

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física

Processo FAPESP 2019/03968-2
Introdução à Relatividade Geral e Aplicações

Relatório Parcial

Beneficiário: Matheus Melo Santos Velloso
Responsável: Prof. Dr. Raphael Santarelli

01/04/2019 a 10/09/2019

São Carlos, Setembro de 2019

Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Física

Processo FAPESP 2019/03968-2
Introdução à Relatividade Geral e Aplicações

Relatório Parcial

M. Velloso

Beneficiário: Matheus Melo Santos Velloso

Raphael Santarelli

Responsável: Prof. Dr. Raphael Santarelli

Relatório apresentado à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo descrevendo atividades realizadas sob concessão do Processo 2019/03968-2 “Relatividade Geral e Aplicações”, no período de abril a setembro de 2019.

São Carlos, Setembro de 2019

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Resumo do Projeto de Pesquisa	1
1.2	Atividades desenvolvidas	1
2	Relatividade Especial	2
2.1	Transformações e Relatividade de Galileu	3
2.2	Inconsistência entre Eletromagnetismo e a Relatividade de Galileu	4
2.3	Os postulados da Relatividade Especial	5
2.4	Algumas consequência dos postulados	5
2.4.1	Relatividade da Simultaneidade	5
2.4.2	Dilatação dos intervalos de tempo	5
2.4.3	Contração dos comprimentos	6
2.5	As transformações de Lorentz e a composição relativística de velocidades	7
2.6	A geometria da Relatividade Especial	8
2.6.1	Diagramas de espaço-tempo, linhas-de-mundo, cone de luz	8
2.6.2	Transformações de Lorentz como rotações hiperbólicas	10
2.6.3	Aplicações dos diagramas de espaço-tempo	10
2.7	Mecânica Relativística	12
2.7.1	4-vetores	12
2.7.2	Cinemática Relativística	13
2.7.3	Dinâmica Relativística	13
2.7.4	Princípio Variacional para uma partícula livre	14
3	Princípios da Relatividade Geral	15
3.1	Gravidade como um efeito de geometria	15
3.2	Descrição de espaço-tempos curvos	16
3.2.1	Coordenadas, Métrica, Convenção da Soma	16
3.2.2	Princípio da Equivalência e Referenciais Inerciais Locais	17
3.2.3	“Mergulhos” (Embedding Diagrams)	18
3.2.4	Vetores em espaços-tempo curvos	20
3.2.5	Hiper-superfícies	20
3.3	Geodésicas	21
3.3.1	Princípio Variacional e Equação da Geodésica	21
3.3.2	Símbolos de Christoffel	22
3.3.3	Simetrias e grandezas conservadas	23
3.3.4	Geodésicas Nulas	25
4	Conclusões e perspectivas futuras	26

Lista de Figuras

2.1	Referencial S' em movimento com relação a S	3
2.2	Relatividade da simultaneidade na propagação de um frente de onda num vagão de trem	5
2.3	Propagação de um feixe de luz no interior de um vagão de trem em movimento (feixe perpendicular ao movimento)	6
2.4	Deslocamentos do feixe segundo cada observador e deslocamento do vagão	6
2.5	Propagação de um feixe de luz no interior de um vagão de trem em movimento (feixe paralelo ao movimento).	7
2.6	Cone de luz e vetores do tipo tempo, espaço e nulo	9
2.7	Rotação hiperbólica de eixos	10
2.8	Composição de velocidades	10
2.9	Simultaneidade e contração	11
2.10	Projeção das medidas de tempo	11
3.1	Gráfico de $\rho(z) = b \cosh(z/b)$	19
3.2	Fatia (r, ϕ) do Buraco-de-Minhoca	19

1 Introdução

1.1 Resumo do Projeto de Pesquisa

A teoria da Relatividade Geral (RG), proposta por Einstein em 1915, é a mais aceita descrição da gravidade atualmente. Ela surge dos esforços de conciliar os postulados da Relatividade Especial com a gravidade. Neste contexto, a ideia de ação instantânea à distância, inerente a Teoria de Newton para a gravitação, tem de ser abandonada e, admitindo uma geometria curva para o espaço-tempo, a gravidade passa a ser interpretada como uma mera consequência de curvatura. São notáveis na teoria as condições extremas de curvatura, das quais destacam-se os buracos negros e a hipótese do Big Bang, no contexto da Cosmologia. Este projeto de iniciação científica se propõe a revisitar a Relatividade Especial, introduzir o aluno aos fundamentos da Relatividade Geral e ao estudo de duas aplicações de interesse: as propriedades físicas de Buracos Negros, com análise da métrica de Schwarzschild; e o estudo da evolução cosmológica, com a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

1.2 Atividades desenvolvidas

No período de março a julho de 2019, o bolsista cursou regularmente o 5º semestre do Bacharelado em Física, obtendo aprovação em todos os créditos inscrito: “Física Matemática 2” (8,9), “Mecânica Analítica” (9,7), “Física Térmica” (6,7), “Física Moderna Experimental” (9,3) e “Seminários de Física C” (10,0). No que concerne às atividades desenvolvidas no âmbito do projeto de pesquisa, entre março e abril, revisitamos os postulados e principais resultados da Relatividade Especial com uma interpretação e visualização geométrica. Esse estudo aprofundou o estudo iniciado pelo curso “Métodos Geométricos da Relatividade Especial”, constituinte da “XVI Edição das Atividades Formativas de Verão”, do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). O curso foi realizado à distância, em Fevereiro de 2019. No período de maio a agosto, iniciamos a introdução aos principais conceitos da Relatividade Geral. O aluno ganhou intuição de como gravidade pode ser descrita por uma teoria geométrica, foi introduzido à descrição de espaços-tempo curvos, ao tratamento de vetores nesses espaços, à representação de fatias de uma determinada geometria como superfícies em espaços euclidianos de dimensão maior que a variedade em questão, e por fim foi introduzido ao Princípio Variacional em espaços curvos e às equações das Geodésicas para corpos de prova e para a luz.

De 5 a 13 de Julho o aluno participou da 4ª edição da “IFT-Perimeter-SAIFR Journeys into Theoretical Physics”, no IFT-UNESP, em São Paulo. Tendo sua participação aprovada após a submissão de histórico escolar e carta de motivação. Foi concedido auxílio cobrindo despesas de viagem e acomodação. A escola consistiu em uma semana de minicursos: “Introdução à Cosmologia Λ CDM”, “Fenômenos não-lineares em Biologia”, “Matrix Models” e “Aspectos Experimentais de Física de Altas Energias”, além de palestras e discussões¹. De 19 de julho a 2 de agosto, o aluno participou da escola de verão “Modern Physics at all Scales”, na Universidade de Leiden, em Leiden, Holanda. Sendo selecionado após a submissão de histórico escolar, carta de motivação e entrevista oral com o comitê de seleção do Departamento de Física (DF-UFSCar). Todas as despesas foram cobertas pela Universidade de Leiden. O comitê consiste nos Professores Wilson Aires

¹Mais informações em <http://journeys.ictp-saifr.org/>

Ortiz e Maycon Motta, que mantêm contato com o Instituto de Física da Universidade de Leiden (LION) e realizam anualmente a seleção de dois alunos do DF-UFSCar para participar da escola. Foram dez dias de minicursos em Cosmologia, Biofísica, Computação e Informação Quântica, Física Atômica, Matéria Condensada e Metamateriais, além de visitas a laboratórios e conversas com os pesquisadores teóricos². A participação nessas escolas contribuiu fortemente com a formação do aluno, inspirando-o e aprofundando os conhecimentos nos temas em que já possuía interesse (Gravitação e Cosmologia), ao mesmo tempo mantendo-lhe a par das possibilidades em outras áreas, contribuindo com a consolidação de uma visão mais madura da física num aspecto geral. Além disso, ressaltase também o forte intercâmbio cultural realizado com os demais estudantes, palestrantes, professores e pesquisadores em ambas as escolas.

2 Relatividade Especial

Iniciamos os estudos segundo o cronograma proposto com o estudo da Relatividade Especial. As referências utilizadas foram os capítulos 1, 2, 4, 5 e 6 de [1] e os capítulos 4 e 5 de [2], além do capítulo 6 de [3].

A dinâmica dos objetos macroscópicos usuais que nos cercam é muito bem descrita por uma física confortável à nossa intuição e experiência de mundo. Essa dinâmica exige a definição de sistemas de coordenadas e costumamos adotar os chamados “referenciais inerciais”, aqueles em que são válidas as Leis de Newton. Durante séculos essa física prevaleceu como a descrição absoluta de nosso mundo mecânico e a relação entre grandezas medidas em diferentes referenciais era dada por transformações algébricas simples e intuitivas: as transformações de Galileu. Uma vez que a escolha de referenciais é arbitrária, é natural esperar que as leis físicas sejam independentes da escolha dos mesmos e mantenham sua forma em qualquer deles. De fato, isso se observou na Mecânica, caracterizando a Relatividade de Galileu, mas não no Eletromagnetismo. Essa inconsistência nos leva a refletir de forma mais rigorosa sobre a Relatividade e as transformações de Galileu e, de modo a reconciliar as leis do Eletromagnetismo em diferentes referenciais, devemos assumir que as transformações de Galileu, a cinemática e a dinâmica, prevalentes até então, são incompletas. Ao estendermos a Relatividade de Galileu não somente à Mecânica mas a todas as leis físicas e impormos a chamada “constância da velocidade da luz”, é possível obter transformações entre referenciais consistentes com o Eletromagnetismo. Em última instância, estaremos abandonando a Relatividade de Galileu e a Mecânica Newtoniana, reconhecendo-as apenas como uma aproximação, no “limite não-relativístico”, de uma física mais sofisticada baseada nos postulados da *Relatividade Especial*.

