

# Introduction aux NURBS

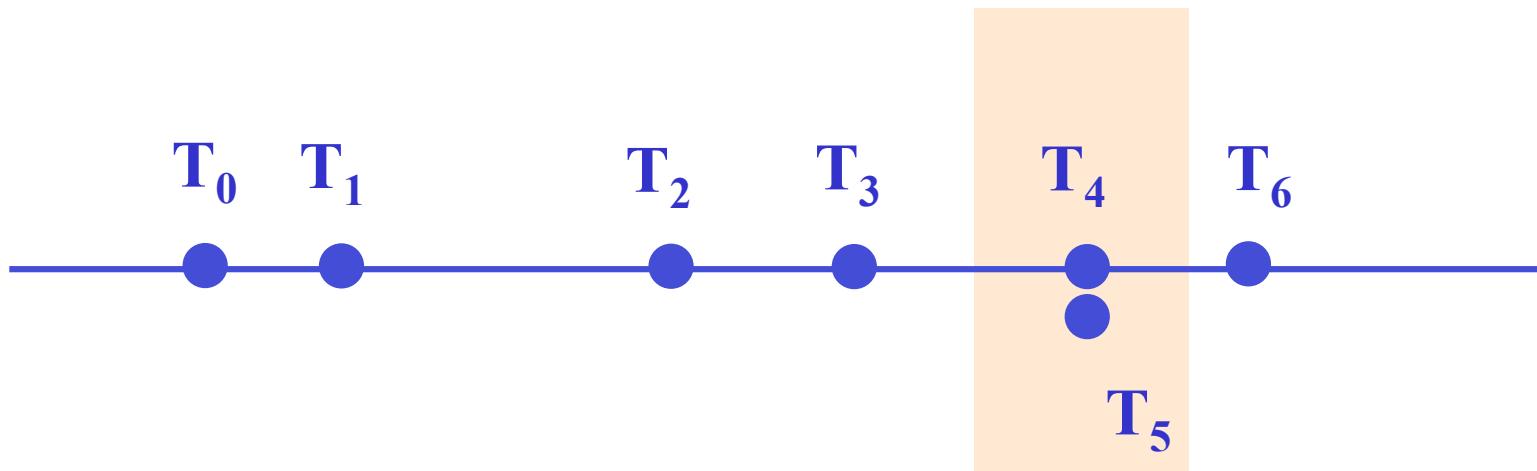
# The Art of 3D Computer Modeling



[www.pixar.com](http://www.pixar.com)

# Des nœuds...

$$T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n,$$



*Un nœud est de multiplicité  $m$   
s'il est répété  $m$  fois*

# Fonctions B-splines

Définition 1.4.

Soit les  $n + 1$  noeuds  $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ .

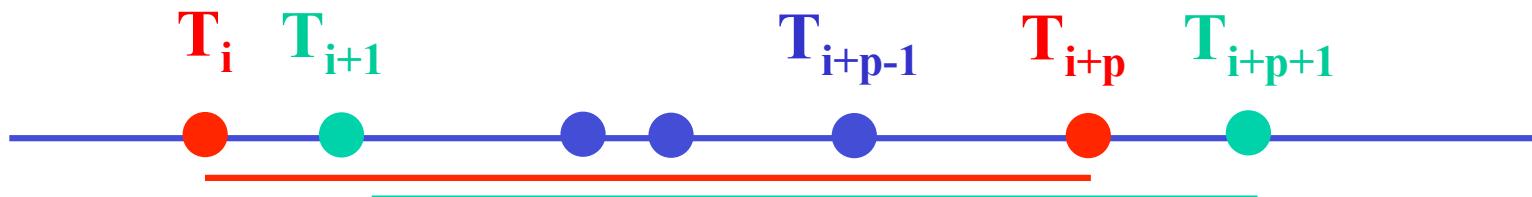
Les B-splines de degré  $p$  sont les  $n-p$  fonctions  $B_i^p(t)$ . Une fonction  $B_i^p$  est nulle sauf dans l'intervalle  $[T_i, T_{i+p}]$  où elle est définie par la relation de récurrence :

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

avec  $i = 0, \dots, n - p - 1$  et en partant de :

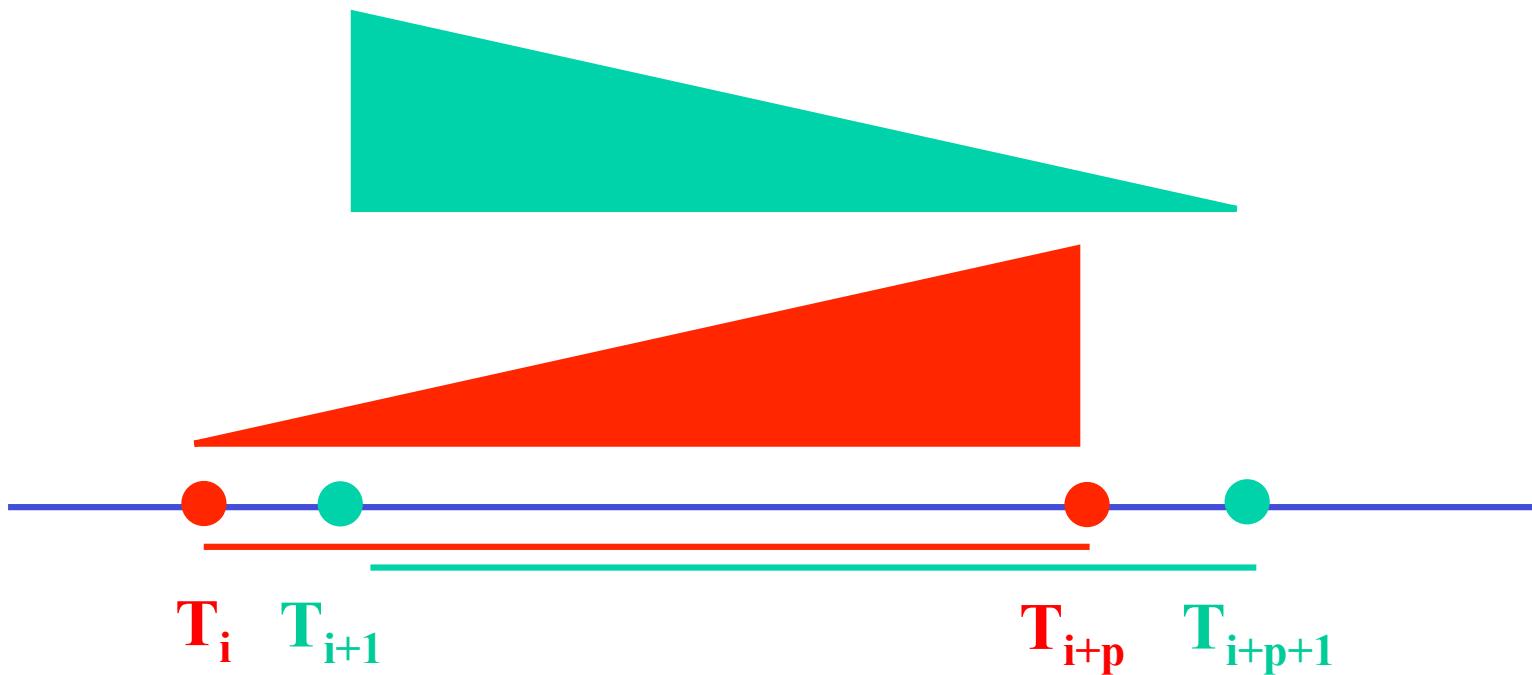
$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [T_i, T_{i+1}[ \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On observe immédiatement que pour des noeuds de multiplicité supérieure à un, la formule de récurrence peut faire apparaître une valeur nulle à l'un ou l'autre dénominateur. On complète donc la définition en spécifiant qu'il ne faut tenir compte que des termes dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

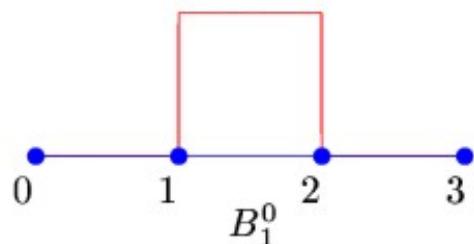


# Les B-splines ou fonctions de mélange

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$



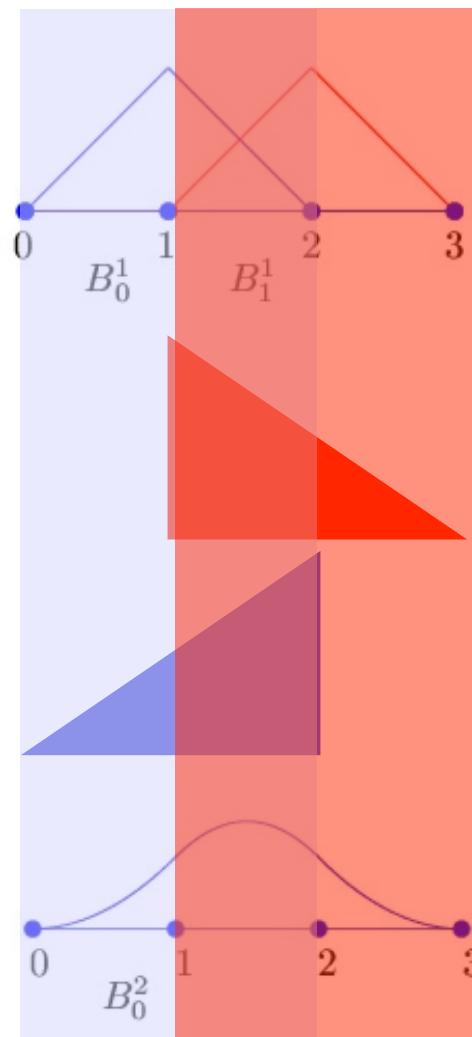
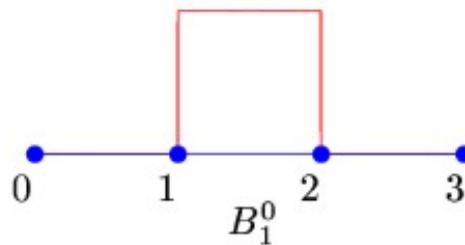
# Commençons la récurrence...



$$B_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [T_i T_{i+1}[ \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

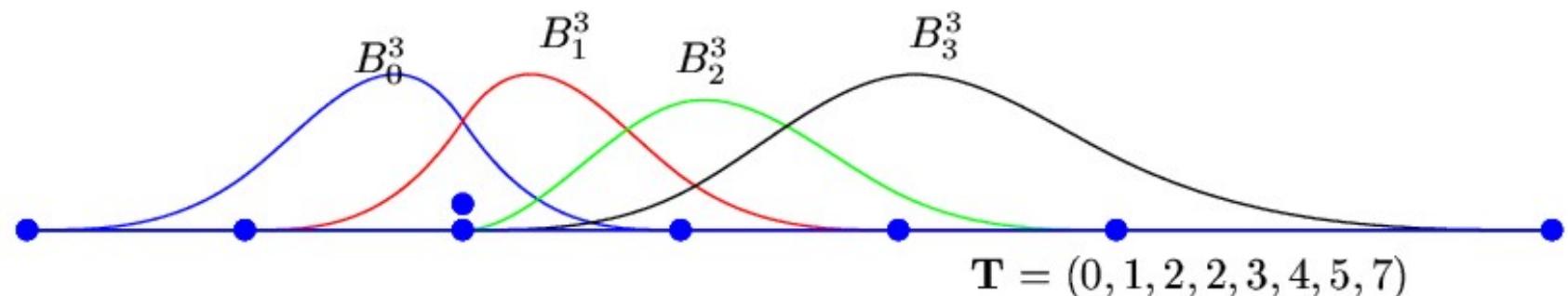
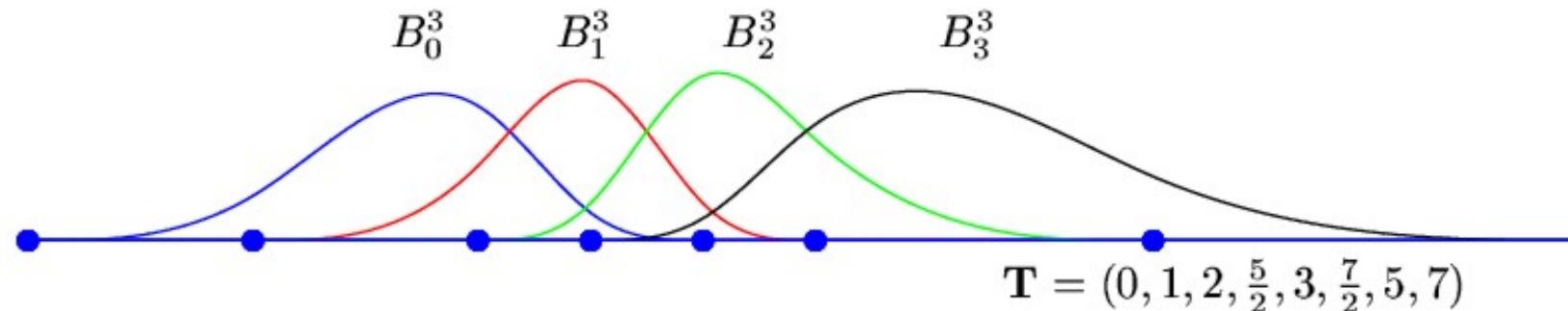
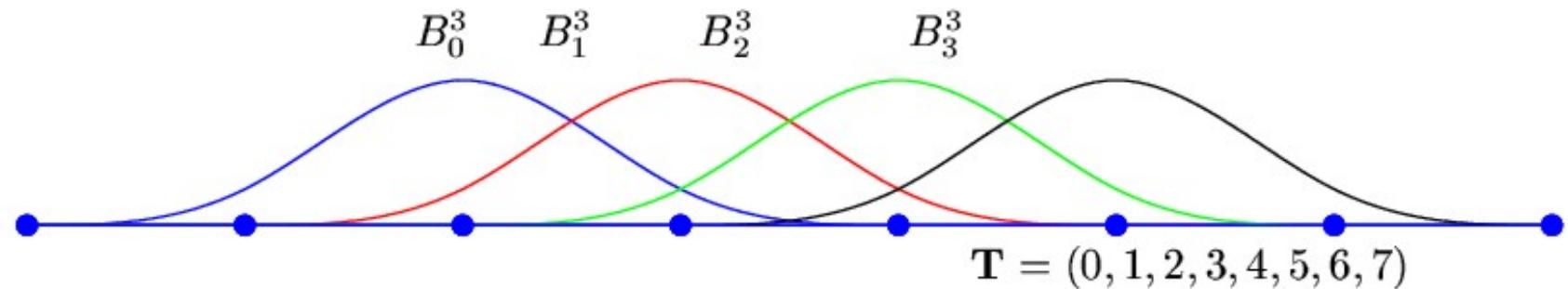
$$B_i^p(t) = \frac{(t - T_i)}{(T_{i+p} - T_i)} B_i^{p-1}(t) + \frac{(T_{i+1+p} - t)}{(T_{i+1+p} - T_{i+1})} B_{i+1}^{p-1}(t)$$

