Ministère de l'Education Nationale
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5

TP FMIN105
Algorithmique / Complexité / Calculabilité

Rapport (Décembre 2011)

Travail préparé par :

Thibaut Marmin
Clément Sipieter
William Dyce

https://github.com/marminthibaut/acc-tp

Table des matières

Chapitre 1

Partie théorique

1.1 Algorithmique

1.1.1 Fonction chromatique $P_G(k)$

Le nombre de manières de colorier un graphe est le produit des nombres de façons de colorier chaque arc.

- Si le graphe G est complet, on aura k couleurs possibles pour le premier sommet, $(k-1)$ pour le deuxième, etc... (Le graphe G étant complet, la couleur du premier sommet est nécessairement exclu des autres sommets). Le nî sommet pourra être colorié de $k-(n-1)$ manières. D'où :

$$P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1}(k-i)$$

- Si G est vide, la coloration d'un sommet ne contraint pas la coloration des autres sommets. On obtient alors :

$$P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$$

1.1.2 Nombre chromatique $\chi(G)$

On l'appelle "nombre chromatique" de G : $\chi(G)$ étant, par définition, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G, si $k < \chi(G)$ alors le graphe G ne peut pas être colorié par k couleurs. Si $k \geq \chi(G)$ alors il doit y avoir au moins une manière de colorier G, celui utilisant $\chi(G)$ couleurs.

On a donc :

$$P_G(k) \begin{cases} = 0 & \text{si } k < \chi(G) \\ \geq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.1.3 Décomposition de P_G

Montrons d'abord que la propriété est vraie pour tout graphe complet K_n. Pour commencer on remarque que, pour tout arrête e :

- $K_{n\backslash e}$ est exactement K_{n-1}, et donc :

$$P_{K_n\backslash e}(k) = P_{K_{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-2}(k-i)$$

- Soit $e = (a, b)$. On peut supposer (sans perte de généralité) que b est considéré en dernier lors de la coloration de K_n, donc qu'il lui reste $k - (n-1)$ couleurs. Pour colorier K_{n-e} on aura un choix de plus pour lui, à savoir la couleur de a, donc $k-(n-2)$ en totale. De ce fait :

$$P_{K_n-e}(k) = P_{K_{n-1}}(k)(k-(n-2)) = (\prod_{i=0}^{n-2}(k-i))(k-(n-2))$$

On a donc très clairement :

$$\begin{aligned}
P_{K_n-e}(k) - P_{K_n\backslash e}(k) &= (\prod_{i=0}^{n-2}(k-i))(k-(n-2)) - \prod_{i=0}^{n-2}(k-i) \\
&= \prod_{i=0}^{n-2}(k-i)(k-(n-1)) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1}(k-i) \\
&= P_{K_n}(k)
\end{aligned}$$

Tout graphe de rang n pouvant se générer à partir de K_n (en enlevant des arrêtes) on cherchera à prouver que la suppression d'arrête conserve notre propriété. Autrement dit on aimerait montrer que pour tout graphe G et tout arrête a de celui-ci :

$$\begin{aligned}
& P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\backslash e}(k) \\
\Rightarrow\ & P_{G-a}(k) = P_{G-e-a}(k) - P_{G\backslash e-a}(k)
\end{aligned}$$

On supposera évidemment que a et e sont distinctes.

TODO FINISH

1.1.4 Polynôme chromatique ?

Soit H un prédicat tel que :

$$H(m) = \begin{cases} \top & \text{si } \forall\ G\text{, graphe de } m \text{ arrêtes ou moins, } P_G(k) \text{ est polynomiale.} \\ \bot & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous rappellons que $P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$, donc $H(0)$ est vraie.
- Supposons $\exists m \in \mathbb{N} \mid H(m)$ l'est également. Ajoutons l'arc a à G. G_{m+e} est un graphe à $(m+1)$ arrêtes :

$$P_{G_{m+z}} = P_{G_{m+e}-e} - P_{G_{m+e} \backslash e}$$

  Clairement $P_{G_{m+1}-e}$ et $P_{G_{m+1} \backslash e}$ ont $(m+1) - 1 = m$ arrêtes. Or par hypothèse de recurrence $H(m)$ est vraie, $P_{G_{m+1}}$ est la différence entre deux polynomiales, donc est polynomiale lui-même. On a donc $H(m+1)$.
- On vient de montrer $(H(0) \wedge (H(m) \Rightarrow H(m+1)))$. Par récurrence on a donc $H(m)$ vrai $\forall m \in \mathbb{N}$.

1.1.5 Application de la décomposition

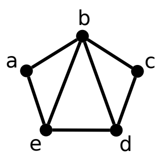
Utilisons la formule trouvée au point précédent, et admettons que pour P_n une chaîne de taille n on a :

$$P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$$

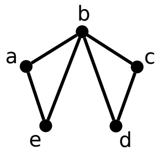
Prenons A le graphe initial :

$$\begin{aligned}
P_A(k) &= P_B(k) - P_C(k) \\
&= \big(P_D(k) - P_E(k)\big) - \big(P_F(k) - P_{P_3}(k)\big) \\
&= \Big[\big(P_{P_5}(k) - P_{P_4}(k)\big) - \big(P_{P_4}(k) - P_{P_3}(k)\big)\Big] - \Big[\big(P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k)\big) - P_{P_3}(k)\Big] \\
&= P_{P_5}(k) + 2P_{P_3}(k) - P_{K_3}(k) + 3P_{P_4}(k) \\
&= k(k-1)^4 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - 3(k-1)^3 \\
&= k(k-1)\big[(k-1)^3 + z(k-1) + (k-z) - 3(k-1)^2\big] \\
&= (k^2-k)\Big[(k-1)^2\big((k-1)-3\big) + 3k - 4\Big] \\
&= (k^2-k)[k^3 - 6k^2 + 12k - 8] \\
&= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^3 + 8k
\end{aligned}$$