O conteúdo estudado pelo bolsista será apresentado a seguir, sendo o objetivo deste capítulo detalhar a história resumida acima, enunciar os postulados da Relatividade Especial e apresentar essa “nova” Física Relativística. Analisaremos os principais resultados dos postulados, as Transformações de Lorentz e efeitos como contração de comprimentos, dilatação temporal e relatividade da simultaneidade. Apresentaremos também uma interpretação mais geométrica da Relatividade Especial, que ajuda a elucidar melhor os fenômenos relativísticos.

²Mais informações em <https://www.universiteitleiden.nl/en/education/study-programmes/summer-schools/modern-physics-at-all-scales>

2.1 Transformações e Relatividade de Galileu

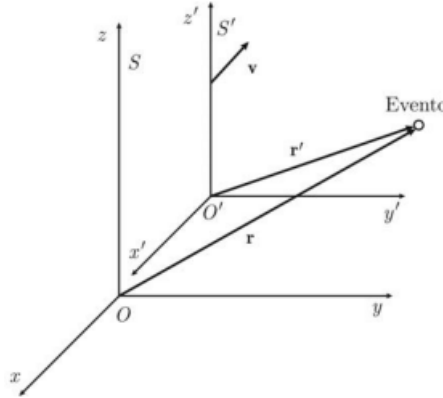
Sejam S e S' dois referenciais inerciais tais que a origem O' de S' realiza um movimento uniforme e retilíneo com velocidade \vec{V} em relação à origem O de S . No instante inicial, suas origens coincidem. A situação é apresentada pela Figura 2.1 e é fácil verificar que a posição \vec{r} , em relação a S , se relaciona com a posição \vec{r}' , em S' , por meio da simples soma vetorial

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \quad (1)$$

Podemos inverter a relação de modo a obter \vec{r}'

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \quad (2)$$

Figura 2.1: Referencial S' em movimento com relação a S .



Retirado de [4]

Essa relação entre as grandezas medidas em cada um dos referenciais somada à suposição de que o tempo é absoluto e passa da mesma forma para todos os observadores caracteriza as *Transformações de Galileu*.

$$\begin{cases} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t \\ t' &= t \end{cases} \quad (3)$$

Derivar a relação para a posição nos leva à lei de Galileu para a composição das velocidades

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (4)$$

Por fim, derivar esta ultima relação nos leva a verificar a invariância das acelerações e, conseqüentemente, a invariância da segunda lei de Newton, dado que existe também igualdade entre as massas medidas em cada um dos referenciais ($m' = m$).

$$\vec{a}' = \vec{a} \implies \vec{F}' = \vec{F} \quad (5)$$

A invariância da segunda lei de Newton mediante as transformações de Galileu mostra que as leis da Mecânica independem da escolha do referencial inercial. Equivale dizer que é impossível, por qualquer experimento baseado nas leis da dinâmica, detectar movimentos retilíneos uniformes entre referenciais e, do ponto de vista da mecânica, todos os referenciais inerciais são equivalentes. Este é o princípio da Relatividade de Galileu.

2.2 Inconsistência entre Eletromagnetismo e a Relatividade de Galileu

A velocidade da Luz é fornecida pela equação de onda para sua propagação como um parâmetro fixo e dependente apenas do meio. No vácuo, seu valor é $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$. Não há menção quanto a qual referencial esta velocidade se refere. Admitindo que se refira a um determinado referencial, o mesmo não valeria num outro, com velocidade \vec{V} em relação ao primeiro, uma vez que neste, segundo as transformações de Galileu, teríamos

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{V} \quad (6)$$

Isso significa que neste outro referencial, as equações de Maxwell, das quais a equação de onda e, conseqüentemente, c provêm, não mantêm sua forma. Isto é, o Eletromagnetismo não é invariante sob transformações de Galileu, de modo que a Relatividade Galileana não é verificada e existiria um referencial privilegiado, no qual as equações de Maxwell são válidas, c mantém seu valor previsto fixo e independente da direção.

Devemos verificar uma das três possibilidades:

- Tanto as transformações e a Relatividade de Galileu (i.e, a Mecânica Newtoniana) quanto o Eletromagnetismo de Maxwell estão corretos, mas a Relatividade de Galileu não se aplica a todas as Leis físicas. Existe, de fato, um referencial inercial privilegiado, onde valem as equações de Maxwell.
- A Mecânica Newtoniana e a Relatividade de Galileu estão corretas, enquanto o Eletromagnetismo de Maxwell está incorreto ou incompleto.
- O Eletromagnetismo está correto e o Princípio da Relatividade se aplica a todas as leis físicas. Neste caso a Mecânica Newtoniana está incorreta ou incompleta.

O famoso experimento de Michelson e Morley (1887) buscou verificar a primeira afirmação. Se não vale a Relatividade de Galileu, seria possível detectar movimentos relativos entre referenciais, bastando buscar por variações em c , de acordo com a equação 6.

Como todos os fenômenos ondulatórios conhecidos até o fim do século XIX manifestavam-se com suporte num determinado meio, o mesmo presumiu-se para o Eletromagnetismo. Hipotetizou-se um meio permeando todo o vácuo: o Éter. Supondo que a luz se propaga por este meio em repouso absoluto, poderíamos detectar o movimento de um referencial ligado à Terra, por exemplo, em relação a um referencial ligado ao Éter. Michelson e Morley empregaram técnicas interferométricas extremamente precisas e não detectaram variações em c , o que impossibilita a verificação do movimento relativo entre referenciais. Diversas repetições do experimento obtiveram o mesmo resultado nulo, indicando que o suposto referencial privilegiado não existia.

Do ponto de vista dos físicos do final do Século XIX, das duas outras opções, temos de escolher entre confiar no recém nascido Eletromagnetismo de Maxwell ou na bem estabelecida e confiada Mecânica de Galileu e Newton. A Relatividade Especial e a solução deste impasse surge se abraçarmos o Eletromagnetismo.

2.3 Os postulados da Relatividade Especial

1. “As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.”
2. “A velocidade da Luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.”

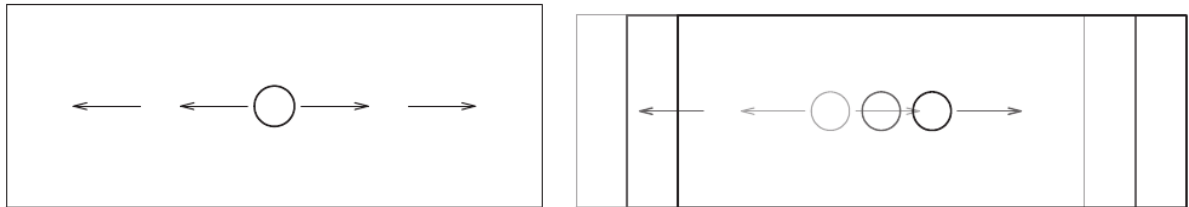
A Teoria da Relatividade Especial segue desses dois postulados. Aplicá-los à análise das leis físicas em diferentes referenciais traz consistência entre as mesmas, e verificamos a invariância de suas formas. Como consequência dos postulados, podemos verificar efeitos que desafiam a intuição e fogem ao senso comum, pois são mais pronunciados em condições altamente energéticas, com velocidades comparáveis à da luz.

2.4 Algumas consequência dos postulados

2.4.1 Relatividade da Simultaneidade

Consideremos uma fonte de luz ao centro de um vagão de trem em movimento retilíneo e uniforme para a direita, conforme a Figura 2.2(a). Para um observador no interior deste vagão, as frentes de onda atingem as paredes simultaneamente. Para um observador externo, entretanto, (Figura 2.2(b)), como consequência da velocidade da luz não se compor de acordo com a Equação 6, as frentes de onda alcançam a parede esquerda antes da parede direita. Isto é, a simultaneidade é relativa: eventos simultâneos num determinado referencial não necessariamente serão num outro qualquer.

Figura 2.2: Relatividade da simultaneidade na propagação de um frente de onda num vagão de trem



(a) Frentes de onda segundo o observador no vagão (b) Frentes de onda segundo o observador na estação

Retiradas de [1]

2.4.2 Dilatação dos intervalos de tempo

Novamente consideremos o observador no interior de um trem em movimento retilíneo uniforme com velocidade V . Imagine que este observador ilumine o teto do vagão, a partir do chão. A distância percorrida pelo feixe é $h = c\Delta x'$ (grandezas “com linha” representam grandezas do referencial do vagão) e sua trajetória é como na Figura 2.3(a). Para o observador em repouso, a trajetória do feixe é diferente (Figura 2.3(b)) e a distância percorrida é $c\Delta t$. Durante o trajeto, esse observador verifica também o deslocamento de $V\Delta t$ do vagão. Essas grandezas se relacionam num triângulo, de acordo com a Figura 2.4. O teorema de Pitágoras fornece:

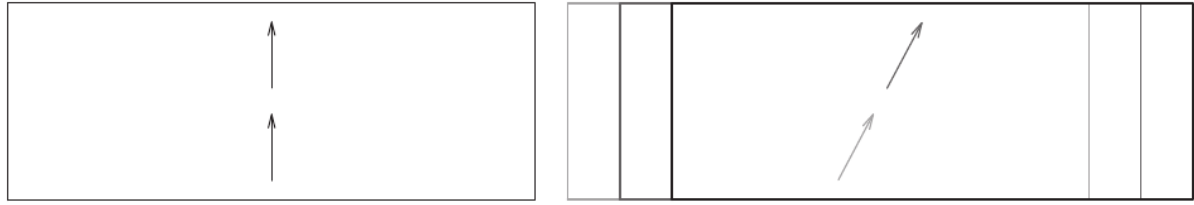
$$(c\Delta t)^2 = (V\Delta t)^2 + (c\Delta t')^2 \quad (7)$$

Resolvendo para Δt , obtemos

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (8)$$

Perceba que o fator $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} \geq 1$ para $V < c$, de modo que $\Delta t \geq \Delta t'$, isto é, para o observador em movimento a passagem do tempo é mais lenta do que a passagem do tempo para o observador estacionário.

