Übungsblatt 4

Aufgabe 1

a)

Algorithm 1: Funktion f: Primzahltest

Data: x_1 Eingabe;
if $x_1 = 0$ **then**
  GOTO M0;
end
if $x_1 = 1$ **then**
  GOTO M0;
end
$x_4 = (x_1 DIV 2) + 1$;
for $x_2 = 2$ **to** x_4 **do**
  for $x_3 = x_2$ **to** x_4 **do**
    if $x_1 = x_2 + x_3$ **then**
      GOTO M0;
    end
  end
end
$x_0 = 1$;
HALT;

Algorithm 2: M0

H $x_0 = 0$;
HALT;

Achtung: **for**-Schleifen sind hier eigentlich nicht erlaubt, können aber in einem Hilfsprogramm mit **if**-Anweisungen konstruiert werden.

b)

Algorithm 3: Funktion g: „erweiterter" Primzahltest

$x_0 = h(x_2)$ `// n`
$x_1 = h(x_3)$ `// m`

Algorithm 4: Funktion h

Data: x_1 = Eingabe;

$x_2 = 0$;

$x_3 = 2$;

Algorithm 5: M1

if $x_2 = x_1$ **then**

  GOTO M3;

end

$x_3 = x_3 + 1$

Algorithm 6: M2

if $f(x_3) = 1$ **then**

  $x_2 = x_2 + 1$;

  GOTO M1;

else

  $x_3 = x_3 + 1$;

  GOTO M2;

end

Algorithm 7: M3

$x_0 = x_3$;

HALT;

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} fak(1) &= 1 \\ fak(n) &= mult(n, fak(n-1)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Verknüpfungen primitiv rekursiver Funktionen sind ebenfalls primitiv rekursiv

b)

$$abs(n, m) = sub(n, m) + sub(m, n)$$

$\Rightarrow$ *sub* ist primitiv rekursiver, damit ist *abs* ebenfalls primitiv rekursiv

c)

$$max\left(n,m\right)=add\left(sub\left(n,m\right),m\right)$$

$$\Rightarrow add \text{ und } sub \text{ sind primitiv rekursiv, damit auch } max$$

Aufgabe 3

a)

i) **IA:** $a\left(1,0\right)=a\left(0,1\right)=2$
IH: $a\left(1,n\right)=n+2$
IS: $a\left(1,n+1\right)=a\left(0,a\left(1,n\right)\right)=a\left(1,n\right)+1\overset{\text{IH}}{=}n+3$ $\square$

ii) **IA:** $a\left(2,0\right)=a\left(1,1\right)=a\left(0,2\right)=3$
IH: $a\left(2,y\right)=2y+3$
IS: $a\left(2,y+1\right)=a\left(1,a\left(2,y\right)\right)=0$
$a\left(1,2y+3\right)=2y+5=2\left(y+1\right)+3$ $\square$

b)

Zu Zeigen: f_n LOOP-berechenbar, $\mathcal{O}\left(n\right)$ LOOP-Schleifen

IA: $n=1$

$$f_n\left(k\right)=\underbrace{a\left(1,k\right)=k+2}_{\text{LOOP berechenbar}}$$

IH: f_n LOOP-berechenbar mit $\mathcal{O}\left(n\right)$ LOOP-Schleifen
für ein beliebiges, aber festes $n\in\mathbb{N}$

IS: $n\rightarrow n+1$

$$\begin{aligned}
f_{n+1}\left(k\right)&=a\left(n+1,k\right)\\
&\overset{k\neq0}{=}f_n\left(n,a\left(n+1,k-1\right)\right)\\
&=f_n\left(a\left(n+1,k-1\right)\right)=f_n\left(f_{n+1}\left(k-1\right)\right)\\
&=\left(f_n^k\right)\left(a\left(n+1,0\right)\right)\\
&=\left(f_n^k\right)\left(a\left(n,1\right)\right)\\
&=\left(f_n^k\right)\left(f_n\left(1\right)\right)\\
&=f_n^{k+1}\left(1\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Somit ist f_{n+1} mit $\mathcal{O}\left(n+1\right)$ LOOP berechenbar

$\square$