ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

THỰC HÀNH THIẾT KẾ LUẬN VĂN BẰNG LaTeX

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ NHỰT NAM

THỰC HÀNH THIẾT KẾ LUẬN VĂN BẰNG LATEX

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 84 60 112

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. TRỊNH THANH ĐÈO

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2024

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY - HO CHI MINH
UNIVERSITY OF SCIENCE

LE NHUT NAM

THESIS DESIGN PRACTICE USING LaTeX

MASTER THESIS IN MATHEMATICS

Ho Chi Minh City - 2024

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY - HO CHI MINH
UNIVERSITY OF SCIENCE

LE NHUT NAM

THESIS DESIGN PRACTICE USING LaTeX

MASTER THESIS IN MATHEMATICS

MAJOR IN APPLIED MATHEMATICS

Code: 8480101

SUPERVISORS
Dr. TRINH THANH DEO

Ho Chi Minh City - 2024

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan luận văn thạc sĩ ngành Toán ứng dụng, với đề tài *Thực hành thiết kế luận văn bằng LaTeX* là công trình khoa học do Tôi thực hiện dưới sự hướng dẫn của TS. Trịnh Thanh Đèo.

Những kết quả nghiên cứu của luận văn hoàn toàn trung thực và chính xác.

Học viên cao học

(Ký tên, ghi họ tên)

Lê Nhựt Nam

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, tôi xin phép gửi lời cảm ơn chân thành đến Thầy hướng dẫn của tôi - TS. Trịnh Thanh Đèo - giảng viên khoa Toán-Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã trực tiếp hướng dẫn và giúp đỡ tận tình trong suốt quá trình nghiên cứu thực hiện luận văn này. Nhờ vào những định hướng, và góp ý quý giá của thầy, tôi đã hoàn thành trọn vẹn đề tài luận văn thạc sĩ khoa học của mình.

Tiếp theo, tôi xin gửi lời cảm ơn đến quý Thầy, Cô trong khoa Toán-Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. HCM đã nhiệt tình giảng dạy và truyền đạt cho tôi những kiến thức sâu sắc về mặt chuyên môn lý thuyết và ứng dụng thực tiễn trong suốt quá trình học tập ở trường. Những điều này đã góp phần quan trọng trong việc hoàn thành luận văn thạc sĩ khoa học của tôi.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn đến các bạn bè đồng nghiệp đã có những động viên, đóng góp ý kiến trong suốt quá trình nghiên cứu của tôi. Và hơn nữa, tôi xin cảm ơn gia đình đã tạo mọi điều kiện để giúp tôi tập trung hoàn thành luận văn này.

Xin chân thành cảm ơn tất cả.

Lê Nhựt Nam

MỤC LỤC

TRANG THÔNG TIN LUẬN VĂN

Tên đề tài luận văn: Thực hành thiết kế luận văn bằng LaTeX

Ngành: Toán ứng dụng

Mã số ngành: 84 60 112

Họ tên học viên cao học: Lê Nhựt Nam

Khóa đào tạo: 33/2022

Người hướng dẫn khoa học: TS. Trịnh Thanh Đèo

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG.HCM

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN VĂN

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut

massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN VĂN

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

3. CÁC ỨNG DỤNG/ KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris.

Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN	HỌC VIÊN CAO HỌC
(Ký tên, họ tên)	(Ký tên, họ tên)

XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO

HIỆU TRƯỞNG

THESIS INFORMATION

Thesis title: Thesis design practice using LaTeX

Speciality: Applied Mathematics

Code: 84 60 112

Name of Master Student: Le Nhut Nam

Academic year: 33/2023

Supervisor: Dr. Trinh Thanh Deo

At: VNUHCM - University of Science

1. SUMMARY

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut

massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2. NOVELTY OF THESIS

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

APPLICATIONS/ APPLICABILITY/ PERSPECTIVE

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

SUPERVISOR	**Master STUDENT**
(Signature)	(Signature)

CERTIFICATION

UNIVERSITY OF SCIENCE

PRESIDENT

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU, CHỮ VIẾT TẮT

Abelian group	Nhóm Abelian
Binary operation	Toán tử nhị phân
Bijective functions	Song ánh
Composition of functions	Hàm hợp
Curve	Đường cong
Continuously differentiable	Liên tục khả vi
Differentiable	Khả vi
Euclidean Norm	Chuẩn Euclidean
Function	Hàm
Hyperplane	Siêu phẳng
Length	Độ dài
Group	Nhóm
Group homomorphism	Nhóm đồng cấu
Group isomorphism	Nhóm đẳng cấu
Injective functions	Đơn ánh
Image of homomorphism	Ảnh của đồng cấu
Inner product	Tích trong
Isometry	Đẳng cự
Isometry group	Nhóm đẳng cực
Kernel of homomorphism	Nhân của đồng cấu
Surjective functions	Toán ánh
Special orthogonal group	Nhóm trực giao đặc biệt
Subgroup	Nhóm con
Order of group	Bậc của nhóm

Orientation	Hướng
Orientation-preserving isometry	Đẳng cự bao toàn hướng
Orthogonal matrix	Ma trận trực giao

DANH MỤC CÁC BẢNG

DANH MỤC CÁC HÌNH VẼ, ĐỒ THỊ

LỜI NÓI ĐẦU

Luận văn này trình bày phục vụ cho phần Thực hành của môn Phương pháp nghiên cứu khoa học, Khóa 33 tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP.HCM. Cấu trúc của luận văn này bao gồm hai chương theo yêu cầu của bài tập thực hành.

Chương 1: Nhóm và Đồng cấu Trình bày nội dung cơ sở của Lý thuyết Nhóm - một trong những lĩnh vực nghiên cứu của Đại số.

Chương 2: Hình học Euclidean Trình bày nội dung cơ sở của Hình học Euclidean trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$.

Có một số phần chưa rõ thông tin như các Trang thông tin luận văn bằng tiếng Việt và tiếng Anh, nên các phần này sẽ được điền bằng đoạn mẫu được cung cấp bởi LaTeX thông qua package lipsum.

CHƯƠNG 1
NHÓM VÀ ĐỒNG CẤU

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về lý thuyết nhóm bao gồm các định nghĩa cơ sở về nhóm và đồng cấu.

1.1. Nhóm

Định nghĩa 1 (Toán tử hai ngôi)**.** *Một* toán tử (hai ngôi) *là một cách kết hợp hai phần tử để tạo ra một phần tử mới. Một cách hình thức, nó là một ánh xạ* $*: A \times A \to A$.

