61821326 李睿刚

实验目标：

$$\begin{aligned} &minimize \quad -\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i+x_i) \\ &subject\ to \quad\ \ x\geq 0,\ 1^T x=1 \end{aligned}$$

实验分析：

化简问题：

显然，这是个凸优化问题。
构建拉格朗日函数：

$$L(x,\lambda,\mu)=-\sum_{i=1}^{n}\ln(a_i+x_i)-\lambda^T x+\mu(1^T x-1)$$

对偶函数：

$$g(\lambda,\mu)=inf_x\, L(x,\lambda,\mu)$$

KKT 条件：

$$\begin{gathered} -x^*\leq 0 \\ 1^T x^*=1 \\ \lambda^*\geq 0 \\ \lambda_i^* x_i^*=0 \quad i=1,2\dots n \\ -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+x_i^*}-\lambda+\mu=0 \end{gathered}$$

消λ得：

$$\begin{gathered} -x^*\leq 0 \\ 1^T x^*=1 \\ x_i^*\left(-\frac{1}{a_i+x_i^*}+\mu\right)=0 \quad i=1,2\dots n \\ -\frac{1}{a_i+x_i^*}+\mu\geq 0 \qquad i=1,2\dots n \end{gathered}$$

如果$\left(-\frac{1}{a_i+x_i^*}+\mu\right)>0$，则$x_i^*=0$，带入前式得$\mu>\frac{1}{a_i}$. 因为$a_i>0$，所以得到$a_i>\frac{1}{\mu}$.

如果$\left(-\frac{1}{a_i+x_i^*}+\mu\right)=0$，则$x_i^*$可以是任意非负数，由等式得$x_i^*=\frac{1}{\mu}-a_i$. 此时$a_i\leq\frac{1}{\mu}$.

综上，

$$x_i^*=\begin{cases}\frac{1}{\mu}-a_i & a_i\leq\frac{1}{\mu}. \\ 0 & a_i>\frac{1}{\mu}\end{cases}$$

最终化简为：

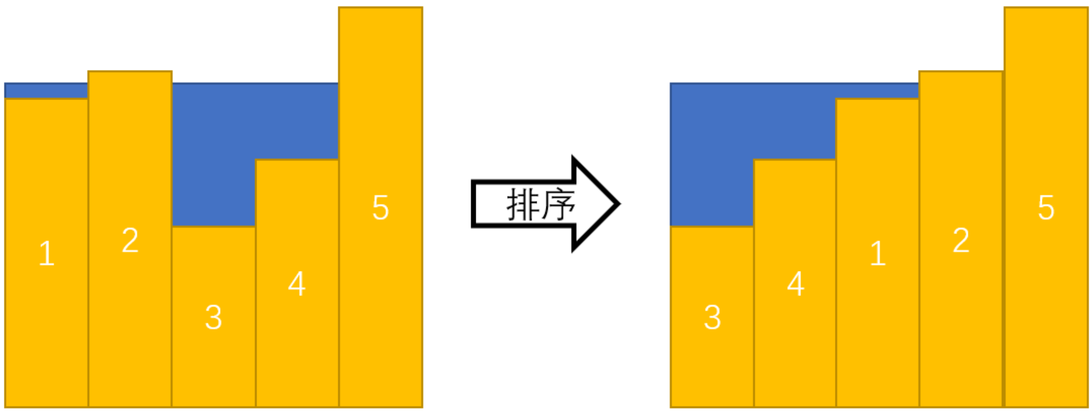
$$\sum_{i=0}^{n} \max\left\{0, \frac{1}{\mu} - a_i\right\} = 1$$

可以形象地解释为：将第i片区域的地面海拔记为a_i，水位海拔为$\frac{1}{\mu}$，x_i^*则为该区域上水没过地面的高度（水位）。总水量为 1。

编程思路：

由公式$x_i = \max\left\{0, \frac{1}{v} - a_i\right\}$知，只要求出“水位”1/v，在给出$a_i$的情况下，就可以求出$x_i$。所以程序解决问题的重点在于求出$h = \frac{1}{v}$。而又已知总水量为 1，所以只要考虑水量 c 和水位 h 的关系，求出 c=1 时的 h 值即可。