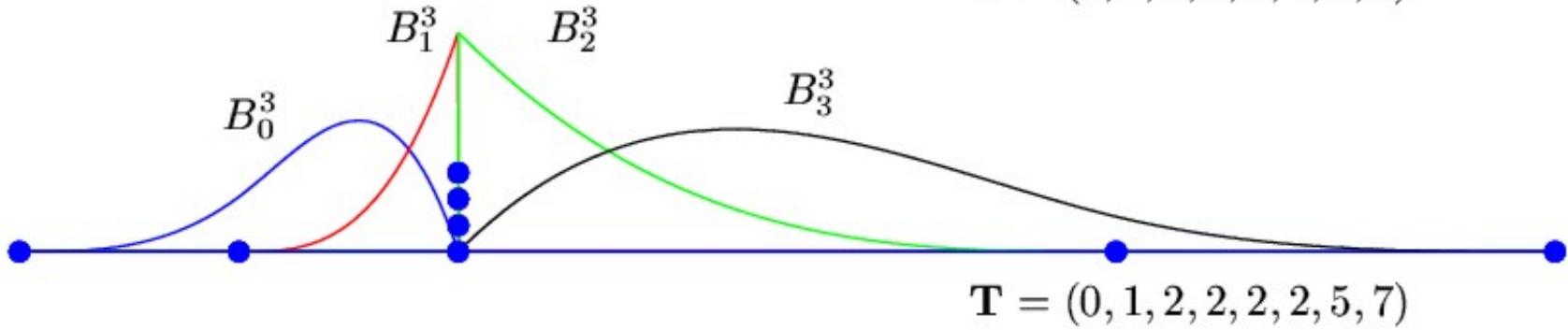
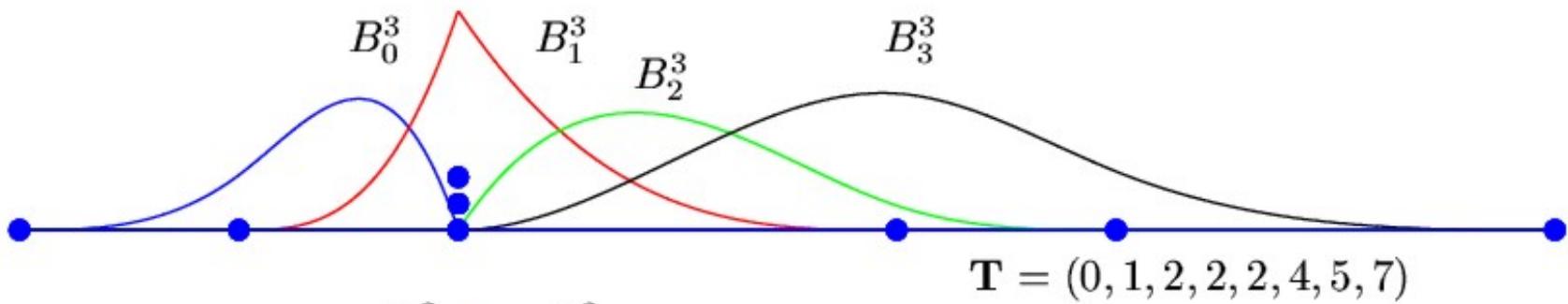
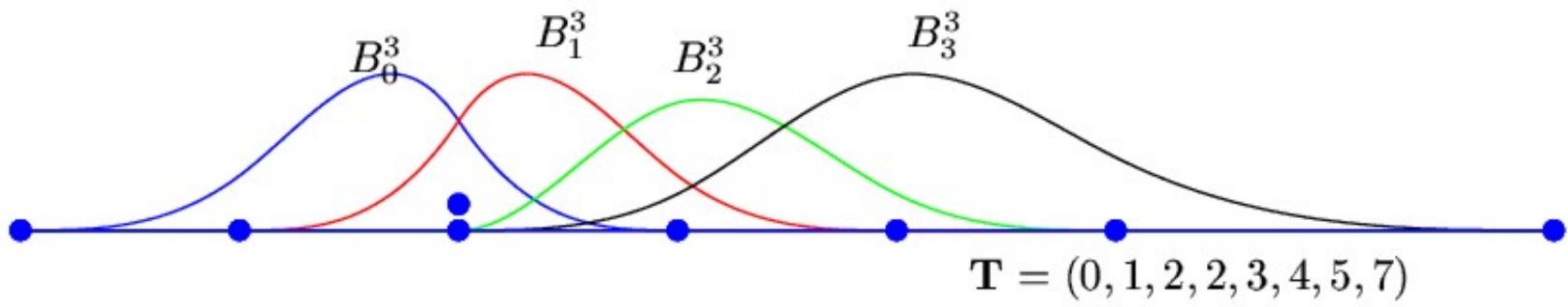


Exemple  
facile...

*On peut observer que  
la fonction  
B-spline est toujours  
comprise entre 0 et 1*

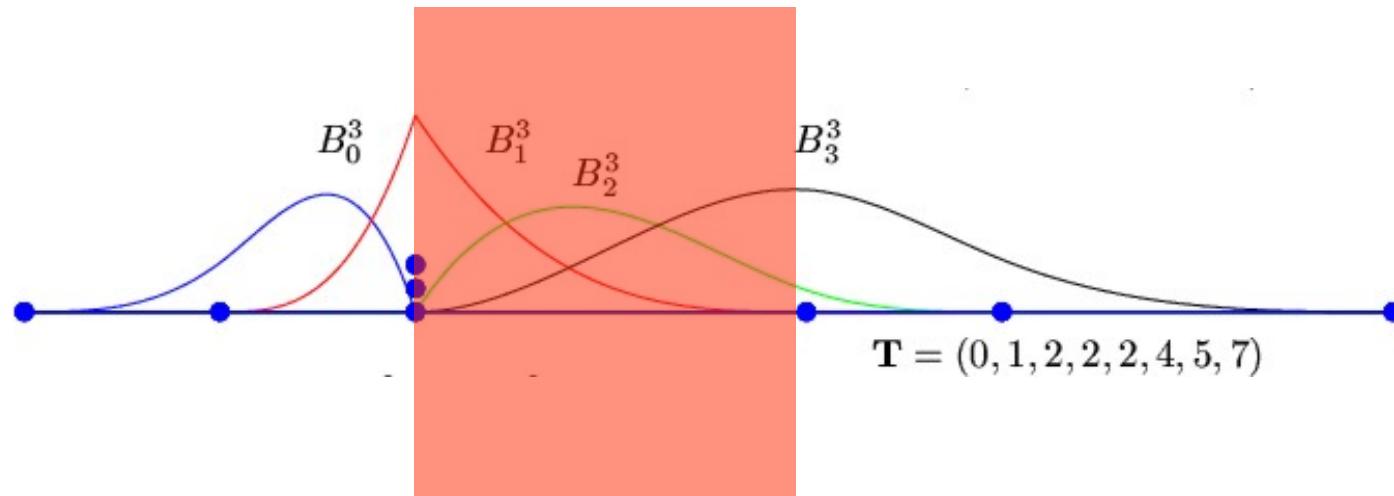
# Modifions les noeuds...





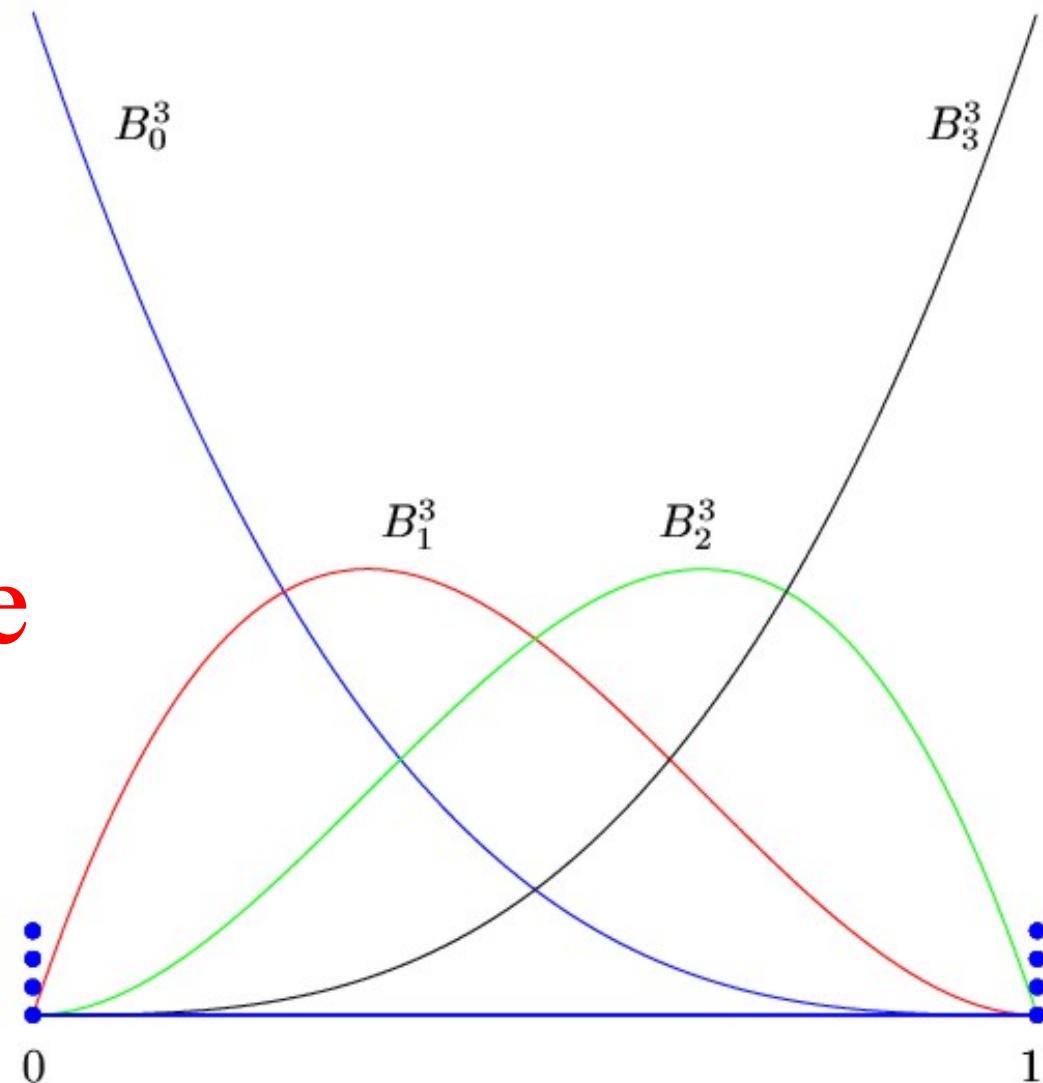
Nœuds  
doubles, triples...

