



Ministère de l'Education Nationale  
Université de Montpellier II  
Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier Cedex 5



---

# TP FMIN105

## Algorithmique / Complexité / Calculabilité

---

RAPPORT (DÉCEMBRE 2011)

Travail préparé par :

Thibaut MARMIN  
Clément SIPIETER  
William DYCE

<https://github.com/marminthibaut/acc-tp>



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Partie théorique</b>	<b>5</b>
1.1	Algorithmique . . . . .	6
1.1.1	Fonction chromatique $P_G(k)$ . . . . .	6
1.1.2	Nombre chromatique $\chi(G)$ . . . . .	6
1.1.3	Décomposition de $P_G$ . . . . .	6
1.1.4	Polynôme chromatique? . . . . .	7
1.1.5	Application de la décomposition . . . . .	8
1.1.6	Particularités des polynômes chromatiques . . . . .	8
1.1.7	Polynôme chromatique de $K_{1,5}$ . . . . .	10
1.1.8	Coloration de graphes non-connexes . . . . .	10
1.1.9	Coloration d'arbres . . . . .	10
1.1.10	Trois graphes . . . . .	11
1.1.11	Polynôme chromatique de $K_{2,5}$ . . . . .	11
1.1.12	Polynômes chromatiques de $C_4$ et $C_5$ . . . . .	11
1.1.13	Coloration de cycles . . . . .	12
1.1.14	Coloration de graphes bipartis complets . . . . .	12
1.2	Complexité . . . . .	14
1.2.1	SAT $\propto$ 3-SAT . . . . .	14
1.2.2	3-SAT $\propto$ 2-SAT? . . . . .	17
1.2.3	2-SAT, un problème polynomial . . . . .	18
1.3	Calculabilité . . . . .	21
1.3.1	Énumération des couples d'entiers . . . . .	21
1.3.2	Codons et décodons. . . . .	21
1.3.3	Énumération des triplets d'entiers . . . . .	22
1.3.4	Énumération de l'ensemble $[0; 1]$ . . . . .	22

<b>2</b>	<b>Partie pratique</b>	<b>25</b>
2.1	Spécifications fonctionnelles . . . . .	26
2.1.1	Résolution du problème de flot maximum . . . . .	26
2.1.2	Génération aléatoire d'un réseau de transport . . . . .	26
2.2	Spécifications techniques . . . . .	26
2.2.1	Langage de programmation et organisation . . . . .	26
2.2.2	Représentation du problème de flot maximum . . . . .	27
2.2.3	Modélisation . . . . .	27
2.2.4	Types et structures . . . . .	29
2.3	Génération aléatoire de réseaux de transport . . . . .	32
2.3.1	Stratégies de génération des arcs . . . . .	32
2.3.2	Méthode implémentée . . . . .	34
2.4	Procédures principales . . . . .	35
2.4.1	Algorithme d'Edmonds-Karp . . . . .	35
2.4.2	Algorithme de Dinic . . . . .	36
2.5	Tests & résultats . . . . .	37
2.5.1	Méthode de test . . . . .	37
2.5.2	Analyse des résultats . . . . .	37

# Chapitre 1

## Partie théorique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Algorithmique</b>	<b>6</b>
1.1.1	Fonction chromatique $P_G(k)$	6
1.1.2	Nombre chromatique $\chi(G)$	6
1.1.3	Décomposition de $P_G$	6
1.1.4	Polynôme chromatique ?	7
1.1.5	Application de la décomposition	8
1.1.6	Particularités des polynômes chromatiques	8
1.1.7	Polynôme chromatique de $K_{1,5}$	10
1.1.8	Coloration de graphes non-connexes	10
1.1.9	Coloration d'arbres	10
1.1.10	Trois graphes	11
1.1.11	Polynôme chromatique de $K_{2,5}$	11
1.1.12	Polynômes chromatiques de $C_4$ et $C_5$	11
1.1.13	Coloration de cycles	12
1.1.14	Coloration de graphes bipartis complets	12
<b>1.2</b>	<b>Complexité</b>	<b>14</b>
1.2.1	$\text{SAT} \propto 3\text{-SAT}$	14
1.2.2	$3\text{-SAT} \propto 2\text{-SAT} ?$	17
1.2.3	2-SAT, un problème polynomial	18
<b>1.3</b>	<b>Calculabilité</b>	<b>21</b>
1.3.1	Énumération des couples d'entiers	21
1.3.2	Codons et décodons...	21
1.3.3	Énumération des triplets d'entiers	22
1.3.4	Énumération de l'ensemble $[0; 1]$	22

---

## 1.1 Algorithmique

### 1.1.1 Fonction chromatique $P_G(k)$

Le nombre de manières de colorier un graphe est le produit des nombres de façons de colorier chaque sommet.

- Si le graphe  $G$  est complet, nous aurons  $k$  couleurs possibles pour le premier sommet,  $(k-1)$  pour le deuxième, etc. . . (Le graphe  $G$  étant complet, la couleur du premier sommet est nécessairement exclu des autres sommets).

Le  $n$ -ième sommet pourra être colorié de  $k - (n - 1)$  manières. D'où :

$$P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k - i)$$

- Si  $G$  est vide, la coloration d'un sommet ne contraint pas la coloration des autres sommets. Nous obtenons alors :

$$P_{K_n}(k) = k^n$$

### 1.1.2 Nombre chromatique $\chi(G)$

Nous appelons « nombre chromatique » de  $G$  :  $\chi(G)$  étant, par définition, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier  $G$ . Si  $k < \chi(G)$  alors le graphe  $G$  ne peut pas être colorié par  $k$  couleurs. Si  $k \geq \chi(G)$  alors il doit y avoir au moins une manière de colorier  $G$ , celui utilisant  $\chi(G)$  couleurs.

Nous avons donc :

$$P_G(k) \begin{cases} = 0 & \text{si } k < \chi(G) \\ \geq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 1.1.3 Décomposition de $P_G$

Montrons d'abord que la propriété est vraie pour tout graphe complet  $K_n$ . Pour commencer nous remarquons que pour tout arête  $e$  :

- $K_{n \setminus e}$  est exactement  $K_{n-1}$ , et donc :

$$P_{K_n \setminus e}(k) = P_{K_{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-2} (k - i)$$

- Soit  $e = (a, b)$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $b$  est considéré en dernier lors de la coloration de  $K_n$ , donc qu'il lui reste  $k - (n - 1)$  couleurs. Pour colorier  $K_{n-e}$  nous aurons un choix de plus pour lui, à savoir la couleur de  $a$ , donc  $k - (n - 2)$  en totale.

De ce fait :

$$P_{K_n-e}(k) = P_{K_{n-1}}(k)(k - (n - 2)) = \left( \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2))$$

Nous avons donc très clairement :

$$\begin{aligned} P_{K_n-e}(k) - P_{K_n \setminus e}(k) &= \left( \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2)) - \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \\ &= \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) (k - (n - 1)) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (k - i) \\ &= P_{K_n}(k) \end{aligned}$$

Tout graphe de rang  $n$  peut se générer à partir de  $K_n$  (en enlevant des arrêtes). Nous admettons que la suppression d'arête conserve notre propriété, donc que pour tout graphe  $G$  et tout arrête  $a$  de celui-ci ( $a$  et  $e$  sont supposées distinctes) :

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \\ \Rightarrow P_{G-a}(k) &= P_{G-e-a}(k) - P_{G \setminus e-a}(k) \end{aligned}$$

Par induction structurelle nous avons donc  $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k)$  pour tout graphe  $G$ .

