PKUSC2022 题目讲解

吉如一

D1T1 Rating 题面

- 给定初值为 0 的变量 x, y ，考虑如下的随机过程。
  - 每一步根据给定的分布从集合 $\{-m, \dots, m\}$ 中采样得到整数 d。
  - 将 x, y 中的较小值加上 d 并对 0 取 max。
- 在 x, y 中的较大值大于等于 n 时随机过程终止。
- 问终止时的期望步数。
- $n \le 10^3, m \le 50$

D1T1 Rating 题解

- 考虑如下的只关于一个变量 x 的随机过程。
  - 每一步中，会根据跟定分布从 $\{-m, \ldots, m\}$ 中采样得到 d，并将 x 变成 $\max(0, x+d)$。
- 令 $i \to i+k$ 表示如下事件。
  - 从初始值 i 出发，x 经过若干步达到了 $i+k$ ，且在过程中 x 的取值始终没有超过 i。
- 枚举 i 向后跳的第一步，假设跳到 $i-j$。则后续部分等价于如下事件。
  - 从初值 $i-j$ 出发，x 经过若干步达到了 $i+k$，其在过程中 x 的取值始终没有超过 i。
- 记该事件为 $i-j \to^{i} i+k$，考虑如下几种情况。
  - 在运行过程中没有经过 $i-j+1, \ldots, i$ 中的位置，则等价于事件 $i-j \to i+k$
  - 在运行过程中经过了 $i-j+1, \ldots i$ 中的位置，假设其中遇到的第一个位置为 l。此时，可以拆分为事件 $i-j \to l$ 和事件 $l \to^{i} i+k$ 的顺序发生。

D1T1 Rating 题解

- 枚举 i 向后跳的第一步，假设跳到 $i-j$。则后续部分等价于如下事件。
  - 从初值 $i-j$ 出发，x 经过若干步达到了 $i+k$，其在过程中 x 的取值始终没有超过 i。
- 记该事件为 $i-j \to^i i+k$，考虑如下几种情况。
  - 在运行过程中没有经过 $i-j+1,\dots,i$ 中的位置，则等价于事件 $i\ -j \to i+k$
  - 在运行过程中经过了 $i-j+1,\dots i$ 中的位置，假设其中遇到的第一个位置为 l。此时，可以拆分为事件 $i-j \to l$ 和事件 $l \to^i i+k$ 的顺序发生。
- 令 $p(\Delta)$ 为 Δ 发生的概率，则可以得到如下递推式。

$$p\left(i-j \to^i i+k\right) = p(i\ -j \to i+k) + \sum_{l=i-j+1}^{i} p(i-j \to l) \times p(l \to^i i+k)$$

$$p(i \to i+k) = w[k] + w[0]p(i \to i+k) + \sum_{j=1}^{m} p(i-j \to^i i+k)$$

D1T1 Rating 题解

- 令 $p(\Delta)$ 为 Δ 发生的概率，则可以得到如下递推式。

$$p\left(i-j \to^{i} i+k\right) = p(i\ -j \to i+k) + \sum_{l=i-j+1}^{i} p(i-j \to l) \times p(l \to^{i} i+k)$$

$$p(i \to i+k) = w[k] + w[0]p(i \to i+k) + \sum_{j=1}^{m} p(i-j \to^{i} i+k)$$

- 按照 i 从小到大计算 $p(i \to i+k)$。
- 按照 j 从小到大考虑 $p(i-j \to^{i} i+k)$，可以展开为关于 $p(l \to i+k)$ 的线性表达式。
- 解方程即可得到 $p(i \to i+k)$。
- $O(nm^3)$ 计算得到所有的 $p(i \to i+k)$。根据事件发生关系可以得到对应的期望步数。

D1T1 Rating 题解

- 考虑两个变量的情况。令 (i, j) 表示较大值为 i，较小值为 $i - j$ 的状态。
- 在接下来的一段时间里，变动的始终是较小值。直到较小值变得比 $i - j$ 大才可能切换变量。
- 枚举较小值在变化过程中第一个大于 $i - j$ 的取值 k，则对应事件 $i - j \to k$。
  - 如果 $k \le i$，则转移到状态 $(i, i - k)$。
  - 如果 $k > i$，则转移到状态 $(k, k - i)$。
- 只需 $O(nm^2)$ 的时间复杂度即可得到答案。
- 总时间复杂度 $O(nm^3)$