# Observons



- Dans l'intervalle  $[T_i, T_{i+1}]$ , seules les splines  $B_{i-p}^p(t), \dots, B_i^p(t)$  sont non nulles.
- Une spline  $B_i^p(t)$  ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à  $p$ .

Quand les NURBS  
deviennent  
des splines  
de Bézier  
qui sont des  
polynômes de  
Bernstein



# Pierre Bézier

*Né le 1er septembre 1910 à Paris  
Décédé le 25 janvier 1999*

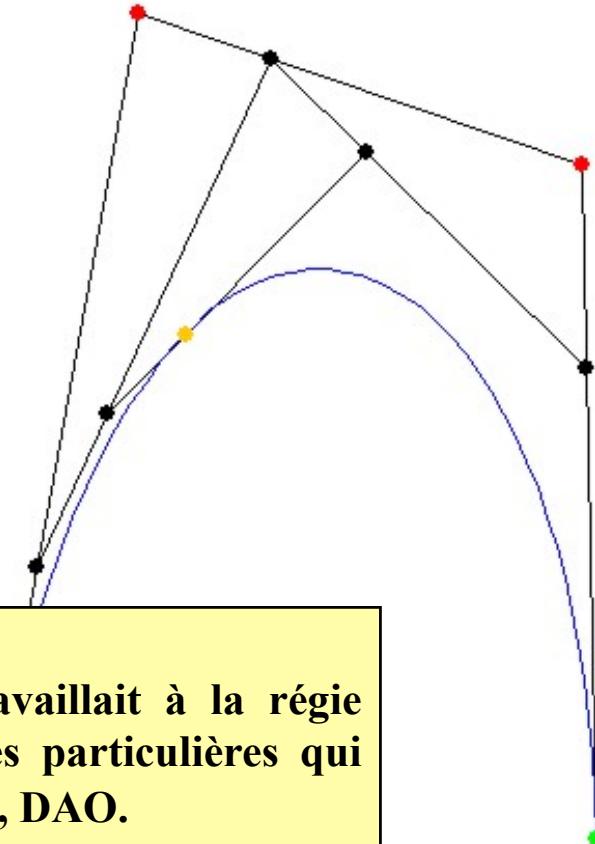
In 1933, Bezier entered **Renault** and worked for this company for 42 years. In 1948, as Director of Production Engineering he was responsible for the design of the transfer lines producing most of the 4 CV mechanical parts. In 1957, he became Director of Machine Tool Division and was responsible for the automatic assembly of mechanical components, and for the design and production of an NC drilling and milling machine.

Bezier started his research in **CADCAM** in 1960 when he devoted a substantial amount of his time working on his UNISURF system.  
His system was launched in 1968.



*A la mémoire de  
mon grand-père, ingénieur mécanicien,  
mon père, ingénieur mécanicien,  
ma sœur, ingénieur chimiste, docteur ès sciences,  
P.B.*

# Paul Faget de Casteljau



Pierre Bezier, ingénieur des Arts et Métiers, travaillait à la régie Renault, quand il "inventa" en 1970 des courbes particulières qui porte maintenant son nom. Ce fut le début de CAO, DAO.

Au départ, il devait trouver un moyen simple pour reproduire sur ordinateur des courbes tracées à main-levée par des dessinateurs. Il retravailla certaines études de Paul Faget de Casteljau, ingénieur travaillant chez Citroën, c'est pourquoi on utilise "l'algorithme de Casteljau" pour les tracer. Aujourd'hui ses courbes sont utilisées dans le monde entier sans vraiment savoir d'où vient cette appellation.

# Carl de Boor



Généralisation de l'algorithme de  
Casteljau pour des NURBS :  
*Algorithme de de Boor*

A screenshot of a Microsoft Internet Explorer window displaying Carl de Boor's homepage. The address bar shows "http://www.cs.wisc.edu/~deboor/". The page content includes a bio, contact information, and a logo for the University of Wisconsin-Madison.

<http://www.cs.wisc.edu/~deboor/>

# Les B-splines forment une partition unité

*A l'exclusion des  $p$  premiers et  $p$  derniers intervalles, la somme des B-splines vaut l'unité.*

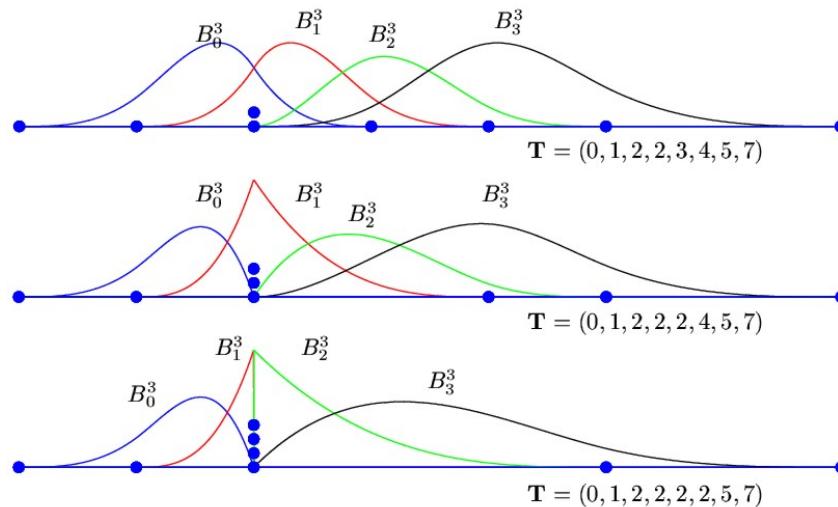
$$\sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) = 1 \quad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

- Une spline  $B_i^p(t)$  est toujours comprise entre 0 et 1.
- Une spline  $B_i^p(t)$  est non nulle que dans l'intervalle  $[T_i, T_{i+1+p}]$ .
- Dans l'intervalle  $[T_i, T_{i+1}]$ , seules les splines  $B_{i-p}^p(t), \dots, B_i^p(t)$  sont non nulles.
- Une spline  $B_i^p(t)$  ne vaut exactement 1 qu'en un noeud de multiplicité supérieure ou égale à  $p$ .

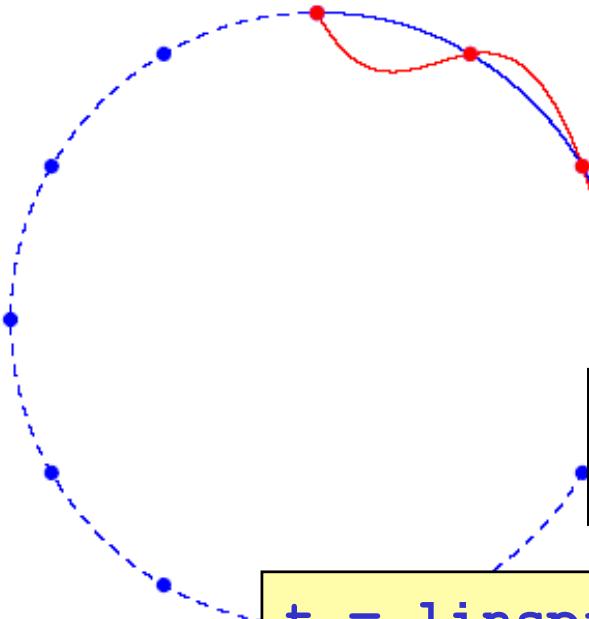
# Continuité des B-splines

**Théorème 1.4.**

*Si le vecteur des noeuds est constitué uniquement de points de multiplicité un, les splines de base  $B_i^p$  sont  $(p - 1)$ -fois dérivables. On dit que l'ordre de continuité est  $p - 1$ . Par contre, à un point de multiplicité  $m$ , l'ordre de continuité n'y sera localement que de  $p - m$ .*



# Courbes splines paramétrées

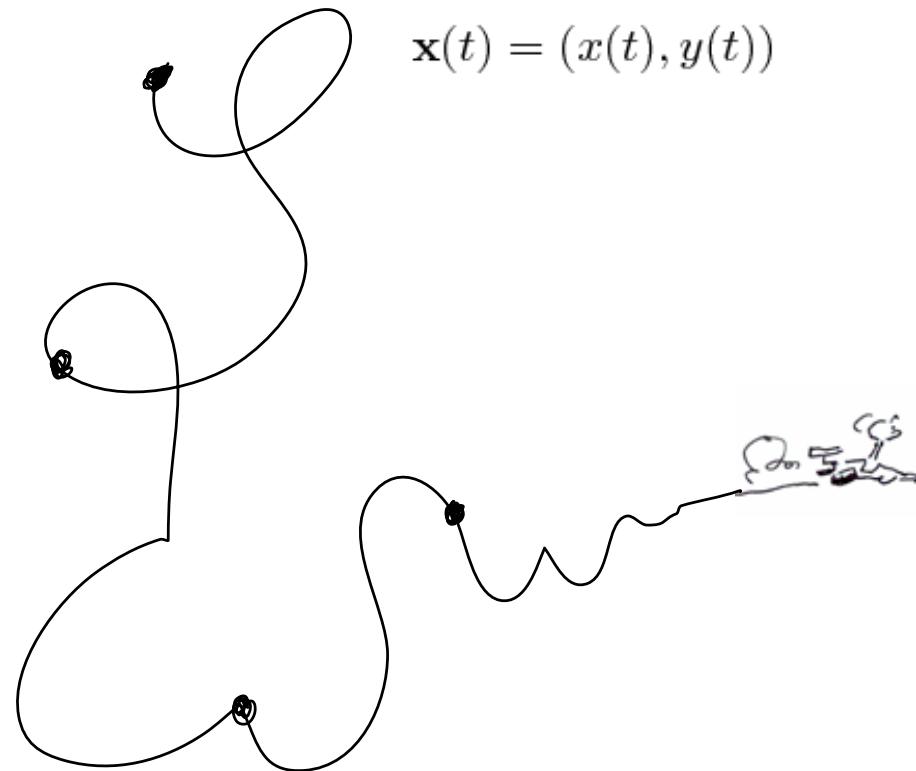


```
T = pi * [0:1:3] / 6;  
X = sin(T);  
Y = cos(T);
```

```
x = linspace(X(1),X(end),100)  
yx = spline(X,Y,x);
```

```
t = linspace(T(1),T(end),100)  
xt = spline(T,X,t)  
yt = spline(T,Y,t);
```

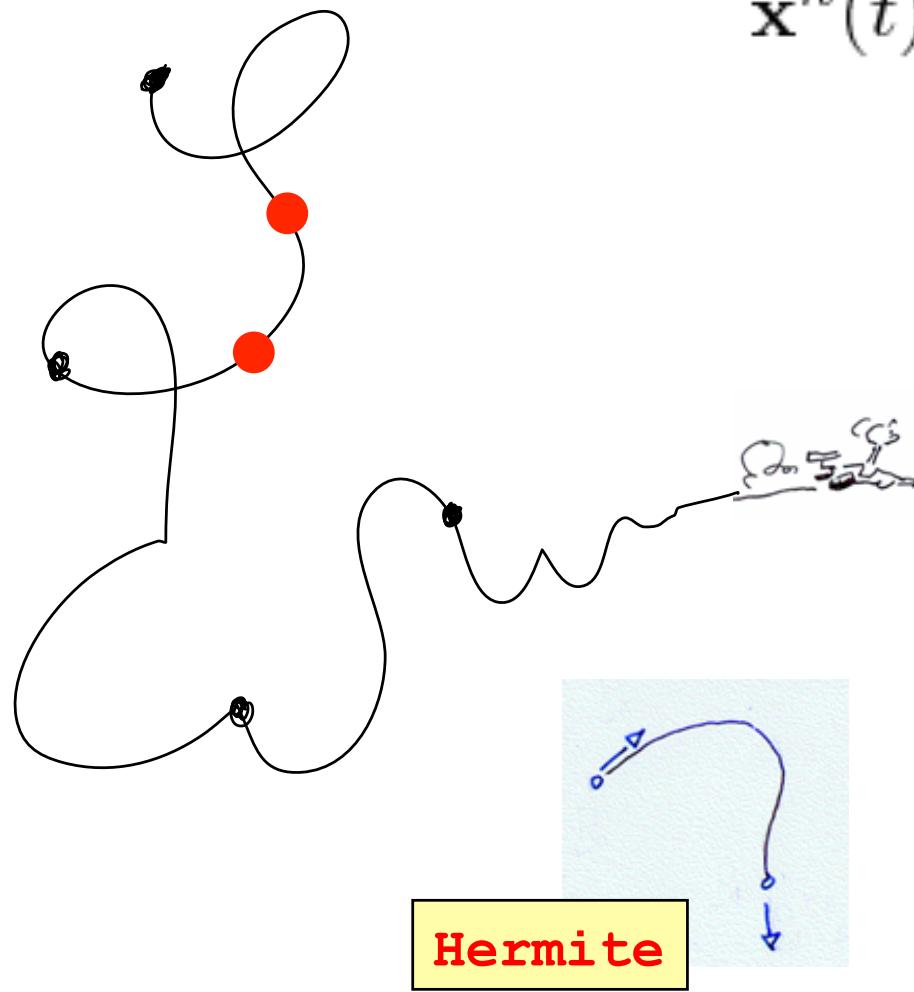
# Courbes paramétriques composées de « splines »



