

FÍSICA III — AULA DE 15 DE JUNHO DE 2020.

O POTENCIAL VETOR

Relação entre potencial vetor e campo magnético.

Vimos, na aula de 9 de junho, que o campo magnético \vec{B} pode ser escrito como o rotacional de um vetor \vec{A} , conhecido como *potencial vetor*:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1)$$

Isso é conveniente, porque, como vimos, garante que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

Potencial vetor para campo magnético uniforme

Entretanto, a Eq. (1) não determina o potencial vetor de maneira única. Vejamos um exemplo. Considere um campo magnético uniforme

$$\vec{B} = B\hat{z}. \quad (2)$$

De acordo com a Eq. (2), as componentes x e y de $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ são nulas:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

enquanto a componente z é dada por:

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B. \quad (5)$$

Uma vez que A_z não aparece na Eq. (5), para simplificar as Eqs. (3) e (4), podemos escolher $A_z = 0$. Se, além disso, impusermos que nem A_y nem A_x dependam de z , garantiremos que as Eqs. (4) e (5) sejam satisfeitas.

Resta a Eq. (5). Como as derivadas à esquerda são de primeira ordem e o lado direito é independente de x e y , podemos procurar soluções lineares, isto é,

$$A_y(x, y, z) = \alpha x \quad (6)$$

e

$$A_x(x, y, z) = \beta y, \quad (7)$$

onde α e β são constantes a determinar.

Da Eq. (6), temos que $\partial A_y / \partial x = \alpha$. Substituímos no lado direito da Eq. (6). Analogamente, da Eq. (7), concluímos que $\partial A_x / \partial y = \beta$, que também substituímos no lado direito da Eq. (7). Resulta que

$$\alpha - \beta = B. \quad (8)$$

Você pode perguntar-se por que calcular \vec{A} para depois obter \vec{B} ; não seria mais fácil calcular \vec{B} diretamente? A resposta a essa pergunta é positiva nos poucos casos em que podemos obter o campo magnético, diretamente, da lei de Ampère. Quando se trata de um fio infinito, por exemplo, é fácil explorar a lei de Ampère, como já vimos. Nos demais casos, precisaremos de um procedimento para encontrar o campo magnético a partir da corrente. Mais abaixo, veremos que calcular \vec{A} a partir das densidades de corrente é tão fácil quanto calcular o potencial eletrostático a partir de uma densidade de cargas, ainda que mais trabalhoso. E, uma vez obtido \vec{A} , a Eq. (1) imediatamente permite calcular \vec{B} . Há, além dessa, duas razões para conhecermos bem o potencial vetor: (1) em certos ramos da física que você estudará em semestres futuros, como a mecânica quântica ou a mecânica clássica nas formulações de Lagrange ou Hamilton, o equivalente da força de Lorentz se escreve em função do potencial vetor, não do campo magnético; e (2) ao estudar a teoria da relatividade, veremos que o potencial e o potencial vetor pertencem a uma mesma estrutura. Em outras palavras, o potencial vetor é uma grandeza física mais fundamental do que o campo magnético.

Essa igualdade não fixa α nem β . Apenas estabelece que os dois coeficientes são múltiplos de B e estão relacionados, um com o outro. Temos, portanto, liberdade para escolher β e empregar a Eq. (8) para encontrar o coeficiente α correspondente.

Dois exemplos. No primeiro, escolhemos $\beta = -B/2$, e resulta que $\alpha = B/2$. Com isso, temos da Eq. (7) que

$$A_x = -\frac{B}{2}y \quad (9)$$

e da Eq. (6),

$$A_y = \frac{B}{2}x, \quad (10)$$

ou seja

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(x\hat{y} - y\hat{x}). \quad (11)$$

Essa escolha, $\alpha = B/2$ e $\beta = -B/2$, é especial porque o potencial vetor resultante é perpendicular ao vetor posição bidimensional

$$\vec{p} = x\hat{x} + y\hat{y}. \quad (12)$$

Isso é fácil verificar. Basta ver que o produto escalar entre os dois vetores é nulo:

$$\vec{A} \cdot \vec{p} = -\frac{B}{2}yx + \frac{B}{2}xy = 0. \quad (13)$$

A figura 1 mostra o potencial em dois pontos do plano xy , perpendicular ao campo magnético.