Định nghĩa 2 (Nhóm)**.** *Một* nhóm *là một tập hợp G với một toán tử hai ngôi $*$ thỏa mãn những tiên đề sau đây:*

1. *Tồn tại một số $e \in G$ mà với mọi a, ta có:*

$$a * e = e * a = a. \qquad \text{(đơn vị - identity)}$$

2. *Với mọi $a \in G$, tồn tại một số $a^{-1} \in G$ sao cho*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \qquad \text{(nghịch đảo - inverse)}$$

3. *Với mọi $a, b, c \in G$, ta có:*

$$(a * b) * c = a * (b * c). \qquad \text{(kết hợp - associativity)}$$

Định nghĩa 3 (Bậc của nhóm)**.** Bậc của nhóm*, ký hiệu $|G|$, là số lượng phần tử của nhóm G. Một nhóm được gọi là một nhóm hữu hạn nếu bậc của nó là* *hữu hạn.*

Lưu ý rằng *về mặt kỹ thuật*, tiên đề nghịch đảo này không có ý nghĩa gì vì chúng ta chưa chỉ rõ e là gì. Ngay cả khi chúng ta coi nó là e do tiên đề đơn vị đưa ra, tiên đề đơn vị chỉ cho biết có *một số* e thỏa mãn tính chất đó, nhưng có thể có nhiều! Chúng tôi không biết $a * a^{-1}$ nào được cho là bằng với! Vì vậy, về mặt kỹ thuật, chúng ta nên hiểu điều đó có nghĩa là có một số a^{-1} sao cho $a * a^{-1}$ và $a^{-1} * a$ thỏa mãn tiên đề đơn vị. Tất nhiên, chúng ta sẽ sớm chứng tỏ rằng các phần tử đơn vị là duy nhất!.

Một số người đặt một tiên đề số 0 gọi là ”đóng” (closure)

0. Với mọi $a, b \in G$, ta có $a * b \in G$. (đóng - closure)

Về mặt kỹ thuật, tiên đề này cũng vô nghĩa — khi chúng ta nói $*$ là một phép toán hai ngôi, theo định nghĩa, $a * b$ *phải* là phần tử của G. Tuy nhiên, trong thực tế, chúng ta thường phải kiểm tra xem tiên đề này có thực sự đúng hay không. Ví dụ: nếu chúng ta đặt G là tập hợp tất cả các ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dưới phép nhân ma trận, chúng ta sẽ phải kiểm tra xem tích của hai ma trận như vậy có thực sự là ma trận có dạng này hay không. Về mặt chính thức, chúng ta đang kiểm tra xem phép toán hai ngôi có phải là phép toán được xác định rõ ràng trên G hay không.

Điều quan trọng cần biết là về mặt tổng quát *không phải lúc nào* $a * b = b * a$ cũng đúng. Không có lý do *ưu tiên* nào giải thích tại sao điều này cần phải đúng. Ví dụ, nếu chúng ta đang xem xét sự đối xứng của một tam giác, việc quay rồi phản xạ sẽ khác với việc phản xạ rồi quay.

Tuy nhiên, đối với một số nhóm, điều này lại đúng. Chúng ta gọi những nhóm như vậy là các *nhóm abelian* hay *abelian group.*

Định nghĩa 4 (Nhóm Abelian)**.** *Một nhóm là* abelian *nếu nó thỏa mãn*

4. $(\forall a, b \in G)\, a * b = b * a.$ *(giao hoán - commutativity)*

Nếu nó quá rõ ràng, chúng ta có thể lược giản toán tử $*$, và viết $a * b$ như ab. Ta cũng viết $a^2 = aa$, $a^n = \underbrace{aaa \cdots a}_{n \text{ lần}}$, $a^0 = e$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$

Ví dụ 1. *Những nhóm sau đây là các nhóm abelian:*

1. $\mathbb{Z}$ *với* $+$

2. $\mathbb{Q}$ *với* $+$

3. $\mathbb{Z}_n$ *(các số nguyên modulo n) với* $+_n$

4. $\mathbb{Q}^*$ *với* $\times$

5. $\{-1, 1\}$ *với* $\times$

Những nhóm sau đây không là nhóm abelian

6. Sự đối xứng của một tam giác đều (hay bất kỳ một đa giác n đỉnh nào) với toán tử kết hợp (D_{2n}*)*

7. Các ma trận khả nghịch 2×2 *với phép nhân ma trận* $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$

8. Các nhóm đối xứng của các đối tượng 3D.

Hãy nhớ lại rằng tiên đề nhóm đầu tiên yêu cầu phải tồn tại *một* phần tử đơn vị mà chúng ta sẽ gọi là e. Sau đó, tiên đề thứ hai yêu cầu rằng với mỗi a, có một a^{-1} nghịch đảo sao cho $a^{-1}a = e$. Điều này chỉ có ý nghĩa nếu chỉ có một phần tử e, nếu không thì $a^{-1}a$ sẽ bằng với phần tử đơn vị nào?

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng chỉ có thể có một phần tử đơn vị. Hoá ra các nghịch đảo cũng là duy nhất. Vì vậy, chúng ta sẽ nói về phần tử *đơn vị* và phần tử *nghịch đảo*.

Tính chất 1. *Gọi* $(G, *)$ *là một nhóm. Thì* *(i) Phần tử đơn vị là duy nhất.*

(ii) Phần tử nghịch đảo là duy nhất.

Chứng minh.

(i) Giả sử e và e' là hai phần tử đơn vị. Khi đó chúng ta có $ee' = e'$, coi e là nghịch đảo, và $ee' = e$, coi e' là nghịch đảo. Do đó $e = e'$.

(ii) Giả sử a^{-1} và b đều thỏa mãn tiên đề nghịch đảo cho một số $a \in G$. Khi đó $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$. Do đó $b = a^{-1}$. □

Chứng minh hoàn tất.

Tính chất 2. *Gọi $(G, *)$ là một nhóm và $a, b \in G$. Thì*

1. $(a^{-1})^{-1} = a$

2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Chứng minh.

1. Cho a^{-1}, cả a và $(a^{-1})^{-1}$ đều thỏa mãn

$$xa^{-1} = a^{-1}x = e.$$

   Bởi tính duy nhất của nghịch đảo, $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Ta có:

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} \\ &= aea^{-1} \\ &= aa^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

   Tương tự, $(b^{-1}a^{-1})ab = e$. Vì thế $b^{-1}a^{-1}$ là một nghịch đảo của ab. Bởi tính duy nhất của nghịch đảo, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. □

Chứng minh hoàn tất.

Đôi khi nếu chúng ta có một nhóm G, chúng ta có thể muốn loại bỏ một số phần tử. Ví dụ: nếu G là nhóm gồm tất cả các đối xứng của một tam giác, trong một trường hợp nào đó chúng ta có thể quyết định rằng chúng ta không cần sự phản xạ (reflection) bởi vì chúng có hướng ngược chiều nhau. Vì vậy, chúng ta chỉ chọn các phép quay trong G và tạo thành một nhóm mới nhỏ hơn. Chúng tôi gọi đây là *nhóm con (subgroup)* của G.