#### 1.1.4 Polynôme chromatique ?

Soit  $H$  un prédicat tel que :

$$H(m) = \begin{cases} \top & \text{si } \forall G, \text{ graphe de } m \text{ arrêtes ou moins, } P_G(k) \text{ est polynomiale.} \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous rappelons que  $P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$ , donc  $H(0)$  est vraie.
- Supposons  $\exists m \in \mathbb{N} \mid H(m)$  l'est également. Ajoutons l'arc  $a$  à  $G$ .  $G_{m+e}$  est un graphe à  $(m + 1)$  arêtes :

$$P_{G_{m+e}} = P_{G_{m+e}-e} - P_{G_{m+e} \setminus e}$$

- Clairement  $P_{G_{m+1}-e}$  et  $P_{G_{m+1} \setminus e}$  ont  $(m + 1) - 1 = m$  arêtes. Or par hypothèse de récurrence  $H(m)$  est vraie,  $P_{G_{m+1}}$  est la différence entre deux polynômes, donc il est également polynomiale. Nous avons donc  $H(m + 1)$ .
- Nous venons de montrer  $(H(0) \wedge (H(m) \Rightarrow H(m + 1)))$ . Par récurrence nous avons donc  $H(m)$  vrai  $\forall m \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.5 Application de la décomposition

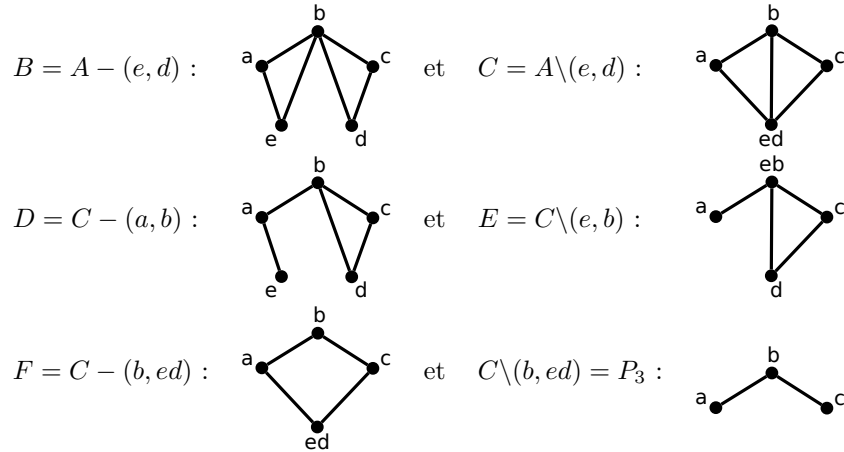
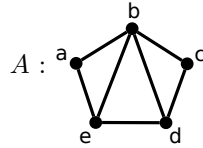
Utilisons la formule trouvée au point précédent, et admettons que pour  $P_n$  la chaîne de taille  $n$  nous avons :

$$P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$$

Prenons  $A$  le graphe initial :

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= P_B(k) - P_C(k) \\
 &= (P_D(k) - P_E(k)) - (P_F(k) - P_{P_3}(k)) \\
 &= \left[ (P_{P_5}(k) - P_{P_4}(k)) - (P_{P_4}(k) - P_{P_3}(k)) \right] - \left[ (P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k)) - P_{P_3}(k) \right] \\
 &= P_{P_5}(k) + 2P_{P_3}(k) - P_{K_3}(k) + 3P_{P_4}(k) \\
 &= k(k-1)^4 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - 3(k-1)^3 \\
 &= k(k-1) \left[ (k-1)^3 + 2(k-1) + (k-2) - 3(k-1)^2 \right] \\
 &= (k^2 - k) \left[ (k-1)^2 ((k-1) - 3) + 3k - 4 \right] \\
 &= (k^2 - k) [k^3 - 6k^2 + 12k - 8] \\
 &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k
 \end{aligned}$$

Où :



### 1.1.6 Particularités des polynômes chromatiques

Nous cherchions à prouver que pour tout graphe  $G$  à  $n$  sommets et  $m$  arrêtes, avec  $C = \{c_i\}$  un ensemble de coefficients naturels (donc positifs) :

$$P_G(k) = k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=2}^n \left( (-1)^i (c_i k^{n-i}) \right)$$



Nous nommerons  $F_k(n, m, C)$  cette forme polynomiale particulière. Soit  $H$  un prédicat tel que :

$$H(n, m) \Leftrightarrow \forall G(n, m), \exists C \mid P_G(k) = F(n, m, C)$$

Nous montrerons par récurrence que  $H(n, m)$  est vrai pour tout  $n$  et tout  $m$  :

– **Sommets – cas de base**

Pour  $n = 1$  nous avons  $P_G(k) = k$ , donc  $H(1, 0)$  est vérifié.

– **Sommets – pas récursif**

Supposons qu'il existe un nombre de sommets  $n_0$  et un nombre d'arêtes  $m_0$  tel que  $H(n_0, m_0)$  soit vrai. Soit  $G$  un graphe à  $n_0$  sommets et  $m_0$  arêtes, et  $G^+$  le graphe généré en reliant un nouveau sommet  $s'$  à une sélection de  $n' \leq n_0$  sommets de  $G$ . Nous aurons donc  $(k - n')$  manières de colorier  $s'$ .

De ce fait :

$$P_{G^+}(k) = P_G(k)(k - n')$$

Où  $P_G(k)$  est de la forme  $F$ .  $P_G^+(k)$  est donc de la forme :

$$\begin{aligned} & F(n, m, C)(k - n') \\ = & F(n, m, C)k - n'F(n, m, C) \end{aligned}$$

\* **Maintient des signes alternatifs**

Le fait de multiplier par  $k$  « décale » les termes du polynôme à gauche. Soustraire  $n'F_k(n, m, C)$  retranche alors au coefficient de chaque terme  $n'$  fois celui de leur voisin de gauche, avec  $0 \leq n' \leq n$ . Or si le terme est positif, son voisin de gauche est négative par hypothèse, donc son coefficient augmentera.

De même si le terme est négative son coefficient va diminuer. Les signes resteront donc alternatifs dans  $P_G^+(k)$ .

\* **Maintient de  $k^n$**

$k^n$  deviendra  $k^{n+1}$  dans  $F_k(n, m, C)k$  et, n'ayant pas de voisin gauche dans  $F_k(n, m, C)$ , nous ne lui retrancherons rien. La propriété sur le terme de plus haut degré est donc maintenu.

\* **Maintient de  $mk^{n-1}$**

Le terme  $-mk^{n-1}$ , aillant pour voisin gauche  $k^n$ , deviendra

$$-mk^n - n'k^n = -(m + n')k^n$$

$(m + n')$  étant le nombre d'arêtes de  $G^+$ . La propriété sur le second terme de plus haut degré est alors maintenu aussi.

Nous avons donc  $H(n_0 + 1, m_0)$ , qui nous servira pas la suite...

– **Arrêtes – cas de base**

Pour  $m = 0$  nous avons  $G = \overline{K}_n$  et donc  $P_G(k) = P_{\overline{K}_n}(k) = k^n$ . Du coup  $\forall n \in \mathbb{N}^+$ ,  $H(n, 0)$  est vrai.

– **Arrêtes – pas récursive**

Supposons qu'il existe un nombre d'arêtes  $m_0$  tel que pour tout  $m \leq m_0$  et tout  $n$  nous avons  $H(n, m_0)$ . Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets et  $m_0 + 1$

arrêtes. D'après la formule de la question 3, nous avons :

$$\begin{aligned}
 P_G(k) &= P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \\
 &= F_k(n, m_0, C') - F_k(n-1, m_0+1-n', C'') \\
 &= \left(k^n - m_0 k^{n-1} + \dots\right) - \left(k^{n-1} - (m_0+1-n')k^{n-2} + \dots\right) \\
 &= k^n - (m_0+1)k^{n-1} + \dots \\
 &= F_k(n, m_0+1, C''')
 \end{aligned}$$

Nous admettons ci-dessus la conservation de alternance des signes. De ce fait nous avons  $H(n, m_0+1)$ .

Nous avons démontrés précédemment :

$$H(1, 0) \wedge H(n, 0) \wedge (H(n, m) \Rightarrow H(n+1, m)) \wedge (H(n, m) \Rightarrow H(n, m+1))$$

Par récurrence nous avons donc  $H(n, m)$  pour tout pair  $(n, m)$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$

### 1.1.7 Polynôme chromatique de $K_{1,5}$

$K_{1,5}$  étant un arbre, nous aurons  $k$  choix de coloration pour la racine, peu importe le choix de celle-ci, et  $k-1$  pour les autres, car chaque sommet considéré sera relié à exactement une autre déjà colorié. Au final, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 P_{K_{1,5}}(k) &= k(k-1)^5 \\
 &= k((k-1)^2)^2(k-1) \\
 &= k(k^2 - (2k-1))^2(k-1) \\
 &= (k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k)(k-1) \\
 &= k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k
 \end{aligned}$$

### 1.1.8 Coloration de graphes non-connexes

La coloration de chaque composante connexe  $C_i$  n'influe pas sur celle des autres. Du coup le nombre de manières de colorier un graphe entier est le produit des polynômes chromatiques de ses composantes connexes :

$$G = \bigcup_{i=0}^n C_i \Rightarrow P_G(k) = \prod_{i=0}^n P_{C_i}(k)$$

### 1.1.9 Coloration d'arbres

Supposons que nous ayons un graphe  $G$  tel que  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$  :

- Intuitivement cela signifie que nous avons  $k$  choix de couleurs pour le premier sommet colorié, puis  $(k-1)$  pour chacun des  $(n-1)$  autres. Chaque sommet, lors de sa coloration, ne doit être en contact qu'avec un seul sommet déjà colorié. Ceci n'est possible que dans un graphe sans cycle, car même avec un seul cycle nous aurons au plus  $k(k-1)^{n-2}(k-2) < k(k-1)^{n-1}$  colorations différentes.