Uma vez que o potencial vetor é tangente a suas linhas de campo, as linhas de campo resultantes são as circunferências desenhadas na figura 2. São circunferências porque o potencial vetor, que é tangente a elas, é perpendicular ao raio, em qualquer ponto. Elas se tornam mais densas à medida que a distância da origem aumenta porque o módulo do potencial vetor cresce com a distância.

O segundo exemplo é ainda mais simples. Podemos escolher $\beta = 0$. O coeficiente α resultante da Eq. (8) é igual a B . As Eqs. (6) e (7) então conduzem ao potencial vetor

$$\vec{A}' = Bx\hat{y}, \quad (14)$$

que chamamos de \vec{A}' para distinguir do vetor

O módulo do potencial vetor na (14) cresce em proporção a x , mas a direção é paralela ao eixo y . E, como indica a figura 3, o potencial vetor se anula sobre o eixo das ordenadas e tem o sentido de $-\hat{y}$ no semiplano $x < 0$. Nem precisamos desenhar as linhas de campo para visualizá-las, porque as linhas são verticais, que sobem para $x > 0$ e descem para $x < 0$.

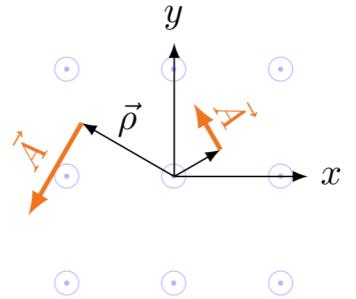


Figura 1: Potencial vetor dado pelas Eqs. (9) e (10). O campo magnético, na direção \hat{z} , é indicado pelos símbolos \odot . Como demonstrado pela Eq. (13), o potencial vetor em cada ponto é ortogonal ao vetor posição \vec{p} .

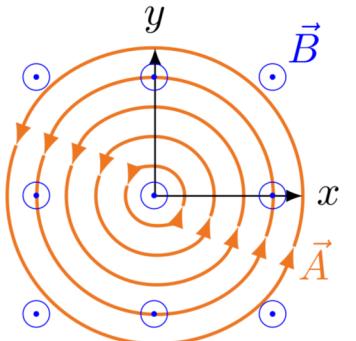


Figura 2: Linhas de campo do potencial vetor para o campo magnético uniforme dado pela Eq. (2).

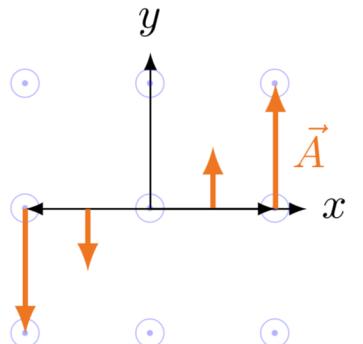


Figura 3: O potencial vetor da Eq. (14).

As expressões para \vec{A} e \vec{A}' são diferentes, e as linhas de campo são também distintas. No entanto, tanto é verdade que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ como é verdade que $\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{B}$. Como podemos ver, a equação (1) não especifica o potencial vetor de maneira única.

Você pode dizer: “É claro! A Eq. (1) é uma equação diferencial, e todos sabem que, para resolver uma equação diferencial é necessário impor condições de contorno. Como resolvemos sem impor condições de contorno, encontramos duas soluções particulares da equação diferencial que são distintas. É o que seria de se esperar.” É verdade que, para resolver as três equações diferenciais em que a Eq. (1) se compõe (uma para a componente B_x , outra para B_y e a terceira para B_z), precisamos de condições de contorno, mas o problema é mais complexo do que isso.

Para entender, vale a pena calcular a diferença entre os dois potenciais vetores que encontramos. A subtração entre as Eqs. (11) e (14) mostra que

$$\vec{A}' - \vec{A} = \frac{B}{2}(x\hat{y} + y\hat{x}). \quad (15)$$

A Eq. (15) não parece ter interpretação simples, até que percebemos que o lado direito é o gradiente de uma função:

$$\vec{A}' - \vec{A} = \frac{B}{2}\vec{\nabla}(xy). \quad (16)$$

A Eq. (16) mostra um caso particular de uma propriedade geral da Eq. (1). Dado um campo magnético \vec{B} e encontrado um potencial vetor \vec{A} tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, para encontrar outro potencial vetor \vec{A}' tal que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}'$, basta tomar uma função escalar contínua qualquer $\Lambda = \Lambda(x, y, z)$ e somar o gradiente Λ ao vetor \vec{A} :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}(\Lambda). \quad (17)$$

A transformação $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ é conhecida como *transformação de calibre*. A transformação muda o potencial vetor, mas não afeta o campo magnético dele resultante. Em outras palavras, o campo magnético permanece invariante sob uma transformação de calibre.

