

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Sei $M := \{x \in [0, 1] : x \text{ hat eine Dezimaldarstellung der Form } x = 0, a_0, a_1, a_2, \dots \text{ mit } a_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass M überabzählbar ist.

Schreibe alle x_n untereinander:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03} \dots \\ x_1 &= 0, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13} \dots \\ x_2 &= 0, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \dots \\ x_3 &= 0, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich eine Zahl b mit $b \in M$ und $b = 0, b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ bilden, wobei alle Dezimalstellen b_i so gewählt werden, dass $b_i \neq a_{ii}$. Wenn beispielsweise a_{11} also 2 ist, so muss $b_1 = 0$.

Nach diesem Prinzip kann immer eine Zahl generiert werden, die noch nicht in M enthalten ist. Damit ist M überabzählbar.

Aufgabe 2

a)

Startwert: 011010

$$\begin{array}{cccc} z_0 011010 \rightarrow & \square z_0 11010 \rightarrow & \square \square z_0 1010 \rightarrow & \square \square \square z_0 010 \\ z_0 \square & 0 z_0 \square & 0 z_0 \square & 0 z_0 \square \\ \square \square \square \square z_0 10 \rightarrow & \square \square \square \square \square z_0 0 \rightarrow & \square \square \square \square \square \square z_0 \square \rightarrow & \square \square \square \square \square \square z_1 \square \\ 00 z_0 \square & 00 z_0 \square & 000 z_0 \square & 00 z_1 0 \square \\ \square \square \square \square \square \square z_1 \square \rightarrow & \square \square \square \square \square \square z_1 \square \rightarrow & \square \square \square \square \square \square \square z_1 \square \rightarrow & \square \square \square \square \square \square \square z_e \square \\ 0 z_1 00 \square & z_1 000 \square & z_1 \square 000 \square & z_e 000 \square \end{array}$$

b)

Die Turingmaschine M extrahiert bei der Funktion f alle 0en aus der Eingabe (also auf Band 1) und schreibt sie auf Band 2. Außerdem wird die Eingabe mit \square überschrieben.

c)

Jetzt soll die 2-Band Turingmaschine M für die Funktion f auf eine 1-Band Turingmaschine M' für dieselbe Funktion übertragen werden.

$$\delta(z_0, 1) = (z_0, \square, R)$$

$$\delta(z_0, 0) = (z_1, 0, R)$$

$$\delta(z_0, \square) = (z_e, \square, N)$$

$$\delta(z_1, 1) = (z_2, 0, L)$$

$$\delta(z_1, 0) = (z_1, 0, R)$$

$$\delta(z_1, \square) = (z_e, \square, N)$$

$$\delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L)$$

$$\delta(z_2, \square) = (z_3, \square, R)$$

$$\delta(z_3, 0) = (z_0, \square, R)$$

Aufgabe 3

a)