$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$$

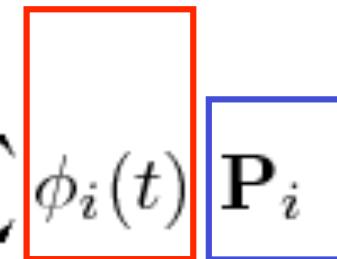
$$(X_i, Y_i) = (x(T_i), y(T_i))$$

# Une spline est une forme à pôles



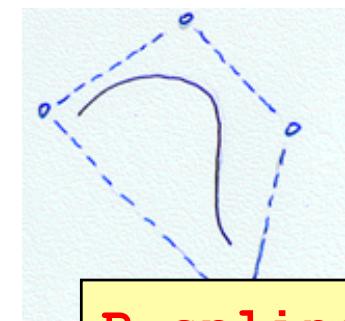
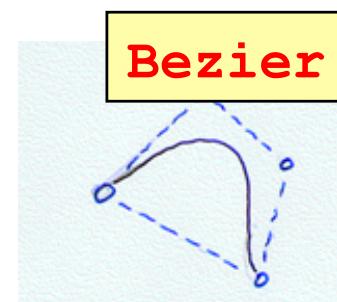
$$\mathbf{x}^h(t) = \sum_i \phi_i(t) \mathbf{P}_i$$

Fonctions de base



Pôles :

Points de passage  
Directions tangentes  
Vitesses  
Points de contrôle



# Courbes composées de B-splines... ce sont des approximations !

$$\begin{cases} x^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) X_i \\ y^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) Y_i \end{cases} \quad T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

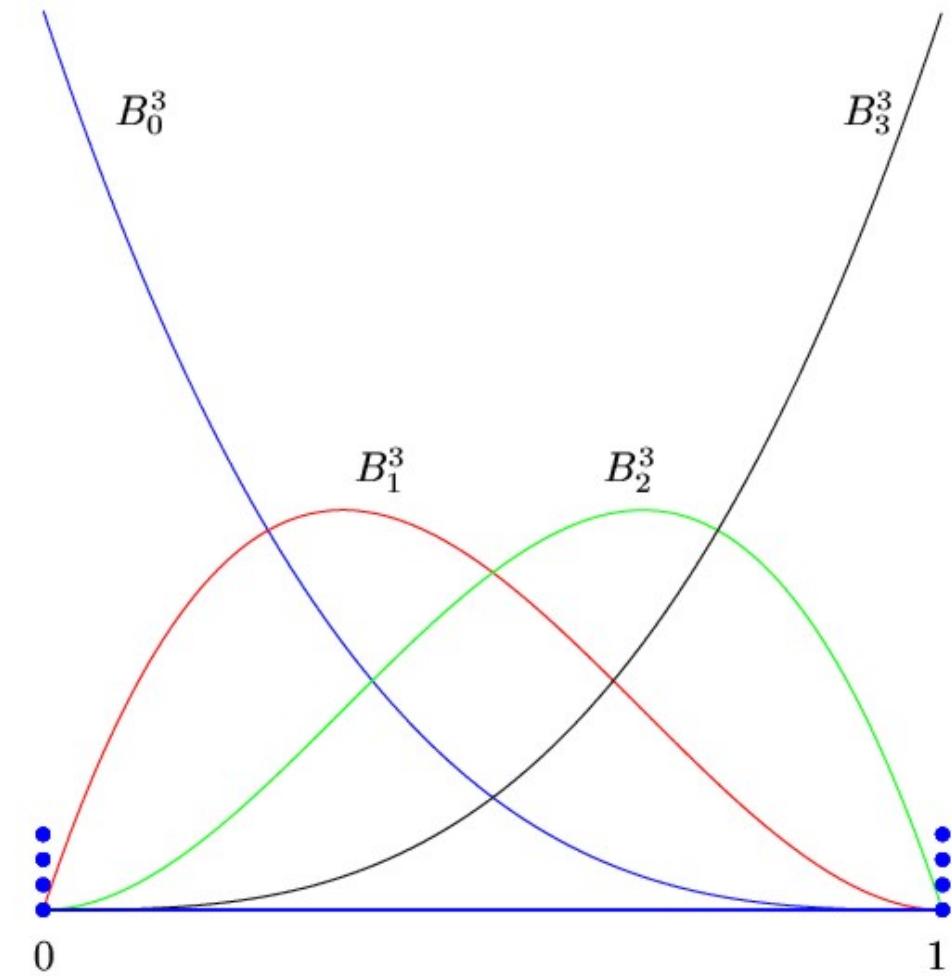
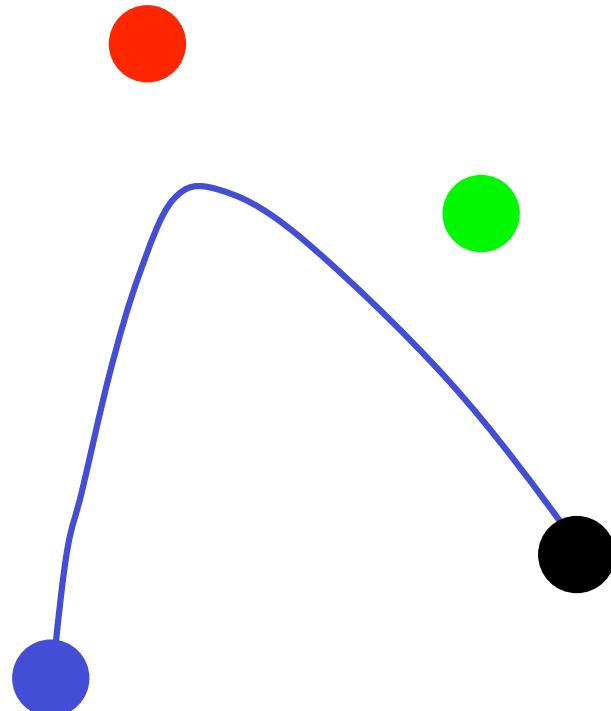
*Coordonnées des points de contrôle*

*La courbe s'approche des points de contrôle, mais ne passe, en général, pas par ceux-ci !*

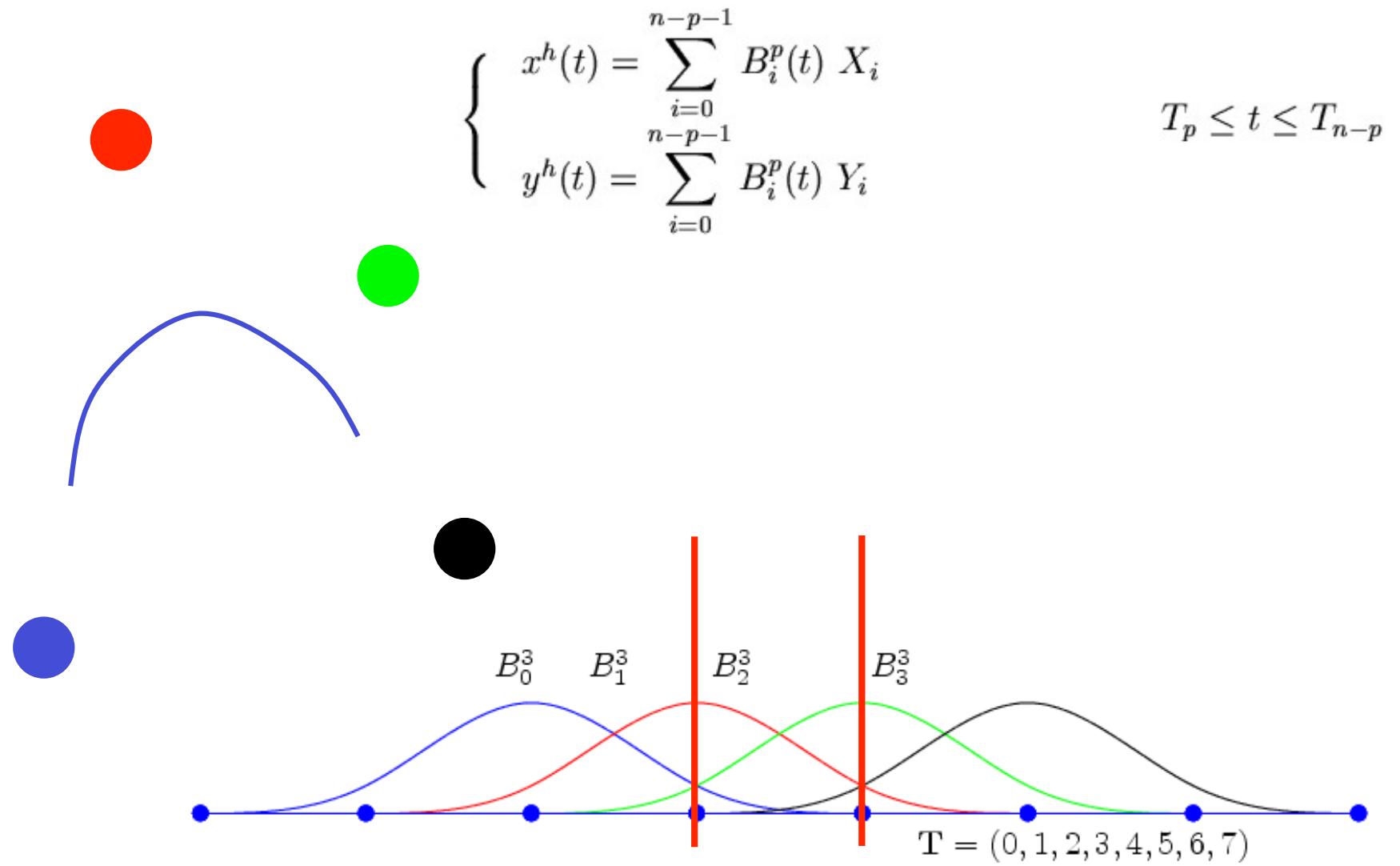
*Il s'agit d'une **approximation**, pas d'une interpolation.*

*Par contre, il n'y a aucun système d'équations à résoudre !*

# Courbe de Bezier



# Courbe B-spline

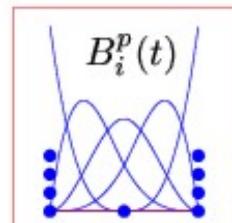
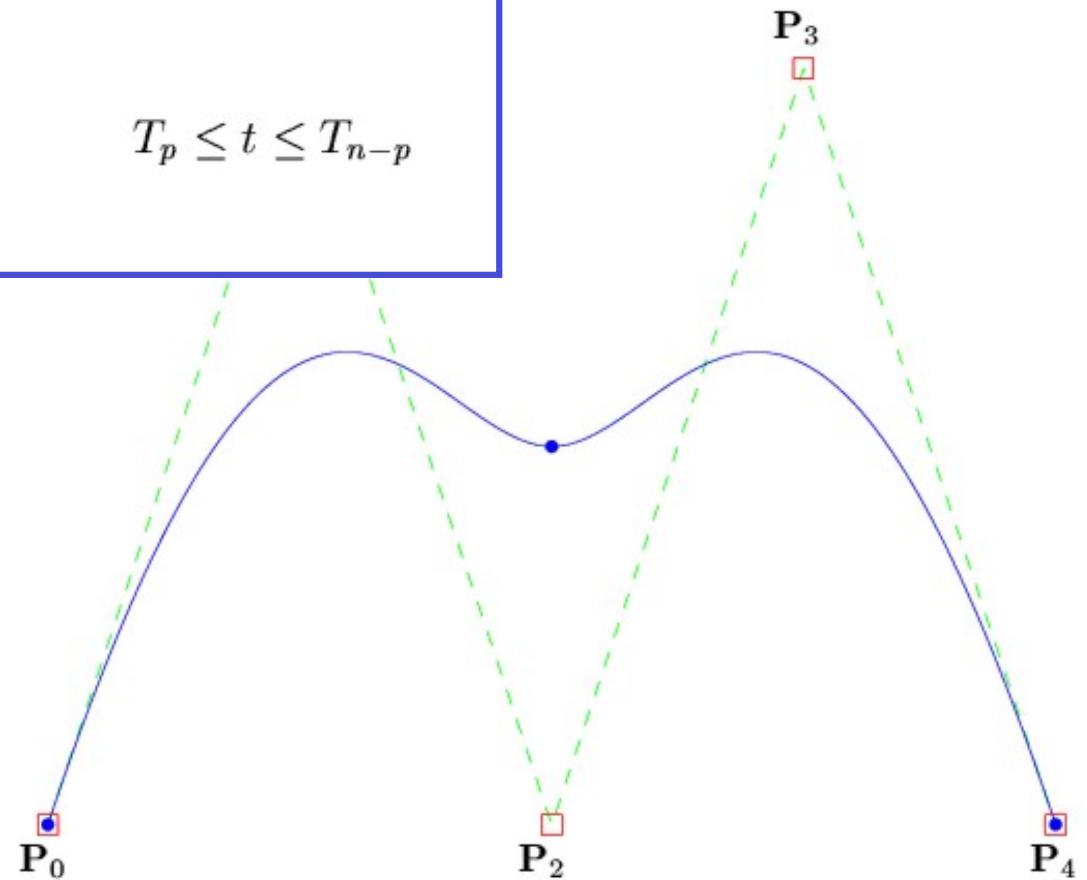