Figura 2.3: Propagação de um feixe de luz no interior de um vagão de trem em movimento (feixe perpendicular ao movimento)

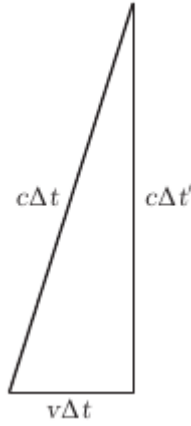


(a) Feixe segundo o observador no vagão

(b) Feixe segundo o observador na estação

Retiradas de [1]

Figura 2.4: Deslocamentos do feixe segundo cada observador e deslocamento do vagão



Retirado de [1]

2.4.3 Contração dos comprimentos

Considere agora um feixe de luz que parte de uma das paredes do vagão, atinge um espelho na parede oposta e retorna ao ponto de emissão. Para o observador no vagão, a situação é como na Figura 2.5(a) e a distância percorrida é

$$c\Delta t' = 2\Delta x' \quad (9)$$

Para observador estacionário (Figura 2.5(b)), dividimos o intervalo de tempo total de trajeto Δt em dois: Δt_1 para a ida e Δt_2 para a volta. O vagão tem comprimento Δx , desse modo, a distância percorrida para a ida é este comprimento somado ao deslocamento

que ele realiza em Δt_1 , e, para a volta, é Δx subtraído do deslocamento realizado em Δt_2 , isto é

$$c\Delta t_1 = \Delta x + V\Delta t_1 \quad (10)$$

$$c\Delta t_2 = \Delta x - V\Delta t_2 \quad (11)$$

Destas relações, isolando Δt_1 e Δt_2 e somando estes intervalos, verificamos que

$$c\Delta t = \frac{2\Delta x}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (12)$$

Agora, empregando a dilatação dos intervalos de tempo (equação 8), temos

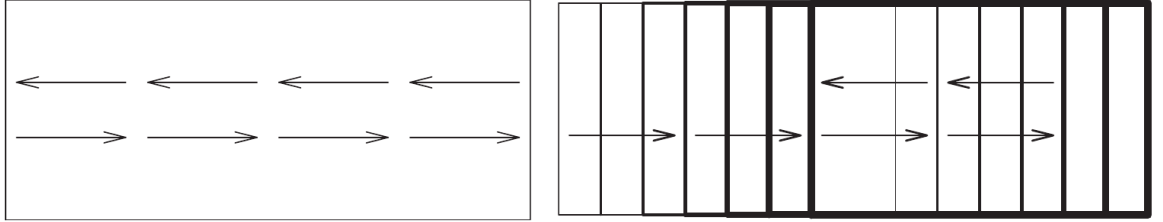
$$\frac{c\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2\Delta x}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (13)$$

Inserindo (9) nesta última relação e isolando Δx

$$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \Delta x' = \frac{\Delta x'}{\gamma} \quad (14)$$

Onde verificamos que $\Delta x \leq \Delta x'$, isto é, para o observador estacionário, um objeto em movimento (o vagão, neste caso) aparenta estar contraído na direção do movimento.

Figura 2.5: Propagação de um feixe de luz no interior de um vagão de trem em movimento (feixe paralelo ao movimento).



(a) Feixe segundo o observador no vagão

(b) Feixe e vagão segundo o observador na estação

Retiradas de [1]

2.5 As transformações de Lorentz e a composição relativística de velocidades

Considere os observadores O e O' . O segundo se desloca para a direita com velocidade V em relação ao primeiro. Consideraremos somente o movimento ao longo do eixo x , pois efeitos relativísticos manifestam-se somente no tempo e na direção paralela ao movimento do referencial. Um ponto de coordenada x está a uma distância $x - Vt$ de O' , segundo O . Havendo a contração (Equação 14), verificamos $\Delta x' = \gamma\Delta x$. De modo que, para O' o mesmo ponto possui coordenadas dadas por

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad (15)$$

A equivalência entre os referenciais inerciais impõe simetria a este resultado. Para O' , O se afasta para a esquerda com velocidade $-V$, e a distância entre o ponto x' e O , segundo O' , é $x' + Vt'$. Da equação 14, $\Delta x = \gamma \Delta x'$ e, portanto, para O , a coordenada do ponto é

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad (16)$$

Combinando estas duas relações e resolvendo para t' , obtemos

$$t' = \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right) \quad (17)$$

E, novamente, pela simetria ($V \rightarrow -V$ e troca das coordenadas “com linha” pelas “sem linha” e vice-versa), verifica-se

$$t = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right) \quad (18)$$

Os pares de (15 e 17) e (16 e 18) constituem as Transformações de Lorentz entre os referenciais O e O' e entre O' e O , respectivamente. Nelas, verificamos a interdependência das coordenadas espaciais e temporais entre referenciais. Verificamos, especialmente, que o tempo deixa de passar de forma absoluta para todos os observadores, de modo que a relatividade da simultaneidade e distorções, como a dilatação dos intervalos, são relativamente “justificadas”. Apesar de fugir ao senso comum, a relatividade do tempo é consequência direta de demandarmos constância da velocidade da luz, pois se as distâncias são relativas (diferentes para cada observador), o tempo também deve ser, de modo que c se mantenha inalterada.

Podemos extrair das transformações de Lorentz a composição relativística de velocidades. Para isso, calculamos as diferenciais

$$dx = \gamma(dx' + Vdt') \quad (19)$$

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{Vdx'}{c^2} \right) \quad (20)$$

Tomando a razão e “fatorando” dt

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \quad (21)$$

É fácil verificar que este resultado transforma velocidades entre referenciais respeitando o postulado da constância da velocidade da luz, isto é, para todos referenciais, a equação 21 mantém c inalterada. Podemos verificar também que no limite usual de velocidades do mundo cotidiano ($V \ll c$), as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileu e a composição relativística de velocidades se reduz à Lei de Galileu para a composição de velocidades.

2.6 A geometria da Relatividade Especial

2.6.1 Diagramas de espaço-tempo, linhas-de-mundo, cone de luz

O “palco” da física na Relatividade Especial é o conjunto de coordenadas (t, x, y, z) , de modo que espaço e tempo ganham o mesmo status como coordenadas do espaço não-euclidiano quadridimensional. Cada observador possui seu conjunto de coordenadas para

eventos no *espaço-tempo* e elas não têm a obrigação de concordar entre referenciais. Isso já nos era familiar para coordenadas espaciais na física pré-Relatividade, mas se torna uma novidade ao quebrarmos o caráter absoluto do tempo.

Podemos tomar fatias do espaço quadridimensional com projeções conhecidas como diagramas de espaço-tempo, ou diagramas de Minkowski. Para um movimento na direção x , por exemplo, uma fatia de interesse pode ser obtida colocando-se a coordenada temporal no eixo vertical e a coordenada espacial x no eixo horizontal. Uma trajetória nos espaço de Minkowski (e sua respectiva projeção no diagrama) é chamada de *linha-de-mundo*. Linhas verticais correspondem às linhas-de-mundo de objetos em repouso, que não se movimentam, apenas “envelhecem”, enquanto linhas horizontais (paralelas ao eixo x) correspondem ao conjunto de eventos simultâneos naquele referencial.

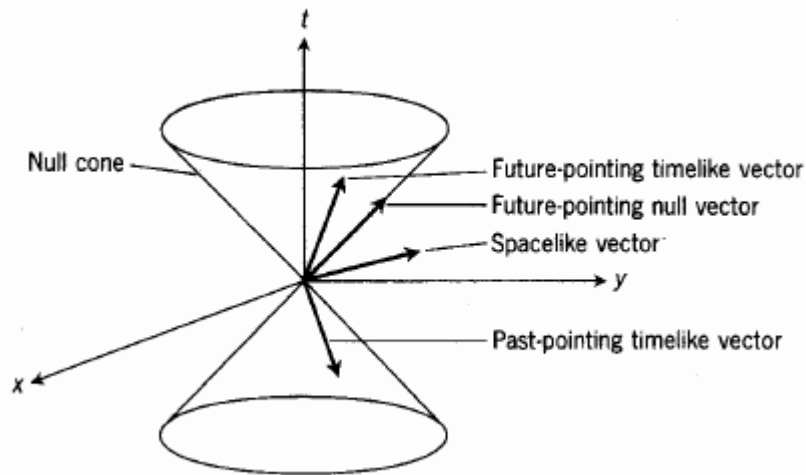
Pode-se verificar diretamente das transformações de Lorentz a invariância da quantidade conhecida como “intervalo”

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \quad (22)$$

A invariância sugere sua adoção para definir distâncias no espaço-tempo, da qual tiramos um *elemento de linha*, que especifica a distância entre pares de pontos próximos, com separações infinitesimais. Uma forma geral de descrever uma geometria é empregar Cálculo Diferencial e Integral para, à partir do elemento de linha, obtermos as “linhas retas” (geodésicas) e ângulos numa determinada variedade. O elemento de linha do espaço-tempo na Relatividade Especial, ou espaço de Minkowski, é a equação 22 no limite $\Delta \rightarrow d$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (23)$$

Figura 2.6: Cone de luz e vetores do tipo tempo, espaço e nulo



Retirado de [5].

