Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

$F = \exists x \forall y \exists z \forall w P(x, y, z, w)$
$G = \forall y \forall w P(a, y, f(y), w)$

Aufgabe 5.2

1. $F = \exists y \forall x (P(y, x, f(h(x), y)))$
2. $F = \forall x \exists z (p(a, x, f(z, y)))$
3. $F = \exists y \forall x \exists z (P(y, x, f(z, y)))$

Aufgabe 5.3

a) $\exists w \forall x (\forall y \exists z \neg P(x, y) \wedge Q(x, z, a, w))$
$\overset{\text{Pränex}}{=} \exists w \forall x \forall y (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, z, a, w))$
$\overset{\text{Skolem}}{\to} \forall x \forall y (\neg P(x, y) \wedge \neg Q(x, z, a, b))$

$$D(F) = \{a, b\}$$

b) $\exists w \forall x (\neg \forall y (P(x, y) \vee \exists y Q(x, y, a, w)))$
$\overset{\text{Pränex}}{=} \exists w \forall x \exists y \exists z (\neg P(x, y) \vee Q(x, z, a, w))$
$\overset{\text{Skolem}}{\to} \forall x (\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x), a, b))$

$$\begin{aligned} D(F) = \{&a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), \\ &f(g(a)), f(g(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b)), \ldots\} \end{aligned}$$

c) $\overset{\text{Pränex}}{=} \forall x \exists y \forall z \exists w (P(y, x) \vee P(x, z) \vee P(w, y))$
$\overset{\text{Skolem}}{\to} \forall x \forall z (P(f(x), x) \vee P(x, z) \vee P(g(x, z), f(x)))$

$$\begin{aligned} D(F) = \{&a, f(a), g(a, a), f(f(a)), f(g(a, a)), \\ &g(f(a), a), g(a, f(a)), g(g(a, a), a), g(a, g(a, a)), \ldots\} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4

a) $D(F) = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$
$E(F) = \{P(f(a), a) \vee \neg P(a, f(a)) [x/a][y/a][z/a], ...*\}$

* $[x/a][y/a][z/a]$ auch mit $f(a)$ und $f(f(a))$ statt a
$\Rightarrow$ Insgesamt also 3^3 Elemente in der Herbrand-Expansion

b) $D(F) = \{a\}$
$E(F) = \{P(a, a, a) \wedge \neg P(a, a, a)\}$

c) $D(F) = \{a, b\}$
$E(F) = \{P(a, a) \wedge \neg P(a, a) \wedge P(b, a) [x/a][y/a][z/a], ...*\}$

* $[x/a][y/a][z/a]$ auch mit jeweils b statt a
$\Rightarrow$ Insgesamt also 3^2 Elemente in der Herbrand-Expansion

Aufgabe 5.5

Falls F keine Funktionssymbole der Stelligkeit > 0 enthält, so enthält $D(F)$ (Herbrand-Universum) lediglich die in F vorkommenden Konstanten und ist somit endlich.
Deshalb ist die Menge aller zu F passenden Herbrand-Strukturen ebenfalls endlich (d.h. die Menge aller möglichen Interpretationen der Prädikatsymbole, wenn die Grundmenge $D(F)$ ist), und es kann in endlicher Zeit überprüft werden, ob eine dieser Strukturen ein Modell für F ist.

F **ist erfüllbar genau dann wenn** F **ein Herbrand-Modell besitzt**, also ist die Erfüllbarkeit von F entscheidbar.

Aufgabe 5.6

Zum Beispiel: $F = \forall x (P(a, b, x))$