Na Eq. (16), a função escalar que gera a transformação de calibre é $\Lambda' = (B/2)xy$. Se escolhermos outra função, $\Lambda'' = Bx^2$, por exemplo, encontraremos outro potencial vetor:

$$\vec{A}'' = \vec{A}' + \vec{\nabla}\Lambda'', \quad (18)$$

ou seja

$$\vec{A}'' = \frac{B}{2}\left(x\hat{y} + (4x - y)\hat{x}\right). \quad (19)$$

A função Λ tem de ter dimensão de fluxo de campo magnético (campo magnético vezes distância ao quadrado). Isso porque seu gradiente tem dimensão de potencial vetor e o rotacional do potencial vetor tem dimensão de campo magnético.

Em todos os casos, o rotacional do potencial vetor é o campo magnético. De fato,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Lambda, \quad (20)$$

e como o rotacional de um gradiente é sempre nulo, podemos ver que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}. \quad (21)$$

O número de potenciais vetores $\vec{A}', \vec{A}'', \dots$ que podem ser gerados a partir de um dado potencial vetor \vec{A} é, portanto, infinito. Você pode perguntar-se de onde vem tal indefinição.

A resposta está escondida na própria Eq. (1). Dado um vetor \vec{A} , podemos calcular as nove derivadas parciais de suas componentes exibidas na tabela 1. Dado um campo magnético, a Eq. (1) relaciona umas com as outras as derivadas parciais impressas em preto na tabela, mas nada diz sobre as impressas em verde.

Dado um campo \vec{B} , portanto, é perfeitamente possível encontrarmos duas expressões para o potencial vetor que gerem o mesmo rotacional, mas que tenham, por exemplo, diferentes derivadas $\partial A_x / \partial x$. As Eqs. (11) e (19) oferecem uma ilustração. Da primeira, podemos ver que

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

enquanto que a segunda nos informa que

$$\frac{\partial A''_x}{\partial x} = 2B. \quad (23)$$

Para eliminar, ao menos em parte, essa indefinição, é tradicional impor a condição

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (24)$$

que é conhecida como *calibre de Coulomb*.

O potencial vetor da Eq. (11) respeita a essa condição, mas o da Eq. (19) está em desacordo com ela. De maneira geral, se um vetor \vec{A} obedece ao calibre de Coulomb, aplicar a ele uma transformação de calibre gera outro potencial vetor que não tem o mesmo calibre. Há uma exceção. Quando a função Λ que define a transformação de calibre é tal que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Lambda = 0$, ou seja, tal que $\nabla^2 \Lambda = 0$, podemos ver que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \Lambda. \quad (25)$$

Segue que

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\nabla^2 \Lambda = 0). \quad (26)$$

$\frac{\partial A_x}{\partial x}$	$\frac{\partial A_x}{\partial y}$	$\frac{\partial A_x}{\partial z}$
$\frac{\partial A_y}{\partial x}$	$\frac{\partial A_y}{\partial y}$	$\frac{\partial A_y}{\partial z}$
$\frac{\partial A_z}{\partial x}$	$\frac{\partial A_z}{\partial y}$	$\frac{\partial A_z}{\partial z}$

Tabela 1: Derivadas parciais das componentes do potencial vetor

Esse nome é apropriado, porque o potencial vetor resultante é matematicamente análogo ao potencial eletrostático derivado da força de Coulomb, como veremos mais abaixo, na Eq. (37).

Assim, se \vec{A} obedece à Eq. (24) o potencial vetor transformado $\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ também obedecerá. Um exemplo é a Eq. (17), pois podemos ver que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$, muito embora \vec{A}' possa ser obtido do vetor \vec{A} pela transformação de calibre na Eq. (16).

Concluímos que a Eq. (24) ainda não fixa completamente o potencial vetor: dois potenciais vetores distintos, que geram o mesmo campo magnético \vec{B} , podem satisfazer a ela. Entretanto, conforme veremos mais abaixo, essa liberdade remanescente não prejudica, assim como não é necessário definir condições de contorno para fixar completamente o vetor \vec{A} .