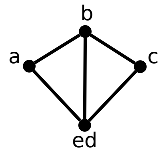
Où :

A : 

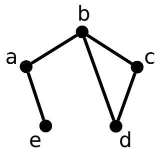
$B = A - (e, d)$:



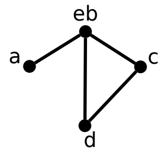
et $C = A\backslash(e, d)$:



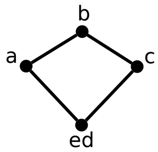
$D = C - (a, b)$:



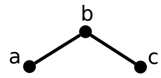
et $E = C\backslash(e, b)$:



$F = C - (b, ed)$:



et $C\backslash(b, ed) = P_3$:



1.1.6 Coefficients alternatifs

TODO coéfficient de k^n est 1, alternating - and + etc

1.1.7 Polynôme chromatique de $K_{1,5}$

$K_{1,5}$ étant un arbre, on aura k choix de coloration pour la racine, peu importe le choix de celle-ci, et $k-1$ pour les autres, car chacun qu'on considère sera relié à exactement une autre déjà colorié. En totale ça nous fait donc :

$$\begin{aligned}
P_{K_{1,5}}(k) &= k(k-1)^5 \\
&= k\left((k-1)^2\right)^2(k-1) \\
&= k(k^2-(2k-1))^2(k-1) \\
&= (k^5-4k^4+6k^3-4k^2+k)(k-1) \\
&= k^6-5k^5+10k^4-10k^3+5k^2-k
\end{aligned}$$

1.1.8 Coloration de graphes non-connexes

La coloration de chaque composante connexe C_i n'influx pas sur celui des autres. Du coup le nombre de manières de colorier un graphe entier est le produit des polynômes chromatiques de ses composantes connexes :

$$G = \bigcup_{i=0}^{n} C_i \quad \Rightarrow \quad P_G(k) = \prod_{i=0}^{n} P_{C_i}(k)$$

1.1.9 Coloration d'arbres

Supposons qu'on ait un graphe G tel que $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$:

– Intuitivement ceci veut dire qu'on a k choix de couleurs pour le premier sommet colorié, puis $(k-1)$ pour chacun des $(n-1)$ autres. Du coup chaque sommet, lors de sa coloration, ne doit être en contact qu'avec un seul sommet déjà colorié. Ceci n'est possible que dans un graphe sans cycle.
–

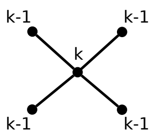
1.1.10 $k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$

Grace aux dévelopments précédentes (questions 7 et 12) on reconnait :

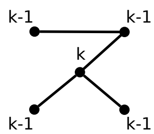
$$\begin{aligned} & k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k \\ = & \; k(k-1)^4 \\ = & \; P_{P_5}(k) \end{aligned}$$

Notre premier exemple sera donc P_5 le chemin de taille 5. Ensuite d'après la propriété de la question 6 nous ne cherchions que des graphes aillant 5 sommets et 4 arrêtes, et d'après celle de la question 9 ils doivent en plus être arbres. Nous proposons donc le graphe étoile $S_5 = K_{1,4}$ ainsi que l'arbre à 5 sommets dont la particularité est d'être sans particularité :

S_5 :



A_5 :



1.1.11 Polynôme chromatique de $K_{2,5}$

Nous avions déjà calculé le polynôme chromatique de $K_{1,5}$:

$$P_{K_{1,5}}(k) = k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k$$

Or $K_{2,5}$ se construit à partir de $K_{1,5}$ par l'ajout d'un sommet relié au 5 de la partition majoritaire. Ce nouveau sommet pourra être colorié de $(k-5)$ manières, car seront interdis les couleurs de ses 5 voisins. On a donc :

$$\begin{aligned} P_{K_{2,5}} &= (P_{K_{1,5}}(k))(k-5) \\ &= (k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k)(k-5) \\ &= k^7 - 10k^6 + 35k^5 - 60k^4 + 55k^3 - 26k^2 + 5k \end{aligned}$$

1.1.12 Polynômes chromatiques de C_4 et C_5

– Pour calculer P_{C_4}, commençons par constater que $C_3 = K_3$:

$$\begin{aligned}
P_{C_4}(k) &= P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k) \\
&= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
&= (k^2-k)((k-1)^2-(k-2)) \\
&= (k^2-k)(k^2-3k+3) \\
&= k^4-4k^3+6k^2-3k
\end{aligned}$$

– On peut alors utiliser P_{C_4} pour calculer P_{C_5} :

$$\begin{aligned}
P_{C_5}(k) &= P_{P_5}(k) - P_{C_4}(k) \\
&= k(k-1)^4 - k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \\
&= k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 4k
\end{aligned}$$

1.1.13 Coloration de cycles

cycles générales

1.1.14 Coloration de graphes bipartis complets

graphe bipartie générale

1.2 Complexité

1.2.1 SAT $\propto$ 3–SAT

(a) **Énoncé de SAT** :

Données :	$\mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$	*Ensemble de n variables*
	$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$	*Ensemble de m clauses*
où	$c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee \cdots \vee l_{ik})$	*Clauses de k littéraux*
avec	$l_{ij} = v$ ou $\neg v$	*avec $v \in U$*

Problème : existe-il au moins une affectation des variables telle que chaque clause de $\mathcal{C}$ soit vrai.