Định nghĩa 5 (Nhóm con)**.** *Gọi H là một* nhóm con *của G, ký hiệu $H \leq G$, nếu $H \subseteq G$ và H với toán tử hạn chế $*$ từ G cũng là một nhóm.*

Ví dụ 2.

- $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$
- $(e, *) \leq (G, *)$ *(nhóm con tầm thường)*
- $G \leq G$
- $(\{\pm 1\}, \times) \leq (\mathbb{Q}^*, \times)$

Theo định nghĩa, để chứng minh H là nhóm con của G, chúng ta cần đảm bảo H thỏa mãn mọi tiên đề nhóm. Tuy nhiên, theo cách này, việc trình bày rất dài và phức tạp. Thay vào đó, chúng ta đề ra có một số tiêu chí đơn giản hóa để quyết định xem H có phải là nhóm con hay không.

Bổ đề 1 (Tiêu chí nhóm con I)**.** *Gọi $(G, *)$ là một nhóm và $H \subseteq G$. $H \leq G$ nếu và chỉ nếu*

1. $e \in H$
2. $(\forall a, b \in H)\, ab \in H$
3. $(\forall a \in H)\, a^{-1} \in H$

Chứng minh. Các tiên đề nhóm được thỏa mãn như sau:

0. Tiên đề đóng (Closure): (ii)

1. Tiên đề đơn vị (Identity): (i). Lưu ý rằng H và G phải có cùng một phần tử đơn vị. Giả sử rằng e_H và e_G lần lượt là phần tử đơn vị của H và G. Khi đó $e_H e_H = e_H$. Bây giờ e_H có nghịch đảo của G. Vì vậy chúng ta có $e_H e_H e_H^{-1} = e_H e_H^{-1}$. Vậy $e_H e_G = e_G$. Do đó $e_H = e_G$.

2. Tiên đề nghịch đảo (Inverse): (iii)

3. Tiên đề kết hợp (Associativity): suy ra từ G. □

Chứng minh hoàn tất.

Tuy nhiên, với Bổ đề trên việc kiểm tra còn tương đối phức tạp. Chúng ta thường sử dụng Bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2 (Tiêu chí nhóm con II)**.** *Một tập hợp con $H \subseteq G$ là một nhóm con của G nếu và chỉ nếu:*

(I) H khác rỗng

(II) $(\forall a, b \in H)\, ab^{-1} \in H$

Chứng minh. (I) và (II) suy ra theo một cách theo sau một cách tầm thường từ (i), (ii) và (iii).

Để chứng minh rằng (I) và (II) suy ra (i), (ii) và (iii), ta có

1. H phải chứa ít nhất một phần tử a. Thì $aa^{-1} = e \in H$.

3. $ea^{-1} = a^{-1} \in H$.

2. $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$.

Chứng minh hoàn tất. □

Tính chất 3. *Các nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$ chính xác là $n\mathbb{Z}$, với $n \in \mathbb{N}$ ($n\mathbb{Z}$ là bội số nguyên của n).*

Chứng minh. Đầu tiên, rất tầm thường khi chứng minh rằng với bất kỳ $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ là một nhóm con. Chúng ta cần chứng minh rằng bất kỳ nhóm con nào phải có dạng $n\mathbb{Z}$.

Đặt $H \leq \mathbb{Z}$. Chúng tôi biết $0 \in H$. Nếu không có phần tử nào khác trong H thì $H = 0\mathbb{Z}$. Ngược lại, chọn số nguyên dương nhỏ nhất n trong H. Khi đó $H = n\mathbb{Z}$.

Ngược lại, giả sử $(\exists a \in H)\, n \nmid a$. Cho $a = pn + q$, trong đó $0 < q < n$. Vì $a - pn \in H$, $q \in H$. Tuy nhiên $q < n$ nhưng n là thành viên nhỏ nhất của H. Dẫn đến mâu thuẫn. Vậy mọi $a \in H$ đều chia hết cho n. Ngoài ra, với tính đóng, tất cả bội số của n phải ở trong H. Vậy $H = n\mathbb{Z}$. Chứng minh hoàn tất. □

1.2. Đồng cấu

Việc nghiên cứu các hàm giữa các nhóm khác nhau thường rất hữu ích. Đầu tiên chúng ta cần định nghĩa hàm là gì. Những định nghĩa này quen thuộc với phần *lý thuyết số và tập hợp*.

Định nghĩa 6 (Hàm (ánh xạ))**.** *Cho hai tập hợp X, Y, một* hàm (function) *$f : X \to Y$ ánh xạ mỗi $x \in X$ tới một $f(x) \in Y$ cụ thể. X được gọi là miền (domain) và Y là đồng miền (co-domain).*

Ví dụ 3.

- *Identity function: for any set X, $1_X : X \to X$ with $1_X(x) = x$ is a function. This is also written as id_X.*
- *Inclusion map: $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$: $\iota(n) = n$. Note that this differs from the identity function as the domain and codomain are different in the inclusion map.*
- *$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$: $f_1(x) = x + 1$.*
- *$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$: $f_2(x) = 2x$.*
- *$f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$: $f_3(x) = x^2$.*

- *For* $g : \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$*, we have:*
  - $g_1(x) = x + 1$ *if* $x < 4$*;* $g_1(4) = 4$.
  - $g_2(x) = x + 1$ *if* $x < 4$*;* $g_1(4) = 0$.

Định nghĩa 7 (Hàm hợp)**.** Hợp (composition) *của hai hàm là hàm mà ta nhận được bằng cách áp dụng lần lượt từng hàm sau những hàm khác. Cụ thể, nếu* $f : X \to Y$ *và* $G : Y \to Z$*, thì* $g \circ f : X \to Z$ *với* $g \circ f(x) = g(f(x))$*.*

Ví dụ 4. $f_2 \circ f_1(x) = 2x + 2$*.* $f_1 \circ f_2(x) = 2x + 1$*. Lưu ý rằng hàm hợp không có tính giao hoán.*

Định nghĩa 8 (Đơn ánh)**.** *Một hàm (ánh xạ) gọi là đơn ánh (injective functions) nếu nó ánh xạ mọi thứ nhiều nhất một lần, tức là:*

$$(\forall x, y \in X)\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Định nghĩa 9 (Toàn ánh)**.** *Một hàm (ánh xạ) gọi là toàn ánh (surjective functions) nếu nó ánh xạ mọi thứ ít nhất một lần, tức là:*