En posant  $\mathbf{u}^h(t) = (x^h(t), y^h(t))$  et  $\mathbf{P}_i = (X_i, Y_i)$ ,

$$\mathbf{u}^h(t) = \sum_{i=0}^{n-p-1} B_i^p(t) \mathbf{P}_i$$

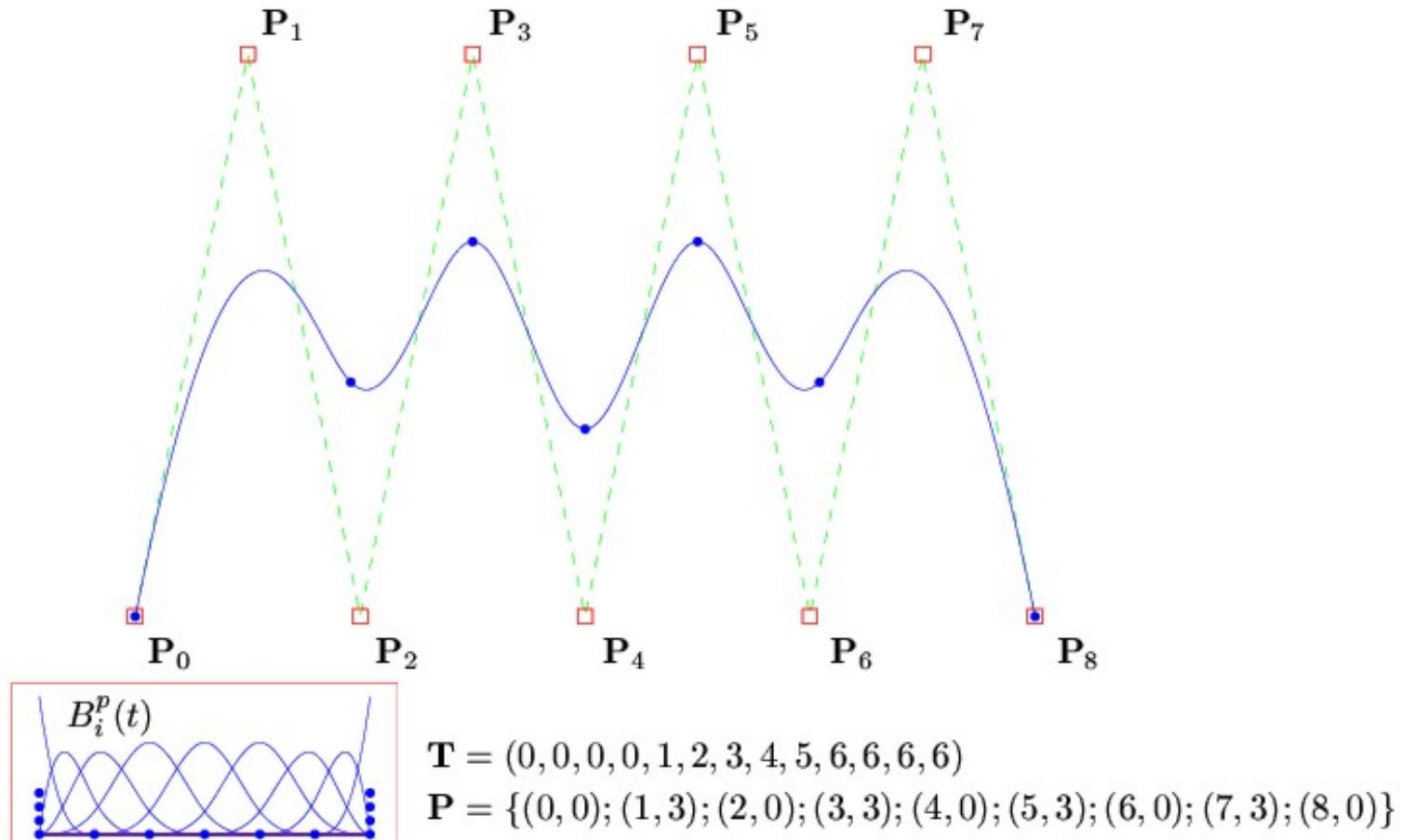
$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

## B-splines

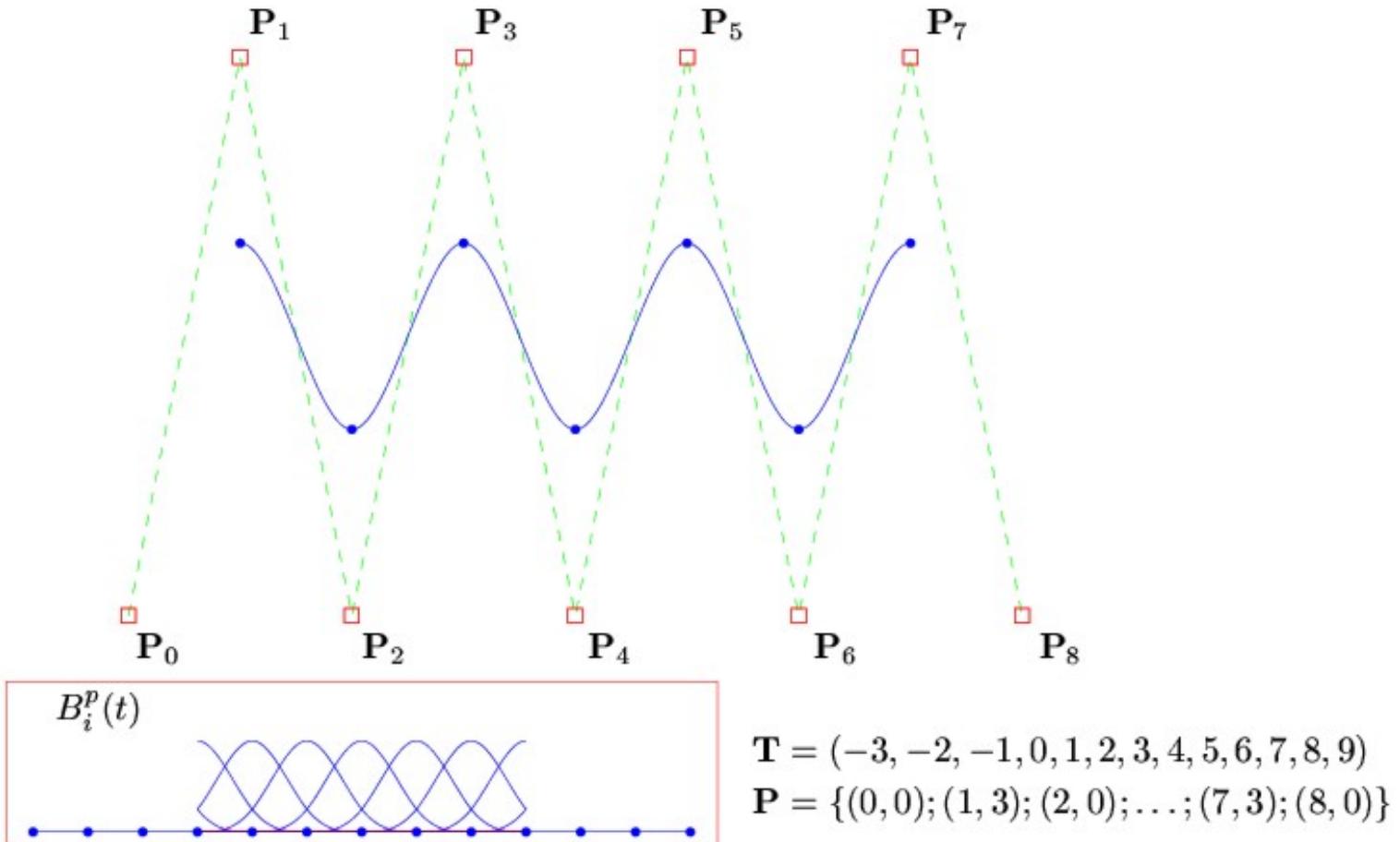


$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2) \\ \mathbf{P} &= \{(0, 0); (1, 3); (2, 0); (3, 3); (4, 0)\}\end{aligned}$$

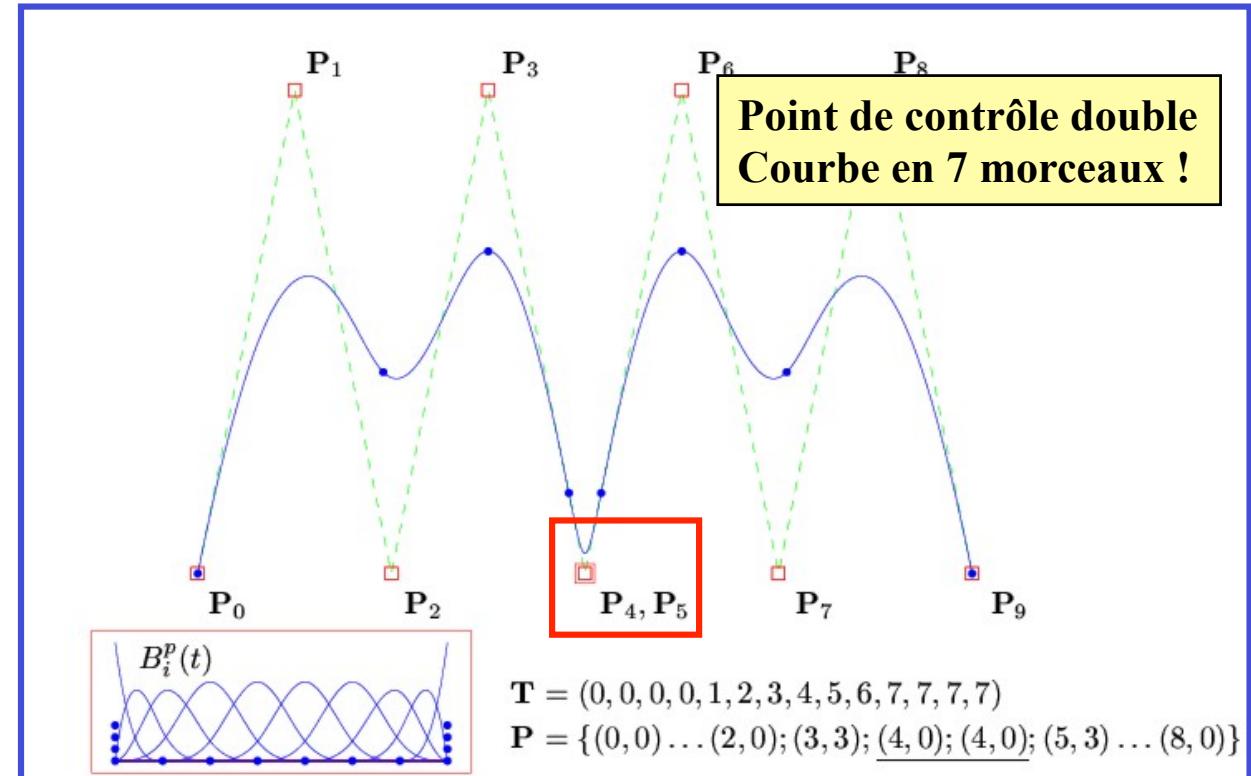
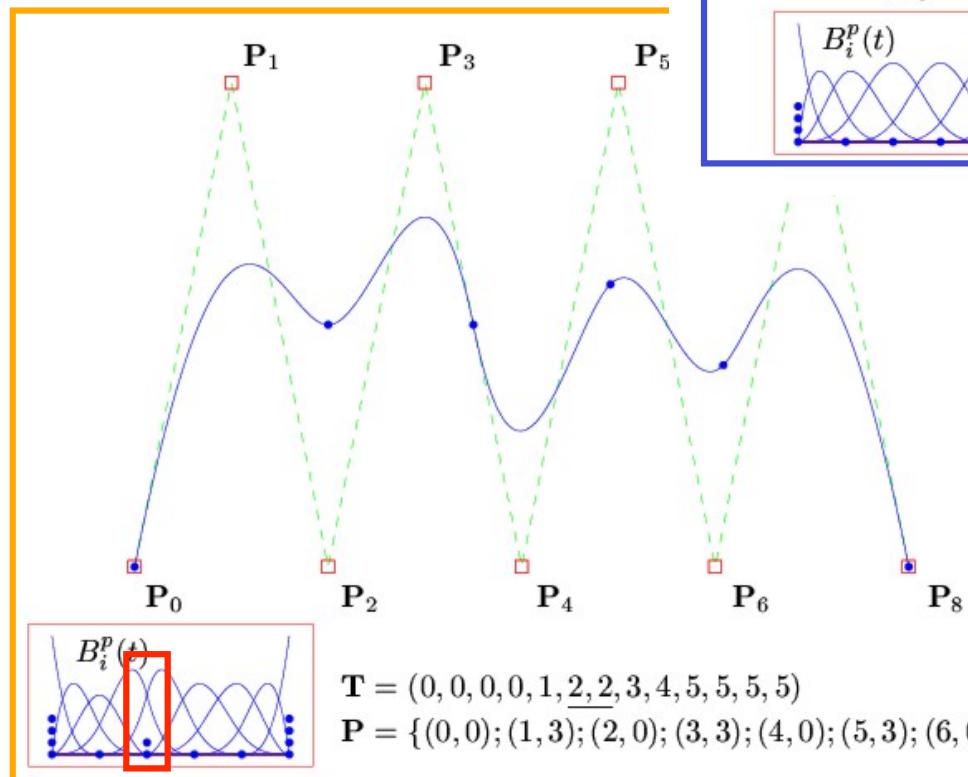
En général, on met des nœuds multiples aux extrémités...