Énoncé de 3–SAT :

3–SAT est identique au problème SAT avec $k = 3$.

Données :	$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$
	$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$
où	$c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$
avec	$l_{ij} = v$ ou $\neg v$

(b) La réduction du problème SAT peut être définit en montrant que chaque clause c de $\mathcal{C}$ peut-être transformée en un ensemble de clauses $\mathcal{C}'$ tel que pour toute affectation rendant vrai l'ensemble des clauses de $\mathcal{C}$, on peut trouver une affectation rendant vrai chaque clause de $\mathcal{C}'$. Chaque clause de $\mathcal{C}'$ devant être de taille exactement 3. La réciproque doit également être montrée.

Définissons les réductions :

***k* = 1**

Soit ci_1 une clause de taille 1, on a $ci_1 = (l)$. Ajoutons deux variables $v_1, v_2 \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en quatre clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ avec :

$$c_1 = (l \vee v_1 \vee v_2)$$

$$c_2 = (l \vee v_1 \vee \neg v_2)$$

$$c_3 = (l \vee \neg v_1 \vee v_2)$$

$$c_4 = (l \vee \neg v_1 \vee \neg v_2)$$

***k* = 2**

Soit ci_2 une clause de taille 2, on a $ci_2 = (l_1 \vee l_2)$. Ajoutons une variable $v \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en deux clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \{c_1, c_2\}$ avec :

$$c_1 = (l_1 \vee l_2 \vee v)$$

$$c_2 = (l_1 \vee l_2 \vee \neg v)$$

***k* = 3**

La clause ci_3 ne subit pas de transformation.

$$\mathcal{C}_3 = \{ci_3\}$$

$k > 3$

Soit la clause $ci_k = (l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_k)$. On ajoute $(k-3)$ nouvelles variables $(v_1, v_2 \ldots v_{k-3})$.

$$\mathcal{C}_k = \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee v_1)}_{c_1} \bigwedge_{i=1}^{k-4} \left[\underbrace{(\neg v_i \vee l_{i+2} \vee v_{i+1})}_{c_{i+1}} \right] \wedge \underbrace{(\neg v_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)}_{c_{k-2}}$$

Montrons que SAT est vrai si et seulement si 3–SAT est vrai :

SAT → 3–SAT

– Soit une interprétation I_1 qui satisfasse la clause ci_1 :

$$val(I_1, ci_1) = val(I_1, l) = vrai$$

Prenons une interprétation I_1' avec $val(I_1, l) = val(I_1', l)$, peu importe les affectations de v_1 et v_2, l étant présent dans toutes les clauses de $\mathcal{C}_1$:

$$val(I_1', \mathcal{C}) = \top$$

– Soit une interprétation I_2 qui satisfasse la clause ci_2 :

$$\exists i, val(I_2, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation I_2' avec :

$$val(I_2, l_1) = val(I_2', l_1)$$

$$val(I_2, l_2) = val(I_2', l_2)$$

Peu importe l'affectation de v dans I_2', on a $val(I_2', \mathcal{C}_2) = \top$.

– Soit une interprétation I_k qui satisfasse la clause ci_k :

$$\exists i, val(I_k, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation I_k' telle que :

$$\begin{array}{rcl} val(I_k, l_i) & = & val(I_k', l_i) \\ \forall j \in \mathbb{N}^* \mid j \leq (i-2), val(I_k', v_j) & = & \top \\ \forall j \in \mathbb{N}^* \mid (i-1) \leq j \leq (k-3), val(I_k', v_j) & = & \bot \end{array}$$

On obtient :

$$val(I_k', \mathcal{C}_k) = \top$$

3–SAT → SAT

– Prenons une interprétation I_1 telle que $val(I_1, \mathcal{C}_1) = \top$.
Sans perte de généralité, on suppose que :

$$val(I_1, v_1) = val(I_1, v_2) = \top$$

La clause c_4 de $\mathcal{C}_1$ ne peut être satisfaite que si $val(I_1, l) = \top$.
On a donc :

$$val(I_1, ci_1) = \top$$

– Prenons une interprétation I_2 telle que $val(I_2, \mathcal{C}_2) = \top$.
Sans perte de généralité on suppose que :

$$val(I_2, v) = \top$$

La clause c_2 de $\mathcal{C}_2$ ne peut être satisfaire que si $val(I_2, (l_1 \vee l_2)) = \top$.
On a donc :

$$val(I_2, ci_2) = \top$$

– Prenons une interprétation I_k telle que $val(I_k, \mathcal{C}_k) = \top$ et montrons qu'il existe forcément un i tel que $val(I_k, l_i) = \top$.
Supposons que l'interprétation I_k est modèle de $\mathcal{C}_k$ avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq k, val(I_k, l_i) = \bot$$

$$\Rightarrow val(I_k, v_1) = \top \text{ (dans } c_1\text{)}$$

Donc :

$$\begin{array}{lrl} & \forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq (k-4), val(I_k, v_{i+1}) & = \top \\ \Rightarrow & val(I_k, v_{k-3}) & = \top \\ \Rightarrow & val(I_k, c_{k-2}) & = \bot \\ \Rightarrow & val(I_k, \mathcal{C}_k) & = \bot \end{array}$$

Pour que l'interprétation I_k satisfasse $\mathcal{C}_k$, il doit exister un $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $i \leq k$ et que $val(I_k, l_i) = \top$.
On a donc :

$$val(I_k, ci_k) = \top$$

(c) Le point (b) définit la réduction de SAT vers 3–SAT. Afin de montrer la NP-Complétude de 3–SAT, montrons que la réduction s'effectue en un temps polynomial.
Soit :

k la taille de la clause initiale,

v_k le nombre de variables à ajouter pour obtenir des clauses de taille 3,

w_k le nombre de clauses de taille 3 obtenues à partir de la clause initiale.

