

Санкт-Петербургский Политехнический университет
Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

на тему

"Метод конечных объёмов для уравнений эллиптического типа"
по дисциплине
"Конечно-разностные и сеточные методы"

Выполнил студент гр. **3630102/60101**
Лансков.Н.В.

Санкт-Петербург
2020

Содержание

1 Список иллюстраций	2
2 Список таблиц	3
3 Постановка задачи	4
4 Метод конечных объёмов	4
5 Метод Якоби	7
6 Метод Зейделя	8
7 Метод SOR	8
8 Результаты	8
8.1 Метод Якоби	8
8.2 Метод Зейделя	9
8.3 Метод SOR	10
8.4 Сравнение методов	13
9 Выводы	14
10 Приложения	14

1 Список иллюстраций

1	Иллюстрация рассматриваемого конечного объёма	5
2	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций	9
3	Зависимость спектрального радиуса от числа итераций	10
4	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω	11
5	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω (приближение)	11
6	Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω (приближение 2)	12
7	Сравнение зависимостей $\ z^k\ $ от числа итераций	13

2 Список таблиц

1 Сравнение методов	13
-------------------------------	----

3 Постановка задачи

Будем решать задачу:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y)u = f(x, y) \\ 0 < \alpha < a, b < \beta; 0 < q_m < q; \\ u|_{\partial\Omega} = g(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in [3, 3.4] \times [1, 1.4] = \Omega$$

В данной лабораторной исследуется задача со следующими параметрами:

$$\begin{cases} a(x, y) = x + y \\ b(x, y) = 1 + xy \\ q(x, y) = x^4 \\ g(x, y) = \cos(2x) \cdot e^{-3y} \\ f(x, y) = 3x\cos(2x)e^{-3y} + 4x\sin(2x)e^{-3y} - 9\cos(2x)e^{-3y}(xy + 1) + x^4\cos(2x)e^{-2y} + 4\cos(2x)e^{-3y}(x^2 + y^2) \\ \alpha = 3 \\ \beta = 5 \\ q_m = 80 \end{cases}$$

4 Метод конечных объёмов

Рассмотрим процесс нахождения коэффициентов по методу конечных объёмов.

Разобъём нашу область на конечные объёмы (с центрами во внутренних в узлах сетки). Тогда для каждой внутренней точки рассматриваем конечный объём Ω_{ij} . Далее приведём вычисления в общем виде для такого конечного объёма.