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y.$$

Định nghĩa 10 (Song ánh)**.** *Một hàm (ánh xạ) là song ánh (bijective) nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, tức là nó biến mọi thứ về chính xác một giá trị. Lưu ý: một ánh xạ có một ánh xạ ngược nếu và chỉ nếu nó là song ánh.*

Bổ đề 3. *Hợp của hai song ánh là song ánh.*

Khi xem xét các tập hợp, các hàm được phép thực hiện tất cả các loại toán tử từ phức tạp đến đơn giản và có thể ánh xạ bất kỳ phần tử nào đến bất kỳ phần tử nào mà không có bất kỳ hạn chế nào. Tuy nhiên, chúng ta hiện đang nghiên cứu các nhóm và các nhóm có cấu trúc bổ sung bên trên tập hợp các phần tử. Do đó chúng ta không quan tâm đến các hàm tùy ý. Thay vào đó, chúng ta quan tâm đến các ánh xạ "giữ được" cấu trúc nhóm. Chúng ta gọi đây là *đồng hình (đồng cấu).*

Định nghĩa 11 (Đồng cấu nhóm)**.** *Đặt* $(G, *)$ *và* $(H, \times)$ *là các nhóm. Ánh xạ* $f : G \to H$ *là một* đồng cấu nhóm *nếu và chỉ nếu*

$$(\forall g_1, g_2 \in G)\, f(g_1) \times f(g_2) = f(g_1 * g_2),$$

Định nghĩa 12 (Đẳng cấu nhóm)**.** Đẳng cấu *là các song ánh đồng cấu. Hai nhóm được gọi là* đẳng cấu *nếu tồn tại sự đẳng cấu giữa chúng. Chúng ta viết* $G \cong H$.

Chúng ta sẽ coi hai nhóm đẳng cấu là "giống nhau". Ví dụ, khi chúng ta nói rằng chỉ có một nhóm bậc 2, điều đó có nghĩa là bất kỳ hai nhóm bậc 2 nào đều phải đẳng cấu.

Ví dụ 5.

- $f : G \to H$ *được định nghĩa bởi* $f(g) = e$, *trong đó* e *là phần tử đơn vị của* H, *là một đồng cấu.*
- $1_G : G \to G$ *và* $f_2 : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ *là đẳng cấu.* $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *và* $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *là đồng cấu.*
- $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \times)$ *với* $\exp(x) = e^x$ *là đẳng cấu.*
- *Lấy* $(\mathbb{Z}_4, +)$ *và* $H : (\{e^{ik\pi/2} : k = 0, 1, 2, 3\}, \times)$. *Thì* $f : \mathbb{Z}_4 \to H$ *by* $f(a) = e^{i\pi a/2}$ *là một đẳng cấu.*
- $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ *với* $f(A) = \det(A)$ *là một đồng cấu, trong đó* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *là tập các ma trận khả nghịch* 2×2.

Tính chất 4. *Giả định rằng* $f : G \to H$ *là một đồng cấu. Thì*

1. *Đồng cấu ánh xác phần tử đơn vị thành phần tử đơn vị, tức là*

$$f(e_G) = e_H$$

2. Đồng cấu ánh xạ phần tử nghịch đảo thành phần tử nghịch đảo, tức là

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

3. Tổ hợp của 2 phép đồng cấu nhóm là phép đồng cấu nhóm.

4. Nghịch đảo của một đẳng cấu là một đẳng cấu.

Chứng minh.

1.

$$\begin{aligned} f(e_G) &= f(e_G^2) = f(e_G)^2 \\ f(e_G)^{-1} f(e_G) &= f(e_G)^{-1} f(e_G)^2 \\ f(e_G) &= e_H \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} e_H &= f(e_G) \\ &= f(aa^{-1}) \\ &= f(a)f(a^{-1}) \end{aligned}$$

Bởi vì nghịch đảo là duy nhất, nên $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

3. Gọi $f : G_1 \to G_2$ và $g : G_2 \to G_3$. Thì $g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b))$.

4. Let $f : G \to H$ là một đẳng cấu. Thì

$$\begin{aligned} f^{-1}(ab) &= f^{-1}\Big\{f\big[f^{-1}(a)\big]f\big[f^{-1}(b)\big]\Big\} \\ &= f^{-1}\Big\{f\big[f^{-1}(a)f^{-1}(b)\big]\Big\} \\ &= f^{-1}(a)f^{-1}(b) \end{aligned}$$

Vì f^{-1} là một đồng cấu. Và vì nó là song ánh, nên f^{-1} là một đẳng cấu. $\square$

Chứng minh hoàn tất.

Định nghĩa 13 (Ảnh của đồng cấu)**.** *Nếu $f : G \to H$ là đồng cấu thì* ảnh *của f là*

$$\operatorname{im} f = f(G) = \{f(g) : g \in G\}.$$

Định nghĩa 14 (Nhân của đồng cấu)**.** Nhân *của f, được viết là*

$$\ker f = f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G : f(g) = e_H\}.$$

Tính chất 5. *Cả ảnh và nhân đều là nhóm con của các nhóm tương ứng, tức là $\operatorname{im} f \leq H$ và $\ker f \leq G$.*

Chứng minh. Vì $e_H \in \operatorname{im} f$ và $e_G \in \ker f$, $\operatorname{im} f$ và $\ker f$ khác rỗng. Hơn nữa, giả định rằng $b_1, b_2 \in \operatorname{im} f$. Bây giờ $\exists a_1, a_2 \in G$ mà $f(a_i) = b_i$. Thì $b_1 b_2^{-1} = f(a_1) f(a_2^{-1}) = f(a_1 a_2^{-1}) \in \operatorname{im} f$.

Xem xét $b_1, b_2 \in \ker f$. Ta có $f(b_1 b_2^{-1}) = f(b_1) f(b_2)^{-1} = e^2 = e$. Nên $b_1 b_2^{-1} \in \ker f$. Chứng minh hoàn tất. $\square$

Tính chất 6. *Với mọi đồng cấu cho trước $f : G \to H$ và bất kỳ $a \in G$, với mọi $k \in \ker f$, $aka^{-1} \in \ker f$.*

Mệnh đề này có vẻ khá vô nghĩa. Tuy nhiên, không phải vậy. Tất cả các nhóm con thỏa mãn đặc tính này được gọi là *nhóm con chuẩn*, và các nhóm con chuẩn tắc có những thuộc tính rất quan trọng.

Chứng minh. $f(aka^{-1}) = f(a)f(k)f(a)^{-1} = f(a)ef(a)^{-1} = e$. So $aka^{-1} \in \ker f$. Chứng minh hoàn tất. $\square$

Ví dụ 6. *Ảnh và nhân cho các hàm được xác định trước đó:*

1. *Với các hàm mà ánh xạ mọi thứ về e, $\operatorname{im} f = \{e\}$ và $\ker f = G$.*

2. *Với các ánh xạ đơn vị,* $\operatorname{im} 1_G = G$ *và* $\ker 1_G = \{e\}$.