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0 & w_3 = 1 \\ v_4 = 1 & w_4 = 2 \\ v_5 = 2 & w_5 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Pour tout $k > 3$:

$$v_k = v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} + 1$$

$$w_k = w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$$

$v_k = \theta(k)$, donc borné par la taille de F. La réduction s'effectue donc en un temps polynomial.

Il est possible de réduire le problème SAT à 3–SAT en un temps polynomial, SAT étant NP-complet, 3–SAT l'est aussi.

(d) Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clause à n_v variables avec n_1 clauses de taille 1, n_2 clauses de taille 2, n_3 clauses de taille 3, n_4 clauses de taille 4 et n_5 clauses de taille 5. Calculons le nombre de variables et le nombre de clauses obtenues après réduction (respectivement n'_v et n'_c).
Les points (b) et (c) permettent de déterminer pour une clause de taille k, le nombre de clause obtenues et le nombre de variables ajoutées après réduction. On peut donc en déduire la tableau suivant :

Taille de la clause dans $\mathcal{C}$	1	2	3	4	5
Nombre de clauses	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
Nombre de variables ajoutées par clause	2	1	0	1	2
Nombre de variables ajoutées au total	$2n_1$	n_2	0	n_4	$2n_5$
Nombre de clauses obtenues par clause	4	2	1	2	3
Nombre de clauses obtenues au total	$4n_1$	$2n_2$	n_3	$2n_4$	$3n_5$

On a donc :

$$n'_v = n_v + 2n_1 + n_2 + n_4 + 2n_5$$
$$n'_c = 4n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5$$

1.2.2 3–SAT $\propto$ 2–SAT ?

Cette réduction repose sur un principe qui consiste à décomposer une clause de taille k en plusieurs clauses de tailles inférieures.

Soit une clause $c = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ une clause de taille 3 et I une interprétation qui satisfait c.

Cas 1 : décomposons cette clause en deux clauses c_1 et c_2 de tailles 1 et 2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3–SAT $\leftrightarrow$ 2–SAT, il faut ajouter une variable v aux deux clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3 \vee \neg v) \end{aligned}$$

On a donc la clause c_2 de taille 3.

Cas 2 : décomposons cette clause en trois clauses c_1, c_2 et c_3 de taille 1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2) \\ c_3 &= (l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3–SAT $\leftrightarrow$ 2–SAT, il faut ajouter deux variables v_1 et v_2 aux trois clauses créées :

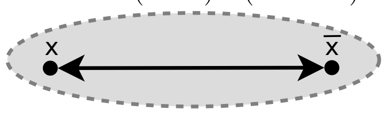
$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v_1 \vee \neg v_2) \\ c_2 &= (l_2 \vee \neg v_1 \vee v_2) \\ c_3 &= (l_3 \vee v_1 \vee v_2) \end{aligned}$$

On a donc également des clauses de taille 3. La réduction définie ci-avant ne permet donc pas la réduction de 3–SAT vers 2–SAT.

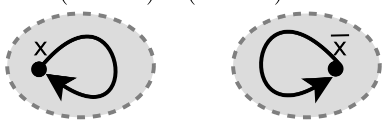
1.2.3 2–SAT, un problème polynomial

(a) Systèmes de deux clauses à deux littéraux :

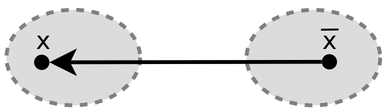
Insatisfiable : $(x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x)$



Valide : $(x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee x)$



Contingent : $(x \vee x) \wedge (x \vee x)$



Insaisissabilité du premier ensemble de clauses est clairement visible sur le graphe car les sommets x et $\neg x$ sont dans la même composante fortement connexe.

Le deux autres ensembles sont satisfiables, les deux sommets ne sont pas dans la même composante fortement connexe.

(b) L'algorithme suivant permet la génération du graphe correspondant à l'ensemble de clauses passé en paramètres, que nous appellerons graphe de satisfaction :

Algorithme 1: GrapheSatisfaction($\mathcal{C}, \mathcal{V}$)

Données :
$\mathcal{C}$ *// Ensemble de clauses*
$\mathcal{V}$ *// Ensemble des variables*
début
  Graphe.$\mathcal{S} = \emptyset$; *// Ensemble des sommets du graphe*
  Graphe.$\mathcal{A} = \emptyset$; *// Ensemble des arcs du graphe*
  // Initialisation des sommets
  pour tous les $v \in \mathcal{V}$ **faire**
    ajouter(Graphe.$\mathcal{S}$,v);
    ajouter(Graphe.$\mathcal{S}$,$\neg v$);
  // Parcours des clauses
  pour tous les $c \in \mathcal{C}$ **faire**
    ajouter(Graphe.$\mathcal{A}$,$(\neg c.x, c.y)$);
    ajouter(Graphe.$\mathcal{A}$,$(\neg c.y, c.x)$);
  retourner Graphe;

Cet algorithme effectue un parcours de $\mathcal{V}$ et un parcours de $\mathcal{C}$, sa complexité est donc $O(|\mathcal{C}| + |\mathcal{V}|)$.