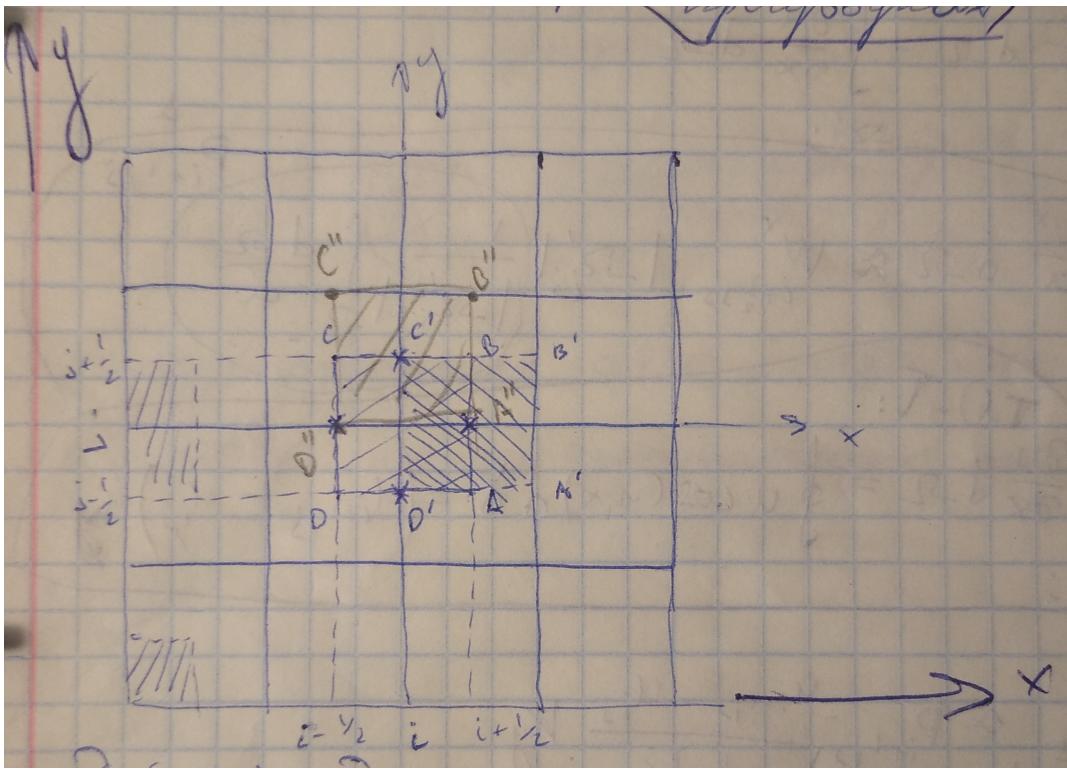


Рис. 1: Иллюстрация рассматриваемого конечного объёма

Проинтегрируем уравнение 1 по конечному объёму и домножим на -1:

$$\int_{\Omega_{ij}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega_{ij}} qu d\Omega = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \quad (1)$$

Подробнее рассмотрим первое слагаемое из левой части. Под интегралом стоит дивергенция, применяем формулу Остроградского-Гаусса и получаем следующее выражение: $\oint_{\gamma_{ij}} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + b \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right] d\gamma$. Выполняем замену переменных:

$$\left[\omega^x = a \frac{\partial u}{\partial x}; \omega^y = b \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2)$$

и приближённо вычисляем интегралы по границе (отдельно для каждого из двух слагаемых под интегралом). Заметим, что, с учётом граничных нормалей, в первом интеграле останется только два слагаемых (по левой и правой границам конечного объёма Ω_{ij}), как, впрочем, и во втором (но уже по верхней и нижней границам). Таким образом, приходим к следующей формуле.

$$\oint_{\gamma_{ij}} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + b \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right] d\gamma = (w_{i+0.5,j}^x - w_{i-0.5,j}^x) h_y + (w_{i,j+0.5}^y - w_{i,j-0.5}^y) h_x \quad (3)$$

Где, в частности, $w_{i+0.5,j}^x$ - значение w^x в средней точке соответствующего участка границы

С учётом замены (2), легко видеть, что выполнены следующие равенства:

$$\int_{\Omega'_{ij}} \frac{\omega^x}{a} d\Omega = \int_{\Omega'_{ij}} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \quad (4)$$

$$\int_{\Omega''_{ij}} \frac{\omega^y}{b} d\Omega = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega \quad (5)$$

В формулах (4), (5) - Ω'_{ij} и Ω''_{ij} это конечные объёмы, сдвинутые на половину шага в направлении оси Ох и Оу соответственно. Также, эти конечные объёмы изображены на рисунке (4). Рассмотрим подробнее (4). Применяя к правой части теорему О-Г., а левую часть преобразовав определённым образом, получаем уже конечно-разностное выражение.

$$(4) \iff \omega_{i+0.5,j}^x \cdot \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{a} = (v_{i+1,j} - v_{ij})h_y$$

Отсюда легко можно найти выражение для $\omega_{i+0.5,j}^x$, посчитав численно интеграл. Точно также рассматриваем (5). Обозначив

$$p_{i+0.5,j} = \frac{h_x h_y}{\int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{a}}; \quad q_{i,j+0.5} = \frac{h_x h_y}{\int_{\Omega''_{ij}} \frac{d\Omega}{b}}$$