3. *Với các ánh xạ* $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$*, ta có* $\operatorname{im} \iota = \mathbb{Z}$ *và* $\ker \iota = \{0\}$

4. *Với* $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *và* $f_2(x) = 2x$*, ta có* $\operatorname{im} f_2 = 2\mathbb{Z}$ *và* $\ker f_2 = \{0\}$.

5. *Với* $\det : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$*, ta có* $\operatorname{im} \det = \mathbb{R}^*$ *và* $\ker \det = \{A : \det A = 1\} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Tính chất 7. *Với mọi đồng cấu* $f : G \to H$*,* f *là*

1. *toàn ánh nếu và chỉ nếu* $\operatorname{im} f = H$

2. *đơn ánh nếu và chỉ nếu* $\ker f = \{e\}$

Chứng minh.

1. Bởi định nghĩa.

2. Ta đã biết $f(e) = e$. Nên nếu f là đơn ánh, thì bởi định nghĩa $\ker f = \{e\}$. Nếu $\ker f = \{e\}$, thì cho trước a, b mà $f(a) = f(b)$, $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e$. Do đó $ab^{-1} \in \ker f = \{e\}$. Thì $ab^{-1} = e$ và $a = b$. □

Chứng minh hoàn tất.

Cho đến đây, các định nghĩa về ảnh và nhân dường như chỉ là thuật ngữ thuận tiện để đề cập đến sự vật. Tuy nhiên, sau này chúng ta sẽ chứng minh một định lý quan trọng, *định lý đẳng cấu thứ nhất (first isomorphism theorem)*, liên hệ hai đối tượng này và cung cấp những hiểu biết sâu sắc (hy vọng vậy).

CHƯƠNG 2

HÌNH HỌC EUCLIDEAN

Trong chương này, chúng tôi trình bày những kiến thức cơ bản về hình học Euclidean bao gồm các phép đẳng cực trên mặt phẳng Euclidean và khái niệm đường cong trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$.

2.1. Các phép đẳng cực trong mặt phẳng Euclidean

Mục đích của phần này là nghiên cứu các ánh xạ trên $\mathbb{R}^n$ mà bảo toàn khoảng cách, tức là *đẳng cực* của không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Trước khi bắt đầu, chúng ta định nghĩa khái niệm khoảng cách trên không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$ theo cách thông thường.

Định nghĩa 15 (Tích trong)**.** Tích trong(Inner product) *trên* $\mathbb{R}^n$ *được định nghĩa bởi*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Định nghĩa 16 (Chuẩn Euclidean)**.** Chuẩn Euclidean (Euclidean norm) *của* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *là*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Điều này định nghĩa một metric trên $\mathbb{R}^n$ *bởi*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Lưu ý rằng tích trong và chuẩn đều phụ thuộc vào sự lựa chọn gốc tọa độ của chúng ta, nhưng khoảng cách thì không. Nói chung, chúng ta không mong muốn có sự lựa chọn về gốc tọa độ — việc chọn gốc tọa độ chỉ để cho một cách biểu diễn (rất) thuận tiện cho các điểm. Gốc tọa độ không phải là một điểm đặc biệt (về lý thuyết). Theo ngôn ngữ bình thường, chúng ta nói rằng chúng ta xem $\mathbb{R}^n$ dưới dạng *không gian affine* thay vì *không gian vector.*

Định nghĩa 17 (Đẳng cực)**.** *Một ánh xạ* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *là một đẳng cự (isometry) nếu*

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*.*

Lưu ý rằng f không bắt buộc phải tuyến tính. Điều này là do chúng ta đang xem $\mathbb{R}^n$ như một không gian affine và tính tuyến tính chỉ có ý nghĩa nếu chúng ta có một điểm được chỉ định làm gốc. Tuy nhiên, chúng ta vẫn sẽ xem các phép đẳng cự tuyến tính là các phép đẳng cự "đặc biệt", vì chúng thuận tiện hơn khi làm việc, mặc dù về cơ bản không đặc biệt.

Mục tiêu hiện tại của chúng ta là phân loại các *tất cả* phép đẳng cự của $\mathbb{R}^n$. Chúng ta bắt đầu với các đẳng cự tuyến tính. Nhắc lại định nghĩa sau:

Định nghĩa 18 (Ma trận trực giao)**.** *Một ma trận* $n \times n$ *được gọi là* trực giao (orthogonal) *nếu* $AA^T = A^T A = I$*. Nhóm của tất cả ma trận trực giao được gọi là nhóm trực giao* $\mathrm{O}(n)$*.*

Một cách tổng quát, với mọi ma trận A và $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{y} = (\mathbf{x}, A^T A\mathbf{y}).$$

Nên A trực giao nếu và chỉ nếu $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ với mọi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Nhắc lại về tích trong có thể khai triển dựa trên định nghĩa chuẩn như sau:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2).$$

Vì vậy, nếu A bảo toàn chuẩn, thì nó bảo toàn tích trong, và điều ngược lại rõ ràng là đúng. Vì vậy A trực giao khi và chỉ nếu $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Do đó ma trận là trực giao khi và chỉ khi chúng là phép đẳng cự (isometries).

Một cách tổng quát, gọi

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Thì

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|.$$

Vì vậy, mọi f có dạng này đều là phép đẳng cự khi và chỉ khi A trực giao. Điều này không quá ngạc nhiên. Điều có thể không được mong đợi là tất cả các phép đo đều có dạng này.

Định lý 2.1.1. *Mọi đẳng cự của $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

với A trực giao và $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Gọi f là một đẳng cự. Gọi $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{R}^n$. Gọi

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{0}), \quad \mathbf{a}_i = f(\mathbf{e}_i) - \mathbf{b}.$$

Ý tưởng là xây dựng ma trận A từ $\mathbf{a}_i$. Với A trực giao, $\{\mathbf{a}_i\}$ phải là cơ sở trực chuẩn (orthonormal basis)

Thật vậy, chúng ta có thể tính toán

$$\|\mathbf{a}_i\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{0})\| = d(f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{0})) = d(\mathbf{e}_i, \mathbf{0}) = \|\mathbf{e}_i\| = 1.$$

Với $i \neq j$, ta có:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) &= -(\mathbf{a}_i, -\mathbf{a}_j) \\
&= -\frac{1}{2}(\|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j\|^2 - \|\mathbf{a}_i\|^2 - \|\mathbf{a}_j\|^2) \\
&= -\frac{1}{2}(\|f(\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{e}_j)\|^2 - 2) \\
&= -\frac{1}{2}(\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\|^2 - 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Thế nên $\mathbf{a}_i$ và $\mathbf{a}_j$ trực giao. Nói cách khác, $\{\mathbf{a}_i\}$ hình thành một tập trực giao. Một kết quả dễ dàng là mọi tập trực giao đều phải độc lập tuyến tính. Vì chúng ta đã tìm được n vector trực chuẩn nên chúng tạo thành một cơ sở trực chuẩn.