(d) Les composantes fortement connexes du graphe de satisfaction généré, ainsi que leur ordre topologique, peuvent être calculées par l'algorithme de Tarjan.

Algorithme 2: Tarjan_Main(G)

```
Données : G // Le graphe
début
    date ← 0;
    pour tous les s ∈ G.S faire
        DEBUT[s] ← 0;
        CFC[s] ← 0;
    Pile ← ∅;
    numCFC ← 0;
    pour tous les s ∈ G.S faire
        si DEBUT[s] = 0 alors
            Tarjan_Rec(s,date,DEBUT,Pile,numCFC,CFC);
    retourner Comp;
```

Algorithme 3: Tarjan_Rec(s,date,DEBUT,Pile,numCFC,CFC)

```
Données :
s // Le sommet
date // Date de visite du sommet courant
DEBUT // Tableau de dates de visites pour chaque sommet
Pile // Pile de sommets
numCFC // Numéro de la CFC
CFC // Liste des CFC
début
    date ← date+1;
    DEBUT[s] ← date;
    min ← DEBUT[s];
    Empiler(Pile,s);
    pour tous les v ∈Adj[s] faire
        si DEBUT[v]= 0 alors
            min ←
            MIN(min,Tarjan_Rec(v,date,DEBUT,Pile,numCFC,CFC)));
        sinon si CFC[v]= 0 alors
            min ← MIN(min,DEBUT[v]);
    si min=DEBUT[s] alors
        Ncfc ← numCFC +1;
    répéter
        k ← Depiler(Pile);
        CFC[k] ← numCFC;
    jusqu'à k ≠ s;
    retourner Comp;
```

L'algorithme `Tarjan_Main` initialise la date de visite de chaque sommet à zéro. On constate que les deux algorithmes exécutent `Tarjan_Rec` uniquement sur des sommet dont la date de première visite est nulle. Or chaque appel à `Tarjan_Rec` affecte une date de visite supérieure à zéro au sommet courant. `Tarjan_Rec` est donc appelé exactement une fois par sommet.

De même, un sommet n'est empilé qu'à l'exécution de `Tarjan_Rec`, donc chaque sommet ne sera empilé (et donc dépilé) qu'une seule fois. La boucle de l'algorithme `Tarjan_Rec` (ligne 13) a une complexité globale en $O(|\mathcal{V}|)$.

En revanche, la bouche ligne 6 est effectuée une fois pour chaque voisin du sommet courant, donc $|\mathcal{V}|$ fois au pire pour chaque appelle. `Tarjan_Rec` n'étant appelée que $|\mathcal{V}|$ fois en totale on arrive donc à une complexité de $O(|\mathcal{V}|^2)$.

Dans le pire des cas le nombre de variables d'une instance de 2–SAT est égale à deux fois le nombre de clauses (chaque clause comportant dans ce cas deux variables uniques). Or notre conversion génère deux sommets par variable. La complexité de l'algorithme en fonction du nombre de clauses est donc de $O(|\mathcal{C}|^2)$.

(e) Nous passerons par la double-implication pour montrer l'équivalence entre le problème 2–SAT et le tri topologique dans notre graphe de satisfaction. Avant de commencer, notons que les arcs dans le graphe de satisfaction correspondent à des implications. En effet on ajoute un arc de x vers !x ... blah blah

– **Tri topologique ⇒ 2–SAT**
Étant donnée les composantes fortement connexes (CFC) du graphe étiqueté on peut vérifier linéairement en le nombre de sommets du graphe qu'on a une variable ensemble avec sa négation.
Dans un tel cas
donc un instance 2–SAT insatisfiable. Si par contre n'a pas de variables ensembles avec leurs négative dans le même CFC il suffit de prendre l'ordre topologique calculée dans l'ordre inverse et d'affecter les variables de chaque composant comme précisée dans l'article. Nous finissions alors ou une affection modèle, ou l'affirmation de l'insatisfiabilité de la forme normale conjonctive. Un tri topologique de notre graphe étiqueté permet donc de résoudre le problème 2–SAT.

– **2–SAT ⇒ Tri topologique**

1.3 Calculabilité

1.3.1 Énumération des couples d'entiers

La stratégie d'énumération des couples d'entiers peut être visualisée sur un graphique en suivant les diagonales successives comme sur l'image[1] suivante :

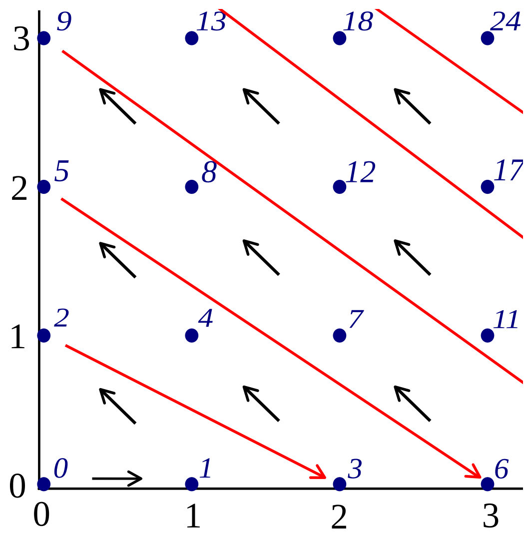


FIG. 1.1 – La fonction de couplage de Cantor établit une bijection de $\mathbb{N} * \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ un couple. On trie par ordre lexicographique $(x+y)$. Ainsi on obtient le tableau suivant :

(x, y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$	$(3,0)$	$(2,1)$	$(1,2)$	$(0,3)$	...
$(x+y)$	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	...
$c_2(x+y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

