0,0878$	1.685	10.683	$0,0116$	$2,75e-02$
Max	$2,5451$	$11.879.800$	$3.538.000$	$0,0159$	$1,427e-01$

Nota. Todos os retornos foram mensurados de forma contínua, ou seja, foram calculados pela expressão $log(r_{it}) - log(r_{it-1})$. Os valores monetários estão em milhões de dólares.

Modelos de Default
Aplicação em Bancos

Tabela: Análise Descritiva dos Insumos de $Z - score$

	ROA_{it}	$sd_{ROA\,it}$	ROE_{it}	$EQAS_{it}$
Min	$-136,80$	$4,85350e-06$	$-230,50$	$-19,90$
1° $Quartil$	$9,6846e-04$	$0,0001$	$0,01$	$0,07$
$Mediana$	$0,0002$	$0,0002$	$0,02$	$0,09$
$Média$	$0,0005$	$0,03$	$0,02$	$0,10$
3° $Quartil$	$0,0003$	$0,0004$	$0,04$	$0,12$
Max	$70,61$	$21,09$	$148,21$	$1,00$

Nota. Os valores monetários estão em milhões de dólares.

Modelos de Default

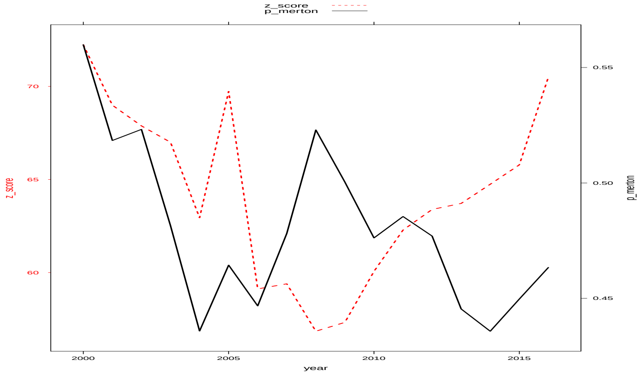
Aplicação em Bancos

Tabela: Análise Descritiva dos Modelos de Default

	π_{Merton}	π_{Kmv}	$Z-score$
Min	$0,00$	$0,00$	$-135,15$
1° $Quartil$	$0,00$	$0,00$	$24,23$
$Mediana$	$0,00$	$1,00$	$48,91$
$Média$	$0,48$	$0,51$	$63,41$
3° $Quartil$	$1,00$	$1,00$	$84,18$
Max	$1,00$	$1,00$	$16.889,18$

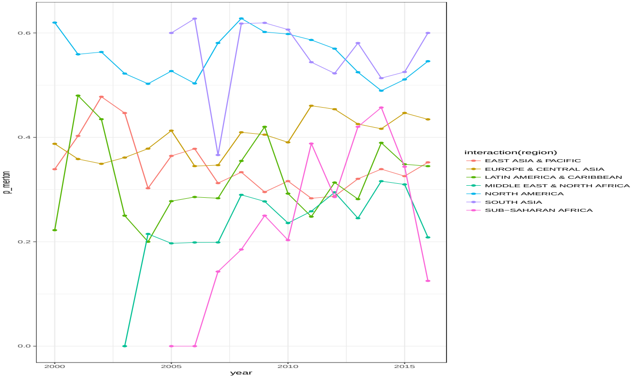
Modelos de Default

Aplicação em Bancos



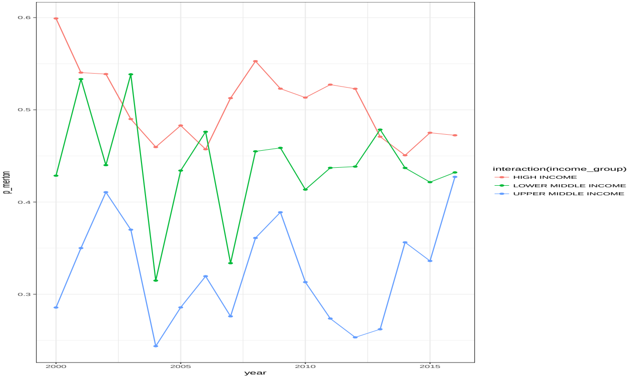
Modelos de Default

Aplicação em Bancos



Modelos de Default

Aplicação em Bancos



Estrutura da Oficina

Referências I

Anginer, D. and Demirguc-Kunt, A. (2014).
Has the global banking system become more fragile over time?
Journal of Financial Stability, 13:202–213.
19, 20, 21, 50, 51

Bharath, S. T. and Shumway, T. (2008).
Forecasting Default with the Merton Distance to Default Model.
The Review of Financial Studies, 21(3):1339–1369.
19, 20, 21, 50, 51

Black, F. and Scholes, M. (1973).
The pricing of options and corporate liabilities.
The Journal of Political Economy.
7, 8, 11, 12

Lown, C. S., Osler, C. L., Strahan, P. E., and Sufi, A. (2000).
The Changing Landscape of the Financial Services Industry : What Lies Ahead ?
FRBNY Economic Policy Review, (October):39–55.
34, 35, 36

Referências II

Merton, R. C. (1974).
On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates.
The Journal of Finance, 29:449–70.
7, 8, 11, 12, 26, 27, 32, 33

Tabak, B. M., Fazio, D. M., and Cajueiro, D. O. (2013).
Systemically important banks and financial stability: The case of Latin America.
Journal of Banking & Finance, 37:3855–3866.
34, 35, 36, 39