Tutorium 3

1 Häufungspunkte

Beispiel 1.1

Bestimme die Häufungspunkte von folgender Folge:

$$a_n = \tfrac{1}{2^n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Bestimme Teilfolgen a_{2n} und a_{2n+1}

$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + (-1)^{2n} = \frac{1}{4^n} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ hat HP1} \Rightarrow \limsup$$
$$a_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} + (-1)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n}\cdot 2} - 1 = \frac{1}{4^n \cdot 2} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} -1$$
$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ hat HP} - 1 \Rightarrow \liminf$$

2 Cauchyfolgen

Definition 2.1

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Cauchyfolge genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m|$$

Beispiel 2.1

Ist die Folge a_n Cauchyfolge?

$$a_n = \tfrac{1}{n^2+n}$$

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A $n \geq m$

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m^2+m} - \frac{1}{n^2+n}\right| = \left|\frac{n^2+n-m^2-m}{(n^2+n)(m^2+m)}\right| \leq \left|\frac{n^2+n}{(n^2+n)(m^2+m)}\right|$$
$$\left|\frac{1}{m^2+m}\right| = \frac{1}{m^2+m} \leq \frac{1}{m} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < m$$
$$\Rightarrow \text{Setze } n_0 = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$$

Beispiel 2.2

Ist die Folge a_n Cauchyfolge?

$$a_n = \frac{7n^3 - 13n^2}{n^3} = 7 - \frac{13}{n}$$

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A $n \geq m$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left|7 - \frac{13}{n} - \left(7 - \frac{13}{m}\right)\right| = \left|\frac{13}{m} - \frac{13}{n}\right| \leq \left|\frac{13}{m} + \frac{13}{n}\right| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \left|\frac{13}{m}\right| + \left|\frac{13}{n}\right| \leq \frac{13}{m} + \frac{13}{m} = \frac{26}{m} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{26}{\epsilon} < m \\ &\Rightarrow \text{Setze } n_0 = \left\lceil \frac{26}{\epsilon} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

3 Reihen

Definition 3.1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Setze $s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k, k \in \mathbb{N}$.
Dann heißt s_n die n-te Partialsumme von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendliche Reihe, bezeichnet $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

3.1 Wichtige Reihen:

- Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert
- Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert bei $|q| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} < \infty, \alpha > 1 \Rightarrow \text{konvergiert} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{divergiert} \end{cases}$

3.2 Konvergenzkriterien

3.2.1 Notwendiges Kriterium / Trivialkriterium

Definition 3.2

Sei $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergent, dann gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Achtung: nur notwendig, nicht hinreichend

$\Rightarrow$ eignet sich nur zum Zeigen von Divergenz (dann, wenn Folge nicht gegen 0 konvergiert)

Beispiel 3.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1},\ a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \text{ also nicht } 0$$
$$\Rightarrow \text{Reihe divergiert}$$

3.2.2 Leibnizkriterium

Definition 3.3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reele, monoton fallende Nullfolge mit $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n$

Beispiel 3.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$
$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} = a_{k+1},\ \frac{1}{k} > 0 \forall k \in \mathbb{N} \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$
$$\Rightarrow \text{Reihe konvergiert}$$

Aber: keine absolute Konvergenz, da $\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, da harmonische Reihe

3.2.3 Wurzelkriterium

Definition 3.4

Sei $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ eine Reihe

i) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann konvergiert die Reihe absolut

ii) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, dann divergiert die Reihe

iii) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, dann lässt sich keine Aussage treffen

Beispiel 3.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{5^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{5} = \frac{1}{5} < 1$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

3.2.4 Quotientenkriterium

Definition 3.5

Sei $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ eine Reihe, $a_n \neq 0, \forall n \geq m$

i) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, dann konvergiert die Reihe absolut

ii) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$, dann divergiert die Reihe

Beispiel 3.4

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}\right|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3}\right|$$
$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}}\right|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2n^3} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{2n^3} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2}$$
$$= \frac{1}{2} < 1$$
$\Rightarrow$ Reihe konvergiert absolut

3.2.5 Minorantenkriterium

Definition 3.6

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$. Ist $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ divergent, so divergiert auch $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$.
a_n ist dann die Minorante.

Beispiel 3.5

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2-1}}_{:=b_n}$$

$\frac{2n+1}{n^2-1} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \geq 0, \forall n \geq 2$
$\Rightarrow 2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe und divergiert
$\Rightarrow$ Reihe b_n divergiert

3.2.6 Majorantenkriterium

Definition 3.7

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $|a_n| \leq b_n$. Ist $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ und es gilt $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=m}^{\infty} b_n$.
b_n ist dann die Majorante.

Beispiel 3.6

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = n^{\frac{1}{2}-2} = n^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\Rightarrow$ Mit $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ gilt nach Definition $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert.

$\Rightarrow$Reihe konvergiert absolut.

3.3 Aufgaben

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}|\sin(n)| + \frac{1}{2}n}$

iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$