A geometria do espaço de Minkowski não é euclidiana, eventos podem estar separados por distâncias positivas, ditas “*tipo espaço*”; nulas, ou do “*tipo luz*”; ou negativas, ditas “*tipo tempo*”. A luz realiza trajetórias nulas e o conjunto de pontos separados por distâncias nulas constitui o *cone de luz*. A Figura 2.6 apresenta o cone de luz e as

regiões do espaço-tempo, além da classificação de vetores, que é abordada na seção 2.7.1. Partículas com massa de repouso não-nula têm linha-de-mundo com pontos de separação do tipo tempo e estão sempre no interior do cone de luz, enquanto linhas-de-mundo do tipo espaço estão no exterior do cone de luz. Cones de luz fornecem a estrutura causal do espaço-tempo. Um ponto P só pode guardar relação causal com eventos caso estes se encontrem no interior de seu cone de luz.

2.6.2 Transformações de Lorentz como rotações hiperbólicas

Reescrevendo as transformações dadas pelas Equações 17 e 15 considerando as coordenadas ct e x , verificamos uma bela simetria entre as relações

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{Vx}{c} \right) \quad (24)$$

$$x' = \gamma \left(x - \frac{Vct}{c} \right) \quad (25)$$

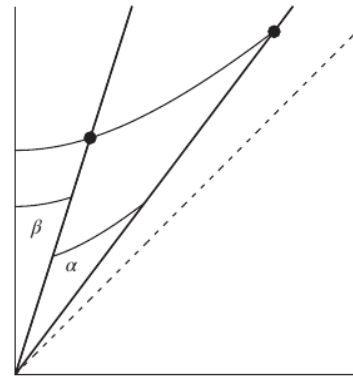
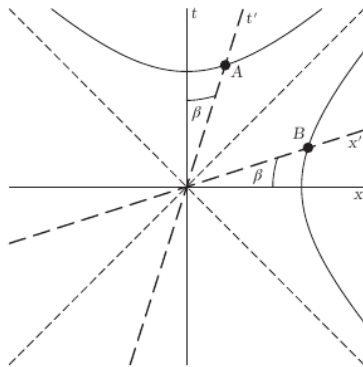
Verificamos, também, ao definir $V/c = \tanh \beta$, que $\gamma = \cosh \beta$ e $V\gamma/c = \sinh \beta$. Isso possibilita reescrever as transformações de Lorentz na forma matricial e em termos de um ângulo hiperbólico β .

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta & 0 & 0 \\ -\sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (26)$$

E assim, verificamos que as transformações de Lorentz são rotações hiperbólicas e transformam os eixos coordenados ct e x como na figura 2.7.

Figura 2.7: Rotação hiperbólica de eixos

Figura 2.8: Composição de velocidades



Retiradas de [1]

2.6.3 Aplicações dos diagramas de espaço-tempo

Um objeto possui velocidade v' em relação a um referencial inercial S' , de modo que sua linha-de-mundo subtende um ângulo hiperbólico α em relação ao eixo ct' . Como S' se desloca com velocidade V em relação a S , o eixo ct' , por sua vez, subtende o ângulo hiperbólico β em relação a ct . Em S , a velocidade v do objeto é tal que o

ângulo subtendido entre sua linha-de-mundo e o eixo ct é a soma de α e β , de modo que $v/c = \tanh(\alpha + \beta)$. Lembrando como definimos α e β e expandindo a soma, $\tanh(\alpha + \beta) = (\tanh \alpha + \tanh \beta)/(1 + \tanh \alpha \tanh \beta)$, obtemos a Equação 21 por argumentos geométricos. A situação é apresentada pela Figura 2.8.

Figura 2.9: Simultaneidade e contração

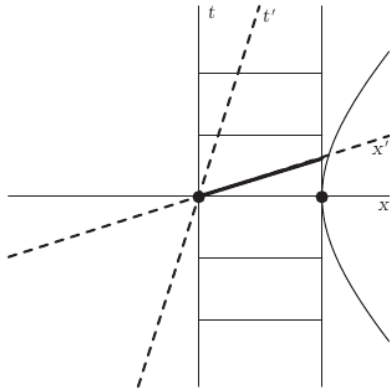
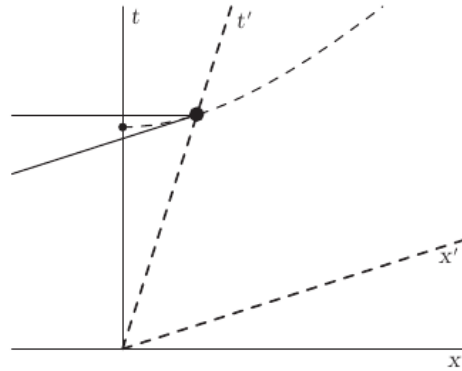


Figura 2.10: Projeção das medidas de tempo



Retiradas de [1]

Na Figura 2.9 verificamos que as linhas de tempo constante não são as mesmas para o referencial em repouso S e para o referencial transformado S' . Em S , as linhas de simultaneidade formam uma “escada” com linhas perpendiculares (no sentido euclidiano) enquanto que no referencial S' , as mesmas aparentam estar inclinadas, paralelas ao eixo x' . O diagrama de espaço-tempo elucida que as linhas de simultaneidade não são absolutas.

Se os observadores não concordam na simultaneidade de eventos, naturalmente não concordarão na medição de comprimentos, uma vez que isso consiste na simples medição da distância entre extremidades simultaneamente, isto é, ao longo da mesma linha de tempo constante. Na Figura 2.9, os pontos representam as extremidades de uma distância referência L . Uma barra, por exemplo. Esse comprimento, medido no referencial de repouso da barra, é chamado de *comprimento próprio*. Se ângulo hiperbólico subtendido entre x' e x é β , e o comprimento da barra no referencial S' é L' , então verificamos que $L = L' \cosh \beta$, ou, equivalentemente, $L' = L / \cosh \beta = L / \gamma$, comprimento próprio dividido por γ , justamente o que fornece a Equação 14. Se nos deixarmos guiar pela geometria euclidiana, pensaríamos que L' é maior que L , afinal trata-se da hipotenusa do triângulo. Entretanto, devemos nos atentar à geometria não-euclidiana e perceber que L' falha em atingir a hipérbole referência, de modo que este comprimento é, de fato, menor que L .

Por último, podemos visualizar também o efeito de dilatação dos intervalos de tempo. O ponto pequeno na Figura 2.10 jaz sobre a hipérbole unitária $ct = 1$, $x = 0$. O ponto maior também pertence à hipérbole, e possui $ct' = 1$, $x' = 0$. A linha paralela ao eixo x que passa pelo ponto maior, dá o valor ct , isto é, a medida de tempo daquele evento no referencial em repouso. Verificamos que esse valor é maior que um: o observador em repouso vê o relógio em movimento marchar mais lento. Por outro lado, a linha diagonal passando pelo ponto maior, paralela ao eixo x' mostra que a passagem do tempo no referencial em repouso é mais lenta, uma vez que o ponto menor, sobre o eixo ct possui

ct' maior que um. A simetria se justifica pela equivalência dos referenciais inerciais. Para o observador no referencial em movimento, ele está em repouso, enquanto o referencial em repouso se afasta. Dessa perspectiva o observador verifica a passagem mais lenta do tempo naquele referencial

2.7 Mecânica Relativística

Daqui em diante, adotaremos um sistema de unidades em que $c = 1$.

2.7.1 4-vetores

Definimos vetores no espaço-tempo como segmentos orientados neste espaço quadridimensional. Usaremos negrito para os 4-vetores \mathbf{a} , enquanto reservaremos negrito e flecha para vetores do espaço euclidiano tridimensional, os 3-vetores, como $\vec{\mathbf{a}}$, por exemplo. Operacionalmente, verificam-se para os 4-vetores as mesmas propriedades dos 3-vetores: soma, subtração, multiplicação por escalar, além da associatividade e comutatividade da soma e a propriedade distributiva para a multiplicação por um escalar. A norma de um 4-vetor é definida como a distância de espaço-tempo (intervalo) de suas componentes. Esta separação pode definir vetores do tipo tempo, espaço ou nulos, como mostra a Figura 2.6. Definimos uma base unitária para cada coordenada, isto é, o conjunto de 4-vetores $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, ou, equivalentemente, mas com vistas ao emprego de somatórias para representar vetores, o conjunto $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. De modo que a representação de um vetor \mathbf{a} em termos de suas componentes ao longo de cada vetor de base é

$$\mathbf{a} = a^0 \mathbf{e}_0 + a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{\alpha=0}^3 a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (27)$$

Adotaremos a convenção de Einstein para índices repetidos: toda vez que índices aparecem repetidos em alguma expressão, suprimimos o sinal da somatória, ficando subentendida a soma. Dessa forma $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Convencionaremos também que índices gregos variam de 0 a 3, para a representação de 4-vetores, enquanto índices latinos, para a representação de 3-vetores, variam de 1 a 3.