... mais ce n'est pas obligatoire !



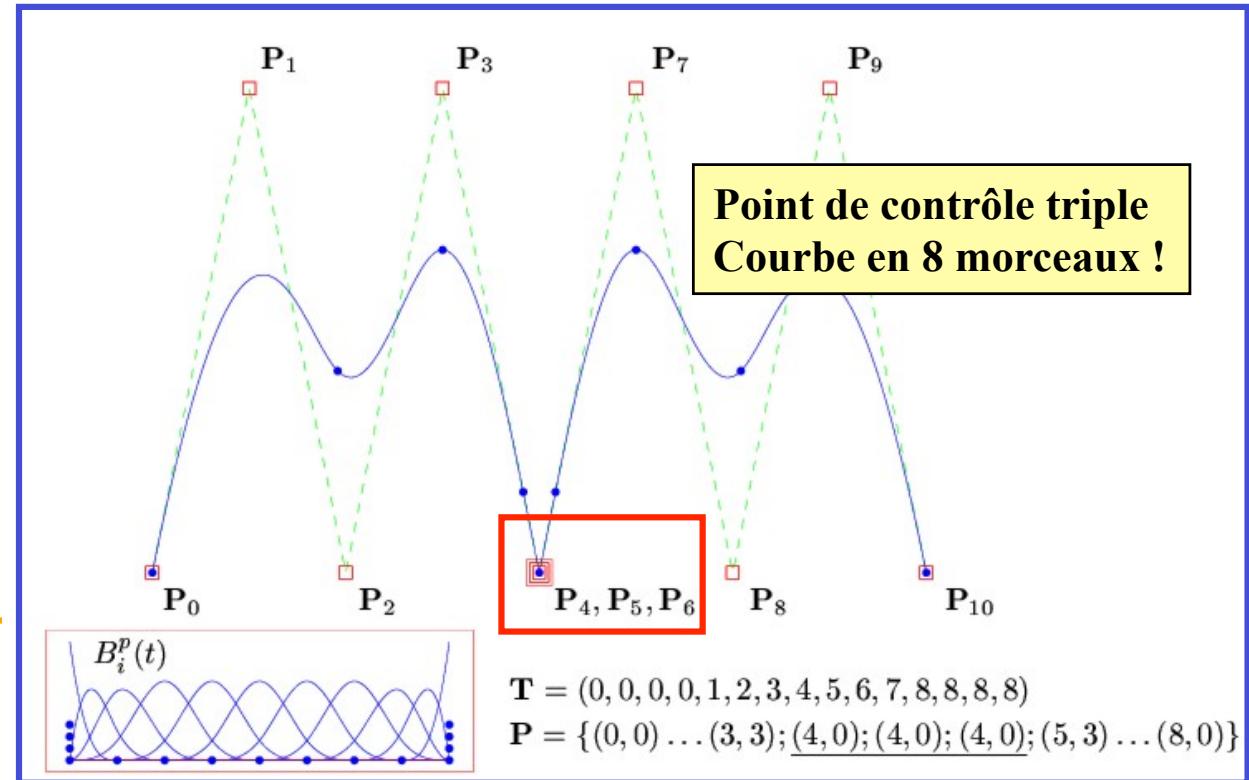
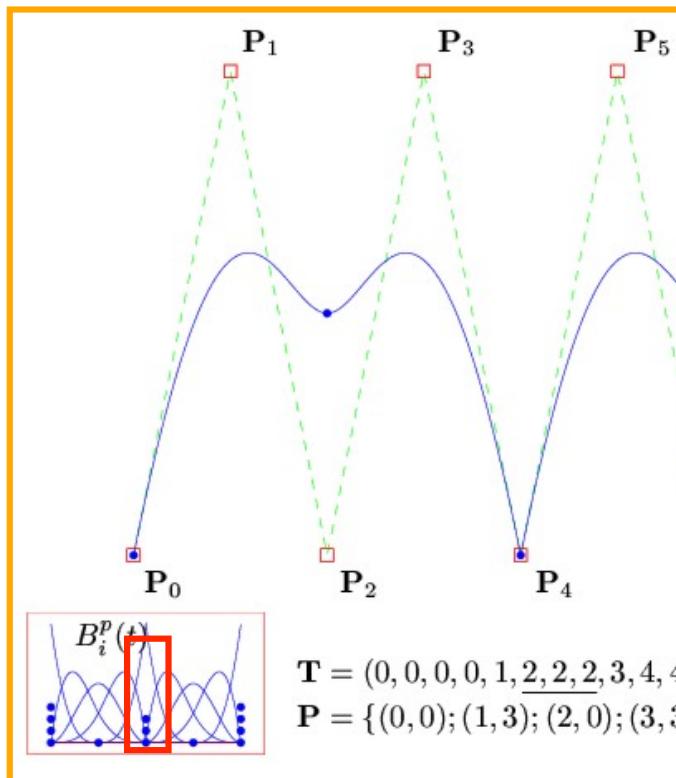
# Noeuds ou points doubles !



*Noeuds ou points multiples ?  
Effets semblables mais pas identiques !*

**Noeud double  
Courbe en 5 morceaux !**

# Nœuds ou points triples !



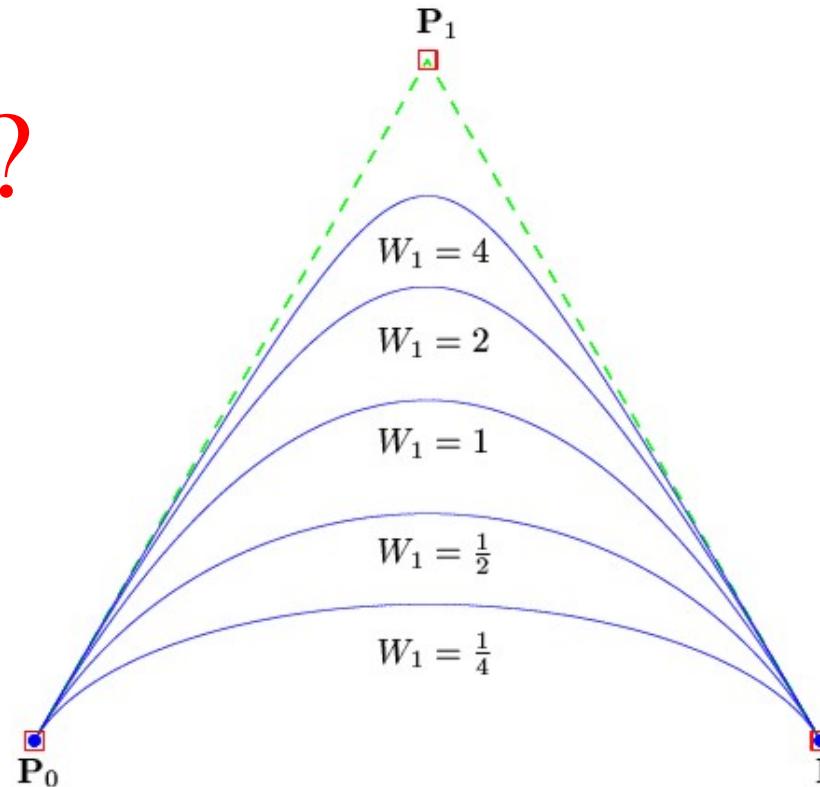
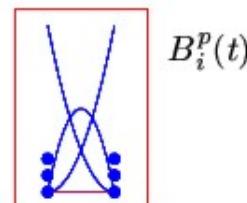
*Travailler avec les nœuds est moins intuitif, mais plus efficace...*

**Nœud triple  
Courbe en 4 morceaux !**

# Et les NURBS ?

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$

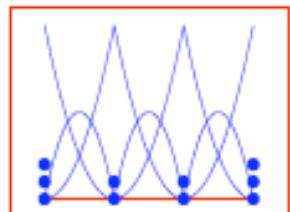
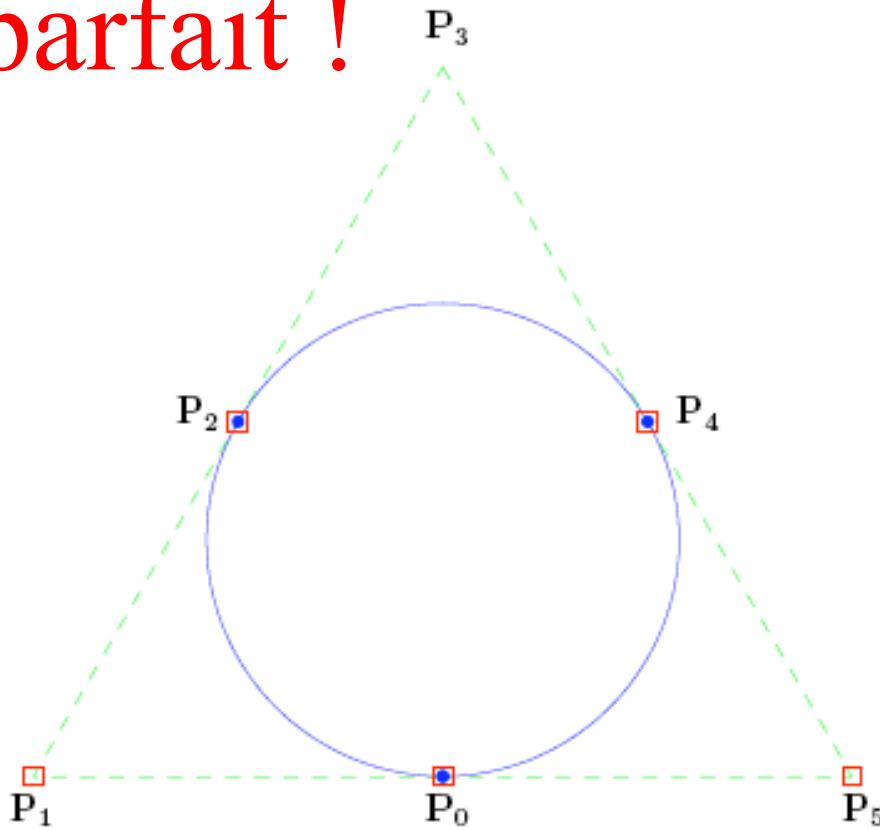


$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= (0, 0, 0, 1, 1, 1) \\ \mathbf{W} &= (1, W_1, 1) \\ \mathbf{P} &= \{(0, 0); (1, \sqrt{3}); (2, 0)\}\end{aligned}$$

**NURBS**  
**Non-Uniform Rational B-Splines**

Permet de représenter exactement toutes les coniques (ellipse, parabole, hyperbole)