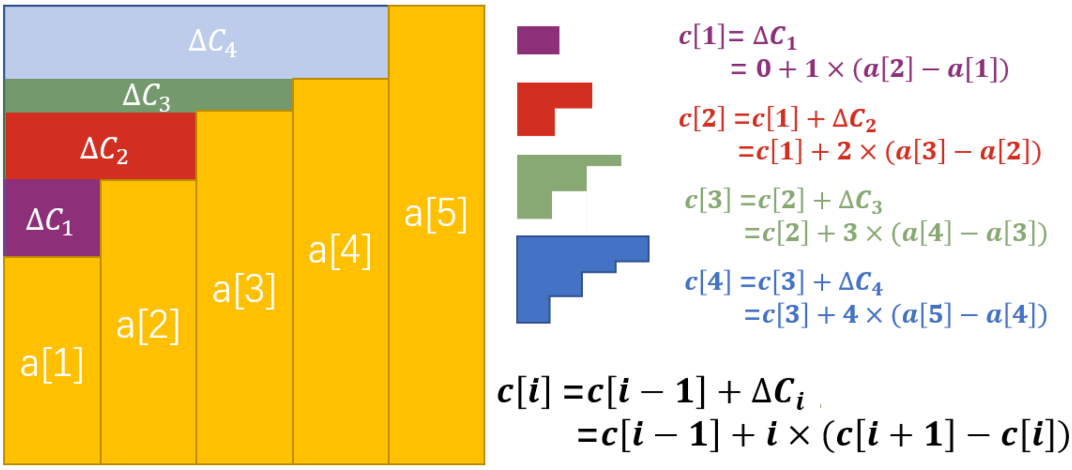
为了方便得到 c 和 h 的关系，这里指出：“水量 c 和a_i的顺序无关”，解释如下图：



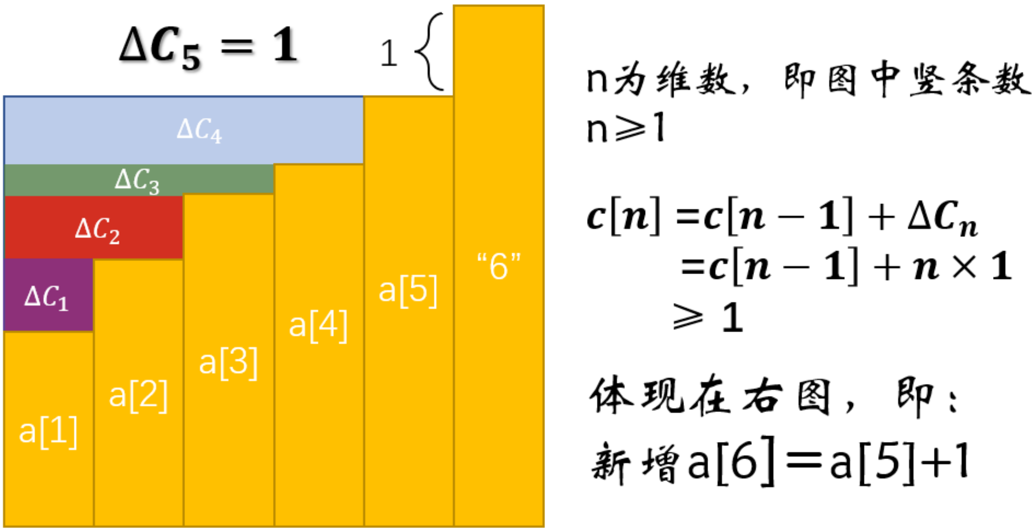
c=S×h。图中易知 S (液面的宽度)和 h 为分段函数关系，故 c 与 h 也是分段函数关系，且 c(h)很容易得到，是根据 h 分段的 **非递减** <u>一次</u> 函数：

$$c = \begin{cases} b_1 + S_1 h & 0 \le h < H_1 \\ b_2 + S_2 h & H_1 \le h < H_2 \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

所以只要确定了 h 在哪段，就可以根据那段的一次函数求出 h。这段范围内 c 会由小于 1 变成大于等于 1，故只要求各段分界点的 c 值，找到包含 1 的那段即可，即$h = a_i$时的 c. 定义ΔC_i为相邻分界点 c 值的差，关系推导由下图可知：



在数组 c 的首尾需要特殊处理，才能使递推式对 1 到 n 都成立。由$c[1]$的表达式知，需要定义$c[0]=0$；对最后一段，没有ΔC，故可以补充一项 a。由于我们只关心 c=1 的位置，故可以按下图补充：