получаем уравнение(для $p_{i-0.5,j}$ и $q_{i,j-0.5}$ выражения аналогичны, изменятся только конечные объёмы, т.е. будут "сдвиги" в другом направлении):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x^2} (p_{i+0.5,j} (v_{i+1,j} - v_{ij}) - p_{ij} (v_{i,j} - v_{i-1,j})) + \frac{1}{h_y^2} (q_{i,j+0.5} (v_{i,j+1} - v_{ij}) - q_{ij} (v_{i,j} - v_{i,j-1})) + \\ + \frac{\rho_{ij}}{h_x h_y} v_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_x h_y} \end{aligned} \quad (6)$$

Сгруппировав слагаемые при соответствующих узловых точках, получим:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{p_{i-0.5,j} v_{i-1,j} + p_{i+0.5,j} v_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} v_{i,j+1} + q_{i,j-0.5} v_{i,j-1}}{h_y^2} \right) + \\ + \left(\frac{p_{i+0.5,j} + p_{i-0.5,j}}{h_x^2} + \frac{q_{i,j+0.5} + q_{i,j-0.5}}{h_y^2} + \frac{\rho_{ij}}{h_x h_y} \right) v_{ij} = \frac{g_{ij}}{h_x h_y} \end{aligned} \quad (7)$$

Все вышеперечисленные выражения я привёл в общем виде для упрощения воспри-

ятия. Теперь рассмотрим, чему равны коэффициенты в контексте конкретной задачи.

$$\begin{cases} p_{i+0.5,j} = \int_{\Omega'_{ij}} \frac{d\Omega}{x+y} & p_{i-0.5,j} = \int_{\Omega'_{i-1,j}} \frac{d\Omega}{x+y} \\ q_{i,j+0.5} = \int_{\Omega''_{ij}} \frac{d\Omega}{1+xy} & q_{i,j-0.5} = \int_{\Omega''_{i,j-1}} \frac{d\Omega}{1+xy} \\ \rho_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} x^4 d\Omega \\ g_{ij} = \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Замечание о численном вычислении интегралов. Я вычисляю интегралы по следующей формуле (Формула Гаусса для двумерного случая):

$$\int_{[x_0;x_1] \times [y_0;y_1]} \phi(x,y) d\Omega = \frac{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}{4} \sum_{i=1}^4 \phi \left(x_0 + \frac{(\xi_i + 1)(x_1 - x_0)}{2}, y_0 + \frac{(\eta_i + 1)(y_1 - y_0)}{2} \right) \quad (9)$$

Где ξ_i и η_i представляют все пары вида $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \right)$

Тут используется отображение исходного прямоугольника на базисный. Для этого используются следующие формулы:

$$\begin{cases} \xi(x,y) = 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} - 1 \\ \eta(x,y) = 2 \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} - 1 \end{cases} \quad (10)$$

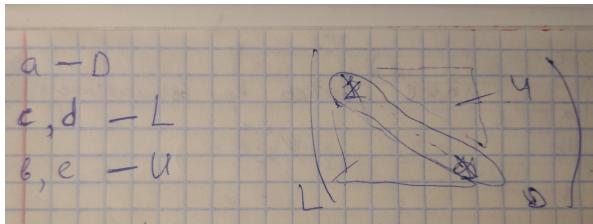
Подробнее про то, как получить эту формулу можно посмотреть, например, тут : https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%B8%D1%81%D0%BE%D0%BA_%D0%BA%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%BB

5 Метод Якоби

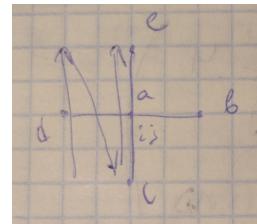
Приведём общую схему метода Якоби в матричном виде. В методе Якоби в качестве предобуславлевателя берём диагональную матрицу D :

$$v^{k+1} = D^{-1}(g - (L + U)v^k) \quad (11)$$

Ниже привожу несколько иллюстраций для пояснений.



a) Матричный вид коэффициентов



b) Порядок обхода

Будем применять итерационную процедуру метода Якоби в следующем виде.

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^k - C_{i,j}v_{i,j-1}^k - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k) \quad (12)$$

6 Метод Зейделя

Будем применять итерационную процедуру метода Зейделя в следующем виде:

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{i,j+1}^k - B_{i,j}v_{i+1,j}^k) \quad (13)$$

Заметим, что соответствующие значения v при коэффициентах C и D на момент расчёта $v_{i,j}$ уже известны.

