



Ministère de l'Education Nationale
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5



TP FMIN105
Algorithmique / Complexité / Calculabilité

RAPPORT (DÉCEMBRE 2011)

Travail préparé par :

Thibaut MARMIN
Clément SIPIETER
William DYCE

Table des matières

1	Partie théorique	5
1.1	Partie algorithmique	5
1.2	Partie complexité	5
1.2.1	SAT \propto 3-SAT	5
1.2.2	NP-complétude de 2-SAT	8
1.2.3	2-SAT, un problème polynomial	8
1.3	Partie calculabilité	8
2	Partie pratique	9

Chapitre 1

Partie théorique

1.1 Partie algorithmique

1.2 Partie complexité

1.2.1 SAT \propto 3-SAT

(a) **Énoncé de SAT :**

Données : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ *Ensemble de n variables*
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$ *Ensemble de m clauses*
où $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee \dots \vee l_{ik})$ *Clauses de k littéraux*
avec $l_{ij} = v$ ou $\neg v$ *avec $v \in U$*

Problème : existe-il au moins une affectation des variables telle que chaque clause de \mathcal{C} soit vrai.

Énoncé de 3-SAT :

3-SAT est identique au problème SAT avec $k = 3$.

Données : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$
où $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$
avec $l_{ij} = v$ ou $\neg v$

- (b) La réduction du problème SAT peut être défini en montrant que chaque clause c de \mathcal{C} peut-être transformée en un ensemble de clauses \mathcal{C}' tel que pour toute affectation rendant vrai l'ensemble des clauses de \mathcal{C} , on peut trouver une affectation rendant vrai chaque clause de \mathcal{C}' . Chaque clause de \mathcal{C}' devant être de taille exactement 3. La réciproque doit également être montrée.

Définissons les réductions :

$k = 1$

Soit ci_1 une clause de taille 1, on a $ci_1 = (l)$. Ajoutons deux variables $v_1, v_2 \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en quatre clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ avec :

$$c_1 = (l \vee v_1 \vee v_2)$$

$$c_2 = (l \vee v_1 \vee \neg v_2)$$

$$c_3 = (l \vee \neg v_1 \vee v_2)$$

$$c_4 = (l \vee \neg v_1 \vee \neg v_2)$$

$k = 2$

Soit ci_2 une clause de taille 2, on a $ci_2 = (l_1 \vee l_2)$. Ajoutons une variable $v \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en deux clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \{c_1, c_2\}$ avec :

$$c_1 = (l_1 \vee l_2 \vee v)$$

$$c_2 = (l_1 \vee l_2 \vee \neg v)$$

$k = 3$

La clause ci_3 ne subit pas de transformation.

$$\mathcal{C}_3 = \{ci_3\}$$

$k > 3$

Soit la clause $ci_k = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$. On ajoute $(k - 3)$ nouvelles variables $(v_1, v_2 \dots v_{k-3})$.

$$\mathcal{C}_k = \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee v_1)}_{c_1} \bigwedge_{i=1}^{k-4} \left[\underbrace{(\neg v_i \vee l_{i+2} \vee v_{i+1})}_{c_{i+1}} \right] \wedge \underbrace{(\neg v_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)}_{c_{k-2}}$$

Montrons que SAT est vrai si et seulement si 3-SAT est vrai :

SAT \rightarrow 3-SAT

- Soit une interprétation I_1 qui satisfasse la clause ci_1 :

$$val(I_1, ci_1) = val(I_1, l) = vrai$$

Prenons une interprétation I'_1 avec $val(I_1, l) = val(I'_1, l)$, peu importe les affectations de v_1 et v_2 , l étant présent dans toutes les clauses de \mathcal{C}_1 :

$$val(I'_1, \mathcal{C}) = vrai$$

- Soit une interprétation I_2 qui satisfasse la clause ci_2 :

$$\exists i, val(I_2, l_i) = vrai$$

Prenons une interprétation I'_2 avec :

$$val(I_2, l_1) = val(I'_2, l_1)$$

$$val(I_2, l_2) = val(I'_2, l_2)$$

Peu importe l'affectation de v dans I'_2 , on a $val(I'_2, \mathcal{C}_2) = vrai$.

- Soit une interprétation I_k qui satisfasse la clause ci_k :

$$\exists i, val(I_k, l_i) = vrai$$

Prenons une interprétation I'_k telle que :

$$\begin{aligned} val(I_k, l_i) &= val(I'_k, l_i) \\ \forall j \in [1; (i-2)], val(I'_k, v_j) &= vrai \\ \forall j \in [(i-1); (k-3)], val(I'_k, v_j) &= faux \end{aligned}$$

On obtient :

$$val(I'_k, C_k) = vrai$$

3-SAT \rightarrow SAT

- Prenons une interprétation I_1 telle que $val(I_1, C_1) = vrai$.
Sans perte de généralité, on suppose que :

$$val(I_1, v_1) = val(I_1, v_2) = vrai$$

La clause c_4 de C_1 ne peut être satisfaite que si $val(I_1, l) = vrai$.
On a donc :

$$val(I_1, ci_1) = vrai$$

- Prenons une interprétation I_2 telle que $val(I_2, C_2) = vrai$.
Sans perte de généralité on suppose que :

$$val(I_2, v) = vrai$$

La clause c_2 de C_2 ne peut être satisfaite que si $val(I_2, (l_1 \vee l_2)) = vrai$.
On a donc :

$$val(I_2, ci_2) = vrai$$

- Prenons une interprétation I_k telle que $val(I_k, C_k) = vrai$ et montrons qu'il existe forcément un i tel que $val(I_k, l_i) = vrai$.
Supposons que l'interprétation I_k est modèle de C_k avec

$$\forall i \in [1; k], val(I_k, l_i) = faux$$

$$\Rightarrow val(I_k, v_1) = vrai \text{ (dans } c_1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1; (k-4)], val(I_k, v_{i+1}) &= vrai \\ \Rightarrow val(I_k, v_{k-3}) &= vrai \\ \Rightarrow val(I_k, c_{k-2}) &= faux \\ \Rightarrow val(I_k, C_k) &= faux \end{aligned}$$

Pour que l'interprétation I_k satisfasse C_k , il doit exister un $i \in [1; k]$ tel que $val(I_k, l_i) = vrai$.

On a donc :

$$val(I_k, ci_k) = vrai$$

- (c) Le point (b) définit la réduction de SAT vers 3-SAT. Afin de montrer la NP-Complétude de 3-SAT, montrons que la réduction s'effectue en un temps polynomial.

Soit :

k la taille de la clause initiale,

v_k le nombre de variables à ajouter pour obtenir des clauses de taille 3,

w_k le nombre de clauses de taille 3 obtenues à partir de la clause initiale.

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0 & w_3 = 1 \\ v_4 = 1 & w_4 = 2 \\ v_5 = 2 & w_5 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Pour tout $k > 3$:

$$v_k = v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} + 1$$

$$w_k = w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$$

$v_k = \theta(k)$, donc borné par la taille de F. La réduction s'effectue donc en un temps polynomial.

Il est possible de réduire le problème SAT à 3-SAT en un temps polynomial, SAT étant NP-complet, 3-SAT l'est aussi.

1.2.2 NP-complétude de 2-SAT

1. coucou
2. coucou

1.2.3 2-SAT, un problème polynomial

1. coucou
2. coucou

1.3 Partie calculabilité

Chapitre 2

Partie pratique