Do đó, ma trận A với các cột được cho bởi vectơ cột $\mathbf{a_i}$ là ma trận trực giao. Chúng ta xác định một đẳng cự mới

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Ta muốn chứng minh $f = g$. Bằng cách xây dựng, ta đã biết $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ là đúng với $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$.

Chúng ta thấy rằng g là khả nghịch. Đặc biệt,

$$g^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) = A^T\mathbf{x} - A^T\mathbf{b}.$$

Hơn nữa, nó là một phép đẳng cự, vì A^T là trực giao (hoặc chúng ta có thể dựa vào thực tế tổng quát hơn rằng nghịch đảo của các phép đẳng cự là các phép đẳng cự).

Ta định nghĩa

$$h = g^{-1} \circ f.$$

Vì nó là hợp của các phép đẳng cự nên nó cũng là một phép đẳng cự. Hơn nữa, nó còn cố định $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}$.

Hiện tại chỉ cần chứng minh rằng h là duy nhất.

Gọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, và khai triển nó trong cơ sở như sau:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

Gọi

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i.$$

Ta có thể tính:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i, \mathbf{x} - \mathbf{e}_i) = \|\mathbf{x}\|^2 + 1 - 2x_i \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^2 &= \|\mathbf{x}\|^2. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)^2 &= (\mathbf{y} - \mathbf{e}_i, \mathbf{y} - \mathbf{e}_i) = \|\mathbf{y}\|^2 + 1 - 2y_i \\ d(\mathbf{y}, \mathbf{0})^2 &= \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Vì h là đẳng cự và cố định $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$, và bởi định nghĩa $h(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, ta phải có

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{0}), \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) = d(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i).$$

Đẳng thức đầu tiên cho ta $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2$, và đẳng thức còn lại ám chỉ $x_i = y_i$ với mọi i. Nói cách khác, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = h(\mathbf{x})$. Thế nên h là duy nhất. Chứng minh hoàn tất. $\square$

Tiếp theo chúng ta sẽ tổng hợp tất cả các đẳng cự thành một nhóm.

Định nghĩa 19 (Nhóm đẳng cự)**.** Nhóm đẳng cự $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *là nhóm gồm tất cả các phép đối xứng của* $\mathbb{R}^n$*, là một nhóm theo thành phần.*

Ví dụ 7 (Sự phản xạ trong một siêu phẳng affine)**.** *Gọi* $H \subseteq \mathbb{R}^n$ *là một siêu* *phẳng affine được cho bởi*

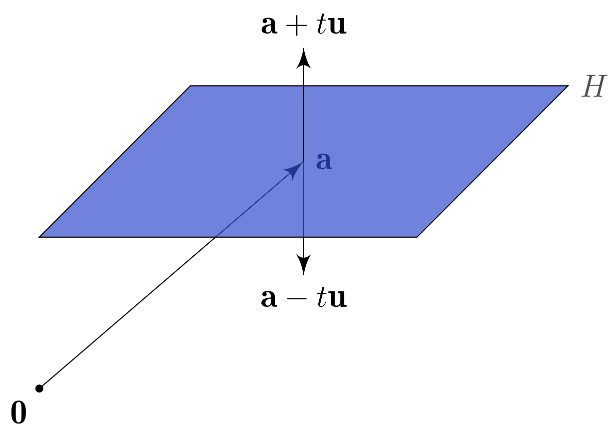
$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = c\},$$

trong đó $\|\mathbf{u}\| = 1$ *và* $c \in \mathbb{R}$. *Đây chỉ là một khái quát tự nhiên của một mặt phẳng 2 chiều trong* r^3. *Lưu ý rằng không giống như không gian con vector, nó không phải chứa gốc tọa độ (vì nguồn gốc không phải là một điểm đặc biệt).*

Phản xạ trong H, *được viết là* R_H, *là một ánh xạ*

$$\begin{aligned} R_H : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - c)\mathbf{u} \end{aligned}$$

Chúng ta cần kiểm tra những tính chất mà chúng ta nghĩ rằng một phản xạ nên có. Lưu ý rằng mọi điểm trong r^n *có thể được viết là* $\mathbf{a} + t\mathbf{u}$, *trong đó* $\mathbf{a} \in h$. *Sau đó, sự phản xạ sẽ ánh xạ điểm này đến* $\mathbf{A} - T\mathbf{u}$.



Đây là một kiểm tra thông thường:

$$R_H(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) = (\mathbf{a} + t\mathbf{u}) - 2t\mathbf{u} = \mathbf{a} - t\mathbf{u}.$$

Cụ thể, chúng ta biết R_H *cố định chính xác các điểm của* H.

Ngược lại cũng đúng — với bất kỳ đẳng cự $S \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *nào mà cố định những điểm trong một số siêu phẳng affine* H *thì duy nhất hoặc* R_H.

Để chứng minh điều này, trước tiên chúng ta tịnh tiến mặt phẳng sao cho nó trở thành không gian con vector. Sau đó, chúng ta có thể sử dụng phép toán đại số tuyến tính của chúng ta. Đối với bất kỳ $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*, chúng ta có thể định nghĩa phép tịnh tiến bởi* $\mathbf{a}$ *như sau:*

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Đây rõ ràng là một phương pháp đẳng cự.

Ta chọn bất kỳ một $\mathbf{a} \in H$*, và gọi* $R = T_{-\mathbf{a}} S T_{\mathbf{a}} \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$*. Thì* R *cố định chính xác* $H' = T_{-\mathbf{a}} H$*. Vì* $\mathbf{0} \in H'$*,* H' *là một không gian vector con. Cụ thể mà nói, nếu* $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = c\}$*, thì bằng cách đặt* $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$*, ta tìm thấy*

$$H' = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Để hiểu R*, chúng ta đã biết nó cố định mọi thứ trong* H'*. Vì vậy, chúng ta muốn xem những gì nó làm với* $\mathbf{u}$*. Lưu ý rằng vì* R *là một đẳng cự và nó cố định gốc tọa độ, cụ thể là nó là một ánh xạ trực giao. Do đó, với bất kỳ* $\mathbf{x} \in h'$*, ta thu được:*

$$(R\mathbf{u}, \mathbf{x}) = (R\mathbf{u}, R\mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0.$$

Vì $R\mathbf{u}$ *vuông gốc với* H'*. Vì thế* $R\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ *với một số* λ*. Vì* R *là một đẳng cự, ta có* $\|R\mathbf{u}\|^2 = 1$*. Vì thế* $|\lambda|^2 = 1$*, và do đó* $\lambda = \pm 1$*. Thế nên nếu* $\lambda = 1$*, và* $R = \mathrm{id}$*; hoặc* $\lambda = -1$*, và* $R = R_{H'}$*, ta luôn có các ma trận trực giao.*

Do đó, theo đó $S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$*, hoặc* S *là phản xạ trong* H*.*

Do đó, ta tìm thấy mỗi phản xạ R_H *là đẳng cự cố định duy nhất* H *nhưng không* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$

Xem xét nhóm con $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ mà cố định $\mathbf{0}$. Bởi khai triển tổng quát cho đẳng cự tổng quát, ta đã biết đây là tập $\{f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} : AA^T = I\} \cong \mathrm{O}(n)$, nhóm trực giao.

