

Санкт-Петербургский Политехнический университет  
Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
**Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики**

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**

на тему

"Метод конечных объёмов для уравнений эллиптического типа"  
по дисциплине  
"Конечно-разностные и сеточные методы"

Выполнил студент гр. **3630102/60101**  
**Лансков.Н.В.**

Санкт-Петербург  
2020

# Содержание

<b>1 Список иллюстраций</b>	<b>2</b>
<b>2 Список таблиц</b>	<b>3</b>
<b>3 Постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>4 Метод конечных объёмов</b>	<b>4</b>
<b>5 Метод Якоби</b>	<b>7</b>
<b>6 Метод Зейделя</b>	<b>8</b>
<b>7 Метод SOR</b>	<b>8</b>
<b>8 Результаты</b>	<b>8</b>
8.1 Метод Якоби . . . . .	8
8.2 Метод Зейделя . . . . .	9
8.3 Метод SOR . . . . .	10
8.4 Сравнение методов . . . . .	13
<b>9 Выводы</b>	<b>14</b>
<b>10 Приложения</b>	<b>14</b>

# 1 Список иллюстраций

1	Иллюстрация рассматриваемого конечного объёма . . . . .	5
2	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций . . . . .	9
3	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций . . . . .	10
4	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации $\omega$ . . . . .	11
5	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации $\omega$ (приближение) . . . . .	11
6	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации $\omega$ (приближение 2) . . . . .	12
7	Сравнение зависимостей $\ z^k\ $ от числа итераций . . . . .	13

## **2 Список таблиц**

1 Сравнение методов . . . . .	13
-------------------------------	----

### 3 Постановка задачи

Будем решать задачу:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y) \\ 0 < \alpha < a, b < \beta; 0 < q_m < q; \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in [3, 3.4] \times [1, 1.4] = \Omega$$

В данной лабораторной исследуется задача со следующими параметрами:

$$\begin{cases} a(x, y) = x + y \\ b(x, y) = 1 + xy \\ q(x, y) = x^4 \\ g(x, y) = \cos(2x) \cdot e^{-3y} \\ f(x, y) = 3x\cos(2x)e^{-3y} + 4x\sin(2x)e^{-3y} - 9\cos(2x)e^{-3y}(xy + 1) + x^4\cos(2x)e^{-2y} + 4\cos(2x)e^{-3y}(x^2 + y^2) \\ \alpha = 3 \\ \beta = 5 \\ q_m = 80 \end{cases}$$

### 4 Метод конечных объёмов

Рассмотрим процесс нахождения коэффициентов по методу конечных объёмов.

Разобъём нашу область на конечные объёмы (с центрами во внутренних в узлах сетки). Тогда для каждой внутренней точки рассматриваем конечный объём  $\Omega_{ij}$ . Далее приведём вычисления в общем виде для такого конечного объёма.

