Tutorium 4

i) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$ ist injektiv, surjektiv oder bijektiv?

- injektiv: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$
- nicht surjektiv: für $y = 3 \in \mathbb{Z}\ \nexists n$, sodass $f(n) = 3$

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wahr oder Falsch?

- $\Rightarrow a_n = (-1)^n \Rightarrow a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} - 1$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wahr oder Falsch?

- z.B. Harmonische Reihe

1 Cauchyprodukt

Definition 1.1

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergierende Reihen für $k \in \mathbb{N}_0$.
Sei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_k \cdot b_{k-j}$.

$\Rightarrow$ Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut und es gilt
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$

Achtung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

Beispiel 1.1

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

Zu zeigen: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot e^y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \\
&\overset{\text{CP}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}}_{=c_k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \cdot \quad \underbrace{\frac{n!}{n!}}_{\text{Nahrhafte 1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}}_{\text{Binom. Lehrsatz} := (x-y)^n} \cdot \frac{1}{n!} \\
&\underset{\text{LS}}{\overset{\text{Bin}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&\underset{\text{Exp}}{\overset{\text{Def}}{=}} e^{x+y}
\end{aligned}
$$

2 Potenzreihe