# Un cercle parfait !



$$B_i^p(t)$$

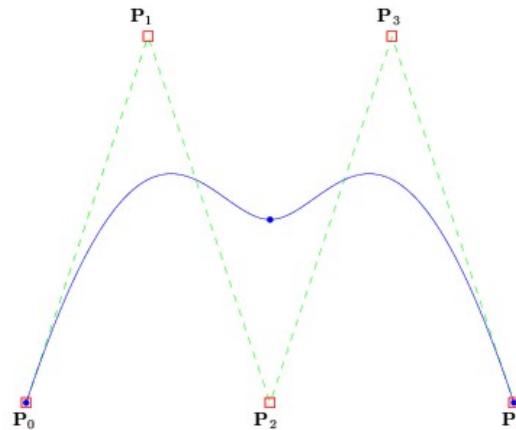
$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3)$$

$$\mathbf{W} = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1\right)$$

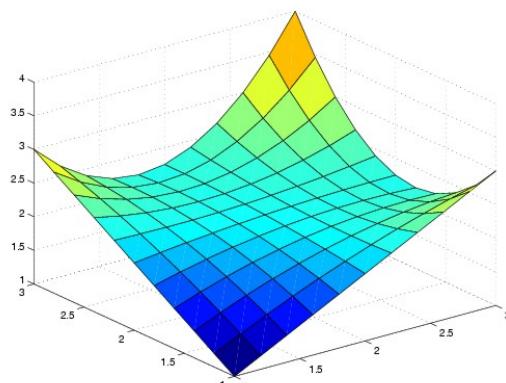
$$\mathbf{P} = \{(1, 0); (0, 0); \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (1, \sqrt{3}); \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (2, 0); (1, 0)\}$$

$$\mathbf{u}^h(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} W_i B_i^p(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{k=0}^{n-p-1} W_k B_k^p(t)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p}$$



# Généralisation à des surfaces



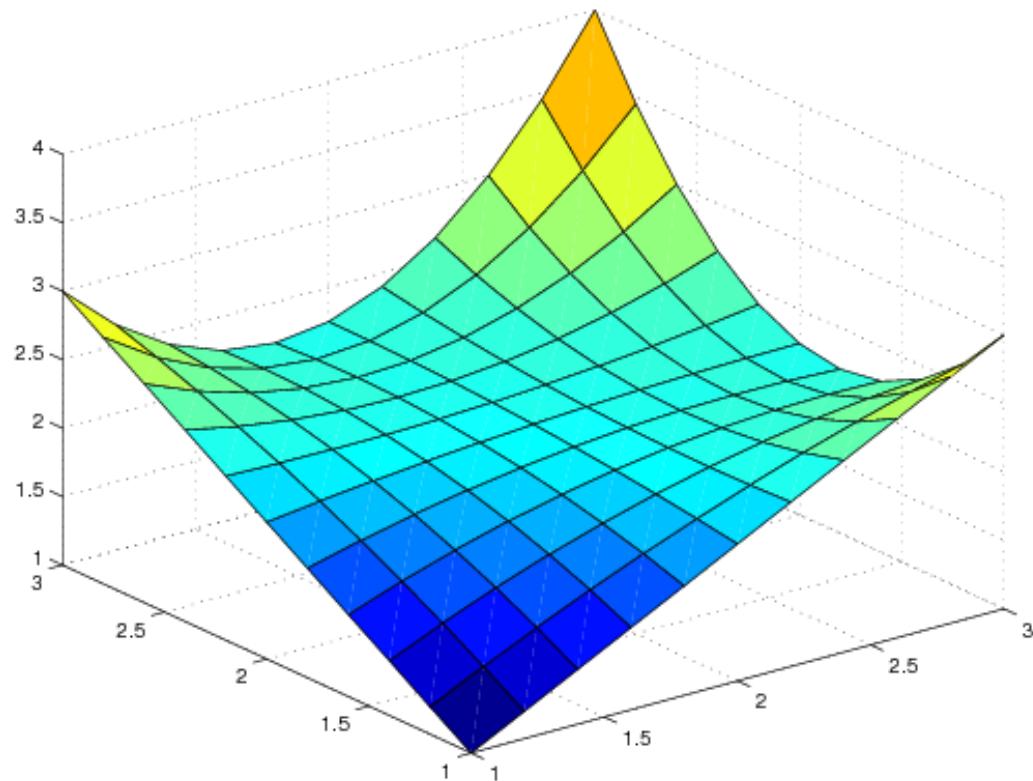
$$\mathbf{u}^h(t, s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-p-1} \sum_{j=0}^{m-q-1} W_{ij} B_i^p(t) B_j^q(s) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{k=0}^{n-p-1} \sum_{l=0}^{m-q-1} W_{kl} B_k^p(t) B_l^q(s)}$$

$$T_p \leq t \leq T_{n-p} \\ S_q \leq s \leq S_{m-q}$$

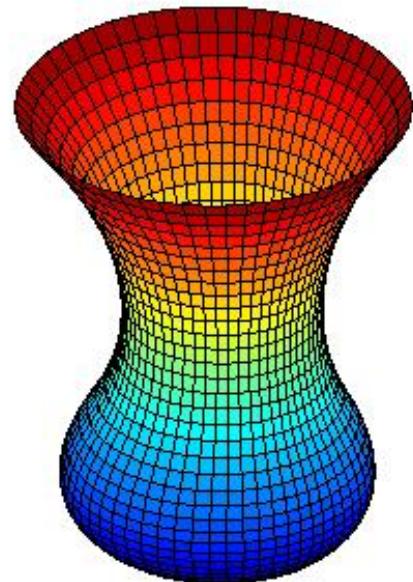
$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (1, 1, 1) & (2, 1, 2) & (3, 1, 3) \\ (1, 2, 2) & (2, 2, 3) & (3, 2, 1) \\ (1, 3, 3) & (2, 3, 1) & (3, 3, 4) \end{bmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple



# Un exemple

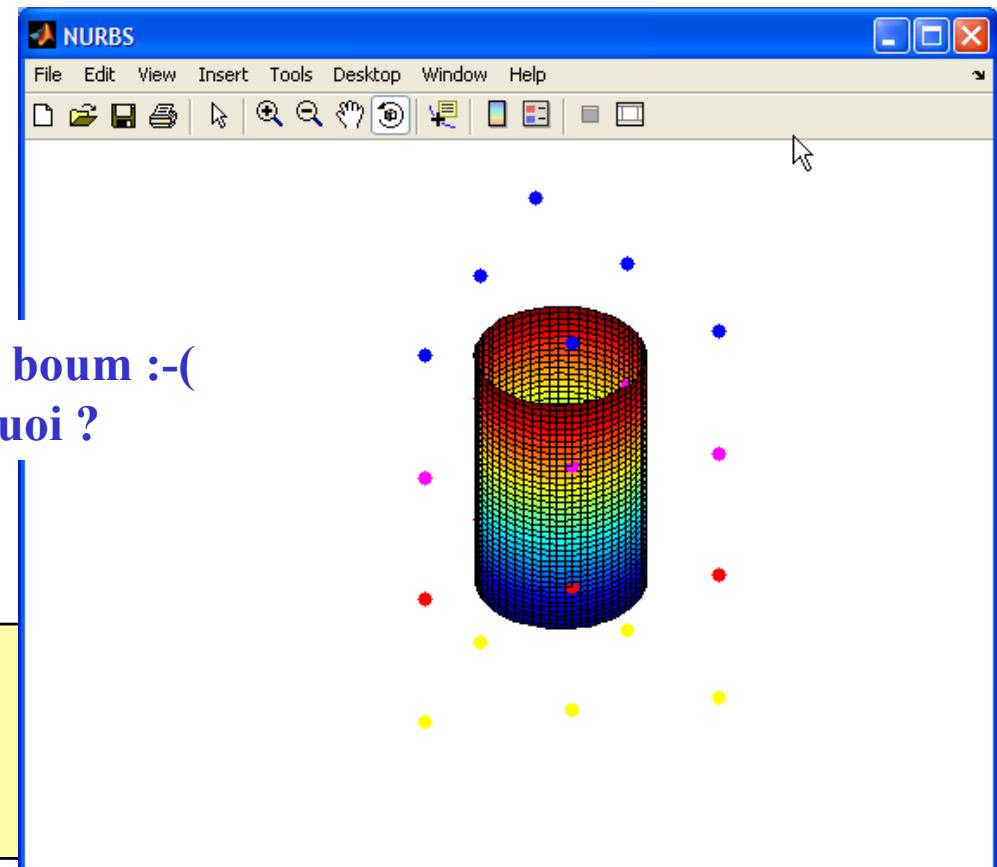


Potiche  
avec  
seulement  
24 points  
de contrôle

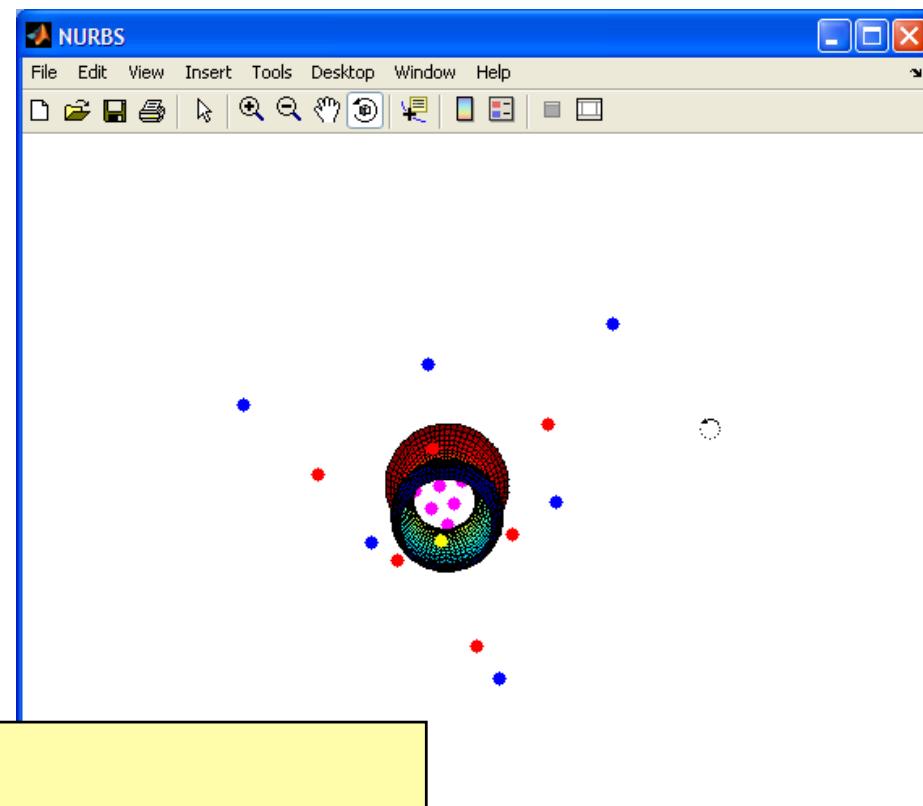
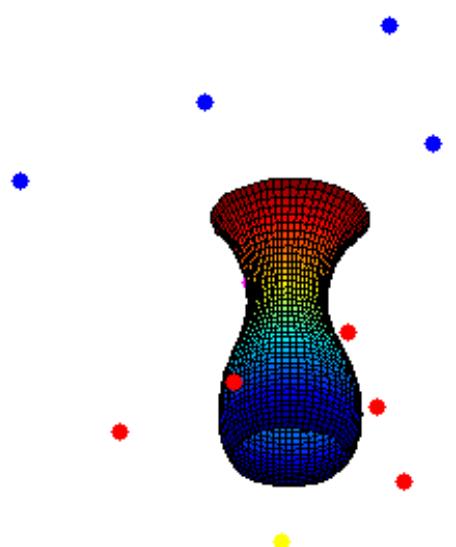
Commençons  
par un  
cylindre...

```
T = [-2 -1 0 1 2 3 4];  
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];  
R = [5 5 5 5];  
H = [0 5 10 15];
```

Sinon, boum :-(  
Pourquoi ?

