任老师问题回复

任老师，您好：

非常感谢您百忙之中的回信。您的回信我有几个地方不太理解，有可能是我在上个邮件中没有阐述清楚，或者是因为我初次接触高阶算法的缘故，所以我结合您的回复，再次请教一下。

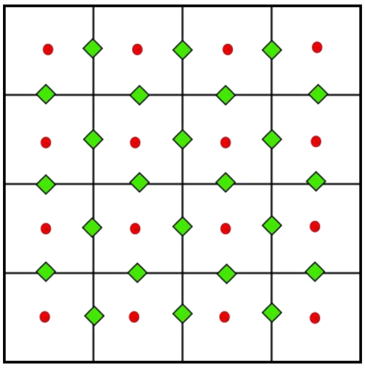

图 1 4x4 网格

首先继续以图 1 的 4x4 网格的计算域为例，红色的圆点表示单元中心的坐标，绿色的方块表示界面与单元中心连线交叉点的坐标。图 2 对红色圆点和绿色方块所代表的坐标做了具体的说明。

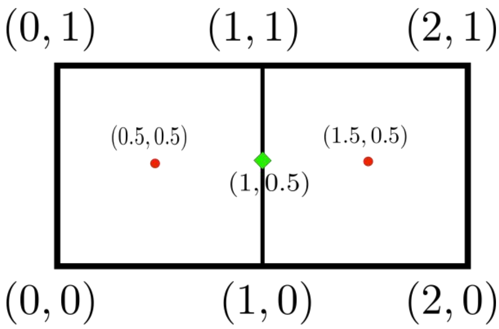

图 2 坐标说明（图中红色圆点表示单元中心的坐标，绿色方块表示界面和单元中心点连线的坐标）。

我们假设如图 1 所示计算域中的某一个物理量 u 具有以下分布

$$u(x,y)=1+x+2y+3x^2+4xy+5y^2 \quad (1)$$

如果我们用 $(x_{c,i},y_{c,i})$ 与 $(x_{f,j},y_{f,j})$ 分别表示图 1 所示红色圆点与绿色方块的坐标，其中 c

表示红色圆点，i 表示红色圆点的索引，f 表示绿色方块，j 表示绿色方块的索引。则我们可以由式（1）得到

$$u(x_{c,i},y_{c,i})=1+x_{c,i}+2y_{c,i}+3x_{c,i}{}^2+4x_{c,i}y_{c,i}+5y_{c,i}{}^2 \quad (2)$$

$$u(x_{f,j},y_{f,j})=1+x_{f,j}+2y_{f,j}+3x_{f,j}{}^2+4x_{f,j}y_{f,j}+5y_{f,j}{}^2 \quad (3)$$

其中 $u(x_{c,i},y_{c,i})$，与 $u(x_{f,j},y_{f,j})$ 分别表示红色圆点与绿色方块的精确值，然后我用 $u(x_{c,i},y_{c,i})$ 作为初始数据，在计算域内，用您所提出的 CLSFV 方法进行插值重构，并得到插值多项式

$$u_i(x，y)=u(x_{c,i},y_{c,i})+\sum_{l=1}^{DOF(k)}u_i^l\varphi_{l,i}(x，y) \quad (4)$$

然后利用式（4）计算得到界面绿色方块的数据

$$u_i(x_{f,j}，y_{f,j})=u(x_{c,i},y_{c,i})+\sum_{l=1}^{DOF(k)}u_i^l\varphi_{l,i}(x_{f,j}，y_{f,j}) \quad (5)$$

最后我统计了计算域内的绿色方块的误差

$$E_{L^2}=\sqrt{\frac{\sum(u_i(x_{f,j},y_{f,j})-u(x_{f,j},y_{f,j}))^2}{\sum u(x_{f,j},y_{f,j})^2}} \quad (6)$$

现在说一下您邮件中说到的问题：

第一，要达到三阶精度，界面积分要至少用两个高斯点做高斯积分。

我知道在求界面通量的时候需要至少两个点做高斯积分，现在我仅仅是想对比一下 $(x_{f,j},y_{f,j})$ 处的插值精度，也许要做高斯积分吗？我的理解是有了精确值 $u(x_{f,j},y_{f,j})$ 和插值多项式所得到的 $u_i(x_{f,j}，y_{f,j})$ 似乎可以直接衡量误差，难道这样做达不到三阶精度吗？道理是什么？

第二，衡量误差的公式有问题，你现在算的是中心点值和平均值的误差，这样即使用精确解，也只能达到二阶精度。如果用重构多项式的平均值和精确平均值的差来定义误差，有可能到高精度。

我上一个邮件对衡量误差的公式写的不太规范，我想衡量的是界面 $(x_{f,j},y_{f,j})$ 处的误差，而不是中心点处的值。不过您说的“用重构多项式的平均值和精确平均值的差来定义误差，有

可能到高精度”这句话给我了一点启发，我用$(x_{c,i}, y_{c,i})$处的精确值$u(x_{c,i}, y_{c,i})$来计算重构多项式，其实相当于把这个值当作了单元的平均值，而我算了下单元的平均值与$u(x_{c,i}, y_{c,i})$是不相同的，我用$u(x_{c,i}, y_{c,i})$当作平均值来进行重构，是不是从某种角度上说其实是改变了计算域的分布，计算域的分布与式（1）所描述的分布已经不相同了，所以无法得到三阶精度。我这个理解对不对？您说的是不是也是这个意思？

再次感谢您对我的帮助，祝您身体健康，万事如意。

祝

好

李季
单位：西北工业大学航空学院流体力学系

电话：17792092487

Email: leejearl@mail.nwpu.edu.cn