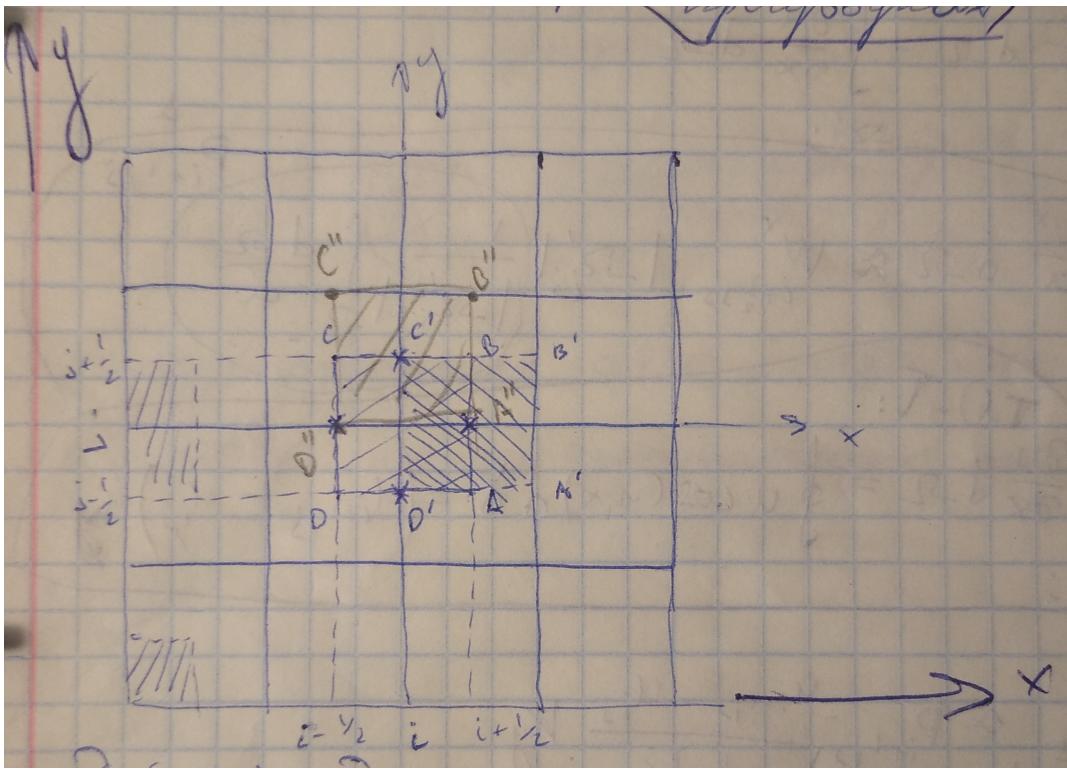


Рис. 1: Иллюстрация рассматриваемого конечного объёма

Проинтегрируем уравнение 1 по конечному объёму и домножим на -1:

$$\int_{\Omega_{ij}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega_{ij}} qu d\Omega = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \quad (1)$$

Подробнее рассмотрим первое слагаемое из левой части. Под интегралом стоит дивергенция, применяем формулу Остроградского-Гаусса и получаем следующее выражение:  $\oint_{\gamma_{ij}} \left[ a \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + b \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right] d\gamma$ . Выполняем замену переменных:

$$\left[ \omega^x = a \frac{\partial u}{\partial x}; \omega^y = b \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

и приближённо вычисляем интегралы по границе (отдельно для каждого из двух слагаемых под интегралом). Заметим, что, с учётом граничных нормалей, в первом интеграле останется только два слагаемых (по левой и правой границам конечного объёма  $\Omega_{ij}$ ), как, впрочем, и во втором (но уже по верхней и нижней границам). Таким образом, приходим к следующей формуле.

$$\oint_{\gamma_{ij}} \left[ a \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + b \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right] d\gamma = (w_{i+0.5,j}^x - w_{i-0.5,j}^x) h_y + (w_{i,j+0.5}^y - w_{i,j-0.5}^y) h_x \quad (3)$$

Где, в частности,  $w_{i+0.5,j}^x$  - значение  $w^x$  в средней точке соответствующего участка границы

С учётом замены (2), легко видеть, что выполнены следующие равенства:

$$\int_{\Omega'_{ij}} \frac{\omega^x}{a} d\Omega = \int_{\Omega'_{ij}} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \quad (4)$$

$$\int_{\Omega''_{ij}} \frac{\omega^y}{b} d\Omega = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega \quad (5)$$

В формулах (4), (5) -  $\Omega'_{ij}$  и  $\Omega''_{ij}$  это конечные объёмы, сдвинутые на половину шага в направлении оси Ох и Оу соответственно. Также, эти конечные объёмы изображены на рисунке (4). Рассмотрим подробнее (4). Применяя к правой части теорему О-Г., а левую часть преобразовав определённым образом, получаем уже конечно-разностное выражение.

$$(4) \iff \omega_{i+0.5,j}^x \cdot \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{a} = (v_{i+1,j} - v_{ij})h_y$$

Отсюда легко можно найти выражение для  $\omega_{i+0.5,j}^x$ , посчитав численно интеграл. Точно также рассматриваем (5). Обозначив

$$p_{i+0.5,j} = \frac{h_x h_y}{\int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{a}}; \quad q_{i,j+0.5} = \frac{h_x h_y}{\int_{\Omega''_{ij}} \frac{d\Omega}{b}}$$