7 Метод SOR

В случае метода Зейделя, предобуславливатель имеет вид: $B := L + D$. В матричном виде выражение для $k + 1$ го приближения записывается так:

$$v^{k+1} = D^{-1}(g - Uv^k - Lv^{k+1}) \quad (14)$$

Будем применять итерационную процедуру метода SOR в следующем виде:

$$\begin{cases} v_{Z,i,j}^{k+1} = \frac{1}{A_{i,j}} \cdot (G_{i,j} - D_{i,j}v_{Z,i-1,j}^{k+1} - C_{i,j}v_{Z,i,j-1}^{k+1} - E_{i,j}v_{SOR,i,j+1}^k - B_{i,j}v_{SOR,i+1,j}^k) \\ v_{SOR}^{k+1} = v_{SOR}^k + \omega(v_Z^{k+1} - v_{SOR}^k) \end{cases} \quad (15)$$

Где v_Z - вычисляется по методу Зейделя

8 Результаты

8.1 Метод Якоби

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$ возьмём чило разбиений равным $N = 100$ и $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{2N^2}$.

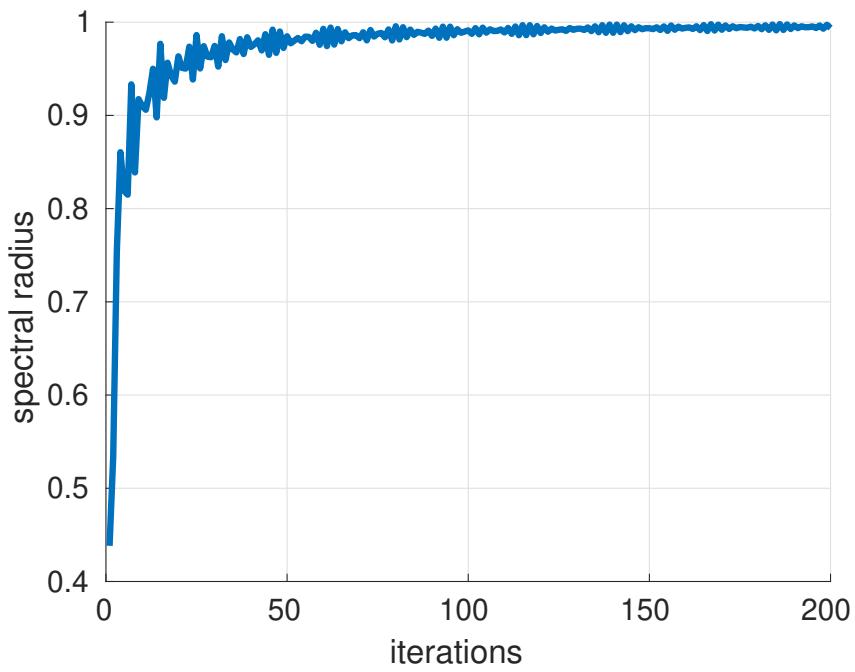


Рис. 2: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом $\rho_J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99945 \approx 0.99950$, что согласуется с теоретическим значением.

8.2 Метод Зейделя

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$ возьмём чило разбиений равным $N = 100$ и $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-4}\pi^2}{N^2}$.

