def 1.1 **Set** (is defined by roster method)

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, 1 \in A, a \notin A$$

def 1.2 **Set** (is defined by property)

$$A = \{n | n \text{ is an integer } 1 \le n \le 6\}$$

def 1.3 **Subset** (A is a *Subset* of B)

$$A \subset B$$

def 1.4 **Universal Set** & **Empty Se (Null Set)**

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{S}, \emptyset \subset \mathrm{B}$$

def 1.5 **Union**, **Intersection**, **Complement**

$$\text{Union(Sum)}: C = A + B = A \cup B$$

$$\text{Intersection (Product)}: D = A \cdot B = A \cap B$$

$$\text{Complement (in S)}: \overline{A}$$

De Morgan's law

$$1^{\text{st}} \text{ law}: \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$2^{\text{st}} \text{ law}: \overline{A \cdot b} = \overline{A} + \overline{B}$$

Closed / **Open interval**

$$A = \{x | a \le x \le b\}, B = \{x | a < x < b\}$$

def 1.6 **Mutually Exclusive** (상호 배타적)

$$A \cdot B = \{\emptyset\}$$

def 1.7 **Collectively Exhaustive** (전체를 이루는)

$$\sum_{i=0}^{N} A_i = S$$

def 1.8 **Function**

함수 f는 주어진 집합 D의 모든 원소들에 특정 값을 할당하거나 대응시키는 일종의 규칙이다.

Deterministic Signal

예측 가능한 이미 결정된 신호 (ex. $\sin 2\omega t$)

Nondeterministic Signal

예측 불가능한 아직 결정되지 않은 신호 (ex. Most natural signal)

Prior Probability (사전 확률)

물리적인 실험을 행하지 않고 구해진 확률.

Posterior Probability (사후 확률)

실제 실험의 결과(*Outcome*)를 관측하여 정의한 확률.

def 2.0 **Outcome** (결과)

실험에서 모든 발생 가능한 관찰

def 2.1 **Sample Spae** (denoting as S) (표본 공간)

*Outcome*들(*Mutually Exclusiv*, *Colletively Exhaustive*)의 *Set* 또는 모임.

def 2.2-1 **Descrete Sample Space** (이산 표본 공간)

유한 하거나 셀 수 있는 무한 *Set*.

def 2.2-2 **Continous Sample Space** (연속 표본 공간)

*Descrete Sample Space*가 아닌 것.

def 2.3 **Probability of the Outcome** (denoting a $P(x_n)$)

$$0 \le P_n \le 1, \sum P(x_n) = 1$$

def 2.4 **Probability of an Equally Likely Outcome**

$$P(x_n) = 1/N$$

def 2.5 **Event** (사상)

Sample Space 내 *Outcome*들의 *Set* 혹은 모임.

def 2.6-1 **Simple Event** (단순 사상)

분리할 수 없는 *Event*. S내의 단일 표본점.

def 2.6-2 **Compound Event** (복합 사상)

*Simple Event*들의 *Set*.

def 2.7 **Probability of Occurrence of an Event A**

$$P(A) = \sum_{x_k \in A} P(x_k)$$

def 2.8 **Mutually Exclusive (or Disjoint) Events**

$$P(AB) = P(\emptyset) = 0$$

def 2.9 **Conditional Probability** (조건부 확률)

$$P(B|A) = P(AB)/P(A)$$

- Multiple Theorem

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

- Bayes's theorem

$$P(A|B) = P(B|A)P(A)/P(B)$$

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(C|AB)P(AB) \\ &= P(C|AB)P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(AB + A\overline{B}\right) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \\ &= P(A|B)P(B) + P\left(A\middle|\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right) \end{aligned}$$

- General form of Bayes's theorem

$$P(B) = \sum P(B|A_i)P(A_i)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(A_i|B) &= \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)} \end{aligned}$$

def 2.10 **Independent Events** (독립 사건)

$$P(B|A) = P(B), P(A|B) = P(A)$$

$$\rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

def 2.11 **n Factorial**

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = \prod_{k=1}^{k=n} k$$

def 2.12 **Gamma function**

*Gamma function*으로 *Fatorial*은 정수가 아닌 경우로 확장될 수 있다.