1.3.2 Codons et décodons...

Fonction de codage

$$c_2(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

Fonctions de décodage Les fonctions de décodage ne peuvent pas être décrites sous la forme de formules arithmétiques. Elles nécessitent l'algorithme sui-

[1]Image provenant de Wikipedia, ce fichier est disponible selon les termes de la licence Creative Commons.

vant :

Algorithme 4: CalculXY(z)

Données : z *// Rang du couple (x,y)*
début
  $s \leftarrow 0$;
  $t \leftarrow 0$;
  tant que $s \leqslant z$ **faire**
    $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$;
    $t \leftarrow t+1$;
  $t \leftarrow t-2$;
  $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$;
  $y \leftarrow z-s$;
  $x \leftarrow t-y$;
  retourner Couple(x,y);

1.3.3 Énumération des triplets d'entiers

Codage des triplets : il peut avoir lieu de manière récursive :

$$c_3(x,y,z) = c_2(x, c_2(y,z))$$

Généralisation au codage des k-uplets :

$$c_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = c_2(x_1, c_{k-1}(x_2, \ldots, x_k))$$

Avec : $$c_2(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

1.3.4 Énumération de l'ensemble $[0;1]$

Prenons une suite $r = (r_1, r_2, r_3, \ldots)$ qui énumère les réels de l'intervalle $[0;1]$, puis créons un réel x compris dans cet intervalle, tel que si la n$^{\text{ième}}$ décimale de r_n est égale à 1, la n$^{\text{ième}}$ décimale de x est égale à 2. Dans la cas contraire, la n$^{\text{ième}}$ décimale de x est égale à 1.

On obtient sur cet exemple :

r_1	=	0	,	**4**	2	9	6	4	6	1	…
r_2	=	0	,	2	**7**	3	2	9	4	0	…
r_3	=	0	,	6	4	**1**	1	5	1	2	…
r_4	=	0	,	3	0	5	**9**	0	4	3	…
r_5	=	0	,	9	1	3	3	**1**	8	2	…
r_6	=	0	,	0	2	0	8	3	**2**	7	…
r_7	=	0	,	2	5	7	3	6	4	**0**	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
				$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
x	=	0	,	1	1	2	1	2	1	1	…

Le réel x ne peut pas être énuméré par la suite r car il diffère de sa première décimale dans r_1, de sa deuxième décimale dans r_2, ... de sa n$^{\text{ième}}$ décimale dans r_n. Pourtant le réel x est clairement dans l'intervalle $[0; 1]$.

L'ensemble des éléments de l'intervalle $[0; 1]$ n'est donc pas dénombrable, donc pas énumérable. On ne peut donc pas trouver de fonction de codage pour cet ensemble.

On peu généraliser à l'ensemble $\mathbb{R}$: $[0; 1]$ étant inclus dans $\mathbb{R}$, et $[0; 1]$ n'étant pas dénombrable, l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Chapitre 2

Partie pratique

Le but de ce TP est d'implémenter deux algorithme de résolution du problème de flot maximum : l'algorithme d'Edmonds-Karp et l'algorithme de Dinic. Nous commencerons par spécifier les fonctionnalités que devra implémenter notre programme, puis nous détaillerons la manière dont ces fonctionnalités ont été développées. Une troisième partie sera consacrée aux tests effectués sur les deux algorithmes ainsi qu'à l'analyse des résultats.

2.1 Spécification fonctionnelles

2.1.1 Résolution du problème de flot maximum

Le programme doit être capable de :
- générer et d'actualiser les graphes d'écarts successifs
- calculer la valeur du flot obtenu à partir du graphe d'écart final
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l'algorithme d'**Edmonds-Karp**
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l'algorithme de **Dinic**
- retourner la solution de manière exploitable pour l'analyse

Il faudra veiller à conserver les complexités des deux algorithmes, notamment en prenant garde aux structures de données et librairies utilisées.

2.1.2 Génération aléatoire d'un réseau de transport

La génération aléatoire de graphes de type réseau de transport permettra de tester les deux algorithmes. Il faudra veiller à ce que le graphe respecte les conditions d'un réseau de transport notamment la possession d'une source et d'un puits, la pondération des arcs (capacités), et assurer la connexité du graphe. La génération de ce réseau de transport devra être paramétrable selon la taille (nombre de sommets) et la couverture (nombre d'arcs).

2.2 Spécification technique

2.2.1 Programmation C++

Parce qu'il s'agit d'un bon compromis entre langage orienté objet et langage de bas niveau, nous avons choisi de développer cette application en C++. Nous pourrons ainsi abstraire la gestion des graphes (notamment des structures de données) dans nos algorithmes, tout en gardant la possibilité d'optimiser le code grâce à la flexibilité du langage C.

2.2.2 Structures de données

Plusieurs structures de données sont possibles. Nous avons choisi d'implémenter une représentation par listes d'adjacences et une autre par matrice d'adjacences.

Listes d'adjacences : chaque sommet possède la liste de ses voisins. Ces listes ont l'avantage d'allouer de la mémoire uniquement lorsqu'une information doit être stockée.

Matrice d'adjacences : la mémoire allouée pour cette structure de données ne dépend que du nombre de sommets (n^2). Cette structure a l'avantage d'offrir un accès direct à un arc pour deux sommets donnés.

Dans un but d'optimisation mémoire, on utilise en général des listes d'adjacences lorsque l'on travail sur des graphes peu denses. En effet, la taille allouée par cette structure de données étant directement dépendante du nombre d'arcs, elle est donc réduite par rapport aux matrices d'adjacences. Sur des graphes très dense, on utilisera plutôt des matrice d'adjacences, permettant un accès aux données plus rapide.