Relação entre potencial vetor e densidade de corrente

O potencial eletrostático de uma distribuição de cargas

Quando estudamos a eletrostática, vimos que, dada a densidade de carga $\rho(\vec{r})$, podemos calcular o potencial eletrostático $V(\vec{r})$. O potencial obedece à equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (27)$$

Conhecemos também a solução da Eq. (27). Para calcular o potencial num ponto P qualquer, dividimos o espaço em pequenas regiões de volume $d\Omega'$. A carga em cada um deles é $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') d\Omega'$.

Para calcular a contribuição da carga $dq(\vec{r}')$ para o potencial no ponto P , precisamos examinar a figura 4. Ela mostra que a distância entre a carga e o ponto P é $|\vec{r} - \vec{r}'|$. A contribuição diferencial da carga dq para o potencial é, portanto,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (28)$$

E, dado que $dq = \rho d\Omega'$, a soma das contribuições diferenciais dá

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega'. \quad (29)$$

A Eq. (29) é a solução da Eq. (27) que toma como referência um ponto no infinito. Como já vimos, quando a densidade de cargas se estende até o infinito, essa escolha não serve, e é necessário considerar outro ponto como referência. Tudo isso já vimos, quando discutimos a eletrostática.

O potencial vetor devido a uma densidade de correntes

Por analogia com o discutido na seção anterior, queremos agora relacionar o potencial vetor num ponto P com a densidade de corrente

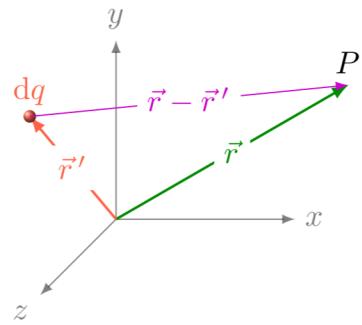


Figura 4: Distância entre carga elemental dq e ponto P onde se deseja calcular o potencial eletrostático.

$\vec{j}(\vec{r})$ no espaço ao redor do ponto P . Podemos esperar que haja uma relação entre \vec{j} e \vec{A} , porque a lei de Ampère associa o campo magnético à densidade de corrente,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (30)$$

e a Eq. (1) associa \vec{B} ao potencial vetor.

Para avançar, substituímos o vetor \vec{B} , no lado esquerdo da Eq. (30), pelo lado direito da Eq. (1). Resulta que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}. \quad (31)$$

A expressão no lado esquerdo tem a estrutura de um duplo produto vetorial. Se nos lembarmos da história da princesa e os dois cavaleiros, que apareceu quando discutimos o torque da força magnética, poderemos ver que a Eq. (31) assume a forma

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (32)$$

É nesse ponto que o calibre de Coulomb, Eq. (24), mostra seu valor. Ele fixa em zero o divergente do potencial vetor, que aparece no primeiro termo à esquerda na Eq. (32). Ficamos então com uma equação semelhante à Eq. (27):

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (33)$$

Mais especificamente, a Eq. (33) se desdobra em três:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad (34)$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y \quad (35)$$

e

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z. \quad (36)$$

Cada uma das Eqs. (34)-(36) é equivalente à Eq. (27), com as substituições apropriadas. Para a Eq. (36), por exemplo, as substituições são $(1/\epsilon_0) \rightarrow \mu_0$, $\rho \rightarrow j_x$ e $V \rightarrow A_x$.

Na prática, significa que, se quisermos encontrar o potencial vetor associado a uma densidade de corrente \vec{j} , devemos estabelecer três analogias. Primeiro, para encontrar a componente A_x , devemos encontrar o potencial correspondente a uma densidade de carga igual à componente j_x . Em seguida, para encontrar a componente A_y , devemos encontrar o potencial correspondente a uma densidade de carga igual a j_y . E, por fim, para encontrar A_z , devemos encontrar o potencial correspondente a uma densidade de carga igual a j_z .

Isso tudo pode ser resumido pela expressão

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Omega', \quad (37)$$

que resulta da Eq. (29) quando se substituem $(1/\epsilon_0)$ por μ_0 , ρ por \vec{j} e V por A .

Cálculo do potencial vetor por analogia

A Eq. (37) permite calcular o potencial vetor, a partir da densidade de corrente. Em princípio, o cálculo é simples. As integrais resultantes podem ser difíceis de efetuar, mas, na pior hipótese, elas podem ser computadas numericamente. Existe, porém, uma alternativa, que pode ser muito conveniente.