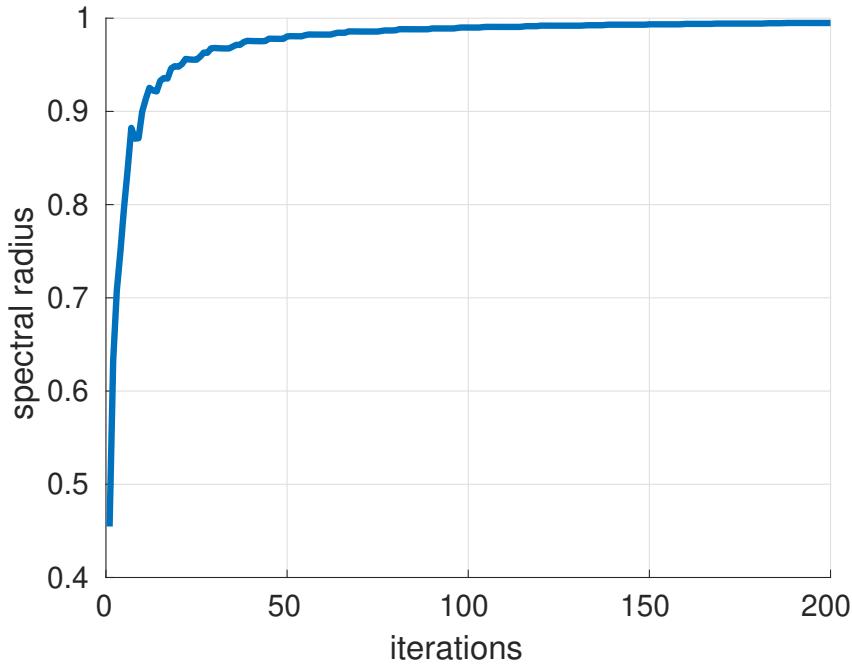


Рис. 3: Зависимость спектрального радиуса от числа итераций

При этом $\rho_Z = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|v^{k+1} - v^k\|}{\|v^k - v^{k-1}\|} = 0.99855 \approx 0.9990 = \rho_J^2$, что согласуется с теоретическим значением.

8.3 Метод SOR

Для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$ возьмём число разбиений равным $N = 100$ и $\varepsilon_{iter} = \frac{10^{-7}\pi}{N}$.

Примечание к рисунку (4):

В ходе исследований метода SOR, я пытался получить графическую оценку параметра релаксации, максимально близкую к теоретическому значению. Если строить график, используя число разбиений из предыдущих пунктов (а именно $N = 100$), то я получал значение $\omega_{opt} \approx 1.5$. Тогда я решил немного поэкспериментировать со значениями числа разбиений. И при $N = 28$ мне удалось достичь приведённых ниже значений. То есть, рисунок (4) построен для $N = 28$. И тогда получается, что методу Зейделя для такого числа разбиений потребуется ≈ 1000 итераций для достижения условия выхода из итерационного процесса.

А в таблице (1) я привожу число итераций для всех методов при $N = 100$, так что никаких противоречий в итоге не возникает.