Ce choix s'effectue en général en fonction des ressources matériels disponibles.

2.2.3 Modélisation

Dans un but d'abstraction de la structure de donnée, nous avons choisi de créer une classe abstraite `AbstractGraph` dont deux classes fille héritent. Un graphe peut donc être de type `AdjacencyListGraph` ou `MatrixGraph`.

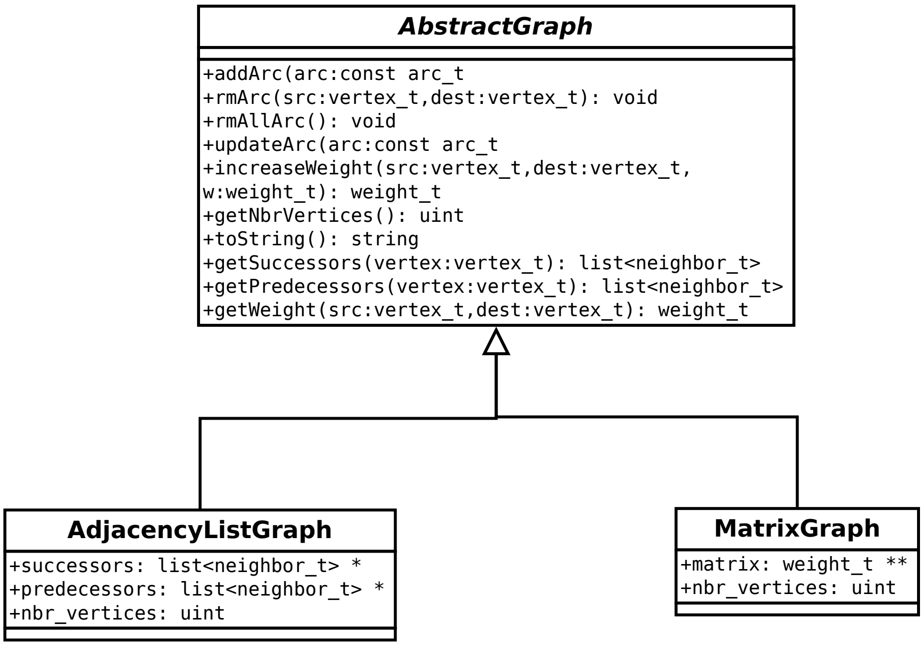


FIG. 2.1 – Diagramme de classes.

Classe `AbstractGraph`

Header de la classe `AbstractGraph`

```
class AbstractGraph
{
public:

   AbstractGraph();
   virtual
   ~AbstractGraph() = 0;

   virtual bool
   addArc(const arc_t &arc) = 0;

   virtual bool
   addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;

   virtual void
   rmArc(const arc_t &arc) = 0;

   virtual void
   rmArc(vertex_t src, vertex_t dest) = 0;

   virtual void
   rmAllArc() = 0;

   virtual void
   updateArc(const arc_t &arc) = 0;

   virtual weight_t
   increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;

   virtual uint
   getNbrVertices() const = 0;

```

```
    virtual string
    toString() const;

    virtual list<neighbor_t>
    getSuccessors(vertex_t vertex) const = 0;

    virtual list<neighbor_t>
    getPredecessors(vertex_t vertex) const = 0;

    virtual weight_t
    getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const = 0;

};
```

Classe `AdjacencyListGraph`

Cette classe représente un réseau de transport sous la forme de deux listes d'adjacences : une représente les successeurs d'un sommet, l'autre les prédécesseurs.

Ce doublon d'information permet d'accélérer l'accès aux voisins d'un sommet, notamment à ces prédécesseurs. En effet, cette méthode nous permet d'accéder aux prédécesseurs directement (complexité de $O(m)$) alors que l'accès via la liste des successeurs implique une recherche des arcs pour chaque sommet (complexité de $O(nm)$).

Ces doubles listes d'adjacences nous assurent un gain de performances en terme de rapidité, qui se fait au détriment de la quantité de mémoire utilisé, qui se trouve doublée.

Header de la classe `AdjacencyListGraph`

```
class AdjacencyListGraph : public AbstractGraph
{

public:
    //*************************
    // CONSTRUCTOR
    //*************************

    AdjacencyListGraph(uint nbr_vertices);

    AdjacencyListGraph(const AbstractGraph& graph);
    AdjacencyListGraph(const AdjacencyListGraph& graph);

    AdjacencyListGraph &
    operator=(const AbstractGraph& graph);
    AdjacencyListGraph &
    operator=(const AdjacencyListGraph& graph);

    virtual
    ~AdjacencyListGraph();

    virtual bool
    addArc(const arc_t &arc);

    virtual bool
    addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);

    virtual void
    rmArc(const arc_t &arc);

    virtual void
    rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);

    virtual void
    rmAllArc();
```

```

    virtual void
    updateArc(const arc_t &arc);

    virtual weight_t
    increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);

    virtual uint
    getNbrVertices() const;

    virtual list<neighbor_t>
    getSuccessors(vertex_t vertex) const;

    virtual list<neighbor_t>
    getPredecessors(vertex_t vertex) const;

    virtual weight_t
    getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;

private:
    list<neighbor_t> *successors, *predecessors;
    uint nbr_vertices;

protected:
    void
    _clear();

    void
    _construct(const AbstractGraph& graph);

};
```

