

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

a)

$$B \vee W$$

mit $B := \text{Bier}$ und $W := \text{Wein}$

b)

$$B \oplus W$$

Aussage: „entweder oder“, statt „oder“

c)

$$\begin{aligned} & \bigvee_{i=1}^n \left(A_i \wedge \bigwedge_{j=1, j \neq i}^n \overline{A_j} \right) \\ &= (A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge \cdots \wedge \overline{A_n}) \vee \\ & \quad (\overline{A_1} \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge \overline{A_n}) \vee \\ & \quad \vdots \\ & \quad (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \cdots \wedge A_n) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

a)

1. $\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}(A_2) = \cdots = \mathcal{A}(A_n) = 1$
2. $\mathcal{A}(A_1) = \mathcal{A}(A_2) = \cdots = \mathcal{A}(A_n) = 0$

b)

$$\mathcal{A}(A_1) = 1, \mathcal{A}(A_2) = \cdots = \mathcal{A}(A_n) = 0$$

Aufgabe 1.3

a)

$$F_1 = \underbrace{((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))}_{:=X} \vee C$$

C	A	B	$(A \rightarrow B)$	$(B \rightarrow A)$	X	F
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

$\Rightarrow F_1$ ist erfüllbar, weil mindestens eine 1 in der F -Spalte steht, aber keine Tautologie (also nicht gültig), weil es auch Belegungen für F gibt, die kein Modell sind.

b)

$$F_2 = (B \rightarrow A) \leftrightarrow \underbrace{(A \rightarrow (A \wedge B)) \wedge (A \oplus B)}_{:=Y}$$

A	B	$(B \rightarrow A)$	$(A \wedge B)$	$(A \rightarrow (A \wedge B))$	$A \oplus B$	Y	F
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

$\Rightarrow F_2$ ist nicht erfüllbar, da in der F -Spalte nur 0en stehen und damit keine Tautologie, also nicht gültig.

Aufgabe 1.4

Jedes Element i ist in mindestens einem Kasten j :

$$F = \bigwedge_{i=1}^{2n+1} \bigvee_{j=1}^n A_{i,j}$$

In jedem Kasten j befinden sich mindestens 2 Dinge i und i' :

$$G = \bigwedge_{j=1}^n \bigvee_{i=1}^{2n} \bigvee_{i'=i+1}^{2n+1} (A_{i,j} \wedge A_{i',j})$$

In jedem Kasten j befinden sich höchstens 3 Dinge i , i' und i'' :

$$H = \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{i=1}^{2n-2} \bigwedge_{i'=i+1}^{2n-1} \bigwedge_{i''=i'+1}^{2n} \bigwedge_{i'''=i''+1}^{2n+1} (A_{i,j} \wedge A_{i',j} \wedge A_{i'',j} \wedge A_{i''',j})$$

Jedes Element i ist in höchstens einem Fach j oder j' :

$$I = \bigwedge_{i=1}^{2n+1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{j'=j+1}^n \neg (A_{i,j} \wedge A_{i,j'})$$

\Rightarrow Also ist die zu suchende Formel $A = (F \wedge G \wedge H \wedge I)$

Aufgabe 1.5

$$F = A \wedge B \wedge (\overline{G} \vee D) \wedge \overline{C} \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{D} \vee E) \wedge G \wedge (\overline{E} \vee C)$$

Diese Formel wird nun so umgewandelt, dass sie nur aus Implikationen besteht:

$$F' = (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (G \rightarrow D) \wedge (C \rightarrow 0) \wedge \\ ((A \wedge B \wedge D) \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow G) \wedge (E \rightarrow C)$$

Auf diese Formel F' wird nun der Markierungsalgorithmus angewandt:

1. Markiere A , B und G ; $M = \{A, B, G\}$
2. Markiere D wegen Hornklausel $(G \rightarrow D)$; $M = \{A, B, G, D\}$
3. Markiere E wegen Hornklausel $((A \wedge B \wedge D) \rightarrow E)$; $M = \{A, B, G, D, E\}$
4. Markiere C wegen Hornklausel $(E \rightarrow C)$; $M = \{A, B, G, D, E, C\}$
5. Brich ab mit „unerfüllbar“, wegen Hornklausel $(C \rightarrow 0)$, C ist aber schon markiert.