получаем уравнение(для  $p_{i-0.5,j}$  и  $q_{i,j-0.5}$  выражения аналогичны, изменятся только конечные объёмы, т.е. будут "сдвиги" в другом направлении):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x^2} (p_{i+0.5,j} (v_{i+1,j} - v_{ij}) - p_{ij} (v_{i,j} - v_{i-1,j})) + \frac{1}{h_y^2} (q_{i,j+0.5} (v_{i,j+1} - v_{ij}) - q_{ij} (v_{i,j} - v_{i,j-1})) + \\ + \frac{\rho_{ij}}{h_x h_y} v_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_x h_y} \end{aligned} \quad (6)$$

Сгруппировав слагаемые при соответствующих узловых точках, получим:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{p_{i-0.5,j} v_{i-1,j} + p_{i+0.5,j} v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} v_{i,j+1} + q_{i,j-0.5} v_{i,j-1}}{h_y^2} \right) + \\ + \left( \frac{p_{i+0.5,j} + p_{i-0.5,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} + q_{i,j-0.5}}{h_y^2} + \frac{\rho_{ij}}{h_x h_y} \right) v_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_x h_y} \end{aligned} \quad (7)$$

Все вышеперечисленные выражения я привёл в общем виде для упрощения воспри-

ятия. Теперь рассмотрим, чему равны коэффициенты в контексте конкретной задачи.

$$\begin{cases} p_{i+0.5,j} = \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{x+y} & p_{i-0.5,j} = \int_{\Omega'_{i-1,j}} \frac{d\Omega}{x+y} \\ q_{i,j+0.5} = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{d\Omega}{1+xy} & q_{i,j-0.5} = \int_{\Omega''_{i,j-1}} \frac{d\Omega}{1+xy} \\ \rho_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} x^4 d\Omega \\ g_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Замечание о численном вычислении интегралов. Я вычисляю интегралы по следующей формуле (Формула Гаусса для двумерного случая):

$$\int_{[x_0;x_1] \times [y_0;y_1]} \phi(x,y) d\Omega = \frac{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}{4} \sum_{i=1}^4 \phi \left( x_0 + \frac{(\xi_i + 1)(x_1 - x_0)}{2}, y_0 + \frac{(\eta_i + 1)(y_1 - y_0)}{2} \right) \quad (9)$$

Где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  представляют все пары вида  $\left( \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \right)$

Тут используется отображение исходного прямоугольника на базисный. Для этого используются следующие формулы:

$$\begin{cases} \xi(x,y) = 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1 \\ \eta(x,y) = 2 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} - 1 \end{cases} \quad (10)$$

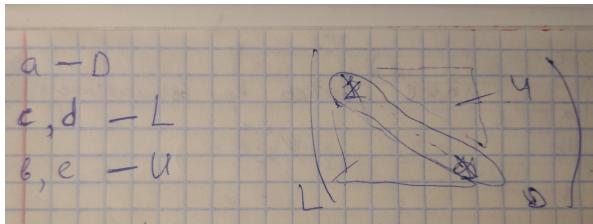
Подробнее про то, как получить эту формулу можно посмотреть, например, тут : [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%BA\\_%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%BD%D1%8B%D1%85\\_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%BA_%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB)

## 5 Метод Якоби

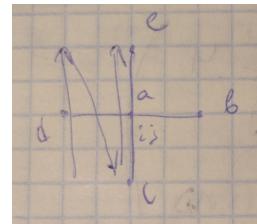
Приведём общую схему метода Якоби в матричном виде. В методе Якоби в качестве предобуславлевателя берём диагональную матрицу  $D$ :

$$v^{k+1} = D^{-1}(g - (L + U)v^k) \quad (11)$$

Ниже привожу несколько иллюстраций для пояснений.



a) Матричный вид коэффициентов



b) Порядок обхода

Будем применять итерационную процедуру метода Якоби в следующем виде.