Definimos o produto escalar entre os 4-vetores $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ e $\mathbf{b} = b^\beta \mathbf{e}_\beta$ em termos da *métrica*, $\eta_{\alpha\beta}$, por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\alpha b^\beta \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$ e determinamos $\eta_{\alpha\beta}$ ao exigirmos que, para um deslocamento $\Delta \mathbf{x}$, verifica-se $\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta s^2$. Obtemos

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

A métrica permite expressarmos o elemento de linha na forma

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (29)$$

Explicitamente, o produto escalar no espaço de Minkowski é $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$.

2.7.2 Cinemática Relativística

A cinemática relativística se resume às equações paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$, que descrevem a linha-de-mundo de uma partícula ou objeto numa trajetória do tipo tempo. Uma escolha natural de parâmetro é o *tempo próprio* τ , o intervalo de tempo decorrido no referencial do corpo em movimento.

Como exemplo, tomemos as equações paramétricas $t(\sigma) = a^{-1} \sinh \sigma$ e $x(\sigma) = a^{-1} \cosh \sigma$. Vamos determinar o parâmetro σ em termos do tempo próprio τ . Para isso, igualamos o intervalo de espaço-tempo, no referencial da partícula em movimento e no referencial em repouso, isto é, $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$ (com $c = 1$). Tomando as diferenciais das equações paramétricas e aplicando a identidade trigonométrica hiperbólica, conclui-se que $d\tau = a^{-1} d\sigma$. Adotando $\tau = 0$ para $\sigma = 0$, temos $\tau = a^{-1} \sigma$, e as equações paramétricas com o tempo próprio como parâmetro ficam $t(\sigma) = a^{-1} \sinh(a\tau)$ e $x(\sigma) = a^{-1} \cosh(a\tau)$.

É natural definirmos também a 4-velocidade \mathbf{u} . Para as equações paramétricas $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, temos

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (30)$$

A 4-velocidade é um vetor unitário do tipo tempo, uma vez que $ds^2 = -d\tau^2$ e

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 \quad (31)$$

Isso será importante para um resultado envolvendo o 4-momento. A componente temporal da 4-velocidade é

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (32)$$

E a componente x

$$u^x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{V^x}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (33)$$

Verificamos, então, que $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma \vec{\mathbf{V}})$

2.7.3 Dinâmica Relativística

Introduzindo a 4-aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad (34)$$

Escrevemos a equação de movimento em termos da 4-força

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} \quad (35)$$

Que toma a mesma forma, independentemente da escolha de referencial, e se reduz ao análogo da primeira lei de Newton no espaço-tempo quando a 4-força é nula. Isto é, na ausência de forças, a partícula se mantém em repouso ou realiza uma trajetória retilínea e uniforme. Definimos também o 4-momento

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} \quad (36)$$

Do qual segue $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/d\tau$. A normalização da 4-velocidade fornece, em unidades tal que $c = 1$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2 \quad (37)$$

Da Equação 32, a componente temporal do 4-momento é

$$p^t = \frac{m}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (38)$$

No regime não-relativístico, $p^t \approx m + mV^2/2 + \dots$. Isto é, energia de repouso (massa) e energia cinética: a componente temporal do 4-momento é Energia. Analogamente, no regime não-relativístico, as componentes x, y e z se resumem ao 3-momento. Podemos escrever então

$$\mathbf{p} = (E, \vec{\mathbf{p}}) = (m\gamma, m\gamma\vec{\mathbf{V}}) \quad (39)$$

A normalização do 4-momento fornece

$$E^2 = \vec{\mathbf{p}}^2 + m^2 \quad (40)$$

Ou, em unidades tal que $c \neq 1$

$$E^2 = \vec{\mathbf{p}}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (41)$$

Para uma partícula em repouso, obtemos a famosa expressão

$$E = mc^2 \quad (42)$$

2.7.4 Princípio Variacional para uma partícula livre

Podemos obter a equação de movimento de uma partícula livre pelo seguinte princípio variacional: “a linha-de-mundo de uma partícula livre entre pontos A e B com separação do tipo tempo é tal que o tempo próprio é um extremo”. A invariância do intervalo de espaço-tempo fornece $d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = -ds^2$. O tempo próprio decorrido no trajeto entre A e B é

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau \quad (43)$$

Tomando as diferenciais das componentes da linha-de-mundo $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$ obtemos um integrando que será nossa Lagrangiana L ,

$$L = \left[\left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[-\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right]^{1/2} \quad (44)$$

Exigir o extremo do funcional nos leva às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^\alpha/d\sigma)} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (45)$$

Que, por sua vez, leva às equações de movimento

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{L} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \right) = 0 \quad (46)$$

Se $\tau_{AB} = \int_A^B L d\sigma$, então $L = d\tau/d\sigma$ e $L^{-1} = d\sigma/d\tau$. Esse fator, dentro dos parênteses, “troca” a derivada de σ para τ e multiplicar a equação 46 por L^{-1} leva a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (47)$$

Resultado igual à Equação 35 quando \mathbf{f} é nula (partícula livre).

3 Princípios da Relatividade Geral

Toda a gravidade Newtoniana é desenvolvida à partir da Lei da Gravitação Universal, que descreve a interação gravitacional entre massas m_1 e m_2 , às posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , pela equação

$$F = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^2} \quad (48)$$

Essa lei viola o princípio da Relatividade Especial pois demanda que as posições sejam consideradas no mesmo instante de tempo para o cômputo da separação no denominador. Como o conceito de simultaneidade é relativo, esta lei descreveria a interação apenas em um referencial privilegiado. Esse impasse foi superado com a formulação da Relatividade Geral, na qual a gravitação é encarada como um efeito da geometria do espaço-tempo, quando o admitimos curvo.

Neste capítulo desenvolvemos os conteúdos estudados pelo aluno com a finalidade de introduzir os princípios da Relatividade Geral. Serão abordadas a descrição de espaços-tempo curvos, coordenadas, vetores e a métrica nestes espaços, o Princípio Variacional de tempo próprio extremo e finalmente as equações de geodésica, simetrias da métrica e quantidades conservadas. As referências utilizadas foram os capítulos 6, 7 e 8 de [2].

3.1 Gravidade como um efeito de geometria

Para ganhar intuição de como seria uma teoria geométrica de gravitação, vamos analisar a *métrica de campo fraco e estático*, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (49)$$

Φ é o potencial gravitacional Newtoniano, considerado nulo no infinito. A Equação 49 descreve com boa aproximação a curvatura, e consequentemente, a gravidade sistema solar.

Vamos determinar a trajetória de uma partícula aplicando o princípio variacional do tempo próprio extremo. Dado que $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ e utilizando t como parâmetro da linha de mundo, temos

$$\begin{aligned} \tau_{AB} &= \int_A^B \left[\left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)dt^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \right]^{1/2} \\ \tau_{AB} &= \int_A^B \left\{ \left(1 + \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\Phi(\vec{x})}{c^2}\right) \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \right\}^{1/2} dt \end{aligned} \quad (50)$$

Mantendo termos de ordem até $1/c^2$, reconhecendo a soma das derivadas no tempo ao quadrado como V^2 , e aplicando a aproximação $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$

$$\tau_{AB} = \int_A^B \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{V^2}{2} - \Phi(\vec{x}) \right) \right] dt \quad (51)$$

A condição para extremo se aplica ao segundo termo do integrando, do qual reconhecemos a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - \Phi(\vec{x}) \quad (52)$$

As equações de Euler-Lagrange fornecem

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi \quad (53)$$

Multiplicar essa relação pela massa nos dá $\vec{F} = m\vec{a}$. No paradigma Newtoniano, a presença de massa gera um potencial que dá origem à força gravitacional. Segundo a RG, a presença de massa curva o espaço-tempo e as partículas seguem as trajetórias de tempo próprio extremo nessa geometria curva. A gravidade deixa de ser uma força e passa a ser um efeito puramente geométrico.

Dessa métrica, podemos verificar também que a curvatura afeta a passagem do tempo. Vamos considerar a relação que existe entre o tempo próprio no referencial de um emissor e no de um receptor de sinais quando dois sinais são emitidos. Para isso, imaginamos observadores em posições x_A e x_B , em repouso. O observador A emite dois sinais, separados pelo intervalo de tempo Δt . Seu tempo próprio decorrido é $\Delta\tau_A = \sqrt{-(\Delta s)^2/c^2}$. Como $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, adotando $\Phi_A = \Phi(x_A, 0, 0)$, e novamente aplicando a aproximação $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$, temos

$$\Delta\tau_A = \left(1 + \frac{\Phi_A}{c^2}\right)\Delta t \quad (54)$$

As linhas de mundo dos sinais saindo de x_A em direção a x_B são paralelas e separadas por Δt , de modo que, para o observador B

$$\Delta\tau_B = \left(1 + \frac{\Phi_B}{c^2}\right)\Delta t \quad (55)$$

Onde $\Phi_B = \Phi(x_B, 0, 0)$. Tomando a razão e aplicando $(1+x)^{-1} \approx 1-x$,

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = 1 + \frac{\Phi_B - \Phi_A}{c^2} \quad (56)$$

Isso indica que a presença de massa e a respectiva curvatura causada pela mesma, afetam também a passagem do tempo dos observadores (tempo próprio). “Relógios mais altos em potencial gravitacional são mais rápidos que relógios mais baixos em potencial”.