D1T2 Easygeo 题面

有 n 个线段。第 i 条线段连接 $(a_i, b_i), (c_i, d_i)$。同时这些直线满足如下性质:

- 对于任意线段，满足 $c_i > a_i, d_i < b_i$
- 对于任意两条线段，其不包含任何公共点 (包括端点在内)。

Q 次询问，每次询问给出一个点 (x_i, y_i) 。询问对于所有 n 条线段，其落在以 $(-C, -C)$ 为左下角，(x_i, y_i) 为右上角的矩形内的部分的长度之和。

- Subtask 4: 对于所有的线段，满足 $a_i + b_i = c_i + d_i$ (15%)
- Subtask 5: 没特殊限制 (45%)

对于所有测试数据，满足 $C = 3 \times 10^5, |a_i|, |b_i|, |c_i|, |d_i|, |x_i|, |y_i| \leq 3 \times 10^5, n \leq 1 \times 10^5, Q \leq 1.5 \times 10^5$。

D1T2 Easygeo 题解

- Subtask 4: 对于所有的线段，满足 $a_i + b_i = c_i + d_i$ (15%)

对于一次询问 (x_i, y_i)，所有满足 $b_j + a_j \geq x_i + y_i$ 的线段 j 都不会对答案产生贡献。
所有满足 $b_j + a_j < x_i + y_i$ 的线段 j, 没能够贡献到答案里的部分必然 $x > x_i, y > y_i$ 恰好满足一个。因此我们可以对于 x, y 轴分别统计，使用总长度减去不满足条件的两部分即可得到答案。
根据询问和线段的 $x_i + y_i$ 的值从小到大排序后，简单维护一个支持动态区间加，区间求和的数据结构即可，时间复杂度 $O((n + Q)\log(n + Q))$

D1T2 Easygeo 题解

- Subtask 5: 没特殊限制 (45%)

类似于 Subtask4 的思路，我们尝试维护这样一个插入线段，询问答案的顺序，使得:

- 所有出现在询问左下方的线段 (任意一个点位于其严格左下方)，在序列中严格出现在询问之前。
- 所有出现在询问右上方的线段 (任意一个点位于其严格右上方)，在序列中严格出现在询问之后。

由于线段不交，因此我们可以采用平衡树维护上述序列。

D1T2 Easygeo 题解

- Subtask 5: 没特殊限制 (45%)

按照 x 轴从小到大做扫描线，使用一个 set 维护线段按照 y 轴从小到大的顺序。

- 如果当前插入的是一个询问，则我们找到 set 中第一个 y 坐标比它大的线段 j，并在操作序列中插入在 j 的前面一个位置。
- 如果当前插入的是一个线段，我们也可以采用和询问一样的操作。删除线段只需要简单的在 set 里删除即可。

利用线段不交的性质知道上述构造出来的序列必然合法，总时间复杂度仍然为 $O((n+Q)\log(n+Q))$。

D1T3 撸猫 题面

- 给出一个n个点上的联合分布。
- 对于每一种可能出现的集合S，我们可以把它的概率任意分配给它里面的元素
- 最大化$\min_{i} \frac{i\text{被分配到的概率}}{i\text{出现的概率}}$
- $n \leq 20$

D1T3 撸猫

Subtask 2 [18 pts]: 1≤ n ≤ 7.

- 显然，这个常数c是可以二分答案的
- 如何判断是否存在一组合法解？
- 令$x_{S,i}$表示集合S的概率分给i了多少
- $\sum_i x_{S,i} \le \text{prob}(S)$
- $\sum_S x_{S,i} \ge c \cdot p_i$
- 2^n个变量的线性规划

D1T3 撸猫

Subtask 3 [10 pts]: 1≤ n ≤ 10.