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^k - C_{i,j}v_{i,j-1}^k - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k) \quad (12)$$

## 6 Метод Зейделя

Будем применять итерационную процедуру метода Зейделя в следующем виде:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k) \quad (13)$$

Заметим, что соответствующие значения  $v$  при коэффициентах  $C$  и  $D$  на момент расчёта  $v_{i,j}$  уже известны.

## 7 Метод SOR

В случае метода Зейделя, предобуславливатель имеет вид:  $B := L + D$ . В матричном виде выражение для  $k + 1$  го приближения записывается так:

$$v^{k+1} = D^{-1}(g - Uv^k - Lv^{k+1}) \quad (14)$$

Будем применять итерационную процедуру метода SOR в следующем виде:

$$\begin{cases} v_{Z,i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{Z,i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{Z,i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{SOR,i,j+1}^k - B_{i,j}v_{SOR,i+1,j}^k) \\ v_{SOR}^{k+1} = v_{SOR}^k + \omega(v_Z^{k+1} - v_{SOR}^k) \end{cases} \quad (15)$$

Где  $v_Z$  - вычисляется по методу Зейделя

## 8 Результаты

### 8.1 Метод Якоби

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём чило разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{2N^2}$ .

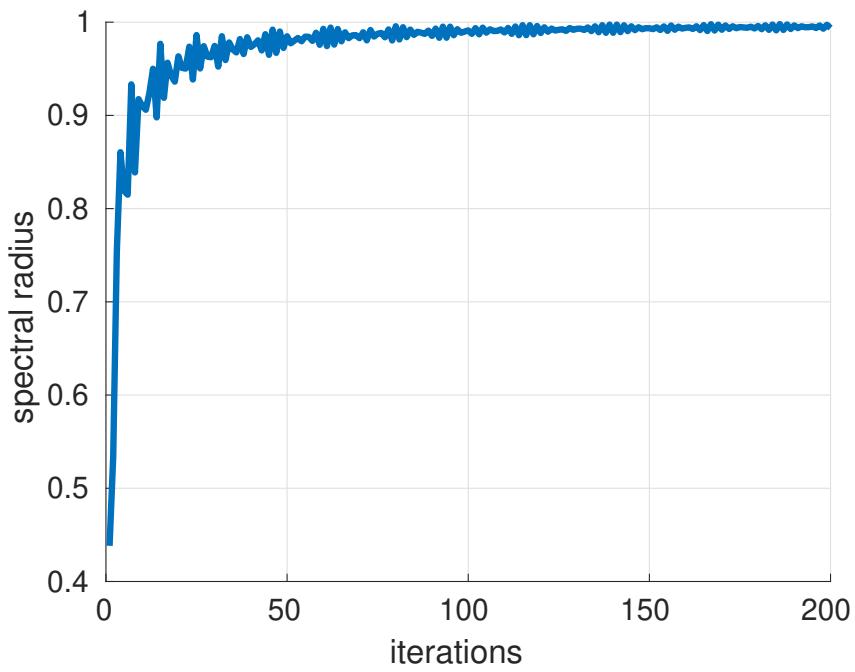


Рис. 2: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом  $\rho_J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99945 \approx 0.99950$ , что согласуется с теоретическим значением.

## 8.2 Метод Зейделя

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём чило разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{N^2}$ .