Classe `MatrixGraph`

Header de la classe `MatrixGraph`

```
class MatrixGraph : public AbstractGraph
{

public:
    //**************************
    // CONSTRUCTOR
    //**************************

    MatrixGraph(uint nbr_vertices);

    MatrixGraph(const AbstractGraph& graph);

    MatrixGraph(const MatrixGraph& graph);

    MatrixGraph &
    operator=(const AbstractGraph& graph);

    MatrixGraph &
    operator=(const MatrixGraph& graph);

    virtual
    ~MatrixGraph();

    virtual bool
    addArc(const arc_t &arc);

    virtual bool
    addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);

    virtual void
    rmArc(const arc_t &arc);

    virtual void
    rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);

```

```
  virtual void
  rmAllArc();

  virtual void
  updateArc(const arc_t &arc);

  virtual weight_t
  increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);

  virtual uint
  getNbrVertices() const;

  virtual list<neighbor_t>
  getSuccessors(vertex_t vertex) const;

  virtual list<neighbor_t>
  getPredecessors(vertex_t vertex) const;

  virtual weight_t
  getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;

private:
  weight_t **matrix;
  uint nbr_vertices;

protected:
  void
  _clear();

  void
  _construct(int nbr_vertices);

  void
  _construct(const AbstractGraph& graph);

};
```

2.3 Tests & résultats

bla

2.3.1 Méthode de test

2.3.2 Analyse des résultats

//

2.3.3 Structures

La représentation des

```
typedef int weight_t;
typedef uint vertex_t;

typedef struct
{
  vertex_t u;
```

```
  vertex_t v;
} edge;

typedef struct
{
  vertex_t vertex_src;
  vertex_t vertex_dest;
  weight_t weight;
} arc_t;

typedef struct
{
  vertex_t vertex;
  weight_t weight;
} neighbor_t;

typedef list<vertex_t> path_t;
```

2.3.4 Génération aléatoire d'un graphe

```
/**
 * A random flow network generator
 * Attention si le graph passé en paramètre contient des arcs ceux-ci seront
 * supprimé.
 * @param graph une référence vers un graph initialiser avec un nombre de sommets
 * @param rate la proportion d'arcs à ajouter au graphe en pourcentage par rapport au graphe co
 * @param min_weight valuation minimal des arcs
 * @param max_weight valuation maximal des arcs
 */
void
flowNetworkGenerator(AbstractGraph& graph, float rate, uint min_weight = 1,
    uint max_weight = 1);

\subsection{Fonctions générales}

/**
 * Cette procédure génère une chaîne de caractères représentant l'affichage
 * de la valeur total du flot sur le réseau de transport ainsi que la valeur
 * du flot sur chaque arc.
 * @param flow_network le réseau de transport
 * @param residual_network le graphe d'écart associé
 */
string
flowToString(const AbstractGraph& flow_network,
    const AbstractGraph& residual_network);
```

```
\subsection{Edmonds-Karp}

/**
 * Cette fonction retourne le plus court chemin en nombre d'arcs depuis
 * le sommet start jusqu'au sommet end
 * @param g un graphe
 * @param start le sommet de départ
 * @param end le sommet d'arriver
 * @return le plus court chemin en nombre d'arcs de start à end
 */
path_t
leastArcsPath(AbstractGraph &g, vertex_t start, vertex_t end);

/**
 * Cette fonction retourne la plus petite valuation présente sur un chemin
 * donné dans un graphe
 * @param g un graphe
 * @param path une chemin dans g
 * @return la plus petite valuation présente sur le chemin path dans g
 */
weight_t
lightestArc(AbstractGraph& g, path_t path);

/**
 * Cette fonction converti un chemin en chaîne de caractère dans un but d'affichage
 * @param path le chemin
 * @param g le graphe
 */
string
pathToString(path_t path, const AbstractGraph& g);

/**
 * Mise à jour du graphe d'écart depuis un chemin et la valeur du flot à ajouter
 * sur ce chemin
 * @param le graphe de couche
 * @param p le chemin
 * @param k la valeur du flot à ajouter
 */
void
updateResidualNetwork(AbstractGraph& residualNetwork, path_t p, uint k);


/**
 * algorithme d'Edmonds-Karp
 * @param flow_network le réseau de transport
 * @param src le sommet source
 * @param dest le puit
 * @return le graphe d'écart final
 */
AdjacencyListGraph
```

```
edmondsKarp(const AbstractGraph& flow_network, vertex_t src, vertex_t dest);
```

2.3.5 Dinic

```
/**
 * Mise à jour du graphe d'écart depuis un flot
 * @param residual_network le graphe de couche
 * @param p le flot
 */
void
updateResidualNetwork(AbstractGraph& residual_network, AbstractGraph& flow);

/**
 * Génération du graphe de couche associé au réseau de transport
 * @param residual_network le graphe d'écart
 * @param src la source
 * @param dest le puit
 * @return le graphe de couche
 */
LevelGraph
generateLevelGraph(const AbstractGraph& residual_network, vertex_t src,
    vertex_t dest);

/**
 * Calcul du flot bloquant
 * @param level_graph le graphe de couche
 * @param src la source
 * @param dest le puit
 * @return un flot bloquant
 */
AdjacencyListGraph
blockingFlow(LevelGraph& level_graph, vertex_t src, vertex_t dest);


/**
 * algorithme de Dinic
 * @param flow_network le réseau de transport
 * @param src le sommet source
 * @param dest le puit
 * @return le graphe d'écart final
 */
AdjacencyListGraph
dinic(const AbstractGraph& graph, vertex_t src, vertex_t dest);
```