

Tutorium 3

1 Häufungspunkte

Beispiel 1.1

Bestimme die Häufungspunkte von folgender Folge:

$$a_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Bestimme Teilfolgen a_{2n} und a_{2n+1}

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{1}{2^{2n}} + (-1)^{2n} = \frac{1}{4^n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ hat HP } 1 \Rightarrow \limsup \\ a_{2n+1} &= \frac{1}{2^{2n+1}} + (-1)^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n} \cdot 2} - 1 = \frac{1}{4^n \cdot 2} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \\ &\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ hat HP } -1 \Rightarrow \liminf \end{aligned}$$

2 Cauchyfolgen

Definition 2.1

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt Cauchyfolge genau dann, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m|$$

Beispiel 2.1

Ist die Folge a_n Cauchyfolge?

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A $n \geq m$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \frac{1}{m^2 + m} - \frac{1}{n^2 + n} \right| = \left| \frac{n^2 + n - m^2 - m}{(n^2 + n)(m^2 + m)} \right| \leq \left| \frac{n^2 + n}{(n^2 + n)(m^2 + m)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{m^2 + m} \right| = \frac{1}{m^2 + m} \leq \frac{1}{m} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < m \\ &\Rightarrow \text{Setze } n_0 = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

Beispiel 2.2

Ist die Folge a_n Cauchyfolge?

$$a_n = \frac{7n^3 - 13n^2}{n^3} = 7 - \frac{13}{n}$$

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A $n \geq m$

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= \left| 7 - \frac{13}{n} - \left(7 - \frac{13}{m} \right) \right| = \left| \frac{13}{m} - \frac{13}{n} \right| \leq \left| \frac{13}{m} + \frac{13}{n} \right| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \frac{13}{m} \right| + \left| \frac{13}{n} \right| \leq \frac{13}{m} + \frac{13}{m} = \frac{26}{m} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{26}{\epsilon} < m \\ &\Rightarrow \text{Setze } n_0 = \left\lceil \frac{26}{\epsilon} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

3 Reihen

Definition 3.1

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Setze $s_n = \sum_{k=m}^n a_k, k \in \mathbb{N}$.

Dann heißt s_n die n -te Partialsumme von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendliche Reihe, bezeichnet $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

3.1 Wichtige Reihen:

- Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert
- Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ konvergiert bei $|q| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \begin{cases} < \infty, \alpha > 1 \Rightarrow \text{konvergiert} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \Rightarrow \text{divergiert} \end{cases}$

3.2 Konvergenzkriterien

3.2.1 Notwendiges Kriterium / Trivialkriterium

Definition 3.2

Sei $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergent, dann gilt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Achtung: nur notwendig, nicht hinreichend

\Rightarrow eignet sich nur zum Zeigen von Divergenz (dann, wenn Folge nicht gegen 0 konvergiert)

Beispiel 3.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ also nicht } 0 \\ \Rightarrow \text{Reihe divergiert}$$

3.2.2 Leibnizkriterium

Definition 3.3

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge mit $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n a_n$