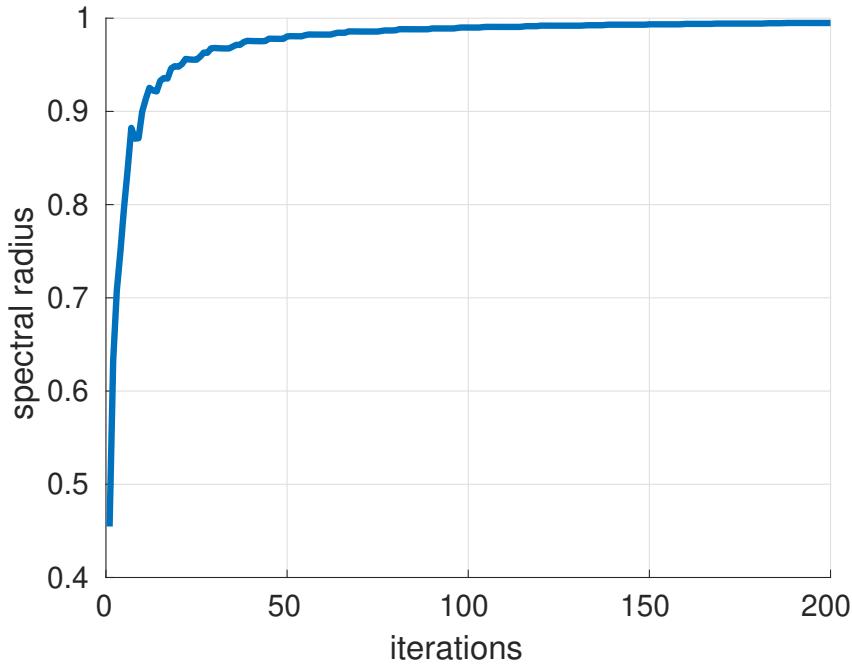


Рис. 3: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом  $\rho_Z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99855 \approx 0.9990 = \rho_J^2$ , что согласуется с теоретическим значением.

### 8.3 Метод SOR

Для достижения точности  $\varepsilon = 10^{-3}$  возьмём число разбиений равным  $N = 100$  и  $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-7}\pi}{N}$ .

#### Примечание к рисунку (4):

В ходе исследований метода SOR, я пытался получить графическую оценку параметра релаксации, максимально близкую к теоретическому значению. Если строить график, используя число разбиений из предыдущих пунктов (а именно  $N = 100$ ), то я получал значение  $\omega_{opt} \approx 1.5$ . Тогда я решил немного поэкспериментировать со значениями числа разбиений. И при  $N = 28$  мне удалось достичь приведённых ниже значений. То есть, рисунок (4) построен для  $N = 28$ . И тогда получается, что методу Зейделя для такого числа разбиений потребуется  $\approx 1000$  итераций для достижения условия выхода из итерационного процесса.

А в таблице (1) я привожу число итераций для всех методов при  $N = 100$ , так что никаких противоречий в итоге не возникает.

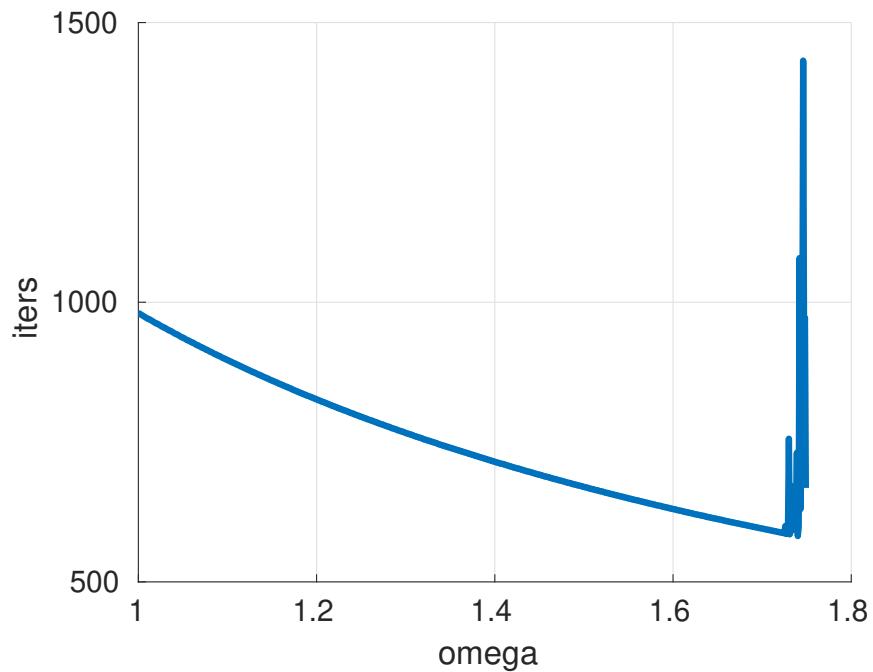


Рис. 4: Зависимость числа итераций  $n(\varepsilon)$  от параметра релаксации  $\omega$

