1차독립, 1차종속 p110

$k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_mv_m=0$ 을 만족하는 실수 k_i가 0뿐일 때 **1차독립**

적어도 하나는 0이 아닌 실수 k_i가 위 식을 만족하면 $\mathrm{v_i}$는 **1차종속**

1차독립일 필요충분조건: $det(A)\neq 0$(A는 정칙행렬)

1차종속일 필요충분조건: $det(A)=0$

기저, 차원 ($\boldsymbol{dimW=m}$) p118

$v_1,v_2,\cdots,v_m\in W$에 대해 $W=span\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$이면, $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$은 W의 **기저**이다.

이때 m을 W의 **차원**이라 하고, $dimW=m$으로 표시한다.

좌표 ($[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{\beta}}$) p121

$\beta=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$가 W의 기저일 때, W의 각각의 벡터 v는 적당한 실수 c_i에 대해

$v=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_mv_m$으로 유일하게 표시되므로, $(c_1,c_2,\cdots,c_m)_\beta$를 벡터 v의 기저 β에 대한 **좌표**라 한다.

이때 기저 β에 대한 v의 좌표행렬은 다음과 같다. $[v]_\beta=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_m\end{pmatrix}$

보충공간 p125

$R^n=W\ \oplus\ W'$이면 W'를 W의 **보충공간**이라 한다.

전이행렬 p131

$\beta=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},\beta'=\{w_1,w_2,\cdots w_3\}$을 R^n의 두 기저라 하자. 따라서 다음과 같다.

$\begin{cases}w_1=a_{11}v_1+a_{12}v_1+\cdots+a_{1n}v_n\\w_2=a_{11}v_1+a_{12}v_1+\cdots+a_{1n}v_n\\\qquad\vdots\\w_n=a_{11}v_1+a_{12}v_1+\cdots+a_{1n}v_n\end{cases}$ 따라서, $[\mathrm{w_i}]_\beta=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}$ 이다.

이때, β'에서 β로의 **전이행렬** $P=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ 이다.

임의의 v에 대해 $[v]_\beta=P[v]_{\beta'}$이다.

내적(=도트곱) p134

$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n),v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$에 대해 $\langle u,v\rangle=u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n=\|u\|\|v\|\cos\theta$ 이다.

다음을 만족한다

(1)$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$ **(2)**$\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$ **(3)**$\langle ku,v\rangle=k\langle u,v\rangle$ **(4)**$\langle 0,v\rangle=0$

$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\|v\|$(코시-슈바르츠 부등식), $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$(삼각부등식)

직교집합, 정규직교기저 p138

벡터 $v_1,v_2,\cdots v_m$에 대해, 모든 $i\neq j$에 대해, $v_i\perp v_j$이면, $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$을 **직교집합**이라 하고

모든 i에 대해 $\|v_i\|=1$이면 $\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$을 **정규직교기저**라 한다.

Gram-Schmidt의 직교화과정 p140

$\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$가 주어졌을 때

$$proj_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\mathrm{u}$$

$u_1 = v_1$
$u_2 = v_2 - proj_{u1}(v_2)$
$u_3 = v_3 - proj_{u1}(v_3) - proj_{u2}(v_3)$
$\vdots$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} proj_{uj}(v_k)$$

이렇게 생성된 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$는 직교이며, 벡터 $e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}$이면 정규직교기저$\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$를 얻는다.

예제 4.5.19 p140

$v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (2,2,2)$를 R^3의 정규직교기저를 만들어라.

$u_1 = v_1$

$$u_2 = v_2 - proj_{u1}(v_2) = (1,1,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,0)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}(1,0,0) = (1,1,0) - \frac{1}{1}(1,0,0) = (0,1,0)$$

$$u_3 = v_3 - proj_{u1}(v_3) - proj_{u2}(v_3) = (2,2,2) - \frac{(1,0,0)\cdot(2,2,2)}{(1,0,0)\cdot(1,0,0)}(1,0,0) - \frac{(0,1,0)\cdot(2,2,2)}{(0,1,0)\cdot(0,1,0)}(0,1,0)$$

$$= (2,2,2) - \frac{2}{1}(1,0,0) - \frac{2}{1}(0,1,0) = (0,0,2)$$

$$e_1 = u_1 = (1,0,0), e_2 = u_2 = (0,1,0), e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{u_3}{2} = (0,0,1)$$

그러면 $\{e_1, e_2, e_3\}$는 R^3의 정규직교기저이다.

직교보충공간

예를 들어 R^3의 부분공간 $W = span\{(1,0,0),(0,1,0)\}$의 직교보충공간은 $W^\perp = span\{(0,-1,1)\}$이다.

$x_1 = \langle x, w_1\rangle w_1 + \langle x, w_2\rangle w_2 + \cdots + \langle x, w_r\rangle w_r$
$x_2 = x - x_1$

예제 4.5.23

R^3의 벡터 $v_1 = (1,-1,0), v_2 = (1,1,2), v_3 = (-1,2,1)$에 대해, $W = span\{v_1, v_2, v_3\}$라 하자.