- De même si  $G$  est une forêt, même si elle n'est composée que de deux composantes connexes, il devraient y avoir au moins  $k^2(k-1)^{n-2} > k(k-1)^{n-1}$  colorations possibles.

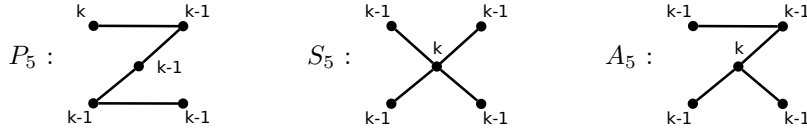
Nous avons donc  $G$  connexe et sans cycle : il s'agit de la définition même d'un arbre.

### 1.1.10 Trois graphes

Grâce aux développements précédents (questions 7 et 12) nous reconnaissons :

$$\begin{aligned} & k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k \\ &= k(k-1)^4 \\ &= P_{P_5}(k) \end{aligned}$$

Notre premier exemple sera donc  $P_5$  le chemin de taille 5. Or, d'après la propriété de la question 6, nous ne cherchons ici que des graphes aillant 5 sommets et 4 arrêtes. De plus, d'après la propriété de la question 9, ils doivent être des arbres. Nous prenons donc le graphe étoile  $S_5 = K_{1,4}$  ainsi que l'arbre à 5 sommets dont la particularité est d'être sans particularité (que nous nommerons  $A_5$ ) :



### 1.1.11 Polynôme chromatique de $K_{2,5}$

Nous avons déjà calculé le polynôme chromatique de  $K_{1,5}$  :

$$P_{K_{1,5}}(k) = k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k$$

Or  $K_{2,5}$  se construit à partir de  $K_{1,5}$  par l'ajout d'un sommet relié au 5 sommets de la partition majoritaire. Ce nouveau sommet pourra être colorié de  $(k-5)$  manières, car seront interdits les couleurs de ses 5 voisins. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_{K_{2,5}} &= (P_{K_{1,5}}(k))(k-5) \\ &= (k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k)(k-5) \\ &= k^7 - 10k^6 + 35k^5 - 60k^4 + 55k^3 - 26k^2 + 5k \end{aligned}$$

### 1.1.12 Polynômes chromatiques de $C_4$ et $C_5$

- Pour calculer  $P_{C_4}$ , commençons par constater que  $C_3 = K_3$  :

$$\begin{aligned} P_{C_4}(k) &= P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k) \\ &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\ &= (k^2 - k)((k-1)^2 - (k-2)) \\ &= (k^2 - k)(k^2 - 3k + 3) \\ &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \end{aligned}$$

- Nous pouvons alors utiliser  $P_{C_4}$  pour calculer  $P_{C_5}$  :

$$\begin{aligned} P_{C_5}(k) &= P_{P_5}(k) - P_{C_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \\ &= k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 4k \end{aligned}$$

### 1.1.13 Coloration de cycles

Soit  $H$  un prédicat tel que :

$$H(n) \Leftrightarrow \left( P_{C_n}(k) = ((k-1)^n + (-1)^n(k-1)) \right)$$

- Prenons comme cas de base  $n = 3$  :

$$\begin{aligned} P_{C_3}(k) &= P_{K_3}(k) \\ &= k(k-1)(k-2) \\ &= k^3 - 3k^2 + 2k \\ &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 - k + 1 \\ &= (k^2 - 2k + 1)(k-1) - (k-1) \\ &= (k-1)^3 - (k-1) \end{aligned}$$

$H(3)$  est donc vrai.

- Supposons  $H(n)$  vrai pour un  $n$  donnée. Suivant cette hypothèse nous avons :

$$\begin{aligned} P_{C_{n+1}}(k) &= P_{C_{n+1}-e} - P_{C_{n+1} \setminus e}(k) \\ &= P_{P_{n+1}}(k) - P_{C_n}(k) \\ &= k(k-1)^n - \left( (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \right) \\ &= (k-1)(k-1)^n - (-1)^n(k-1) \\ &= (k-1)^{n+1}(-1)^{n+1}(k-1) \end{aligned}$$

Nous avons donc  $H(n+1)$ .

En conclusion :  $H(3) \wedge (H(n) \Rightarrow H(n+1))$ . Par récurrence nous avons donc  $H(n)$  vrai pour tout  $n \geq 3$ . (À noter qu'on ne rencontre pas souvent de cycles de taille inférieur à 3.)

### 1.1.14 Coloration de graphes bipartis complets

Comme d'habitude, posons  $H$  un prédicat tel que :

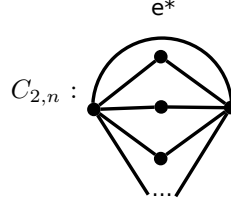
$$H(n) \Leftrightarrow \left( P_{K_{2,n}}(k) = (k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n) \right)$$

- Prenons comme cas de base  $n = 1$ . Or  $K_{2,1} = P_3$  donc :

$$\begin{aligned} P_{K_{2,1}}(k) &= P_{P_3}(k) \\ &= k(k-1)^2 \\ &= k(k-1)(1 + (k-2)) \\ &= k(k-1)^1 + k(k-1)(k-2)^1 \end{aligned}$$

$H(1)$  est donc vrai.

- Nous appelons  $C_{2,n}$  le graphe pseudo-biparti complet à  $n$  sommets, qui se génère à partir de  $K_{2,n}$  en reliant les deux sommets de la première partition :



Nous appelons cette arête spéciale  $e^*$ . Nous avons donc :

$$C_{2,n} - e^* = K_{2,n}$$

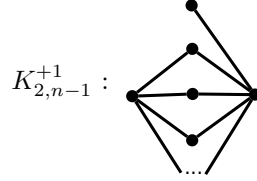
et

$$C_{2,n} \setminus e^* = S_{n-1}$$

Nous rappelons que  $S_n$  est un arbre. Finalement nous admettons :

$$\forall e \quad K_{2,n} - e = K_{2,n}(k-1)$$

En effet il ne reste que  $K_{2,n-1}$  plus un sommet pendent, donc coloriable de  $k-1$  manières :



Supposons alors  $H(n)$  vrai pour un  $n$  donnée.

$$\begin{aligned} P_{K_{2,n+1}}(k) &= P_{K_{2,n+1}-e} - P_{K_{2,n+1} \setminus e} \\ &= P_{K_{2,n}}(k-1) - P_{C_{2,n}} \\ &= P_{K_{2,n}}(k-1) - P_{K_{2,n}} + P_{S_{n-1}} \\ &= (k-2)(k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n) + k(k-1)^{n-2} \\ &= \dots \\ &= k(k-1)^{n+1} + k(k-1)(k-2)^{n+1} \end{aligned}$$

Nous avons donc  $H(n+1)$ .

Comme  $H(1) \wedge (H(n) \Rightarrow H(n+1))$ , alors par récurrence  $H(n)$  sera vrai pour tout  $n \geq 1$ .

## 1.2 Complexité

### 1.2.1 SAT $\propto$ 3-SAT

(a) **Énoncé de SAT :**

Données :  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$  *Ensemble de  $n$  variables*  
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$  *Ensemble de  $m$  clauses*  
 où  $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee \dots \vee l_{ik})$  *Clauses de  $k$  littéraux*  
 avec  $l_{ij} = v$  ou  $\neg v$  *avec  $v \in U$*

Problème : existe-il au moins une affectation des variables telle que chaque clause de  $\mathcal{C}$  soit vrai.

**Énoncé de 3-SAT :**

3-SAT est identique au problème SAT avec  $k = 3$ .

Données :  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$   
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$   
 où  $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$   
 avec  $l_{ij} = v$  ou  $\neg v$

- (b) La réduction du problème SAT peut être défini en montrant que chaque clause  $c$  de  $\mathcal{C}$  peut-être transformée en un ensemble de clauses  $\mathcal{C}'$  tel que pour toute affectation rendant vrai l'ensemble des clauses de  $\mathcal{C}$ , nous pouvons trouver une affectation rendant vrai chaque clause de  $\mathcal{C}'$ . Chaque clause de  $\mathcal{C}'$  devant être de taille exactement 3. La réciproque doit également être montrée.