3.2 Descrição de espaço-tempos curvos

3.2.1 Coordenadas, Métrica, Convenção da Soma

Na Relatividade Geral (RG), seguimos identificando os eventos num espaço quadridimensional e empregando elementos de linha para descrever a geometria destes espaços. Diferentemente da Relatividade Especial, onde o espaço era plano, na RG admitiremos curvatura. Existem diversas escolhas de coordenadas para identificarmos eventos no espaço-tempo, o que também significa que existem diversos elementos de linha que descrevem a mesma geometria. No espaço plano de Minkowski, por exemplo, o elemento de linha pode ser expresso em cartesianas

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (57)$$

Ou pode ser expresso em coordenadas esféricas

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (58)$$

Como na RE, expressamos o elemento de linha com auxílio da métrica, entretanto não utilizamos mais a métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, mas sim a métrica $g_{\alpha\beta}$, de modo que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})dx^\alpha dx^\beta \quad (59)$$

Essa a métrica é mais geral e confere a curvatura que podemos verificar do elemento de linha. Ressaltamos novamente a convenção de soma adotada: índices repetidos, em pares subscrito-sobrescrito, equivalem a uma soma implícita.

3.2.2 Princípio da Equivalência e Referenciais Inerciais Locais

O Princípio da Equivalência é uma consequência da igualdade entre massa inercial e massa gravitacional e introduz relatividade à gravidade ao reconhecer que um observador em queda livre tem o direito de adotar suas imediações como um referencial inercial, uma vez que, nesta vizinhança, ele observa que objetos deixados em repouso permanecem em repouso. Da mesma forma, um observador acelerado tem o direito de reconhecer suas imediações como se estivessem imersas num campo gravitacional uniforme. Nenhum experimento pode diferenciar aceleração uniforme de um campo gravitacional uniforme, de modo que experimentos realizados em “laboratórios” suficientemente pequenos, em queda livre, em intervalos de tempo suficientemente pequenos, apresentam os mesmos resultados daqueles experimentos realizados em um referencial inercial no espaço vazio.

Geometricamente, o Princípio da Equivalência exige que as propriedades locais do espaço-tempo curvo sejam indistinguíveis das propriedades do espaço plano. Num espaço de métrica $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ deve ser possível encontrar x'^α tal que, no ponto P , a nova métrica $g'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}'_P) = \eta_{\alpha\beta}$. Obviamente a igualdade da métrica com a métrica de Minkowski não pode ser verificada em todo o espaço-tempo, afinal o espaço seria plano. Podemos exigir,

$$g'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}'_P) = \eta_{\alpha\beta} \quad (60)$$

E também

$$\left. \frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^\gamma} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_P} = 0 \quad (61)$$

Caracterizando um referencial inercial local, no qual, infinitesimalmente o espaço-tempo é plano. O que nos garante que esse procedimento é possível? Consideremos a transformação $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$. Sabemos que $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ e que a transformação de coordenadas é especificada pela relação $x'^\alpha = x'^\alpha(x^\beta)$. A regra da cadeia fornece

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} dx'^\gamma \quad (62)$$

De modo que o elemento de linha fica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} dx'^\gamma dx'^\delta = g'_{\gamma\delta} dx'^\gamma dx'^\delta \quad (63)$$

Revelando a lei de transformação da métrica

$$g'_{\gamma\delta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} g_{\alpha\beta} \quad (64)$$

A fim de determinar um ponto P , no novo sistema de coordenadas, tal que a métrica seja igual à de Minkowski, precisamos de 10 termos (número de termos independentes numa

métrica simétrica 4×4). A nova métrica $g'_{\gamma\delta}$ depende das derivadas das coordenadas antigas em relação às coordenadas novas. Temos 16 dessas derivadas e liberdade para escolher seus valores, de modo que é possível igualar $g'_{\gamma\delta} = \eta_{\gamma\delta}$ e ainda nos sobram 6 termos.

Para derivar a métrica temos que derivar seus 10 termos independentes nas 4 coordenadas novas, ou seja, 40 derivadas. Como a métrica depende das derivadas das coordenadas antigas em relação às novas, sua derivada vai depender das segundas derivadas das coordenadas antigas em relação às novas. São 4 coordenadas x^α podendo ser derivadas nas 10 combinações: $(x'^0 x'^0)$, $(x'^0 x'^1)$, $(x'^0 x'^2)$, $(x'^0 x'^3)$, $(x'^1 x'^1)$, $(x'^1 x'^2)$, $(x'^1 x'^3)$, $(x'^2 x'^2)$, $(x'^2 x'^3)$ e $(x'^3 x'^3)$. Resultando em 40 derivadas, de modo que temos os termos suficiente para anular a derivada da métrica.

Para a segunda derivada da nova métrica precisamos das terceiras derivadas das coordenadas antigas. São 4 coordenadas x^α podendo ser derivadas nas 20 combinações: $(x'^0 x'^0 x'^0)$, $(x'^0 x'^0 x'^1)$, $(x'^0 x'^0 x'^2)$, $(x'^0 x'^0 x'^3)$, $(x'^0 x'^1 x'^1)$, $(x'^0 x'^1 x'^2)$, $(x'^0 x'^1 x'^3)$, $(x'^0 x'^2 x'^2)$, $(x'^0 x'^2 x'^3)$, $(x'^0 x'^3 x'^3)$, $(x'^1 x'^1 x'^1)$, $(x'^1 x'^1 x'^2)$, $(x'^1 x'^1 x'^3)$, $(x'^1 x'^2 x'^2)$, $(x'^1 x'^2 x'^3)$, $(x'^1 x'^3 x'^3)$, $(x'^2 x'^2 x'^2)$, $(x'^2 x'^2 x'^3)$, $(x'^2 x'^3 x'^3)$, $(x'^3 x'^3 x'^3)$. O que resulta em 80 terceiras derivadas que temos liberdade de definir. Temos 10 termos independentes na métrica, e cada um tem 10 segundas derivadas independentes, logo temos 100 segundas derivadas da métrica, de modo que não conseguimos zerar todas elas. Restam 20 segundas derivadas diferentes de zero que guardam informação sobre a curvatura da métrica. Conseguimos exigir apenas que a métrica seja igual à de Minkowski e que sua derivada primeira se anule, restringindo uma região em que o espaço é aproximadamente plano: um referencial inercial local.

Localmente, um espaço-tempo genérico também herda as relações causais do espaço-tempo de Minkowski, ditadas pelos cones de luz. Cada ponto possui em sua vizinhança seu cone de luz e o movimento do tipo tempo se dá no interior dos mesmos.

3.2.3 “Mergulhos”(Embedding Diagrams)

Podemos descrever uma geometria ao mergulhá-la (embed) num espaço euclidiano de dimensão maior como uma superfície. No caso de geometrias quadridimensionais, esse procedimento exigiria que empregássemos, no mínimo, um espaço 5-dimensional, não facilitando a visualização. Entretanto, ainda podemos representar algumas fatias 2-d de interesse no espaço euclidiano 3-d, como veremos a seguir. Vamos analisar a geometria de um buraco-de-minhoca, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (65)$$

A constante b , com dimensões de comprimento, insere curvatura, e para r grande, este termo prevalece e a geometria é aproximadamente plana. Para t constante, uma fatia é a métrica espacial tridimensional

$$dS^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (66)$$

E como a métrica é independente do tempo, todos os instantes t constante compartilham dessa geometria. Da simetria esférica da métrica espacial, podemos visualizar fatias bidimensionais fixando, por exemplo, $\theta = \pi/2$, que nos dá

$$d\Sigma^2 = dr^2 + (b^2 + r^2)d\phi^2 \quad (67)$$

A simetria esférica nos garante também que toda outra fatia com θ constante apresenta essa mesma geometria. Podemos mergulhar essa fatia como uma superfície bidimensional no espaço tridimensional. Como ela apresenta simetria para rotações, buscaremos mergulhá-la numa superfície axi-simétrica, sendo conveniente a introdução de coordenadas cilíndricas (ρ, ψ, z) . Em coordenadas cilíndricas, o espaço tridimensional tem métrica

$$dS^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2 \quad (68)$$

E uma superfície é descrita pela função $z(r, \phi)$. Queremos que essa função especifique a mesma geometria da métrica 67, de modo que é necessário determinar

$$\begin{cases} z = z(r, \phi) \\ \rho = \rho(r, \phi) \\ \psi = \psi(r, \phi) \end{cases} \quad (69)$$

Entretanto, dada a axi-simetria, podemos tomar

$$\begin{cases} z = z(r) \\ \rho = \rho(r) \\ \psi = \phi \end{cases} \quad (70)$$

Substituindo essas relações na métrica 68, temos

$$d\Sigma^2 = \left[\left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad (71)$$

Que concorda com 67 se

$$\left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = 1 \quad (72)$$

$$\rho^2 = r^2 + b^2 \quad (73)$$

Usando ρ fornecido pela 73 e o inserindo na 72, temos uma equação diferencial para $z(\rho)$, podendo ser resolvida (constante de integração escolhida de modo que $\rho = 0$ para $z = 0$) e invertida para obter $\rho(z) = b \cosh(z/b)$.