至此$c[i]$的递推关系普遍适用。只要找到第一个大于等于 1 的$c[k]$，就可以求出 h：

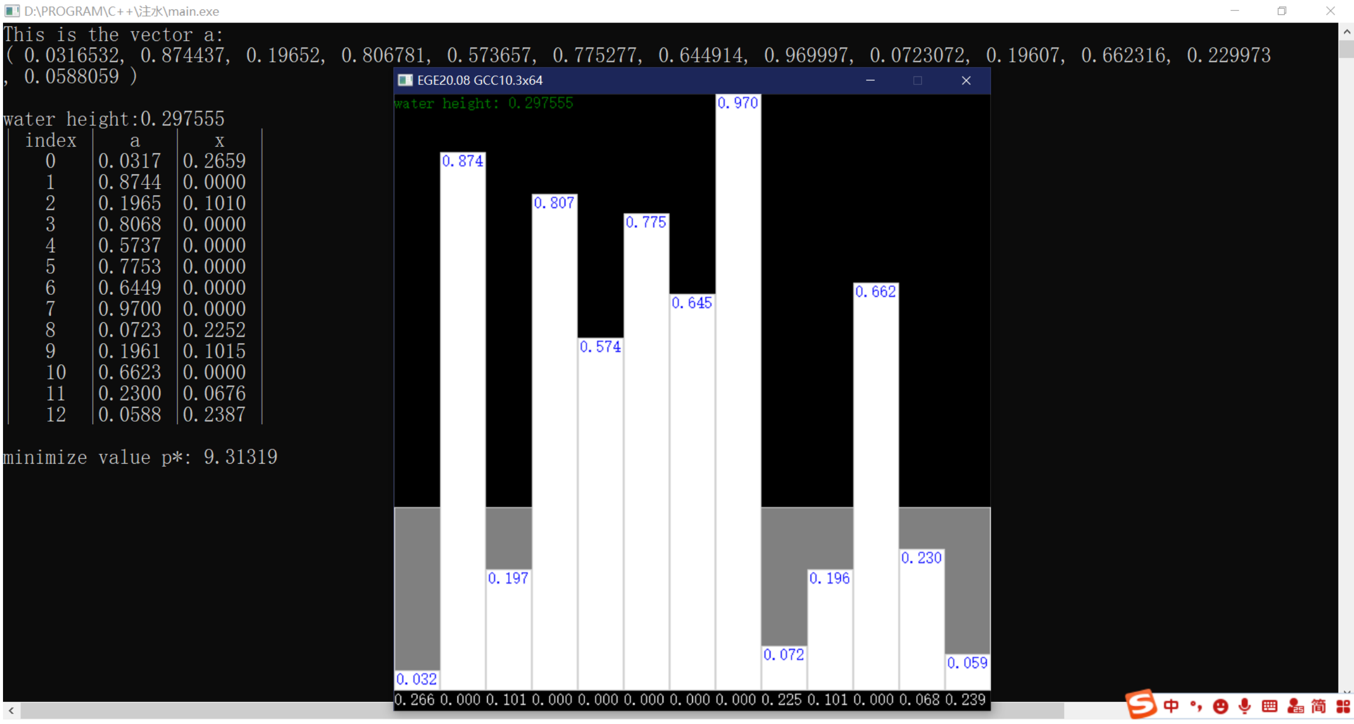
$$h = a[k-1] + \frac{1-c[k-1]}{k}$$

$$x_i = (a_i - h) > 0\ ?\ 0:\ a_i - h$$

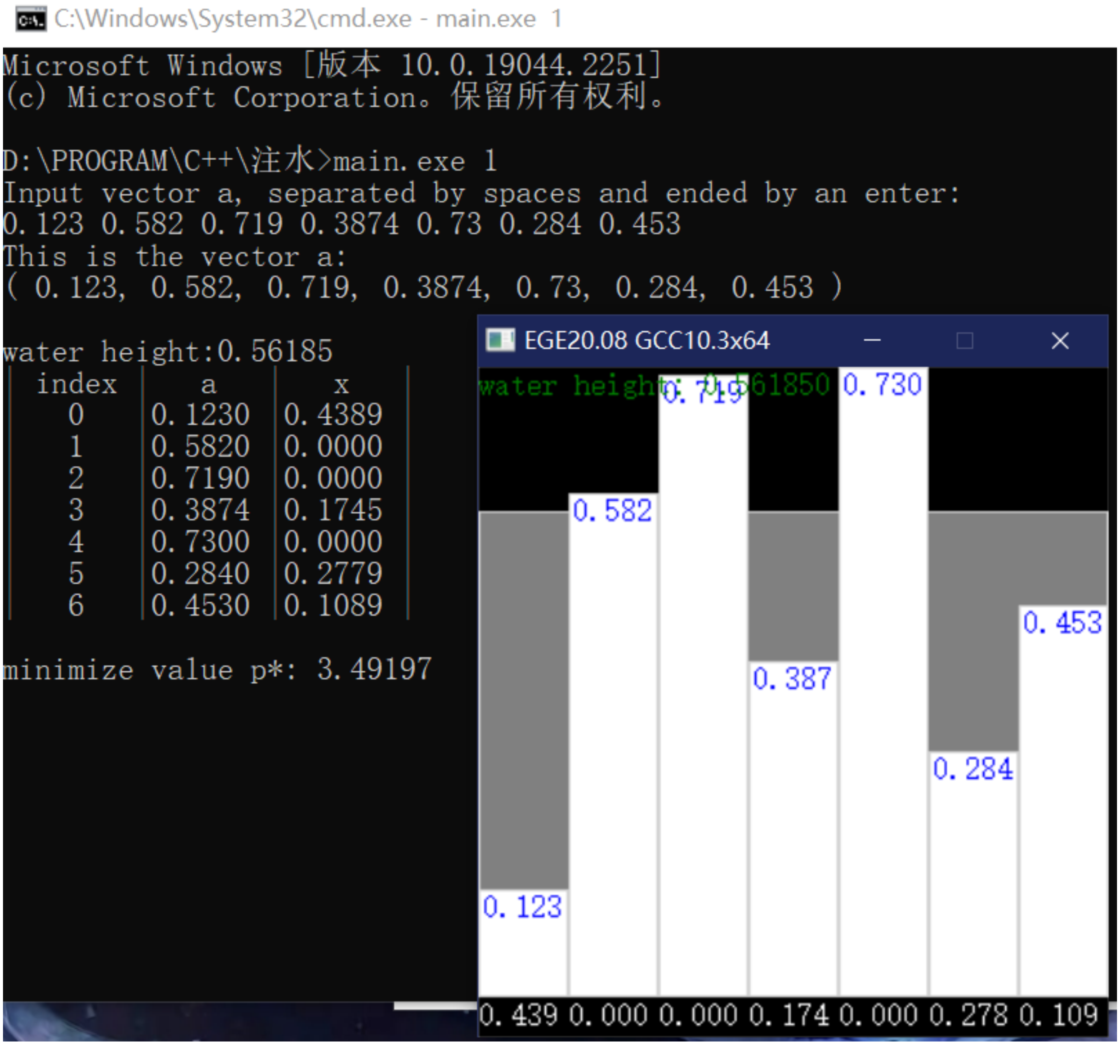
实验结果截图分析:

手动验算，水位高度之和就是 1。

随机数据：


D:\PROGRAM\C++\注水\main.exe
This is the vector a:
(0.0316532, 0.874437, 0.19652, 0.806781, 0.573657, 0.775277, 0.644914, 0.969997, 0.0723072, 0.19607, 0.662316, 0.229973
, 0.0588059)
water height:0.297555
index a x
0 0.0317 0.2659
1 0.8744 0.0000
2 0.1965 0.1010
3 0.8068 0.0000
4 0.5737 0.0000
5 0.7753 0.0000
6 0.6449 0.0000
7 0.9700 0.0000
8 0.0723 0.2252
9 0.1961 0.1015
10 0.6623 0.0000
11 0.2300 0.0676
12 0.0588 0.2387
minimize value p*: 9.31319
EGE20.08 GCC10.3x64
water height: 0.297555
0.032 0.874 0.197 0.807 0.574 0.775 0.645 0.970 0.072 0.196 0.662 0.230 0.059
0.266 0.000 0.101 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.225 0.101 0.000 0.068 0.239

手动输入：


C:\Windows\System32\cmd.exe - main.exe 1
Microsoft Windows [版本 10.0.19044.2251]
(c) Microsoft Corporation。保留所有权利。
D:\PROGRAM\C++\注水>main.exe 1
Input vector a, separated by spaces and ended by an enter:
0.123 0.582 0.719 0.3874 0.73 0.284 0.453
This is the vector a:
(0.123, 0.582, 0.719, 0.3874, 0.73, 0.284, 0.453)
water height:0.56185
index a x
0 0.1230 0.4389
1 0.5820 0.0000
2 0.7190 0.0000
3 0.3874 0.1745
4 0.7300 0.0000
5 0.2840 0.2779
6 0.4530 0.1089
minimize value p*: 3.49197
EGE20.08 GCC10.3x64
water height: 0.561850
0.123 0.582 0.719 0.387 0.730 0.284 0.453
0.439 0.000 0.000 0.174 0.000 0.278 0.109