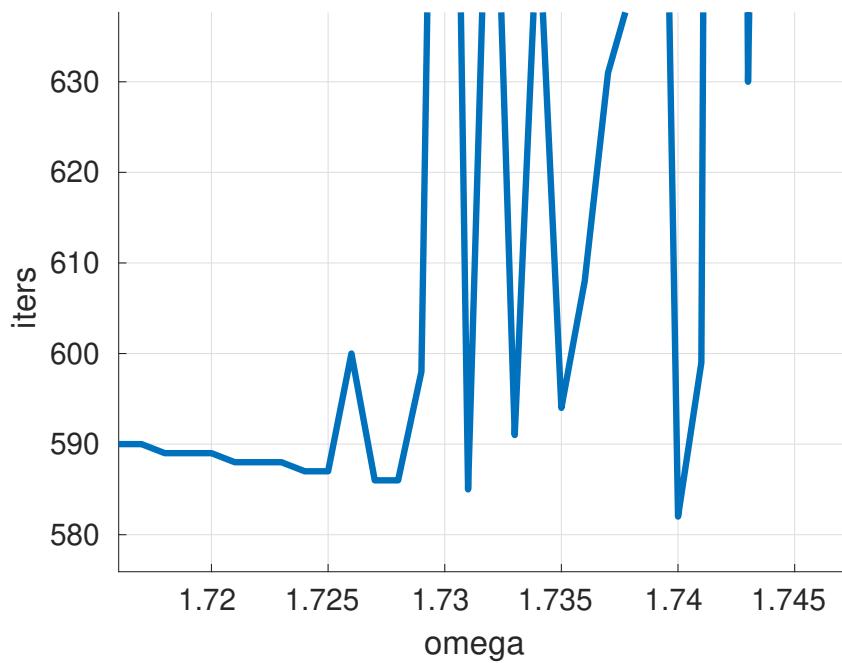


Рис. 5: Зависимость числа итераций  $n(\varepsilon)$  от параметра релаксации  $\omega$  (приближение)

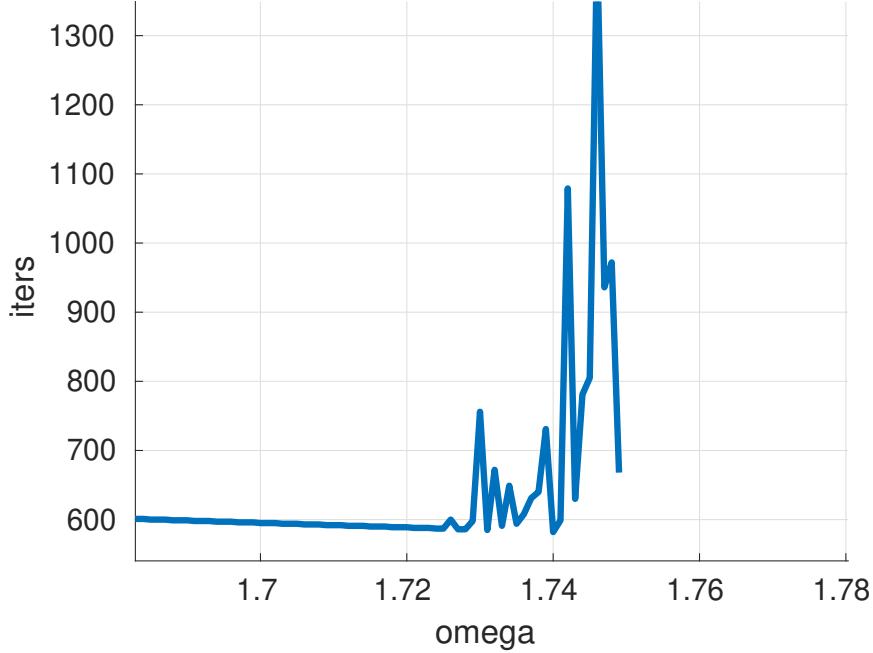


Рис. 6: Зависимость числа итераций  $n(\varepsilon)$  от параметра релаксации  $\omega$  (приближение 2)