Em abril, quando discutimos o potencial eletrostático, vimos que ele pode ser encontrado como integral de linha do campo elétrico, que, em casos simétricos, pode ser obtido da lei de Gauss. Dada uma distribuição de corrente elétrica \vec{j} , se considerarmos a distribuição de carga elétrica equivalente e conseguirmos calcular o potencial eletrostático, poderemos aproveitar a correspondência entre as Eqs. (29) e (37) para determinar, imediatamente, o potencial vetor.

Um bom exemplo é o do fio retilíneo de raio a por onde passa uma corrente I , como na figura 5. O problema análogo é o do fio carregado com densidade linear uniforme λ , que já estudamos no capítulo dedicado à eletrostática. O potencial eletrostático em um ponto P , medido de um ponto na superfície do fio, depende apenas da distância r entre o ponto e o eixo fio:

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{a}\right). \quad (38)$$

Para completar a analogia com o fio da figura 5, precisamos apenas expressar a densidade linear λ em termos da densidade volumétrica ρ . Isso é fácil. Um segmento do fio com comprimento diferencial $d\ell$ acomoda uma carga $dq = \lambda d\ell$. O segmento tem formato cilíndrico e volume $d\Omega = d\ell \pi a^2$. A densidade volumétrica de carga $\rho = dq / d\Omega$ é, portanto,

$$\rho = \frac{\lambda d\ell}{\pi a^2 d\ell} = \frac{\lambda}{\pi a^2}. \quad (39)$$

Podemos, agora, substituir λ por $\pi a^2 \rho$ na Eq. (38):

$$V(r) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{a}\right). \quad (40)$$

Isso feito, estamos prontos para traduzir a expressão do potencial para a linguagem do potencial vetor. Adotamos o sistema de eixos

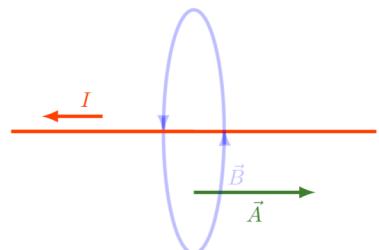


Figura 5: Campo magnético e potencial vetor devidos a corrente que percorre fio retilíneo infinito.

retratado na figura. Uma vez que a corrente avança na direção e no sentido de \hat{z} , as componentes x e y do potencial vetor são nulas.

Resta calcular a componente z , que pode ser obtida da Eq. (40). A densidade de corrente no fio da figura 5, isto é, a corrente por unidade de área, é $j_z = I/(\pi a^2)$. Substituído ρ por esse valor no lado direito da Eq. (40) e substituído $(1/\epsilon_0)$ por μ_0 , encontramos a expressão procurada para A_z :

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \log\left(\frac{r}{a}\right). \quad (41)$$

O próximo passo é calcular o rotacional de \vec{A} , para encontrar o campo magnético. Como a única componente de \vec{A} é A_z , a componente z do campo magnético, igual a $\partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y$, é nula. As duas outras componentes podem ser facilmente computadas:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad (42)$$

e

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}. \quad (43)$$

Para calcular as derivadas nas Eqs. (42) e (43), precisamos das derivadas da distância $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (44)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}. \quad (45)$$

A partir das Eqs. (42) e (45), um cálculo simples mostra que

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} y. \quad (46)$$

Analogamente, a partir das Eqs. (42) e (45)

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} x. \quad (47)$$

As Eqs. (46) e (47) podem ser escritas, mais compactamente, na forma

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{B}, \quad (48)$$

onde o versor \hat{B} é definido pela igualdade

$$\hat{B} = \frac{x\hat{y} - y\hat{x}}{r}. \quad (49)$$

A expressão à direita nos é familiar. O numerador apareceu, com o sinal trocado, na Eq. (11). Já sabemos que ele é ortogonal ao vetor $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$. Significa que as linhas de campo magnético são circunferências em torno do fio, como na figura 5.

A Eq. (48) mostra, além disso, que o módulo do campo magnético é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (50)$$

Esse valor coincide com o que encontramos a partir da lei de Ampère. Em resumo, tanto o formato das linhas de campo como o módulo de \vec{B} coincidem com o que encontramos na aula de ontem, ao discutir o campo de um fio retilíneo sob a ótica da lei de Ampère.