06 de fevereiro de 2021

Equações de movimento dos elétrons em um ondulador

Luana Vilela

Equações de movimento de um elétron sujeito a um campo magnético utilizando diferentes parametrizações.

Equações de movimento

Dinâmica governada pela força de Lorentz

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

Momento relativistíco

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \tag{2}$$

Derivada do momento

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \gamma m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Coordenada independente: tempo (t)

$$\gamma m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{4}$$

Posição $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{\gamma m}(v_y B_z - v_z B_y) \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{\gamma m}(v_z B_x - v_x B_z) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{\gamma m}(v_x B_y - v_y B_x) \tag{7}$$

Coordenada independente: comprimento da trajetória (s)

$$v = \beta c \tag{8}$$

Energia relativística

$$E = \gamma m c^2 \tag{9}$$

$$\vec{r''} = \frac{qc}{\beta E}\left(\vec{r'} \times \vec{B}\right) \tag{10}$$

onde r' = dr/ds

Equações de movimento (coordenada independente = s)

$$x'' = \frac{qc}{\beta E}\left(y' B_z - z' B_y\right) \tag{11}$$

$$y'' = \frac{qc}{\beta E}\left(z' B_x - x' B_z\right) \tag{12}$$

$$z'' = \frac{qc}{\beta E}\left(x' B_y - y' B_x\right) \tag{13}$$

Coordenada independente: posição longitudinal (z)

$$\vec{v} = v_z(x'\hat{x} + y'\hat{y} + \hat{z}) = v_z\vec{r'} \tag{14}$$

onde r' = dr/dz

Derivada da velocidade

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = v_z^2\vec{r''} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{r'} \tag{15}$$

Aceleração em z

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{\gamma m}v_z(x'B_y - y'B_x) \tag{16}$$

Equação x

$$v_z^2x'' + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}x' = \frac{q}{\gamma m}v_z(y'B_z - B_y) \tag{17}$$

substituindo vz

$$v_zx'' = -\frac{q}{\gamma m}\Big((1 + x'^2)B_y - y'B_z - x'y'B_x\Big) \tag{18}$$

Equação y

$$v_zy'' = \frac{q}{\gamma m}\Big((1 + y'^2)B_x - x'B_z - x'y'B_y\Big) \tag{19}$$

Velocidade longitudinal

$$v_z = \frac{\beta c}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \tag{20}$$

Equações de movimento (coordenada independente = z)

$$x'' = -\frac{qc}{\beta E}\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\Big((1 + x'^2)B_y - y'B_z - x'y'B_x\Big) \tag{21}$$

$$y'' = \frac{qc}{\beta E}\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\Big((1 + y'^2)B_x - x'B_z - x'y'B_y\Big) \tag{22}$$

Mantendo apenas termos lineares nos ângulos da partículas

$$x'' = -\frac{qc}{\beta E}\left(B_y - y'B_z\right) \tag{23}$$

$$y'' = \frac{qc}{\beta E}\left(B_x - x'B_z\right) \tag{24}$$