Tutorium 4

i) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$ ist injektiv, surjektiv oder bijektiv?

- injektiv: $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$
- nicht surjektiv: für $y = 3 \in \mathbb{Z}\ \nexists n$, sodass $f(n) = 3$

ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wahr oder Falsch?

- $\Rightarrow a_n = (-1)^n \Rightarrow a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} - 1$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wahr oder Falsch?

- z.B. Harmonische Reihe

1 Cauchyprodukt

Definition 1.1

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergierende Reihen für $k \in \mathbb{N}_0$.
Sei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_k \cdot b_{k-j}$.

$\Rightarrow$ Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut und es gilt
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$

Achtung: Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

Beispiel 1.1

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

Zu zeigen: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$

$$
\begin{aligned}
e^x \cdot e^y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \\
&\overset{\text{CP}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}}_{=c_k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \cdot \quad \underbrace{\frac{n!}{n!}}_{\text{Nahrhafte 1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}}_{\text{Binom. Lehrsatz } := (x-y)^n} \cdot \frac{1}{n!} \\
&\underset{\text{LS}}{\overset{\text{Bin}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&\underset{\text{Exp}}{\overset{\text{Def}}{=}} e^{x+y}
\end{aligned}
$$

2 Potenzreihe

Definition 2.1

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k := P(x, x_o)$ Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0.

Für die Konvergenz gilt:

1) Die Potenzreihe konvergiert immer im Entwicklungspunkt x_0

2) $\exists! R \in [0, \infty]$:

$$|x - x_0| < R \Rightarrow \text{Potenzreihe konvergiert}$$
$$|x - x_0| > R \Rightarrow \text{Potenzreihe divergiert}$$
$$|x - x_0| = R \Rightarrow \text{keine Aussage}$$

R heißt Konvergenzradius, $(x_0 - R, x_0 + R)$ heißt Konvergenzbereich.

R kann nun auf 2 Arten bestimmt werden:

1) Formel von Euler:
Ist $a_k \neq 0$, $\forall k : \exists \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, so gilt $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

2) Formel von Cauchy-Hadamard:
$\alpha := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow R = \frac{1}{\alpha}$, wobei
$\alpha = +\infty \Rightarrow R$
$\alpha = 0 \Rightarrow R = +\infty$

2.1 Aufgaben

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! \cdot b^{-k^2} \cdot x^k$ mit $b > 1$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} \cdot x^k$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^5 \cdot 5^k \cdot x^k$

iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot k \cdot \left(x^2\right)^k$

v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b^{\sqrt{k}} \cdot x^k,\ b > 0$