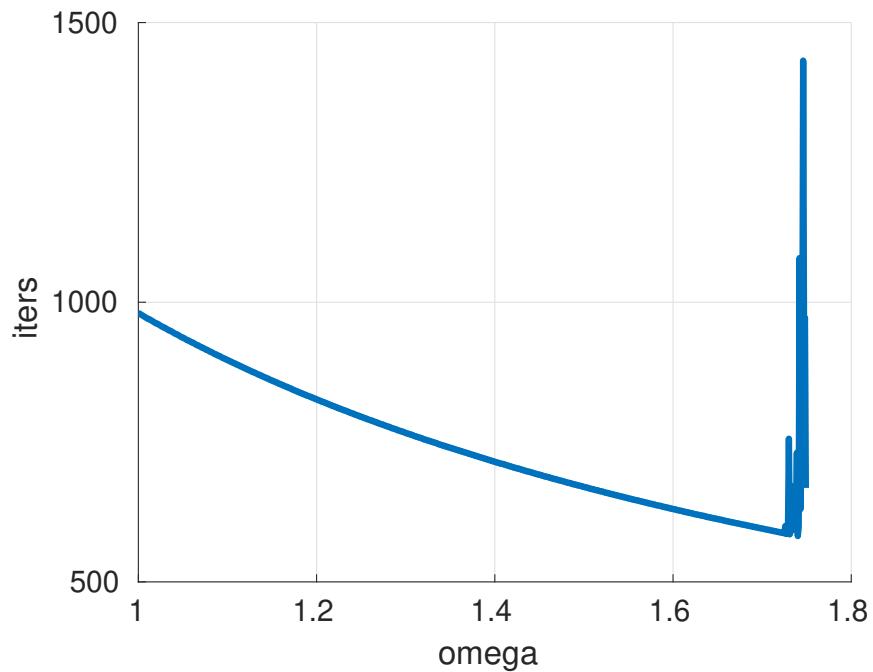


Рис. 4: Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω

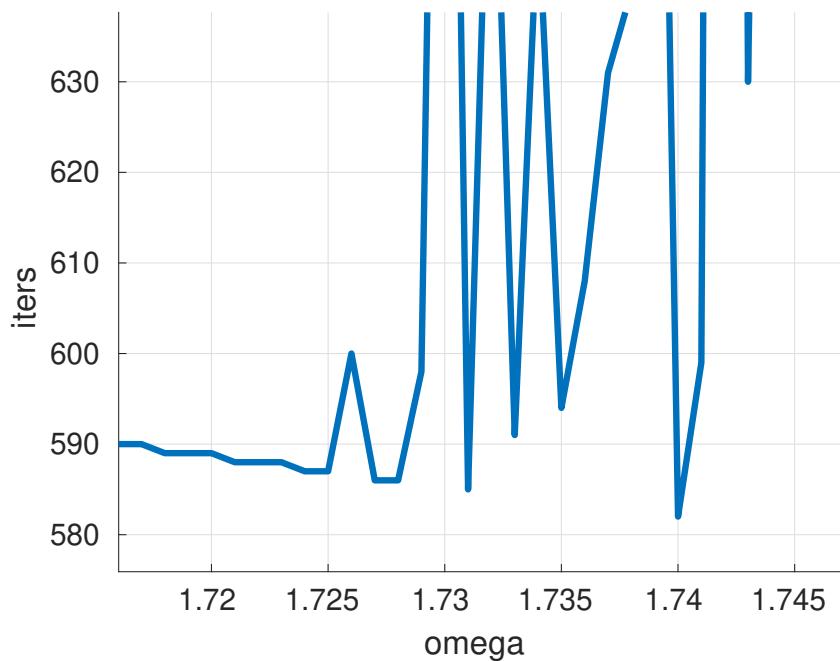


Рис. 5: Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω (приближение)

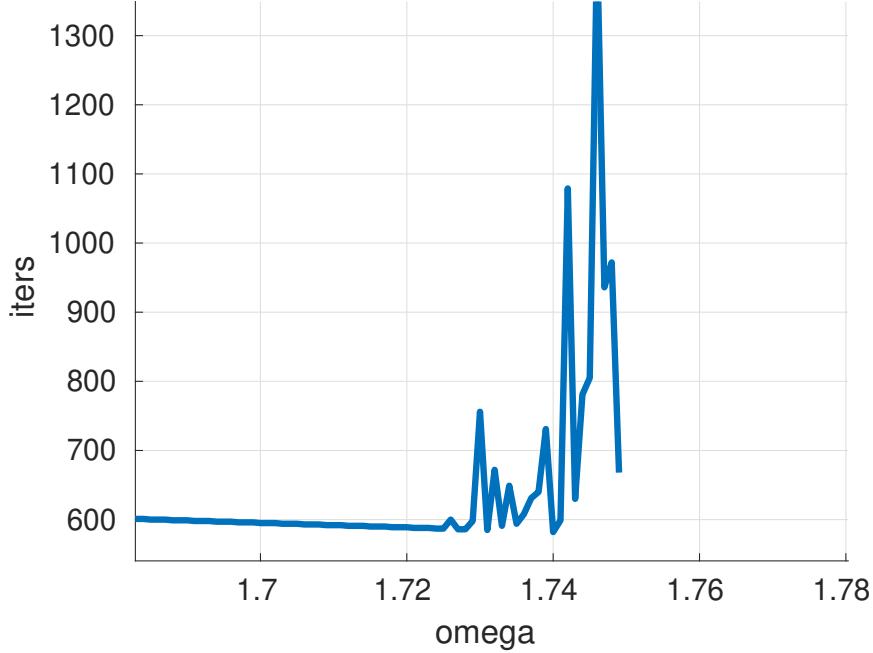


Рис. 6: Зависимость числа итераций $n(\varepsilon)$ от параметра релаксации ω (приближение 2)