(1) W의 직교보충공간$W^\perp$을 구하여라.

$$\langle v_1, v_2\rangle = 0, \left(-\frac{3}{2}\right)v_1 + \frac{1}{2}v_2 = v_3 \ \therefore W = span\{v_1, v_2\}$$

$u = (a,b,c) \in W^\perp$이면, $u \perp v_1, u \perp v_2$이다. 따라서 $\langle u, v_1\rangle = 0, \langle u, v_2\rangle = 0$이다.

$a = b = -c$ 이므로 $W^\perp = \{(t,t,-t) | t \in R\} = span\{(1,1,-1)\}$이다.

(2) $x = (3,7,4)$를 W의 벡터와 $W^\perp$의 벡터의 합으로 표시하라.

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathrm{w}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$x_1 = \langle x, w_1\rangle w_1 + \langle x, w_2\rangle w_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right)w_1 + \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{6}} + \frac{8}{\sqrt{6}}\right)w_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{18}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= (-2,2,0) + (3,3,6) = (1,5,6)$$

$x_2 = x - x_1 = (3,7,4) - (1,5,6) = (2,2,-2)$
$x = x_1 + x_2 = (1,5,6) + (2,2,-2)$

선형변환(=선형사상) p151

다음 성질을 만족하는 함수 $T: R^n \to R^m$를 R^n에서 R^m으로 대응되는 **선형변환**이라 한다.

$T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2), T(\alpha v)=\alpha T(v), T(0)=0, T_A(v)=A(v)$

상 ($Im(T)=\{T(v)|v \in R^n\}$) p156

핵 ($Ker(T)=\{v \in R^n|T(v)=0\}$) p157

선형변환 $T: R^n \to R^m$이 단사함수일 필요충분조건은 $Ker(T)=\{0\}$이다.

표준행렬 p162

$T_A(v)=A(v)$를 만족하는 행렬 A를 함수 T의 **표준행렬**이라 한다.

(1)$\dim Im(T)=rank(A)$ **(2)**$\dim Ker(T)=n-rnak(A)$

기저 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$에 관한 선형변환 $\boldsymbol{T}$의 행렬 ($[T]_{F,E}$) p167

$T: R^n \to R^m$에 대하여 $E=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$을 R^n의 기저, $F=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$을 R^m의 기저라 할 때

$[T(v)]_F=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}[v]_E$ 를 만족하는 $m \times n$행렬$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$을

기저 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$에 관한 선형변환 $\boldsymbol{T}$의 행렬 이라 하고, $[T]_{F,E}$로 적는다.

$[T^{-1}]_{E,F}=\left([T]_{F,E}\right)^{-1}$를 만족한다.

예제 5.2.2

다음 선형사상 $T: R^2 \to R^3$의 주어진 기저에 관한 행렬을 구하여라.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y \\ -x+y \\ 5x-y \end{pmatrix}$$

(2) $E=\{v_1,v_2\}, F=\{w_1,w_2,w_3\}$을 각각 R^2와 R^3의 기저라 할 때 $[T]_{F,E}$ 를 구하여라.

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, w_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T(v_1)=T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3=\begin{pmatrix} a_1+a_2+a_3 \\ a_2+a_3 \\ a_3 \end{pmatrix} \therefore a_3=3, a_2=-2, a_1=4$

$T(v_2)=T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}=b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3=\begin{pmatrix} b_1+b_2+b_3 \\ b_2+b_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \therefore b_3=11, b_2=-10, b_1=10$

$$\therefore [T]_{F,E}=\left([T(v_1)]_F \ [T(v_2)]_F\right)=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -10 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

상사 p178

두 정사각 행렬A,B에 대하여 $B=P^{-1}AP$를 만족하는 정칙행렬 P가 존재하면 두 행렬 A,B는 **상사**이다.

$|A|=|B|, rank(A)=rank(B)$ 를 만족한다.

$T:V\to W$이 선형변환이라 하자. T가 단사함수일 필요충분조건은 $rank(T)=\dim(V)$이다.

예제 5.3.4

다음에 주어진 선형변환 $T:R^3\to R^4$이 단사함수인지 결정하라

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y-5z\\-x+3z\\y+2z\\2x-3y\end{pmatrix}$$

E,F를 R^3,R^4의 표준기저라 하면 $T(e_1)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, T(e_2)=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-3\end{pmatrix}, T(e_3)=\begin{pmatrix}-5\\3\\2\\2\end{pmatrix}$이다.

따라서 $[T]_{F,E}=\begin{pmatrix}1&3&-5\\-1&0&3\\0&1&2\\2&-3&0\end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore rank(T)=rank\left([T]_{F,E}\right)=3=rank(R^3)$이므로 단사함수이다.

고유치, 고유벡터 p181

n차 정사각행렬 A에 대하여 $Ax=\lambda x$ 를 만족하는 0이 아닌 벡터 x와 실수 λ가 존재하면 λ를 A의 **고유치**라 한다. x를 고유치 λ에 속하는 **고유벡터**라 한다. 다음을 만족한다.

