Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Ähnlich zum Beweis der Widerlegungsvollständigkeit im Skript:
Beweis durch Induktion über die Anzahl n der in Formel F vorkommenden atomaren Formeln.

IA:
IH: Für eine unerfüllbare Formel F mit n atomaren Formeln gibt es e
IS: B

F_0 entsteht aus F, indem jedes Vorkommen von A_{n+1} in einer Kla

Da F unerfüllbar ist, müssen auch F_0 und F_1 unerfüllbar sein, ansonsten könnte aus deren erfüll

Aufgabe 3.2

a)

Zeige die Aussage, indem gezeigt wird, dass höchstens 4^n Klauseln existieren können.

Betrachtet man eine Klausel, kann eine Atomformel auf genau vier verschiedene Arten darin auftreten: gar nicht, positiv, negativ oder positiv *und* negativ. Diese vier Optionen gibt es für jede Atomformel, die Kombination aller dieser Optionen gibt also alle möglichen Klauseln, was 4^n sind.

b)

Betrachten wir die Folge $F = Res^0(F), Res^1(F), \cdots, Res^k(F) = Res^*(F)$.

Im schlimmsten Fall unterscheidet sich $Res^i(F)$ und $Res^{i+1}(F)$ nur durch genau eine Klausel, also $|Res^0(F)| - |Res^0(F)| = 1$ für alle i. Da $|Res^0(F)|$ und wir aus a) wissen, dass $|Res^*(F)| \leq 4^n$, wissen wir nun auch, dass nach spätestens 4^n Schritten alle möglichen Klauseln entstanden sind.

Also ist $Res^k(F) = Res^{4^n}(F) = Res^*(F)$.
(In den meisten Fällen geschieht das aber schon viel früher)

Aufgabe 3.3

Aus der Definition von Resolution folgt:

F ist unerfüllbar $\Rightarrow$ F lässt sich zu $\square$ resolvieren.

Somit kann der Algorithmus Unerfüllbarkeit erkennen (weil wir aus Aufgabe 1 wissen, dass es nur maximal 4^n Klauseln geben kann um überhaupt erst resolvieren zu können).
Wenn F nach einer gescheiterten Resolution *nicht* $\square$ ausgibt, so ist F erfüllbar.

Aufgabe 3.4

$$F = \forall x \forall y \forall z \left(\left(E\left(x, y\right) \wedge E\left(y, z\right) \right) \rightarrow \overline{E\left(x, z\right)} \right)$$

a)

$\mathcal{A}$ ist ein Modell für F. Argumentation durch Widerspruch:

Angenommen $\mathcal{A}$ sei kein Modell. Dann gäbe es eine Belegung der Variablen, sodass $F^{\mathcal{A}}$ zu 0 ausgewertet wird.
Dies kann nur der Fall sein, wenn die linke Seite der Implikation zu 1 ausgewertet wird und die rechte Seite zu 0.
Die Grundmenge sind die natürlichen Zahlen, daher wissen wir, dass die Summe zweier Zahlen ungerade ist, genau dann wenn eine der beiden Zahlen gerade und die andere ungerade ist.

1. x ist gerade: Damit der linke Teil der Implikation zu 1 ausgewertet wird, muss y ungerade sein und dadurch z gerade.
   Da aber x und z gerade $\Rightarrow$ rechte Seite der Implikation 1.

2. x ist ungerade: (Analog zu a))

b)

$\mathcal{B}$ ist kein Modell.

Betrachte dazu folgenden Fall: $(x = 0, y = 0, z = 0)$