Définissons les réductions :

**$k = 1$**

Soit  $ci_1$  une clause de taille 1, nous avons  $ci_1 = (l)$ . Ajoutons deux variables  $v_1, v_2 \notin \mathcal{V}$  et transformons la clause  $c$  en quatre clauses. Nous obtenons l'ensemble  $\mathcal{C}_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  avec :

$$c_1 = (l \vee v_1 \vee v_2)$$

$$c_2 = (l \vee v_1 \vee \neg v_2)$$

$$c_3 = (l \vee \neg v_1 \vee v_2)$$

$$c_4 = (l \vee \neg v_1 \vee \neg v_2)$$

**$k = 2$**

Soit  $ci_2$  une clause de taille 2, nous avons  $ci_2 = (l_1 \vee l_2)$ . Ajoutons une variable  $v \notin \mathcal{V}$  et transformons la clause  $c$  en deux clauses. Nous obtenons l'ensemble  $\mathcal{C}_2 = \{c_1, c_2\}$  avec :

$$c_1 = (l_1 \vee l_2 \vee v)$$

$$c_2 = (l_1 \vee l_2 \vee \neg v)$$

**$k = 3$**

La clause  $ci_3$  ne subit pas de transformation.

$$\mathcal{C}_3 = \{ci_3\}$$

**$k > 3$**

Soit la clause  $ci_k = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ . Nous ajoutons  $(k - 3)$  nouvelles variables  $(v_1, v_2 \dots v_{k-3})$ .

$$\mathcal{C}_k = \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee v_1)}_{c_1} \bigwedge_{i=1}^{k-4} \left[ \underbrace{(\neg v_i \vee l_{i+2} \vee v_{i+1})}_{c_{i+1}} \right] \wedge \underbrace{(\neg v_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)}_{c_{k-2}}$$

Montrons que SAT est vrai si et seulement si 3-SAT est vrai :

**SAT  $\rightarrow$  3-SAT**

- Soit une interprétation  $I_1$  qui satisfasse la clause  $ci_1$  :

$$val(I_1, ci_1) = val(I_1, l) = vrai$$

Prenons une interprétation  $I'_1$  avec  $val(I_1, l) = val(I'_1, l)$ , peu importe les affectations de  $v_1$  et  $v_2$ ,  $l$  étant présent dans toutes les clauses de  $\mathcal{C}_1$  :

$$val(I'_1, \mathcal{C}) = \top$$

- Soit une interprétation  $I_2$  qui satisfasse la clause  $ci_2$  :

$$\exists i, val(I_2, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation  $I'_2$  avec :

$$val(I_2, l_1) = val(I'_2, l_1)$$

$$val(I_2, l_2) = val(I'_2, l_2)$$

Peu importe l'affectation de  $v$  dans  $I'_2$ , nous avons  $val(I'_2, \mathcal{C}_2) = \top$ .

- Soit une interprétation  $I_k$  qui satisfasse la clause  $ci_k$  :

$$\exists i, val(I_k, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation  $I'_k$  telle que :

$$val(I_k, l_i) = val(I'_k, l_i)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid j \leq (i - 2), val(I'_k, v_j) = \top$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid (i - 1) \leq j \leq (k - 3), val(I'_k, v_j) = \perp$$

Nous obtenons :

$$val(I'_k, \mathcal{C}_k) = \top$$

**3-SAT  $\rightarrow$  SAT**

- Prenons une interprétation  $I_1$  telle que  $val(I_1, \mathcal{C}_1) = \top$ .  
Sans perte de généralité, nous supposons que :

$$val(I_1, v_1) = val(I_1, v_2) = \top$$

La clause  $c_4$  de  $\mathcal{C}_1$  ne peut être satisfaite que si  $val(I_1, l) = \top$ .  
Nous avons donc :

$$val(I_1, ci_1) = \top$$

- Prenons une interprétation  $I_2$  telle que  $val(I_2, \mathcal{C}_2) = \top$ .  
Sans perte de généralité supposons que :

$$val(I_2, v) = \top$$

La clause  $c_2$  de  $\mathcal{C}_2$  ne peut être satisfaite que si  $val(I_2, (l_1 \vee l_2)) = \top$ .

Nous avons donc :

$$val(I_2, ci_2) = \top$$

- Prenons une interprétation  $I_k$  telle que  $val(I_k, \mathcal{C}_k) = \top$  et montrons qu'il existe forcément un  $i$  tel que  $val(I_k, l_i) = \top$ .  
Supposons que l'interprétation  $I_k$  est modèle de  $\mathcal{C}_k$  avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq k, val(I_k, l_i) = \perp$$

$$\Rightarrow val(I_k, v_1) = \top \text{ (dans } c_1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq (k-4), val(I_k, v_{i+1}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, v_{k-3}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, c_{k-2}) &= \perp \\ \Rightarrow val(I_k, \mathcal{C}_k) &= \perp \end{aligned}$$

Pour que l'interprétation  $I_k$  satisfasse  $\mathcal{C}_k$ , il doit exister un  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $i \leq k$  et que  $val(I_k, l_i) = \top$ .

Nous avons donc :

$$val(I_k, ci_k) = \top$$

- (c) Le point (b) définit la réduction de SAT vers 3-SAT. Afin de montrer la NP-Complétude de 3-SAT, montrons que la réduction s'effectue en un temps polynomial.

Soit :

$k$  la taille de la clause initiale,

$v_k$  le nombre de variables à ajouter pour obtenir des clauses de taille 3,

$w_k$  le nombre de clauses de taille 3 obtenues à partir de la clause initiale.

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0 & w_3 = 1 \\ v_4 = 1 & w_4 = 2 \\ v_5 = 2 & w_5 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Pour tout  $k > 3$  :

$$v_k = v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} + 1$$

$$w_k = w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$$

$v_k = \theta(k)$ , donc borné par la taille de  $F$ . La réduction s'effectue donc en un temps polynomial.

Il est possible de réduire le problème SAT à 3-SAT en un temps polynomial, SAT étant NP-complet, 3-SAT l'est aussi.



- (d) Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de clause à  $n_v$  variables avec  $n_1$  clauses de taille 1,  $n_2$  clauses de taille 2,  $n_3$  clauses de taille 3,  $n_4$  clauses de taille 4 et  $n_5$  clauses de taille 5. Calculons le nombre de variables et le nombre de clauses obtenues après réduction (respectivement  $n'_v$  et  $n'_c$ ).

Les points (b) et (c) permettent de déterminer pour une clause de taille  $k$ , le nombre de clause obtenues et le nombre de variables ajoutées après réduction. Nous pouvons donc en déduire la tableau suivant :

Taille de la clause dans $\mathcal{C}$	1	2	3	4	5
Nombre de clauses	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
Nombre de variables ajoutées par clause	2	1	0	1	2
<b>Nombre de variables ajoutées au total</b>	$2n_1$	$n_2$	0	$n_4$	$2n_5$
Nombre de clauses obtenues par clause	4	2	1	2	3
<b>Nombre de clauses obtenues au total</b>	$4n_1$	$2n_2$	$n_3$	$2n_4$	$3n_5$

Nous avons donc :

$$n'_v = n_v + 2n_1 + n_2 + n_4 + 2n_5$$

$$n'_c = 4n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5$$

### 1.2.2 3-SAT $\propto$ 2-SAT ?

Cette réduction repose sur un principe qui consiste à décomposer une clause de taille  $k$  en plusieurs clauses de tailles inférieures.

Soit une clause  $c = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$  une clause de taille 3 et  $I$  une interprétation qui satisfait  $c$ .

**Cas 1 :** décomposons cette clause en deux clauses  $c_1$  et  $c_2$  de tailles 1 et 2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT  $\leftrightarrow$  2-SAT, il faut ajouter une variable  $v$  aux deux clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3 \vee \neg v) \end{aligned}$$

Nous avons donc la clause  $c_2$  de taille 3.

**Cas 2 :** décomposons cette clause en trois clauses  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  de taille 1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2) \\ c_3 &= (l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT  $\leftrightarrow$  2-SAT, il faut ajouter deux variables  $v_1$  et  $v_2$  aux trois clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v_1 \vee \neg v_2) \\ c_2 &= (l_2 \vee \neg v_1 \vee v_2) \\ c_3 &= (l_3 \vee v_1 \vee v_2) \end{aligned}$$

Nous avons donc également des clauses de taille 3. La réduction définie ci-avant ne permet donc pas la réduction de 3-SAT vers 2-SAT.