По графику (5) видно, что оптимальным параметром релаксации будет $\omega = 1.725$. Однако, из теории следует, что оптимальный параметр должен равняться: $\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_Z}} \approx 1.9387$. Я пытался добиться большей точности от графического метода нахождения ω_{opt} изменения N и ε_{iter} , но мои попытки не принесли результатов, так как схема начинала терять устойчивость. Я думаю, что всё дело в выбранной мной конкретной задаче, и можно было бы теоретически подобрать исходную задачу точнее, чтобы получить лучший результат. Я же буду далее использовать полученное мною значение $\omega_{opt} = 1.725$.

Также привожу рисунок (6) для иллюстрации неустойчивости. Я уменьшил шаг дискретизации до $\frac{1}{1000}$, и при таком шаге уже можно заметить определённые моменты. Видно, что с каждым шагом точки графика совершают колебания с растущей амплитудой. То есть, имеем не излом, а некоторые колебания графика, если бы их не было, график начал бы монотонно возрастать. Подобное поведение также наблюдается на рисунке (2)

8.4 Сравнение методов

Таблица 1: Сравнение методов

Метод	ρ	ε_{iter}	$n(\varepsilon)$
Jacobi	0.99945	4.934802e-08	17712
Zeidel	0.99855	9.869604e-08	8858
SOR	0.9744	1.121997e-08	445

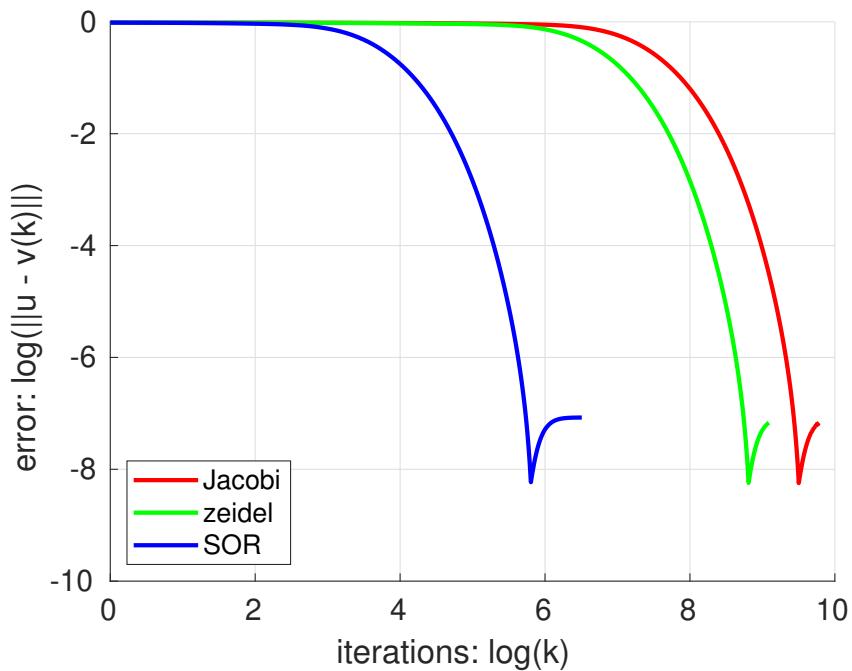


Рис. 7: Сравнение зависимостей $\|z^k\|$ от числа итераций

9 Выводы

В результате работы были рассмотрены 3 итерационных метода(Якоби, Зейделя, SOR) решения СЛАУ, построенной по МКО. Я получил полное соответствие практических и теоретических оценок скоростей сходимости методов, спектральных радиусов и соотношения числа итераций, за исключением ω_{opt} . Как уже выше упоминалось, я считаю что это связано с конкретной задачей.

10 Приложения

Исходные файлы лабораторной работы можно найти тут:

https://github.com/LanskovNV/numerical/tree/master/net_methods/lab_3