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx\,, \text{for the real part of } \alpha > -1$$

$$\rightarrow \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

def 2.13 **Sterling's Formular**

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}(1 - \frac{1}{12n})$$

def 2.14~15 **Permutation** (순열)

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

def 2.16~17 **Combination** (조합)

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{nPr}{rPr} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

- Property 1

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

- Property 2

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = (1+1)^n = 2^n$$

- Property 3

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0$$

- Property 4

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

- Property 5

$$\sum_{r=1}^{n} (-1)^r r\binom{n}{r} = 0$$

- Property 6

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

def 3.1 **Random Variable** (랜덤 변수)

Sample Space 상에 정의된 실수값을 갖는 함수. 확률적 실험에 대한 *Sample Space S* 에 대해 $s \in S$인 모든 *Outcom*이나 특정 점에 $X(s)$를 할당하는 함수 X를 랜덤 변수라 한다.

def 3.2 **Discrete Random Variable** (이산 랜덤 변수)

실선 상에서 유한하거나 셀 수 있는 무한개의 값을 갖는 *Random Variable*을 말한다.

def 3.3 **Continuous Random Variable** (연속 랜덤 변수)

실선 상에서 셀 수 없는 무한개의 값으로 이루어진 치역을 갖는 *Random Variable*을 말한다.

def 3.4 **Probability Distribution Functions (PDF)**

각 *Random Variable*가 갖는 값에 대해 확률을 할당하는 함수.

def 3.5 **Cumulative Probability Distribution Fn. (CPDF)**

$$P_X(X \le x_k) = \sum_{j=-\infty}^{k} P_X(X = x_j) u(x - x_j)$$

def 3.6 **The Probability that a random variable falls between two specific values**

$$P_X(x_i \le X < x_j) = \sum_{k=i}^{j} P_X(X - x_k)[u(x - x_k) - u(x - x_j)]$$

Poisson PDF

시행횟수 $n \to \infty$ 일 때, 한 번의 시행에서 성공할 확률 $p = 0$ 이며, $\alpha = np = \text{const}$ 인 제한적인 경우에서의 이항함수이다.

$$P_X(r) = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}, \alpha > 0, r = 0, 1, \dots, \infty$$

Random Variable X는 n번의 시행에서 성공이 발생할 횟수이다.

def 3.7 **CPDF for Continuous Ramdom Variable**

def 3.8 **Probability Density Function for Cntn. R.V.**

$$p_x(x) = \frac{d}{dx} P_X(X \le x)$$

$$P_X(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p_x(t) dt$$

- Property 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

- Property 2

$$F_X(x) = P_X(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt$$
$$= 1 - \int_{x}^{\infty} f_X(t) dt$$

- Property 3

  If $f_X(x)$ exists, then $F_X(x)$ is absolutely continuos.

def 3.9-1 **Probability Density Function for Dscr R.V.**

$$f_X(x) = p_X(x) = \sum_{all\ x_i} P_X(x_i) \delta(x - x_i)$$

def 3.9-2 **Cumulative Probability Distribution for Discr R.V.**

$$F_X(x) = \mathrm{P_X}(X \le x) = \sum_{all\ x_i} P_X(x_i) u(x - x_i)$$

def 3.11 **Joint Probability Distribution & Density Fn.**

$$P_{XY}(x, y) = \frac{\partial P_{XY}(X \le x, Y \le y)}{\partial x \partial y}$$

where $P_{XY}(X \le x, Y \le y)$ is *Joint CPDF*

$$P_{XY}(X \le x, Y \le y) = P_{XY}(-\infty < X \le x, -\infty < Y \le y)$$
$$= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} p_{XY}(s, t) ds\, dt$$

def 3.12

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx\, dy$$

def 3.13 **Marginal Probability Density Function**

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dx$$

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) dy$$

def 3.14 **Joint Probability Density Fn. for two Dscr. R.V.**

$$P_{XY}(x_j, y_k) = \sum_{all\ j,k} P_{XY}(X = x_j, Y = y_k)\delta(x - x_j)\delta(y - y_k)$$

def 3.16 **Conditional CPDF of the R.V. X given the event A**

$$P_{X|A}(X \leq x|A) = \frac{P_{XA}(X \leq x, A)}{P(A)}$$

def 3.17 **Conditional Probability Dnst. Fn. of the R.V. X given the event A**

$$P_{X|A}(X \leq x|A) = \frac{d}{dx}P_{X|A}(X \leq x|A)$$

def 3.18 **Conditional Probability Density Function**

$$P_{X|A}(X|Y) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)}$$

def 3.19 **Conditional CPDF**

$$P_{X|A}(X \leq x|y) = \int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(s|y)ds$$

def 3.20 **Statistical Independence**

$$P_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

def 3.21 **Random Vector / Vector R.V.**

랜덤벡터는 랜덤변수들의 집합으로 구성된다.

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

def 4.1 **Expected Value**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \mu_X$$

def 4.2 **n-th moment of R.V. X about point x_0**

$$E[(X - x_0)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^n p_X(x)dx$$

def 4.3 **n-th moment about origin**

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x)dx$$

def 4.4 **n-th central moment**

$$E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n p_X(x)dx$$

def 4.5-1 **Skewness** (비대칭 계수)

$$c_s = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$$

def 4.5-2 **Kurtosis** (첨도 계수)

$$c_k = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4}$$

def 4.6 **Mode** (최빈값)

확률 밀도가 최대인 *Random Variable*.

def 4.7 **Median** (중앙값)

*Probability Density Function*의 아래 면적을 반으로 나눈 *Random Variable*.

def 4.8