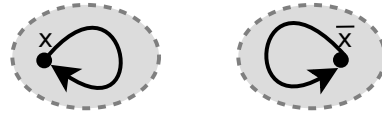
### 1.2.3 2-SAT, un problème polynomial

(a) Systèmes de deux clauses à deux littéraux :

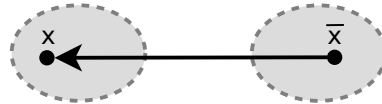
**Insatisfiable** :  $(x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x)$



**Valide** :  $(x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee x)$



**Contingent** :  $(x \vee x) \wedge (x \vee x)$



Insatisfaisabilité du premier ensemble de clauses est clairement visible sur le graphe car les sommets  $x$  et  $\neg x$  sont dans la même composante fortement connexe.

Le deux autres ensembles sont satisfiables, les deux sommets ne sont pas dans la même composante fortement connexe.

(b) L'algorithme suivant permet la génération du graphe correspondant à l'ensemble de clauses passé en paramètres, que nous appellerons graphe de satisfaction :

---

**Algorithme 1:** GrapheSatisfaction( $\mathcal{C}, \mathcal{V}$ )

---

**Données :**

$\mathcal{C}$  // Ensemble de clauses

$\mathcal{V}$  // Ensemble des variables

1 **début**

2   Graphe. $\mathcal{S} = \emptyset$ ; // Ensemble des sommets du graphe

3   Graphe. $\mathcal{A} = \emptyset$ ; // Ensemble des arcs du graphe

4   // Initialisation des sommets

5   **pour tous les**  $v \in \mathcal{V}$  **faire**

6     ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $v$ );

7     ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $\neg v$ );

8   // Parcours des clauses

9   **pour tous les**  $c \in \mathcal{C}$  **faire**

10     ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.x, c.y)$ );

11     ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.y, c.x)$ );

12   **retourner** Graphe;

---

Cet algorithme effectue un parcours de  $\mathcal{V}$  et un parcours de  $\mathcal{C}$ , sa complexité est donc  $O(|\mathcal{C}| + |\mathcal{V}|)$ .

- (d) Les composantes fortement connexes du graphe de satisfaction généré, ainsi que leur ordre topologique, peuvent être calculées par l'algorithme de Tarjan.

---

**Algorithme 2:** Tarjan\_Main( $G$ )

---

**Données :**  $G$  // Le graphe

```

1 début
2   date  $\leftarrow 0$ ;
3   pour tous les  $s \in G.S$  faire
4     DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow 0$ ;
5     CFC[ $s$ ]  $\leftarrow 0$ ;
6   Pile  $\leftarrow \emptyset$ ;
7   numCFC  $\leftarrow 0$ ;
8   pour tous les  $s \in G.S$  faire
9     si DEBUT[ $s$ ] = 0 alors
10      Tarjan_Rec( $s$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC);
11 retourner Comp ;
```

---



---

**Algorithme 3:** Tarjan\_Rec( $s$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC)

---

**Données :**  
 $s$  // Le sommet  
date // Date de visite du sommet courant  
DEBUT // Tableau de dates de visites pour chaque sommet  
Pile // Pile de sommets  
numCFC // Numéro de la CFC  
CFC // Liste des CFC

```

1 début
2   date  $\leftarrow$  date+1;
3   DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow$  date;
4   min  $\leftarrow$  DEBUT[ $s$ ];
5   Empiler(Pile,  $s$ );
6   pour tous les  $v \in Adj[s]$  faire
7     si DEBUT[ $v$ ] = 0 alors
8       min  $\leftarrow$ 
9         MIN(min, Tarjan_Rec( $v$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC));
10      sinon si CFC[ $v$ ] = 0 alors
11        min  $\leftarrow$  MIN(min, DEBUT[ $v$ ]);
12 si min = DEBUT[ $s$ ] alors
13   Ncfc  $\leftarrow$  numCFC + 1;
14   répéter
15      $k \leftarrow$  Depiler(Pile);
16     CFC[ $k$ ]  $\leftarrow$  numCFC;
17   jusqu'à  $k \neq s$ ;
18 retourner Comp ;
```

---

L'algorithme `Tarjan.Main` initialise la date de visite de chaque sommet à zéro. Nous constatons que les deux algorithmes exécutent `Tarjan.Rec` uniquement sur des sommets dont la date de première visite est nulle. Or chaque appel à `Tarjan.Rec` affecte une date de visite supérieure à zéro au sommet courant. `Tarjan.Rec` est donc appelé exactement une fois par sommet.

De même, un sommet n'est empilé qu'à l'exécution de `Tarjan.Rec`, donc chaque sommet ne sera empilé (et donc dépilé) qu'une seule fois. La boucle de l'algorithme `Tarjan.Rec` (ligne 13) a une complexité globale en  $O(|V|)$ .

En revanche, la boucle ligne 6 est effectuée une fois pour chaque voisin du sommet courant, donc  $|V|$  fois au pire pour chaque appel. `Tarjan.Rec` n'étant appelée que  $|V|$  fois en totale nous arrivons donc à une complexité de  $O(|V|^2)$ .

Dans le pire des cas le nombre de variables d'une instance de 2-SAT est égale à deux fois le nombre de clauses (chaque clause comportant dans ce cas deux variables uniques). Or notre conversion génère deux sommets par variable. La complexité de l'algorithme en fonction du nombre de clauses est donc de  $O(|C|^2)$ .

- (e) – Nous appellerons *Absurd-Graph* le problème de décision consistant de savoir si une variable partage avec la négation une composante fortement connexe (ou *CFC*) du graphe de satisfaction.
  - Tout arc ajouté par *GrapheSatisfaction* correspond à une contrainte de la forme  $((x \vee y) \wedge \neg x) \Rightarrow y$ , donc une implication. Étant donnée les *CFC*, calculés par l'algorithme de *Tarjan*, nous pouvons vérifier linéairement en le nombre de sommets si le graphe de satisfaction est « absurde », ce qui correspondrait effectivement à  $(\neg(x) \Leftrightarrow x)$ .
  - Dans le cas contraire il faut prendre l'inverse de l'ordre topologique calculée par *Tarjan* et affecter les variables de chaque composante comme précise l'article de Philippe Gambette. Ceci nous garantit de ne pas avoir d'interprétations  $(\perp \Rightarrow \top)$ , seuls à pouvoir casser l'enchaînement des implications.
  - Nous finissons alors soit avec une affectation modèle, soit avec l'affirmation de l'insatisfiabilité de l'instance 2-SAT. Un algorithme pour résoudre *Absurd-Graph* permet donc de résoudre le problème 2-SAT.

<sup>1</sup>Image provenant de Wikipedia, ce fichier est disponible selon les termes de la licence Creative Commons.

vant :

---

**Algorithme 4:** CalculXY( $z$ )

---

**Données :**  $z$  // Rang du couple  $(x, y)$

```

1 début
2    $s \leftarrow 0$ ;
3    $t \leftarrow 0$ ;
4   tant que  $s \leq z$  faire
5      $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
6      $t \leftarrow t + 1$ ;
7    $t \leftarrow t - 2$ ;
8    $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
9    $y \leftarrow z - s$ ;
10   $x \leftarrow t - y$ ;
11  retourner Couple( $x, y$ );

```

---

### 1.3.3 Énumération des triplets d'entiers

**Codage des triplets** : il peut avoir lieu de manière récursive :

$$c_3(x, y, z) = c_2(x, c_2(y, z))$$

**Généralisation au codage des k-uplets** :

$$c_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_2(x_1, c_{k-1}(x_2, \dots, x_k))$$

Avec : 
$$c_2(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

### 1.3.4 Énumération de l'ensemble $[0; 1]$

Prenons une suite  $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  qui énumère les réels de l'intervalle  $[0; 1]$ , puis créons un réel  $x$  compris dans cet intervalle, tel que si la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $r_n$  est égale à 1, la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $x$  est égale à 2. Dans la cas contraire, la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $x$  est égale à 1.

Nous obtenons sur cet exemple :

$r_1$	=	0	,	<b>4</b>	2	9	6	4	6	1	...
$r_2$	=	0	,	2	<b>7</b>	3	2	9	4	0	...
$r_3$	=	0	,	6	4	<b>1</b>	1	5	1	2	...
$r_4$	=	0	,	3	0	5	<b>9</b>	0	4	3	...
$r_5$	=	0	,	9	1	3	3	<b>1</b>	8	2	...
$r_6$	=	0	,	0	2	0	8	3	<b>2</b>	7	...
$r_7$	=	0	,	2	5	7	3	6	4	<b>0</b>	...
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
				$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$x$	=	0	,	1	1	2	1	2	1	1	...