- 显然，刚才的线性规划可以被一个(带权)二分图匹配所替代
- 左边每个点S的点权是$\mathrm{prob}(S)$
- 右边每个点i的点权是$c \cdot p_i$。
- (S, i)之间有边当且仅当$i \in S$

- 我们需要判断这张图是否有完备匹配
  - 即右边的点权是否能被左边的点的概率填满

D1T3 撸猫

- Hall引理
  - G contains a matching of X if and only if $|N(S)| \geq |S|$ for all $S \subseteq X$.

- 所以我们根本不需要通过算法检查二分图是否有完备匹配
- 可以直接写出$c = \min\limits_{S} \frac{\sum_{S' \cap S \neq \emptyset} \mathrm{prob}(S')}{\sum_{i \in S} p_i}$
- 因此，我们只需要计算$\mathrm{sum}(S) = \sum_{S' \subseteq S} \mathrm{prob}(S')$就可以枚举算出上面的东西
- 而这是可以在$O(2^n n)$内计算出的。

D2T1 Function 题面

- 令 V 表示集合 $\{1, \dots, m\}$。
- 从所有 $V \mapsto V$ 的函数中等概率随机两个函数 f, g。
- 从 V 中等概率随机 $2n$ 个数字 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$。
- 计算 $\wedge f(x_i) = g(y_i)$ 发生的概率。
- $n \le 40, m \le 10^9$

D2T1 Function 题解

- 令 (a, b) 表示事件 $f(a) = g(b)$，则有如下等式。

$$\Pr[\bigwedge_{i \in 1}^{n} f(x_i) = g(y_i)] = m^{-2n} \sum_{x_i, y_i \in V} \Pr[\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i, y_i)]$$

- 对于右式的每一项，不难发现其发生的概率只取决于 (x_i, y_i) 形成的集合。
- 根据斯特林数相关的知识，任意大小为 i 的集合在右侧出现了 $S(n, i) \times i!$ 次。
- 给定一个集合 S，考虑计算其中事件同时发生的概率。
- 对 S 构建一张两边各有 m 个点的二分图。
  - 两边的点表示 $f(i)$ 的输出和 $g(i)$ 的输出，其取值为 V 中均匀独立的随机数。
  - S 中的每一个事件都是一条边，表示约束了 $f(a) = g(b)$。
- S 中的所有事件同时发生当且仅当所有联通块中的数值都相同。
- 因此概率为 m^{c-2m}，其中 c 是图中的联通块数量。

D2T1 Function 题解

- S 中的所有事件同时发生的概率为 m^{c-2m}，其中 c 是图中的联通块数量。
- 令 $h(m,e,c)$ 为两边各 m 个点，e 条边，恰好有 c 个联通块的二分图数量，则答案为。

$$m^{-2n}\sum_{e=1}^{n}\sum_{c=1}^{2m}S(n,e)\times e!\times h(m,e,c)\times m^{c-2m}$$

- 注意到边数不超过 n，因此至多有 $2n$ 个点被涉及到大于 1 的联通块中，只需要考虑这些点即可。
- 令 $t(v_1,v_2,e)$ 表示两边各有 v_1,v_2 个标号点，e 条边，所有点均不为孤立点的二分图数量。
  - 枚举两边各有多少个孤立点来从二分图总数容斥，可以 $O(n^5)$ 计算得到。
- 令 $f(v_1,v_2,e)$ 表示两边各有 v_1,v_2 个标号点，e 条边的联通二分图数量。
  - 枚举左侧 1 号点躲在联通块情况从 $t(v_1,v_2,e)$ 容斥，可以 $O(n^6)$ 计算得到。
- 令 $g(v_1,v_2,e)$表示两边各有 v_1,v_2 个标号点，e 条边的二分图权值和，有 i 个联通块权值为 m^c。
  - 从 $f(v_1,v_2,e)$ 出发，通过 $O(n^6)$ 卷积计算得到。

D2T1 Function 题解

- S 中的所有事件同时发生的概率为 m^{c-2m}，其中 c 是图中的联通块数量。
- 令 $h(m,e,c)$ 为两边各 m 个点，e 条边，恰好有 c 个联通块的二分图数量，则答案为。

$$m^{-2n}\sum_{e=1}^{n}\sum_{c=1}^{2m} S(n,e)\times e!\times f(m,e,c)\times m^{c-2m}$$