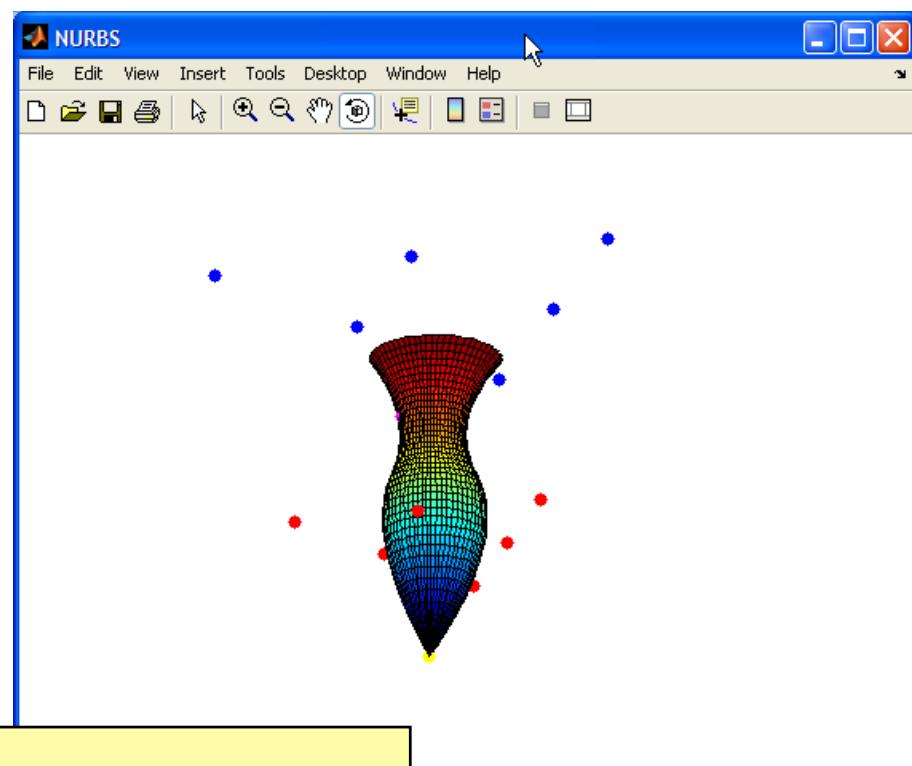
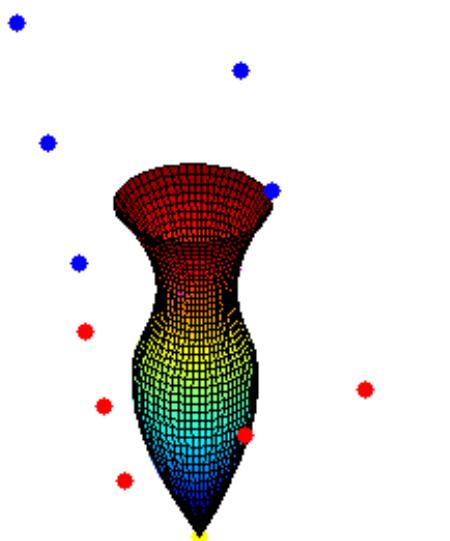


# Modifions les rayons...



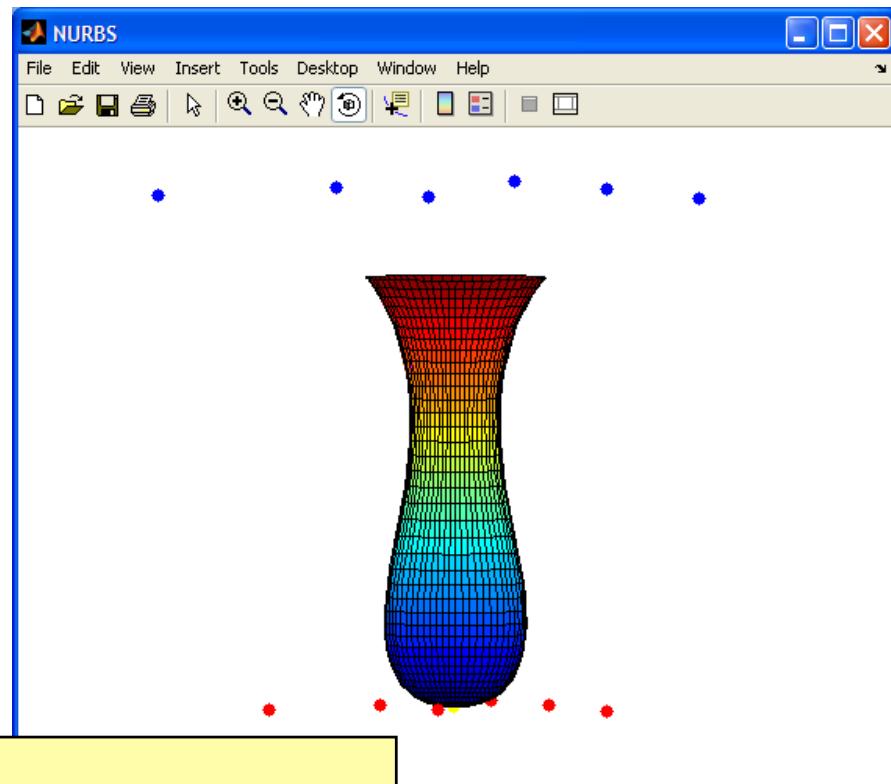
```
T = [-2 -1 0 1 2 3 4];  
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];  
R = [0 5 1 8];  
H = [0 5 10 15];
```

# Refermons le fond du vase...



```
T = [0 0 0 1 2 3 4];
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];
R = [0 5 1 8];
H = [0 5 10 15];
```

# Rendons le fond plat...



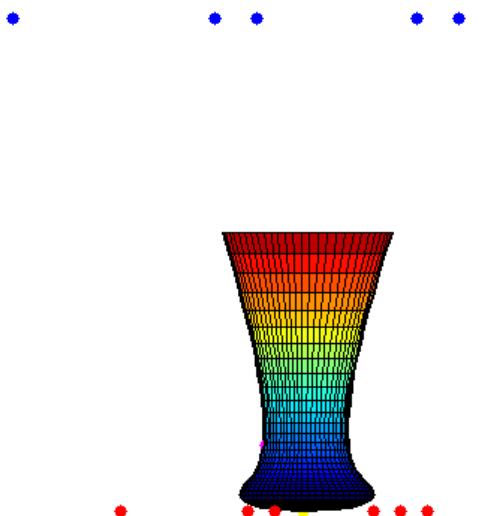
```
T = [0 0 0 1 2 3 4];
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];
R = [0 5 1 8];
H = [0 0 10 15];
```

# Et d'autres potjes ?

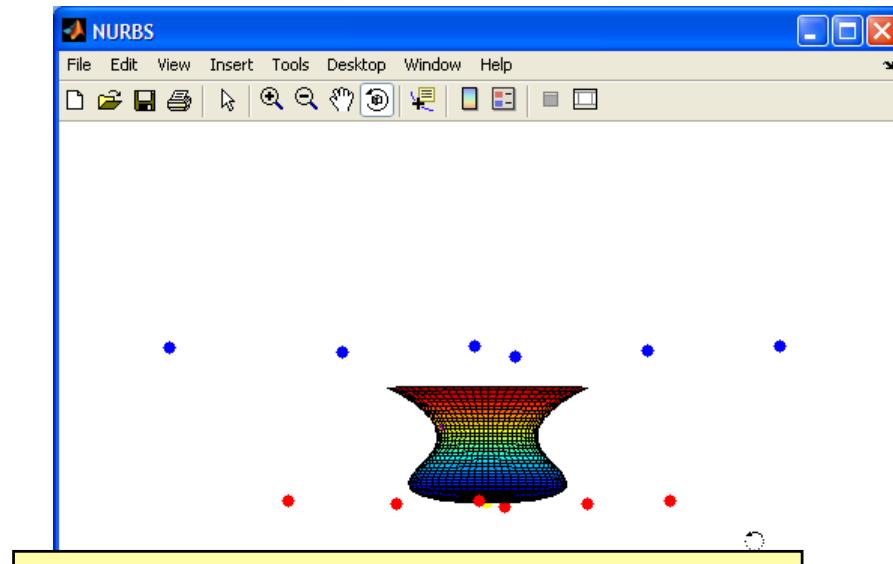
```

T = [0 0 0 1 2 3 4];
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];
R = [0 5 1 8];
H = [0 0 2 15];

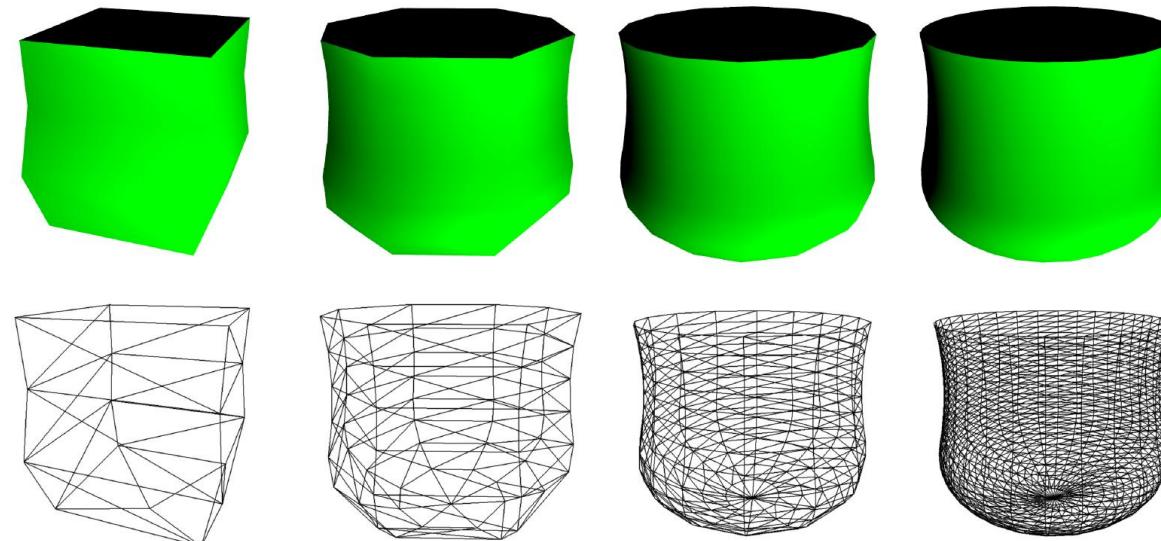
```



```
T = [0 0 0 1 2 3 4];  
S = [0 0 0 1 1 2 2 3 3 4];  
R = [0 5 1 8];  
H = [0 0 2 4];
```



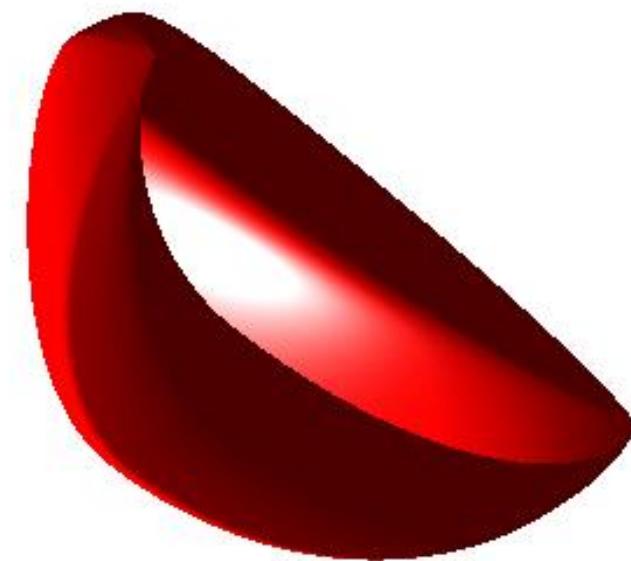
# Représentation adéquate de potiches par des facettes planes...



**2 triangles par patch**

**128 triangles par patch**

# Problème 3 : canoë du Québec



Ce qui est important, c'est de trouver les bons points de contrôle  
L'aspect graphique et esthétique est purement ludique et optionnel !  
Deadline : 17 octobre à 23h59

What you ask !



... and what they  
performe !



# Evaluation continue

The screenshot shows a web browser window with the URL <http://www.uclouvain.be/242376.html>. The page is titled "UCL - Mon profil". On the left, there's a sidebar with links for various subjects like S'inscrire aux activités didactiques, Mathématiques : équations aux dérivées partielles, etc. A large yellow callout box highlights a message: "Vous pouvez accéder à l'évaluation de vos programmes MATLAB en ligne : le premier programme a été corrigé !". Below this, there are sections for "Test d'anglais" (with a note about being absent) and "Méthodes numériques" (with a note about zero grades). At the bottom, it says "Problème MATLAB 1 : 10/10".

*Il n'y a ni crédit, ni report de notes pour les programmes MATLAB !  
Les notes interviennent pour 10% de la note d'examen (positivement ou négativement)  
La lettre manuscrite en cas de retard pour cause de force majeure doit être adressée au titulaire*

# Présentations de majeures et mineures de l'EPL

Vendredi 14 octobre : MECA-ELME  
Vendredi 21 octobre : GBIO-GC  
Vendredi 28 octobre : MAP-ELEC  
Jeudi 3 novembre : INFO-FYKI