Le réel  $x$  ne peut pas être énuméré par la suite  $r$  car il diffère de sa première décimale dans  $r_1$ , de sa deuxième décimale dans  $r_2$ , ... de sa  $n^{\text{ième}}$  décimale dans  $r_n$ . Pourtant le réel  $x$  est clairement dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

L'ensemble des éléments de l'intervalle  $[0; 1]$  n'est donc pas dénombrable, donc pas énumérable. Nous ne pouvons donc pas trouver de fonction de codage pour cet ensemble.

Nous pouvons généraliser à l'ensemble  $\mathbb{R}$  :  $[0; 1]$  étant inclus dans  $\mathbb{R}$ , et  $[0; 1]$  n'étant pas dénombrable, l'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.





## Chapitre 2

# Partie pratique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Spécifications fonctionnelles . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1.1	Résolution du problème de flot maximum . . . . .	26
2.1.2	Génération aléatoire d'un réseau de transport . . . . .	26
<b>2.2</b>	<b>Spécifications techniques . . . . .</b>	<b>26</b>
2.2.1	Langage de programmation et organisation . . . . .	26
2.2.2	Représentation du problème de flot maximum . . . . .	27
2.2.3	Modélisation . . . . .	27
2.2.4	Types et structures . . . . .	29
<b>2.3</b>	<b>Génération aléatoire de réseaux de transport . . .</b>	<b>32</b>
2.3.1	Stratégies de génération des arcs . . . . .	32
2.3.2	Méthode implémentée . . . . .	34
<b>2.4</b>	<b>Procédures principales . . . . .</b>	<b>35</b>
2.4.1	Algorithme d'Edmonds-Karp . . . . .	35
2.4.2	Algorithme de Dinic . . . . .	36
<b>2.5</b>	<b>Tests &amp; résultats . . . . .</b>	<b>37</b>
2.5.1	Méthode de test . . . . .	37
2.5.2	Analyse des résultats . . . . .	37

---

*Le but de ce TP est d'implémenter deux algorithmes de résolution du problème de flot maximum : l'algorithme d'Edmonds-Karp et l'algorithme de Dinic. Nous commencerons par spécifier les fonctionnalités que devra implémenter notre programme, puis nous détaillerons la manière dont ces fonctionnalités ont été développées. Une troisième partie sera consacrée aux tests effectués sur les deux algorithmes ainsi qu'à l'analyse des résultats.*

## 2.1 Spécifications fonctionnelles

### 2.1.1 Résolution du problème de flot maximum

Le programme doit être capable de :

- générer et d’actualiser les graphes d’écarts successifs,
- calculer la valeur du flot obtenu à partir du graphe d’écart final,
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l’algorithme d’**Edmonds-Karp**,
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l’algorithme de **Dinic**,
- retourner la solution de manière exploitable pour l’analyse.

Il faudra veiller à conserver la complexité des deux algorithmes, notamment en prenant garde aux structures de données et bibliothèques utilisées.

### 2.1.2 Génération aléatoire d’un réseau de transport

La génération aléatoire de graphes de type réseau de transport permettra de tester les deux algorithmes. Il faudra veiller à ce que le graphe respecte les conditions d’un réseau de transport notamment la possession d’une source et d’un puits, la pondération des arcs (capacités), et assurer la connexité du graphe. La génération de ce réseau de transport devra être paramétrable selon la taille (nombre de sommets) et la densité (nombre d’arcs).

La densité du graphe correspond à son taux d’arêtes par rapport au nombre d’arêtes du graphe complet non orienté ayant le même nombre de sommets. Soit la formule suivante :

$$nb\_arêtes = \frac{n * (n - 1)}{2} * \text{taux}$$

## 2.2 Spécifications techniques

### 2.2.1 Langage de programmation et organisation

#### Programmation C++

En plus de sa notoriété, nous avons choisi de développer l’application en C++ car il s’agit d’un bon compromis entre langage orienté objet et langage de bas niveau. Nous pourrions ainsi abstraire la gestion des graphes (notamment des structures de données) dans nos algorithmes, tout en gardant la possibilité d’optimiser le code grâce à la flexibilité du langage C++.

#### Utilisation d’un gestionnaire de version

Afin de faciliter le travail en groupe, nous avons choisi de déposer notre projet en ligne sur le gestionnaire de versions *GitHub*.

Ce type d’outil permet :

- la sauvegarde d’un historique des différentes versions,
- l’annulation de certaines modifications,
- de permettre le partage des modifications,
- la fusion de modifications effectuées sur un même fichier par des membres différents,
- d’assurer un stockage en ligne sûr du projet.

## 2.2.2 Représentation du problème de flot maximum

Le problème du flot maximum n’est défini que pour un certain type de graphes appelés *réseaux de transport*.

### Réseau de transport

Un réseau de transport peut être représenté par un graphe orienté pondéré pour lequel on définit un sommet source et un sommet puits. Le sommet source a la particularité de ne pas avoir de prédécesseur et le puits celui de ne pas avoir de successeur. La valuation d’un arcs représente sa capacité maximale.

### Graphe d’écart

Un graphe d’écart peut être représenté simplement par un graphe orienté pondéré.

### Graphe de couches

Un graphe de couches peut être représenté par un graphe orienté pondéré auquel on ajoute un tableau de listes de sommets indexé par le numéro de couche. Chaque liste représente donc une couche du graphe, elle contient donc l’ensemble des sommets se trouvant à une distance  $d$  de la source où  $d$  est le numéro de la couche.

## 2.2.3 Modélisation

### Diagramme de classes

Afin de s’abstraire de la structure de donnée, nous avons choisi de créer une classe abstraite **AbstractGraph** dont deux classes fille héritent. Un graphe peut donc être de type **AdjacencyListGraph** ou **MatrixGraph**. Cela permet une grande généricité des algorithmes développés, ce qui permet d’utiliser une structure de données de manière totalement détachée des algorithmes.

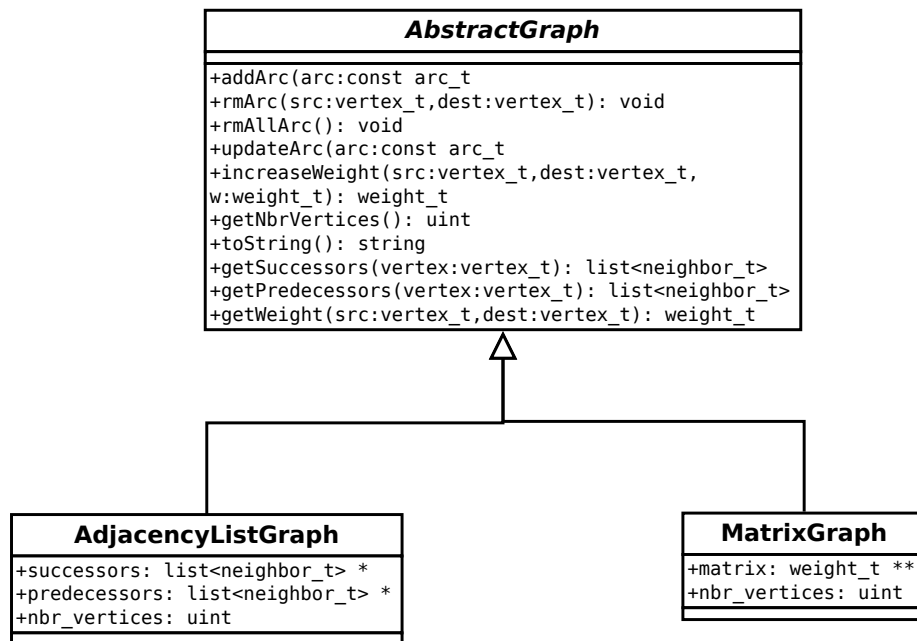


FIG. 2.1 – Diagramme de classes.

Les graphes peuvent être stockés à l'aide de différents types de structures de données. Nous avons choisi d'en implémenter deux : par listes d'adjacences et par matrice d'adjacences.

**Listes d'adjacences** : chaque sommet possède la liste de ses voisins. Ces listes ont l'avantage d'allouer de la mémoire uniquement lorsqu'une information doit être stockée.

**Matrice d'adjacences** : la mémoire allouée pour cette structure de données ne dépend que du nombre de sommets ( $n^2$ ). Cette structure a l'avantage d'offrir un accès direct à un arc pour deux sommets donnés.

Dans un but d'optimisation mémoire, on utilise en général des listes d'adjacences lorsque l'on travaille sur des graphes peu denses. En effet, la taille allouée par cette structure de données étant directement dépendante du nombre d'arcs, elle est donc réduite par rapport aux matrices d'adjacences. Sur des graphes très denses, on utilisera en revanche des matrices d'adjacences, permettant un accès aux données plus rapide.