(1) λ가 특성방정식 $\det(A-\lambda I_n)=0$ 의 근이다. **(2)** 행렬 $A-\lambda I_n$이 정칙이 아니다.

(3) $(A-\lambda I_n)x=0$은 비 자명해를 가진다. **(4)** $rank(A-\lambda I_n)<n$

(5) A,B가 상사인 n차 정사각행렬이면 A,B는 같은 고유치를 갖는다. **(6)** $\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

(7) $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ 여기서 $tr(A)$는 행렬A의 대각선 상의 요소들의 합이다.

(9) n차 정사각행렬 A가 정칙일 필요충분조건은 $\det(A)\neq 0$ 이므로 곧 $\lambda\neq 0$이다. $\because (6)$

(10) n차 정사각행렬인 A,B의 AB와 BA는 같은 고유치를 갖는다.

예제 5.3.8

다음 행렬의 고유치, 고유벡터를 구하여라.

(1) $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I_n)=(2-\lambda)(1-\lambda)=0$ $\therefore \lambda=1,2$

$\lambda=1$일 때 $x+3y=0\to(x,y)=\alpha(-3,1),(\alpha\neq0)$

$\lambda=2$일 때 $3y=0\to(x,y)=\alpha(1,0),(\alpha\neq0)$

(2) $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

$\det(B-\lambda I_n)=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$ $\therefore\lambda=-1,2$

$\lambda=-1$일 때 $x+y+z=0\to(x,y,z)=\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1),(\alpha,\beta\neq0)$ $\because(\lambda+1)^2$

$\lambda=2$일 때 $\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},(\alpha\neq0)$

대각화 가능 p189

$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ 를 만족하는 정칙행렬 Q가 존재하면 A는 **대각화 가능**하다고 한다.

또한 이러한 Q와 λ_i를 구하는 과정을 **대각화**한다고 한다

A가 **대각화 가능**일 필요충분조건은 A가 일차독립인 n개의 고유벡터를 가진다.

대각화 과정은 다음과 같다.

(1) A의 고유치 λ_i를 모두 구한다. **(2)** A의 각 고유치 λ_i에 속하는 고유벡터 v_i를 구한다.

(3) (2)에서 구한 n개의 고유벡터들이 일차독립인가를 조사한다.

(4) 고유벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$이 일차독립일 때 $Q=\{v_1 v_2 \cdots v_n\}$이다.

고유공간 p191

$(A-\lambda I_n)X=0$의 해들의 집합을 고유치 λ에 속하는 **고유공간**이라 부르고 $E(\lambda)$로 적는다.

A에 대하여 λ_1, λ_2가 A의 서로 다른 고유치이면 $E(\lambda_1)\cap E(\lambda_2)=\{0\}$이다.

서로 다른 고유치에 속하는 고유벡터는 일차독립이다.

A가 n개의 서로 다른 고유치를 가지면 A는 대각화 가능하다.

예제 5.4.8

다음 행렬들을 대각화 하여라

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$\det(A-\lambda I_n)=(\lambda+1)(\lambda-3)=0\ \therefore \lambda=-1, 3$

$\lambda=-1$일 때 $x+y=0\rightarrow(x,y)=\alpha(1,-1),(\alpha\neq 0)\ \therefore E(-1)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$

$\lambda=3$일 때 $-x+y=0\rightarrow(x,y)=\alpha(1,1),(\alpha\neq 0)\ \therefore E(3)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{P^{-1}AP}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\det(B-\lambda I_n)=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0\ \therefore \lambda=-1, 2$

$\lambda=-1$일 때 $x+y+z=0\rightarrow(x,y,z)=\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1),(\alpha,\beta\neq 0)\ \because(\lambda+1)^2$

$\lambda=2$일 때 $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},(\alpha\neq 0)$

$\therefore P=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow \mathrm{P^{-1}BP}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

(3) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$\det(C-\lambda I_n)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0\ \therefore \lambda=0, 1, 2$

$\lambda=0$일 때 $y=0, x+z=0\rightarrow(x,y,z)=\alpha(1,0,-1),(\alpha\neq 0)\ \therefore E(0)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$

$\lambda=1$일 때 $z=0, y+z=0\rightarrow(x,y,z)=\alpha(0,1,-1),(\alpha\neq 0)\ \therefore E(1)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$

$\lambda=2$일 때 $z=0, y+z=0\rightarrow(x,y,z)=\alpha(1,0,1),(\alpha\neq 0)\ \therefore E(1)=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\middle|\alpha\in R\right\}$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow P^{-1}CP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

예제 5.4.11 p198

다음 행렬 A에 대하여 A^{100}을 구하여라

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

예제 5.4.8 의 (3)에서 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 이다.

그러므로 $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$이다.

따라서 $A^{100} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100} & 2^{100} \\ 0 & 2 & 0 \\ 2^{100} & 2^{100}-2 & 2^{100} \end{pmatrix}$