Übungsblatt 1

Aufgabe 1

M_n, $\forall_n \in \mathbb{N}$ abzählbar heißt, dass es $\forall n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung eine surjektive Abbildung gibt mit f_n: $\mathbb{N} \Rightarrow M_n$.

Wir ordnen die Funktionswerte wie folgt an:

$$\begin{array}{llll} f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & f_1(4) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \\ f_3(1) & f_3(2) & & \end{array}$$

Mit

$$f_1(1) \to f_1(2) \to f_2(1) \to f_3(1) \to f_2(2) \to f_1(3) \to f_1(4) \to f_2(3) \to f_3(2) \text{ usw...}$$

Wir definieren eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

demnach $f(1) = f_1(1)$, $f(2) = f_1(2)$, $f(3) = f_2(1)$, $f(4) = f_3(1)$, usw...

Behauptung: f ist surjektiv
Beweis: Sei $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$, $x \in M$
$\Rightarrow$ Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$ mit $f_n(l) = x$. Nach dieser Konstruktion gibt es $m \in \mathbb{N} : f(m) = f_n(l) = x$. Somit ist die Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar

Aufgabe 2

a)

Zu zeigen: $\sum_k^* = \{1, ..., k\}^*$ abzählbar.

Es sei K aus $\mathbb{N}^+$ beliebig

$$\sum\nolimits_K^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sum\nolimits_K^n$$

Da es nur endliche Strings der Länge n gibt (also $|\sum_k|^n$ viele), ist $\sum_K^n$ abzählbar.

$$\Rightarrow \sum\nolimits_K^* \text{ abzählbar aus Aufgabe 1}$$

b)

Es gilt: Ein Polynom $p(x)$ des n-ten Grades hat höchstens n-viele Nullstellen. Die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms ist abzählbar. Da $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{a, ..., n\}$ aus den ganzen Zahlen kommt, ist die Menge aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten abzählbar. Daraus und aus Aufgabe 1 folgt, dass die Vereinigung der Polynome abzählbar ist.

$$\Rightarrow \text{Die Menge der reelen algebraischen Zahlen ist abzählbar}$$

c)

Die Menge der reelen transzenten Zahlen $\mathbb{T}$ ist mit $\mathbb{T} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ definiert, wobei $\mathbb{A}$ die Menge aller reelen algebraischen Zahlen ist.
Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist und eine abzählbare Menge entfernt wird, muss $\mathbb{T}$ überabzählbar sein.

Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned}
\delta\left(z_0, \square\right) &= \left(z_1, 1, R\right) \\
\delta\left(z_0, 1\right) &= \left(z_1, 1, L\right) \\
\delta\left(z_1, \square\right) &= \left(z_0, 1, L\right) \\
\delta\left(z_1, 1\right) &= \left(z_e, 1, L\right)
\end{aligned}$$

$$z_0\square \rightarrow 1z_1\square \rightarrow z_0 11\square \rightarrow z_1\square 11\square \rightarrow z_0\square 111 \rightarrow 1z_1 111 \rightarrow z_e 1111$$
$$\Rightarrow BBTM\left(2\right) = 4$$

b)

$$\left(2 \cdot 2 \cdot \left(n+1\right)\right)^{2n}$$

c)

$$\begin{aligned}
\left(z_n, \square\right) &\rightarrow \left(z_e, 1, R\right) \\
\left(z_n, 1\right) &\rightarrow \left(z_n, 1, R\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Somit kommt in jedem neuen Schritt mindestens eine 1 (also 1 Holzstück) hinzu.

$\Rightarrow BB\left(\cdot\right)$ ist streng monoton wachsende Funktion