Figura 3.1: Gráfico de $\rho(z) = b \cosh(z/b)$

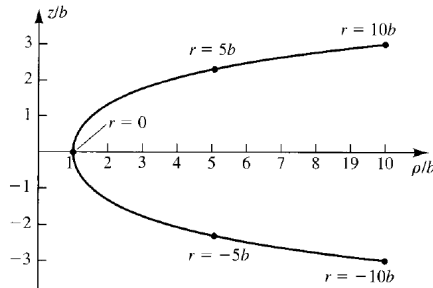
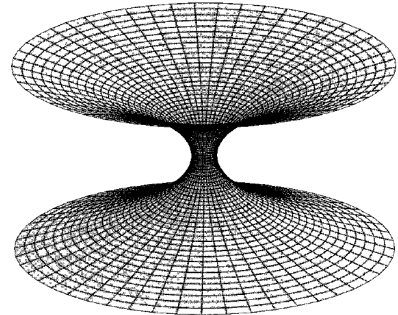


Figura 3.2: Fatia (r, ϕ) do Buraco-de-Minhoca



Retirado de [2].

A Figura 3.1 apresenta o gráfico da solução no plano (ρ, z) . A rotação dessa curva em torno de z fornece a fatia (r, ϕ) da geometria do buraco-de-minhoca como uma superfície no espaço tridimensional, como podemos ver na Figura 3.2. A geometria do buraco-de-minhoca é tal que duas regiões assintoticamente planas do espaço são conectadas pela "garganta", cujo raio é b .

3.2.4 Vetores em espaços-tempo curvos

Em espaços-tempo curvos, não podemos mais definir vetores como fizemos no espaço de Minkowski: segmentos orientados. Em geometrias mais gerais, os vetores adquirem caráter local. A direção de um vetor é determinada localmente por “vetores pequenos” e vetores maiores são construídos de acordo com as regras operacionais idênticas às do espaço plano. Este procedimento é a essência da construção de um espaço tangente.

Utilizamos as coordenadas x^α , às quais associamos os vetores de base $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x})$. Expressamos um vetor em termos das componentes e dos vetores de base, com a soma implícita, $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a^\alpha(\mathbf{x})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x})$. Para os vetores $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = a^\alpha(\mathbf{x})\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x})$ e $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = b^\beta(\mathbf{x})\mathbf{e}_\beta(\mathbf{x})$, o produto escalar será: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta a^\alpha b^\beta$ e o resultado do produto dos vetores bases depende do tipo de base adotada.

Tratando-se da *base ortonormal*, constituída pelos vetores unitários e mutuamente ortonormais $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$, temos $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{\hat{\beta}}(\mathbf{x}) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Essa base é importante pois as componentes de um vetor num determinado referencial definem quantidades físicas mensuráveis. Por exemplo, as componentes do 4-momento numa base ortonormal definem a energia e o 3-momento. Podemos pensar na base ortonormal como aquela com origem no “laboratório” de um observador. Podemos adotar a 4-velocidade desse laboratório como $\mathbf{e}_{\hat{0}}$ e construir os demais vetores de base de modo que sejam todos ortonormais.

Na *base das coordenadas*, o produto escalar é expresso em termos da métrica $g_{\alpha\beta}$. Como exemplo, consideremos a 4-velocidade, de componentes $u^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Dado que $d\tau^2 = -ds^2$, temos

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 \quad (74)$$

De modo que $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_\beta(\mathbf{x}) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ e portanto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta$. Devemos ser capazes de trabalhar com ambos os tipos de vetores. Isso é fácil quando conhecemos as componentes $(\mathbf{e}_{\hat{\beta}})^\alpha$ e $(\mathbf{e}_\alpha)^{\hat{\beta}}$.

3.2.5 Hiper-superfícies

Hiper-superfícies, ou 3-superfícies são as superfícies tridimensionais no espaço quadridimensional, podendo ser especificadas pela relação entre uma coordenada e as outras três, como $x^0 = h(x^1, x^2, x^3)$, ou como uma relação entre as quatro coordenadas da forma $f(x^\alpha) = 0$. Vetores tangentes \mathbf{t} jazem sobre a superfície e vetores normais \mathbf{n} são perpendiculares aos vetores tangentes, de modo que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Podemos classificar as superfícies em “tipo espaço”, nas quais o vetor normal é do tipo tempo ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} < 0$) e “nulas”, nas quais a direção tangente ℓ é nula ($\ell \cdot \ell = 0$). Um exemplo de superfície do tipo espaço é o espaço de Minkowski para t constante, do qual temos a superfície especificada pelo elemento de linha

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (75)$$

Qualquer vetor com componente t nula é tangente à mesma e qualquer vetor unitário com componente puramente temporal é normal. Outro exemplo de superfície do tipo tempo é o *hiperbolóide de Lorentz*: considerando coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , a superfície é

definida por $-t^2 + r^2 = -a^2$, para uma constante a . As componentes temporal e radial podem ser parametrizadas por $t = a \cosh \chi$ e $r = a \sinh \chi$. O elemento de linha em esféricas fornece:

$$dS^2 = a^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (76)$$

χ parametriza a hipérbole em (t, r) . Um vetor tangente à superfície é paralelo a um pequeno deslocamento $\Delta\chi$, de modo que $\mathbf{t} = (a \sinh \chi, a \cosh \chi, 0, 0)$ é um vetor tangente. Um vetor normal é $\mathbf{n} = (a \cosh \chi, a \sinh \chi, 0, 0)$

Um exemplo de superfície nula é o cone-de-luz. Em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , o especificamos por $t = r$ e um vetor tangente é $\ell = (1, 1, 0, 0)$.

3.3 Geodésicas

3.3.1 Princípio Variacional e Equação da Geodésica

Vamos analisar as trajetórias de partículas e da luz numa determinada geometria. Consideraremos partículas que não causam curvatura significativa além daquela já existente num determinado espaço-tempo: corpos de prova. Para essas, obteremos a *equação da geodésica* à partir do princípio variacional: “a linha de mundo de um corpo de prova entre dois pontos de separação do tipo tempo é tal que torna extremo o tempo próprio entre eles”. O procedimento é similar ao do espaço plano, onde exigimos

$$\delta \int_A^B [-\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} = 0 \quad (77)$$

E obtivemos

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (78)$$

Para um espaço geral de métrica $g_{\alpha\beta}$, temos

$$\delta \int_A^B [-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2} = 0 \quad (79)$$

E vamos obter

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (80)$$

Onde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ é o *Símbolo de Christoffel* ou *Conexão*, cuja determinação será detalhada.

Vamos determinar a geodésica da métrica do buraco de minhoca (equação 65). Utilizaremos um parâmetro σ para a linha-de-mundo, e verificamos a seguinte Lagrangiana na equação 79

$$L = \left\{ \left(\frac{dt}{d\sigma} \right)^2 - \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 - (b^2 + r^2) \left[\left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (81)$$

As equações de Lagrange resultantes envolvem fatores L^{-1} . Como $\tau = \int L d\sigma$, então $L = d\tau/d\sigma$, de modo que os fatores recíprocos da Lagrangiana “trocam” as derivadas em σ por τ . E as quatro equações de movimento são

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (82)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (83)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[(b^2 + r^2) \frac{d\theta}{d\tau} \right] = (b^2 + r^2) \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (84)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[(b^2 + r^2) \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \right] = 0 \quad (85)$$

Essa métrica é surpreendentemente tratável na obtenção de suas soluções. Para exemplificar, vamos determinar o tempo próprio decorrido para um observador caindo livremente e radialmente no buraco-de-minhoca à partir da coordenada radial $r = R$, com velocidade inicial $u^r = U$, até atingir o ponto $r = -R$, na outra folha. Como possuímos a componente radial da 4-velocidade, determinamos as demais de modo a satisfazer a condição de normalização (vetor unitário do tipo tempo). A 4-velocidade inicial é

$$u^\alpha = [\sqrt{(1 + U^2)}, U, 0, 0] \quad (86)$$

Como as componentes angulares são nulas, a equação radial (83), em termos da 4-velocidade, fica

$$\frac{du^r}{d\tau} = 0 \quad (87)$$

Indicando que a componente radial da velocidade é constante e portanto deve ser igual a seu valor inicial U . Disso, $\frac{dr}{d\tau} = U$, que é facilmente integrada de $r = -R$ a $r = R$, fornecendo $\Delta\tau = 2R/U$.

3.3.2 Símbolos de Christoffel

Verificamos que as equações da Geodésica (82, 83, 84, 85), na forma da 80, fornecem os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Para essa geometria, os símbolos, não-nulos são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Símbolos de Christoffel para a métrica do Buraco-de-Minhoca

$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$	$\Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta$
$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{r}{b^2 + r^2}$	$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{r}{b^2 + r^2}$	$\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta$

Outra forma de determinar os símbolos de Christoffel para uma determinada métrica é empregando a seguinte relação, que pode ser obtida das equações de Lagrange considerando uma Lagrangiana de forma geral.

$$g_{\alpha\delta} \Gamma_{\beta\gamma}^\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (88)$$

Ao buscarmos uma solução para a geometria do buraco de minhoca, verificamos que podemos expressar a equação da Geodésica também em termos da 4-velocidade. De forma mais geral, temos

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 \quad (89)$$

Vimos como uma solução para as geodésicas do buraco-de-minhoca foi extremamente tratável, mas no geral, para outras métricas, o procedimento não é tão trivial. Descreveremos a seguir o procedimento para determinar constantes de movimento, que auxiliam na solução das equações da Geodésica.