Với mỗi $A \in \mathrm{O}(n)$, ta phải có $\det(A)^2 = 1$. So $\det A = \pm 1$. Ta sử dụng điều này để định những nhóm conkhac1, nhóm trực giao đặc biệt (special orthogonal group).

Định nghĩa 20 (Nhóm trực giao đặc biệt)**.** *Nhóm trực giao đặc biệt là nhóm*

$$\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = 1\}.$$

Chúng ta có thể nhìn vào những điều này rõ ràng cho chiều thấp.

Ví dụ 8. *Xem xét*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)$$

có tính trực giao mà sau đó ràng buộc

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Bây giờ, ta chọn $0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$ *mà*

$$\begin{aligned} a &= \cos\theta & b &= -\sin\varphi \\ c &= \sin\theta & d &= \cos\varphi. \end{aligned}$$

Thì $ab + cd = 0$ *cho* $\tan\theta = \tan\varphi$ *(nếu* $\cos\theta$ *và* $\cos\varphi$ *bằng không, ta nói một cách hình thức rằng cả hai là vô hạn. Thế nên, nếu* $\theta = \varphi$ *hay* $\theta = \varphi \pm \pi$*. Dẫn đến việc ta có*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ or } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

một cách tương ứng. Trong trường hợp đầu tiên, đây là một phép xoay thông qua θ *quanh gốc tọa độ. Đây là định thức 1, và do đó* $A \in \mathrm{SO}(2)$*.*

Trong trường hợp thứ hai, đây là một phản xạ trong đường thẳng ℓ *tại góc* $\frac{\theta}{2}$ *so với trục* x*. Thì* $\det A = -1$ *và* $A \notin \mathrm{SO}(2)$*.*

Vì vậy, trong hai chiều, các ma trận trực giao là các phản xạ hoặc xoay —

những điều kiện trong $\mathrm{SO}(2)$ *là các phép xoay và các phép khác là các phản xạ.*

Trước khi chúng ta có thể chuyển sang ba chiều, chúng ta cần có khái niệm định hướng. Chúng ta có thể trực giác biết một hướng là gì, nhưng khá khó để xác định hướng chính thức. Điều tốt nhất chúng ta có thể làm là cho biết liệu hai cơ sở nhất định của không gian vector có "cùng một hướng" hay không. Do đó, sẽ có ý nghĩa khi định nghĩa một định hướng là một loại cơ sở tương đương của "cùng một hướng". Chúng ta chính thức xác định nó như sau:

Định nghĩa 21 (Hướng)**.** *Một hướng của một không gian vector là một lớp tương đương của cơ sở — gọi* $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ *và* $\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_n$ *là hai cơ sở và* A *là ma trận chuyển cơ sở. Ta nói rằng hai cơ sở tương đương nếu và chỉ nếu* $\det A > 0$*. Đây là một quan hệ tương đương trên các cơ sở và các lớp tương đương là các hướng.*

Định nghĩa 22 (Đẳng cự bảo toàn hướng)**.** *Một đẳng cự* $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *là bảo toàn hướng nếu* $\det A = 1$*. Ngược lại, nếu* $\det A = -1$*, ta nói nó là bảo toàn hướng.*

Ví dụ 9. *Bây giờ, ta muốn kiểm tra* $\mathrm{O}(3)$*. Đầu tiên, tập trung vào trường hợp trong đó* $A \in \mathrm{SO}(3)$*, tức là* $\det A = 1$*. Thì ta có thể tính*

$$\det(A - I) = \det(A^T - I) = \det(A)\det(A^T - I) = \det(I - A) = -\det(A - I).$$

Vì thế $\det(A - I) = 0$*, tức là* $+1$ *là một giá trị riêng trong* $\mathbb{R}$*. Thế nên có một số* $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ *mà thỏa* $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$*.*

Ta đặt $W = \langle \mathbf{v}_1 \rangle^\perp$*. Gọi* $\mathbf{w} \in W$*. Thì ta có thể tính toán*

$$(A\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) = (A\mathbf{w}, A\mathbf{v}_1) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) = 0.$$

Vì thế $A\mathbf{w} \in W$*. Nói cách khác,* W *được cố định bởi* A*, and* $A|_W : W \to W$ *được định nghĩa tốt. Hơn nữa, nó vẫn trực giao và có định thức* 1*. Vì thế nó là một phép xoay của không gian vector hai chiều* W

Ta chọn $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của* W*. Thì dưới những cơ sở* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$*, A được biểu diễn bởi*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Đây là một đẳng cự bảo toàn hướng tổng quát nhất của $\mathbb{R}^3$ *mà cố định gốc tọa độ.*

Thế còn các bảo toàn hướng khác thì sao? Giả định $\det A = -1$*. Thì* $\det(-A) = 1$*. Thế nên trong một số cơ sở trực chuẩn, ta có thể khai triển A như sau:*

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vì thế A có dạng như sau:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

trong đó $\varphi = \theta + \pi$*. Đây là một phản xạ đã được xoay, tức là đầu tiên chúng ta thực hiện một phép phản xạ, sau đó xoay. Trong những trường hợp cụ thể trong đó* $\varphi = 0$*, đây là một phép phản xạ thuần.*

2.2. Các đường cong trong không gian $\mathbb{R}^n$

Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét ngắn gọn các đường cong trong $\mathbb{R}^n$. Điều này sẽ được trình bày ngắn gọn, vì các đường cong trong $\mathbb{R}^n$ không quá thú vị. Sự thật thú vị nhất có thể là đường cong ngắn nhất giữa hai điểm là một đường thẳng, nhưng chúng ta thậm chí không cần chứng minh điều đó.