По графику (5) видно, что оптимальным параметром релаксации будет  $\omega = 1.725$ . Однако, из теории следует, что оптимальный параметр должен равняться:  $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_Z}} \approx 1.9387$ . Я пытался добиться большей точности от графического метода нахождения  $\omega_{opt}$  изменения  $N$  и  $\varepsilon_{iter}$ , но мои попытки не принесли результатов, так как схема начинала терять устойчивость. Я думаю, что всё дело в выбранной мной конкретной задаче, и можно было бы теоретически подобрать исходную задачу точнее, чтобы получить лучший результат. Я же буду далее использовать полученное мною значение  $\omega_{opt} = 1.725$ .

Также привожу рисунок (6) для иллюстрации неустойчивости. Я уменьшил шаг дискретизации до  $\frac{1}{1000}$ , и при таком шаге уже можно заметить определённые моменты. Видно, что с каждым шагом точки графика совершают колебания с растущей амплитудой. То есть, имеем не излом, а некоторые колебания графика, если бы их не было, график начал бы монотонно возрастать. Подобное поведение также наблюдается на рисунке (2)

## 8.4 Сравнение методов

Таблица 1: Сравнение методов

Метод	$\rho$	$\varepsilon_{iter}$	$n(\varepsilon)$
Jacobi	0.99945	4.934802e-08	17712
Zeidel	0.99855	9.869604e-08	8858
SOR	0.9744	1.121997e-08	445

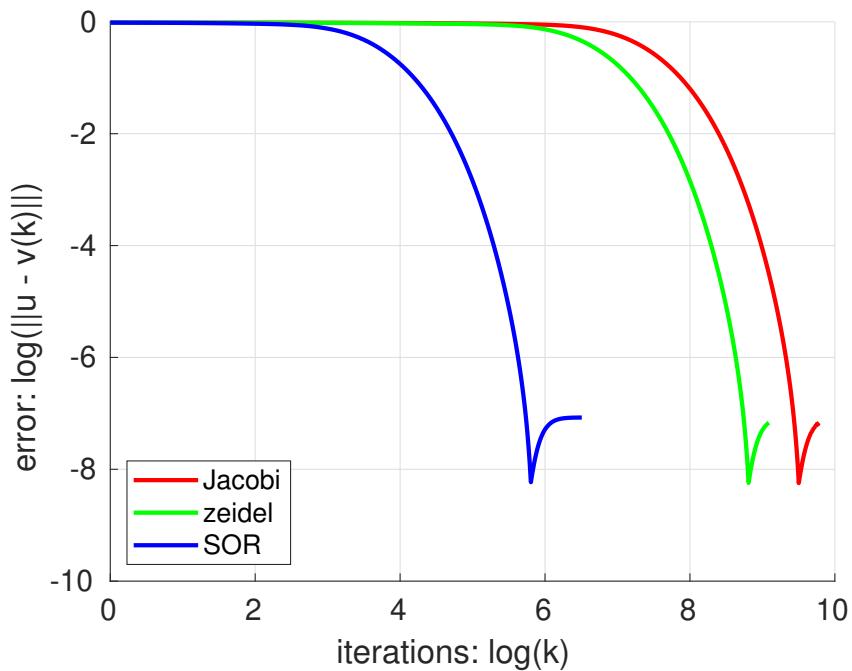


Рис. 7: Сравнение зависимостей  $\|z^k\|$  от числа итераций

## 9 Выводы

В результате работы были рассмотрены 3 итерационных метода(Якоби, Зейделя, SOR) решения СЛАУ, построенной по МКО. Я получил полное соответствие практических и теоретических оценок скоростей сходимости методов, спектральных радиусов и соотношения числа итераций, за исключением  $\omega_{opt}$ . Как уже выше упоминалось, я считаю что это связано с конкретной задачей.

## 10 Приложения

Исходные файлы лабораторной работы можно найти тут:

[https://github.com/LanskovNV/numerical/tree/master/net\\_methods/lab\\_3](https://github.com/LanskovNV/numerical/tree/master/net_methods/lab_3)