3.3.3 Simetrias e grandezas conservadas

As equações da geodésica são equações diferenciais acopladas e de segunda ordem. Algumas poucas geometrias são facilmente tratáveis na obtenção de soluções, como no caso do buraco-de-minhoca, visto anteriormente. Uma primeira restrição (vínculo) ao movimento numa geodésica, é a condição de normalização da 4-velocidade

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -1 \quad (90)$$

Na Mecânica Clássica, é natural a relação entre simetrias das leis físicas e quantidades conservadas, formalizada pelo *Teorema de Noether*. Grandezas conservadas simplificam o tratamento da evolução temporal de trajetórias (geodésicas, nesse caso), permitindo-nos ignorar a complexidade fenomenológica envolvida nos pontos intermediários de um trajeto e concentrarmo-nos na simples comparação de grandezas conservadas em instantes iniciais e finais, ou auxiliando-nos na integração das equações de movimento. Em Relatividade Geral, analisaremos as simetrias do espaço-tempo para identificar grandezas conservadas.

Se a transformação $x^1 \rightarrow x^1 + cte$ deixa a métrica invariante, então o vetor $\xi^\alpha = (0, 1, 0, 0)$ é paralelo à direção em que existe tal simetria. Essa simetria indica que a métrica é independente de x^1 , de modo que essa coordenada é uma coordenada cíclica na Lagrangiana e a equação de Lagrange é

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\frac{\partial L}{\partial (dx^1/d\sigma)} \right] = 0 \quad (91)$$

Como $L = [-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{1/2}$, então

$$\frac{\partial L}{\partial (dx^1/d\sigma)} = -\frac{g_{1\beta}}{L} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = -g_{1\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta \quad (92)$$

Uma vez que $L^{-1} = d\sigma/d\tau$. Isso nos mostra que a equação de Lagrange pode ser escrita da forma

$$\frac{d}{d\sigma} (\xi \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (93)$$

Identificamos assim a grandeza conservada $\xi \cdot \mathbf{u}$, ou, equivalentemente $\xi \cdot \mathbf{p}$. Chamamos ξ de *Vetor de Killing*.

Como exemplo da identificação de simetrias e utilização do vetor de Killing para resolver equações de geodésicas, vamos determinar as geodésicas do plano euclidiano. A métrica em coordenadas polares é

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (94)$$

E a Lagrangiana é

$$L = \left[\left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (95)$$

As equações de movimento, resultantes da aplicação da Equação de Lagrange, são

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = r \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \quad (96)$$

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\phi}{ds} \right) = 0 \quad (97)$$

O vetor tangente tem componentes $u^i = dx^i / ds$ com $i = 1, 2$. Sua condição de normalização é

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 1 \quad (98)$$

A métrica é independente de ϕ , de modo que o vetor de Killing associado à simetria é $\xi = (0, 1)$. A respectiva grandeza conservada é

$$\ell = \xi \cdot \mathbf{u} = g_{ij} \xi^i u^j = r^2 \frac{d\phi}{ds} \quad (99)$$

Inserimos na equação anterior e obtemos

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \frac{\ell}{r^2}} \quad (100)$$

Como nos interessa a forma da trajetória (r, ϕ) , da regra da cadeia, temos

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = \sqrt{1 - \frac{\ell}{r^2}} \quad (101)$$

De modo que, da 99

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{1 - \frac{\ell}{r^2}} \quad (102)$$

A integração é mais fácil em r , isto é

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\ell}{r^2} \left(1 - \frac{\ell}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (103)$$

Cuja integral fornece $\phi = \phi_0 + \cos^{-1}(\ell/r)$. Usando que $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$, temos

$$\ell = r \cos(\phi - \phi_0) = x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 \quad (104)$$

Equação de uma reta, como esperado para uma geometria euclidiana.

Vamos agora determinar todas as geodésicas do tipo tempo para o espaço-tempo bi-dimensional

$$ds^2 = -X^2 dT^2 + dX^2 \quad (105)$$

Cuja métrica é

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -X^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (106)$$

E é independente de T , portanto temos o vetor de Killing $\xi^A = (1, 0)$ associado à simetria. A quantidade conservada é

$$-\xi \cdot \mathbf{u} = -g_{ij} \xi^i u^j = X^2 \left(\frac{dT}{d\tau} \right) = e \quad (107)$$

Outra constante do movimento vem da normalização da 4-velocidade $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$

$$-X^2 \left(\frac{dT}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{dX}{d\tau} \right)^2 = -1 \quad (108)$$

Substituindo nesta última equação $dT/d\tau$ fornecido por 107

$$\frac{dX}{d\tau} = \pm \left(\frac{e^2}{X^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (109)$$

Para obter $T(X)$, usamos a regra da cadeia

$$\frac{dT}{dX} = \frac{dT/d\tau}{dX/d\tau} = \pm \frac{e}{X^2} \left(\frac{e^2}{X^2} - 1 \right)^{-1/2} \quad (110)$$

Cuja integração fornece a família de geodésicas $T(X) = \pm \cosh^{-1}(e/X) + T_0$.

3.3.4 Geodésicas Nulas

Para a luz, o tempo próprio não pode ser usado como parâmetro das linhas de mundo, uma vez que o intervalo entre pontos com separação do tipo luz é nulo. Podemos escrever a linha de mundo em função de um outro parâmetro arbitrário λ . Por exemplo, no espaço de Minkowski, as linhas de mundo nulas são linhas de inclinação unitária, $x = t$, de modo que $x^\alpha = u^\alpha \lambda$, com $u^\alpha = (1, 1, 0, 0)$ descreve essa linha de mundo. Verifica-se que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ e $d\mathbf{u}/d\lambda = 0$.

Queremos generalizar o procedimento para obter a geodésica num espaço com curvatura. A equação procurada deve fornecer linhas de mundo cuja velocidade verifica a condição de norma nula, e da derivada nula da 4-velocidade em relação à λ , quando em um referencial inercial local. Além disso, precisamos que essa equação tome a mesma forma em qualquer referencial. A equação de geodésica já verificada anteriormente, mas com outro parâmetro que não o tempo próprio, atende a todos esses requisitos. E vamos obter

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (111)$$

Vamos agora revisitar o espaço-tempo bidimensional abaixo, buscando suas geodésicas nulas.

$$ds^2 = -X^2 dT^2 + dX^2 \quad (112)$$

O vetor de Killing é

$$-\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = -g_{ij} \xi^i u^j = X^2 \left(\frac{dT}{d\lambda} \right) = e' \quad (113)$$

A condição de normalização da 4-velocidade para a luz

$$-X^2 \left(\frac{dT}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dX}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (114)$$

Substituindo $dT/d\tau$ fornecido por 113

$$\frac{dX}{d\lambda} = \pm \frac{e'}{X} \quad (115)$$

Novamente, a regra da cadeia fornece

$$\frac{dT}{dX} = \frac{dT/d\lambda}{dX/d\lambda} = \pm \frac{1}{X} \quad (116)$$

Cuja integral leva à família de geodésicas nulas $T(X) = \pm \ln X + T_0$.

4 Conclusões e perspectivas futuras

A primeira metade do projeto caminhou em concordância com o plano original apresentado (tabela 2). Foram revisitados os postulados da Relatividade Especial e suas consequências, as transformações de Lorentz foram deduzidas de forma intuitiva e simples, sem grande rigor, e tiveram seu aspecto geométrico visualizado e aplicado ao tratamento de alguns efeitos notáveis. Isso foi imprescindível para a concreta apropriação da noção de espaço-tempo, uma vez que o primeiro contato com Relatividade, que geralmente se dá em cursos de Física Moderna, falha em enfatizar a unidade do espaço-tempo, em reconhecer a relatividade de coordenadas entre observadores, e em visualizar geometricamente o espaço-tempo de Minkowski e as transformações de Lorentz (e sua relação com transformações hiperbólicas). Essa abordagem geométrica tornou natural a progressão à Relatividade Geral e ao tratamento da gravidade como um efeito da geometria. Analisamos a métrica de campo fraco e estático, recuperando os resultados da gravitação Newtoniana de forma puramente geométrica, e em seguida iniciamos uma introdução às ferramentas importantes para o estudo geométrico da gravitação: foram apresentadas a métrica e o elemento de linha de uma variedade geral, vetores e sua manipulação nessas geometrias, “mergulhos” e a visualização de fatias de espaços-tempo, e as geodésicas do tipo tempo e do tipo luz. Todas essas ferramentas serão necessárias para darmos continuidade ao plano de estudos original: análise das métricas de Schwarzschild e FLRW.

No corrente semestre (Agosto - Dezembro), o aluno cursa regularmente o sexto período do Bacharelado em Física, inscrito nas disciplinas: “Relatividade”, “Mecânica Estatística”, “Eletromagnetismo 1”, e “Mecânica Quântica 1”

Tabela 2: Cronograma das etapas do projeto

Bimestre	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Estudo de Relatividade Especial						
Introdução aos principais conceitos de Relatividade Geral						
Métrica de Schwarzschild						
Métrica de FLRW						
Elaboração dos relatórios de atividades						

Referências

- [1] T. Dray. *The Geometry of Special Relativity*. Taylor & Francis, 2012.
- [2] J. B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Benjamin Cummings, illustrate edition, 2003.
- [3] H. M. Nussenzveig. *Curso de física básica*, volume 4. Edgard Blucher, 2002.
- [4] Cláudio José de Holanda Cavalcanti and Fernanda Ostermann. Deformação geométrica e velocidade superluminal aparentes em objetos em movimento relativístico. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:355 – 372, 00 2007.
- [5] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.