- 令 $g(v_1,v_2,e)$表示两边各有 v_1,v_2 个标号点，e 条边的二分图权值和，有 i 个联通块权值为 m^c。

$$m^{-2n-2m}\sum_{e=1}^{n} S(n,e)\times e!\times \sum_{v_1,v_2} g(v_1,v_2,e)\times \binom{m}{v_1}\times \binom{m}{v_2}$$

- 总时间复杂度为 $O(n^6)$

D2T2 Colorful Tree 题面

- 给一棵树，边有颜色。
- 定义一个路径**合法**为：路径上的颜色只在这个路径上出现。
- 独立询问 m 次，每次问删去一个点后**仍然合法**的路径的最大长度。
- 定义**仍然合法**为：在原树合法，且删去的点不在该路径上。
- $m \leq n \leq$

D2T2 Colorful Tree 题解

- 对于每种颜色，给该颜色的边随机权值，满足这些边的权值异或和为0。
- 以高概率，一条路径合法等价于路径上边权异或和为 0。
- 记 $v[i]$ 为路径 $1 \to i$ 的边权异或和，则路径 $x \to y$ 合法以高概率等价于 $v_x = v_y$。
- 求最长合法路径只需会求一个点集的最远点对，这是个经典问题。
- 下面考虑怎么求删点后最长仍然合法路径。
  - 首先求出最长合法路径 $s \to t$，若删的点不在路径 $s \to t$ 上则答案必为 $s \to t$ 的长度。
  - 下面只需考虑删的点在 $s \to t$ 上的情况。
  - 考虑以 s, t 分别为根跑一遍，求出路径 $s \to t$ 上每个点的子树的最长合法路径即可。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

D2T3 Mahjong 题面

- 给出一副麻将手牌，只包含数牌，支持的和牌方式只有面子手（4个面子+1个雀头）和七对子。
- 要求计算这副手牌的项听数。
- 保证答案不超过 5。

D2T3 Mahjong 题解

- 如何判断一副牌是否和牌？
- 七对子的判定比较简单，只需要判断是否所有牌出现次数都是 0 或 2。
- 面子手需要手牌能组成4个面子+1个雀头。
- 假设只有一种花色，令 $f[i][j][k][w]$ 为只考虑前 i 种大小时是否能凑出如下牌型。
  - 凑出了 j 个雀头，其中 j 为 $0/1$ 值，其余牌都凑成了面子。
  - 使用了 k 张编号为 $i+1$ 的牌，w 张编号为 $i+2$ 的牌。
- 同时令 $p[i]$ 表示是否所有牌的出现次数都是 0 或 2。
- 已经和牌当且仅当 $p[n]$ 或者 $f[n][1][0][0]$。
- 在多种花色的情况下只需要在切换花色时，将 $f[i][j][\geq 1][\geq 1]$ 置为假即可。

D2T3 Mahjong 题解

- 令 $f[i][j][k][w]$ 为只考虑前 i 种大小时是否能凑出如下牌型。
  - 凑出了 j 个雀头，其中 j 为 $0/1$ 值，其余牌都凑成了面子。
  - 使用了 k 张编号为 $i+1$ 的牌，w 张编号为 $i+2$ 的牌。
- 同时令 $p[i]$ 表示是否所有牌的出现次数都是 0 或 2。

- 修改 DP 值的定义为向听数即可。
- 令 $f'[i][j][k][w]$ 为只考虑前 i 种大小时最少替换多少张牌能凑出如下牌型。
  - 凑出了 j 个雀头，其中 j 为 $0/1$ 值，其余牌都凑成了面子。
  - 使用了 k 张编号为 $i+1$ 的牌，w 张编号为 $i+2$ 的牌。
- 同时令 $p'[i]$ 表示最少替换多少张牌使得所有牌的出现次数都是 0 或 2。
- 同时由于答案<=5，也可以直接进行搜索，实现得优秀的话也能通过。