Les ressources matérielles disponibles peuvent également orienter ce choix.

### Application aux réseaux de transport

Les deux classes précédentes n'étant pas spécialisées dans la modélisation de réseaux de transport, nous adopterons les conventions suivantes :

- le sommet zéro (premier sommet) représente la source,
- le sommet  $n$  (dernier sommet) représente le puits,
- la pondération affectée à chaque arc représente sa capacité.

## 2.2.4 Types et structures

Déclaration des types `weight_t`, `vertex_t` et `path_t`, et des structures `edge`, `neighbor_t`

```

1  typedef int weight_t;
2  typedef uint vertex_t;
3
4  typedef struct
5  {
6      vertex_t u;
7      vertex_t v;
8  } edge;
9
10 typedef struct
11 {
12     vertex_t vertex_src;
13     vertex_t vertex_dest;
14     weight_t weight;
15 } arc_t;
16
17 typedef struct
18 {
19     vertex_t vertex;
20     weight_t weight;
21 } neighbor_t;
22
23 typedef list<vertex_t> path_t;
```

### Classe AbstractGraph

Cette classe permet une abstraction des différentes représentations d'un graphe (structures de données utilisées). Elle déclare les méthodes qui doivent être implémentées dans les classes filles.

Header de la classe `AbstractGraph`

```

1  class AbstractGraph
2  {
3  public:
4
5      AbstractGraph();
6      virtual
7      ~AbstractGraph() = 0;
8
9      virtual bool
10     addArc(const arc_t &arc) = 0;
11
12     virtual bool
13     addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;
14
15     virtual void
16     rmArc(const arc_t &arc) = 0;
17
18     virtual void
19     rmArc(vertex_t src, vertex_t dest) = 0;
20
21     virtual void
22     rmAllArc() = 0;
23
24     virtual void
25     updateArc(const arc_t &arc) = 0;
26
27     virtual weight_t
28     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;
29
30     virtual uint
31     getNbrVertices() const = 0;
```

```

32
33     virtual string
34     toString() const;
35
36     virtual list<neighbor_t>
37     getSuccessors(vertex_t vertex) const = 0;
38
39     virtual list<neighbor_t>
40     getPredecessors(vertex_t vertex) const = 0;
41
42     virtual weight_t
43     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const = 0;
44
45 };

```

### Classe AdjacencyListGraph

Cette classe représente un graphe orienté pondéré sous la forme de deux listes d'adjacences : une représente les successeurs d'un sommet, l'autre les prédécesseurs.

Ce doublon d'information permet d'accélérer l'accès aux voisins d'un sommet, notamment à ces prédécesseurs. En effet, cette méthode nous permet d'accéder à une liste des prédécesseurs directement (complexité de  $O(1)$ ) alors que l'accès via les listes des successeurs implique le parcours de toutes ces listes (complexité de  $O(nm)$ ).

Ces doubles listes d'adjacences nous assurent un gain de performances en terme de rapidité, qui se fait au détriment de la quantité de mémoire utilisée, qui se trouve doublée.

#### Header de la classe AdjacencyListGraph

```

1  class AdjacencyListGraph : public AbstractGraph
2  {
3
4  public:
5      //*****
6      // CONSTRUCTOR
7      //*****
8
9      AdjacencyListGraph(uint nbr_vertices);
10
11      AdjacencyListGraph(const AbstractGraph& graph);
12      AdjacencyListGraph(const AdjacencyListGraph& graph);
13
14      AdjacencyListGraph &
15      operator=(const AbstractGraph& graph);
16      AdjacencyListGraph &
17      operator=(const AdjacencyListGraph& graph);
18
19      virtual
20      ~AdjacencyListGraph();
21
22      virtual bool
23      addArc(const arc_t &arc);
24
25      virtual bool
26      addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
27
28      virtual void
29      rmArc(const arc_t &arc);
30
31      virtual void
32      rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);
33

```

```

34     virtual void
35     rmAllArc();
36
37     virtual void
38     updateArc(const arc_t &arc);
39
40     virtual weight_t
41     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
42
43     virtual uint
44     getNbrVertices() const;
45
46     virtual list<neighbor_t>
47     getSuccessors(vertex_t vertex) const;
48
49     virtual list<neighbor_t>
50     getPredecessors(vertex_t vertex) const;
51
52     virtual weight_t
53     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;
54
55 private:
56     list<neighbor_t> *successors, *predecessors;
57     uint nbr_vertices;
58
59 protected:
60     void
61     _clear();
62
63     void
64     _construct(const AbstractGraph& graph);
65
66 };

```

## Classe MatrixGraph

Cette classe représente un graphe orienté pondéré sous la forme d'une matrice d'adjacence. L'absence d'un arc est représenté par la valeur  $-1$ . Toute valeur positive représente la pondération de l'arc.

### Header de la classe MatrixGraph

```

1  class MatrixGraph : public AbstractGraph
2  {
3
4  public:
5      // *****
6      // CONSTRUCTOR
7      // *****
8
9      MatrixGraph(uint nbr_vertices);
10
11     MatrixGraph(const AbstractGraph& graph);
12
13     MatrixGraph(const MatrixGraph& graph);
14
15     MatrixGraph &
16     operator=(const AbstractGraph& graph);
17
18     MatrixGraph &
19     operator=(const MatrixGraph& graph);
20
21     virtual
22     ~MatrixGraph();
23
24     virtual bool
25     addArc(const arc_t &arc);
26
27     virtual bool

```

```

28     addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
29
30     virtual void
31     rmArc(const arc_t &arc);
32
33     virtual void
34     rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);
35
36     virtual void
37     rmAllArc();
38
39     virtual void
40     updateArc(const arc_t &arc);
41
42     virtual weight_t
43     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
44
45     virtual uint
46     getNbrVertices() const;
47
48     virtual list<neighbor_t>
49     getSuccessors(vertex_t vertex) const;
50
51     virtual list<neighbor_t>
52     getPredecessors(vertex_t vertex) const;
53
54     virtual weight_t
55     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;
56
57 private:
58     weight_t **matrix;
59     uint nbr_vertices;
60
61 protected:
62     void
63     _clear();
64
65     void
66     _construct(int nbr_vertices);
67
68     void
69     _construct(const AbstractGraph& graph);
70
71 };

```

## 2.3 Génération aléatoire de réseaux de transport

### 2.3.1 Stratégies de génération des arcs

La première stratégie utilisée par notre application était naïve. Nous commençons par tracer un chemin de la source vers le puits pour s'assurer de la



connexité du graphe. Puis on ajoutait aléatoirement des arcs.

---

**Algorithme 5:** flowNetworkGenerator1( $G, \text{rate}, \text{min\_weight}, \text{max\_weight}$ )
 

---

**Données :**  
 $G$  // Graphe d'entrée  
 $\text{rate}$  // Densité  
 $\text{min\_weight}$  // Capacité minimum  
 $\text{max\_weight}$  // Capacité maximum

```

1 début
2    $\text{nb\_vertices} \leftarrow G.\text{getNbrVertices}();$ 
3    $\text{nb\_arcs} \leftarrow \text{nbr\_arcs\_max}(\text{nb\_vertices}) * \text{rate};$ 
4   //génération d'un chemin
5   pour  $u$  allant de 1 à  $(\text{nb\_vertices} - 1)$  faire
6      $\text{weight} \leftarrow \text{rand}(\text{min\_weight}, \text{max\_weight});$ 
7      $g.\text{add}(u - 1, u);$ 
8      $--\text{nb\_arcs};$ 
9   //génération des arcs
10  tant que  $\text{nb\_arcs} > 0$  faire
11     $u \leftarrow \text{rand \% } (\text{nb\_vertices} - 1);$ 
12     $v \leftarrow (\text{rand \% } (\text{nb\_vertices} - 1)) + 1;$ 
13    si  $!G.\text{contains}(u, v)$  alors
14       $\text{weight} \leftarrow \text{rand}(\text{min\_weight}, \text{max\_weight});$ 
15       $G.\text{add}(u, v, \text{weight});$ 
16       $--\text{nb\_arcs};$ 
17  retourner  $G;$ 

```

---

Cet algorithme, bien que « plutôt » fonctionnel pour des graphes peu denses ne fourni aucune garantie d'arrêt. Nous avons donc réfléchi à une deuxième approche, qui consistait à générer tout les arcs possibles dans un tableau de

type `vector` puis de piocher parmi ces arcs.