Định nghĩa 23 (Curve). *Một đường cong* Γ *in* $\mathbb{R}^n$ *là một ánh xạ liên tục* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

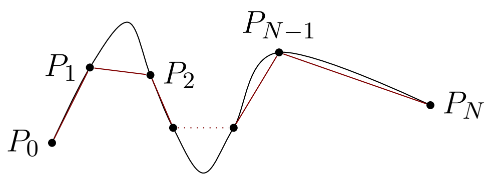
Ở đây chúng ta có thể nghĩ về đường cong như là quỹ đạo của một hạt di chuyển qua thời gian. Mục tiêu chính của chúng ta trong phần này là xác định độ dài của một đường cong. Chúng ta có thể muốn định nghĩa độ dài là

$$\int_a^b \|\Gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t,$$

đây là một phép tính rất quen thuộc mà ta có thể thấy ở Giáo trình Vi tích phân. Tuy nhiên, chúng ta không thể làm điều này, vì định nghĩa của chúng tôi về một đường cong không yêu cầu γ phải liên tục khả vi. Nó chỉ đơn thuần là bắt buộc phải liên tục. Do đó chúng ta phải xác định độ dài theo cách vòng quanh hơn.

Một cách tương tự như định nghĩa của tích phân Riemann, chúng ta xem xét một miền được cắt nhỏ $\mathcal{D} = a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ của $[a, b]$, và một tập $P_i = \Gamma(t_i)$. Ta định nghĩa

$$S_{\mathcal{D}} = \sum_i \|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}\|.$$



Lưu ý rằng nếu chúng ta thêm nhiều điểm, thì $S_{\mathcal{D}}$ sẽ tăng lên, bởi bất đẳng thức tam giác. Nên có có ý nghĩa để định nghĩa độ dài bằng chặn trên nhỏ nhất (supremum)

Định nghĩa 24 (Length of curve). *Độ dài của một đường cong* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *là*

$$\ell = \sup_{\mathcal{D}} S_{\mathcal{D}},$$

nếu supremum tồn tại.

Một cách khác, nếu ta đặt

$$\text{mesh}(\mathcal{D}) = \max_i (t_i - t_{i-1}),$$

thì nếu ℓ tồn tại, thì ta có

$$\ell = \lim_{\text{mesh}(\mathcal{D}) \to 0} s_{\mathcal{D}}.$$

Lưu ý cũng bởi định nghĩa, ta có thể viết

$$\ell = \inf\{\tilde{\ell} : \tilde{\ell} \geq S_{\mathcal{D}} \text{ for all } \mathcal{D}\}.$$

Định nghĩa tự nó không quá hữu ích, vì không có cách nào tốt và dễ dàng để kiểm tra xem supremum có tồn tại không. Tuy nhiên, sự khả vi cho phép chúng ta tính toán điều này một cách dễ dàng theo cách dự kiến.

Tính chất 8. *Nếu Γ khả vi liên tục (tức là C^1), thì độ dài của Γ được cho bởi*

$$\text{length}(\Gamma) = \int_a^b \|\Gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Phần chứng minh của mệnh đề này là một kiểm tra cẩn thận rằng định nghĩa của tích phân trùng với định nghĩa về độ dài.

Chứng minh. Để đơn giản và không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $n = 3$. Tất nhiên, phần chứng minh sẽ hoạt động được với tất cả các chiều có thể có. Ta viết như sau:

$$\Gamma(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)).$$

Với mọi $s \neq t \in [a, b]$, định lý giá trị trung cho chúng ta biết

$$\frac{f_i(t) - f_i(s)}{t - s} = f_i'(\xi_i)$$

với một số $\xi_i \in (s,t)$, với tất cả $i = 1,2,3$.

Bây giờ, lưu rằng rằng f_i' liên tục trên một khoảng đóng bị chặn, và do đó liên tục đồng nhất Với tất cả $\varepsilon \in 0$, có một số $\delta > 0$ mà thỏa mãn $|t-s| < \delta$ ám chỉ

$$|f_i'(\xi_i) - f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

với mọi $\xi \in (s,t)$. Dẫn đến, với bất kỳ $\xi \in (s,t)$, ta có

$$\left\| \frac{\Gamma(t)-\Gamma(s)}{t-s} - \Gamma'(\xi) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} f_1'(\xi_1) \\ f_2'(\xi_2) \\ f_3'(\xi_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1'(\xi) \\ f_2'(\xi) \\ f_3'(\xi) \end{pmatrix} \right\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Nói cách khác,

$$\|\Gamma(t) - \Gamma(s) - (t-s)\Gamma'(\xi)\| \le \varepsilon(t-s).$$

Ta đổi biến $t = t_i$, $s = t_{i-1}$ và $\xi = \frac{s+t}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức tam giá, ta có:

$$\begin{aligned}(t_i - t_{i-1}) \left\| \Gamma'\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\| - \varepsilon(t_i - t_{i-1}) &< \|\Gamma(t_i) - \Gamma(t_{i-1})\| \\ &< (t_i - t_{i-1}) \left\| \Gamma'\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Lấy tổng trên tất cả i, ta thu được

$$\begin{aligned}\sum_i (t_i - t_{i-1}) \left\| \Gamma'\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\| - \varepsilon(b-a) &< S_{\mathcal{D}} \\ &< \sum_i (t_i - t_{i-1}) \left\| \Gamma'\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right\| + \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

mà đúng với bất cứ khi nào $\text{mesh}(\mathcal{D}) < \delta$.

Bởi vì Γ' là liên tục, và vì sự khả tích, ta biết

$$\sum_i (t_i - t_{i-1}) \left\| \Gamma' \left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right\| \to \int_a^b \|\Gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

như $\mathrm{mesh}(\mathcal{D}) \to 0$, và

$$\mathrm{length}(\Gamma) = \lim_{\mathrm{mesh}(\mathcal{D}) \to 0} S_{\mathcal{D}} = \int_a^b \|\Gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t. \qquad \square$$

Chứng minh hoàn tất.

CHƯƠNG 3
KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN TƯƠNG LAI

Trên đây là một bản trình bày ngắn gọn về các kiến thức cơ bản bao gồm:

- Lý thuyết nhóm, và đồng cấu
- Cơ sở hình học Euclidean và một số khái niệm cơ bản về đường cong và độ dài của nó trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$.

Phần lớn bài làm này được dịch lại dựa trên lecture notes về Group của J. Goedecke tại Đại học Cambridge (2014) được ghi lại bởi Dexter Chua.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Anh:

[1] Dexter Chua, *Groups Lecture Notes's J.Goedecke*, 2014.

[2] Christopher G Gibson (2003), *Elementary Euclidean geometry: an introduction*, Cambridge University Press.

[3] Derek JS Robinson (2012), *A Course in the Theory of Groups*, **volume** 80, Springer Science & Business Media.