---

**Algorithme 6:** `flowNetworkGenerator(G,rate,min_weight,max_weight)`


---

```

Données :
G // Graphe d'entrée
rate // Densité
min_weight // Capacité minimum
max_weight // Capacité maximum
1 début
2   nb_vertices ← G.getNbrVertices();
3   nb_arcs ← nbr_arcs_max(nbr_vertices)*rate;
4   vector<edge>vector;
5   edge e;
6   //génération de tous les arcs possibles
7   pour u allant de 1 à (nbr_vertices - 1 faire
8     //Pour tout u, on crée l'arc u, u+1 afin d'assurer l'existence
9     //d'un chemin entre la source et le puits
10    G.addArc(u,u + 1,rand(min_weight, max_weight));
11    --nb_arcs;
12    pour v allant de u + 2 à nb_vertices-1 faire
13      e.u ← u;
14      e.v ← v;
15      vector.push_back(e);
16  //ajout des arcs
17  tant que nb_arcs > 0 faire
18    index ← rand() % vector.size();
19    tant que vector[index] = nil faire
20      index = ++index % vector.size();
21    e ← vector.get(index);
22    si e.u = 0 OU e.v = nb_vertices - 1 OU rand() % 2 = 1 alors
23      G.addArc(e.u,e.v,randMinMax(min_weight,max_weight));
24    sinon
25      G.addArc(e.v,e.u,randMinMax(min_weight,max_weight));
26    --nb_arcs;
27    vector[index] = nil;
28  retourner G;

```

---

Dans tous les cas, nous sommes certains de l'arrêt de cet algorithme. Il faut veiller à utiliser un type tableau en marquant à « `nil` » les arcs ajoutés. En effet, nous avons commencé par utiliser une liste chaînée mais la fonction `list.get(...)` a une complexité en  $O(n^2)$ .

### 2.3.2 Méthode implémentée

Cette fonctionnalité est assurée par la fonction `flowNetworkGenerator` qui construit aléatoirement un réseau de transport sur le graphe passé en paramètre.

Elle permet de spécifier le nombre de sommets, la densité du graphe et l'intervalle des capacités aléatoires.

Notons que cette méthode utilise la fonction `rand()` fournis par la librairie standard. Cette fonction « pseudo-aléatoire » nécessite l'initialisation d'un générateur via la fonction `srand(int)`. Il est donc possible de sauvegarder la « graine », paramètre passée à la fonction `srand(int)`, afin de pouvoir régénérer un graphe identique.

Entête de la méthode de génération aléatoire de réseaux de transport

```

1  /**
2   * A random flow network generator
3   * Attention si le graph passe en parametre contient des arcs ceux-ci seront
4   * supprimer.
5   * @param graph une reference vers un graph initialiser avec un nombre de sommets
6   * @param rate la proportion d'arcs a ajouter au graphe en pourcentage par rapport au graphe complet.
7   * @param min_weight valuation minimal des arcs
8   * @param max_weight valuation maximal des arcs
9   */
10 void
11 flowNetworkGenerator(AbstractGraph& graph, float rate, uint min_weight = 1,
12                      uint max_weight = 1);

```

## 2.4 Procédures principales

### 2.4.1 Algorithme d'Edmonds-Karp

La méthode `edmondsKarp` permet l'exécution de cet algorithme. Il prend en paramètre par référence un réseau de transport.

Entête de la méthode d'exécution d'Edmonds-Karp

```

1  /**
2   * algorithme d'Edmonds-Karp
3   * @param flow_network le reseau de transport
4   * @param src le sommet source
5   * @param dest le puit
6   * @return le graphe d'ecart final
7   */
8  AdjacencyListGraph
9  edmondsKarp(const AbstractGraph& flow_network, vertex_t src, vertex_t dest);

```

La recherche du plus court chemin en nombre d'arc est implémentée par la fonction `leastArcsPath` qui effectue un parcours en largeur. Sa complexité est donc en  $O(n + m)$  avec structure par listes d'adjacences, et en  $O(n^2)$  par avec une structure par matrice d'adjacences.

La mise à jour du graphe d'écart est assurée par la méthode `updateResidualNetwork` avec une complexité en  $O(n)$ .

Entête des principales méthodes utilisées par la procédure `edmondsKarp`

```

1  /**
2   * Cette fonction retourne le plus court chemin en nombre d'arcs depuis
3   * le sommet start jusqu'au sommet end
4   * @param g un graphe
5   * @param start le sommet de depart
6   * @param end le sommet d'arriver
7   * @return le plus court chemin en nombre d'arcs de start a end
8   */

```

```

9  path_t
10 leastArcsPath(AbstractGraph &g, vertex_t start, vertex_t end);
11
12 /**
13  * Cette fonction retourne la plus petite valuation presente sur un chemin
14  * donne dans un graphe
15  * @param g un graphe
16  * @param path une chemin dans g
17  * @return la plus petite valuation presente sur le chemin path dans g
18  */
19 weight_t
20 lightestArc(AbstractGraph& g, path_t path);
21
22 /**
23  * Mise a jour du graphe d'ecart depuis un chemin et la valeur du flot a ajouter
24  * sur ce chemin
25  * @param le graphe de couche
26  * @param p le chemin
27  * @param k la valeur du flot a ajouter
28  */
29 void
30 updateResidualNetwork(AbstractGraph& residualNetwork, path_t p, uint k);

```

## 2.4.2 Algorithme de Dinic

Entête de la méthode d'exécution de Dinic

```

1  /**
2  * algorithme de Dinic
3  * @param flow_network le reseau de transport
4  * @param src le sommet source
5  * @param dest le puits
6  * @return le graphe d'ecart final
7  */
8  AdjacencyListGrap
9  dinic(const AbstractGraph& graph, vertex_t src, vertex_t dest);

```

Entête des principales méthodes utilisées par la procédure `dinic`

```

1  /**
2  * Mise a jour du graphe d'ecart depuis un flot
3  * @param residual_network le graphe de couche
4  * @param p le flot
5  */
6  void
7  updateResidualNetwork(AbstractGraph& residual_network, AbstractGraph& flow);
8
9  /**
10 * Calcul du flot bloquant
11 * @param level_graph le graphe de couche
12 * @param src la source
13 * @param dest le puit
14 * @return un flot bloquant
15 */
16 AdjacencyListGrap
17 blockingFlow(LevelGraph& level_graph, vertex_t src, vertex_t dest);

```

## 2.5 Tests & résultats

### 2.5.1 Méthode de test

#### Série de tests

Pour tester les performances des deux algorithmes implémentés, nous avons généré une série de problèmes à résoudre sur des réseaux de transports ayant les paramètres suivants :

- nombre de sommets variant de 100 à 1000 par palier de 100,
- densité du graphe à 20%, 50% et 80%,
- capacité des arcs variant de 1 à 20.

Pour chaque test (un nombre de sommets et une densité donnés), nous avons généré 100 graphes afin de travailler sur des moyennes lors de l'analyse.

#### GNU gprof

Nous avons évalué les algorithmes en fonction de leurs temps d'exécution. Le temps réel d'exécution (real time) ayant peu de sens pour effectuer des statistiques correctes, nous avons choisi de mesurer les temps CPU (CPU time). Le temps CPU est le temps alloué au processus par le système d'exploitation sur le processeur. Contrairement au temps réel, le temps CPU est indépendant des autres processus en cours d'activité et aux interruptions systèmes : il s'agit du temps effectivement passé par le CPU pour traiter le processus.

L'analyse des temps CPU a été faite à l'aide de l'outil GNU gprof. Son utilisation requiert l'ajout de l'argument `-pg` lors de la compilation. À l'exécution du programme, un fichier `gmon.out` est généré. La commande `gprof` permet ensuite de créer un fichier texte de statistiques. Pour chaque méthode, un grand nombre de données sont disponibles, nous nous sommes intéressés principalement aux suivantes :

- pourcentage du temps CPU total,
- temps CPU total,
- temps CPU par appel, de manière cumulative (en prenant en compte les appels à d'autres fonctions) ou non.

### 2.5.2 Analyse des résultats

À partir des données obtenues, nous avons essayé de créer une série de graphiques ayant comme ordonnée le temps CPU, et en abscisse :

- (1) le nombre de sommets (en conservant une densité identique),
- (2) la densité (en conservant un nombre d'arcs identique),
- (3) le nombre d'arcs (en faisant donc varier le nombre d'arcs et la densité).

Seule la représentation (1) permet de mettre en évidence un phénomène intéressant. Ci-après sont donc présentés trois graphiques, pour des densités de 20%, 50% et 80%.

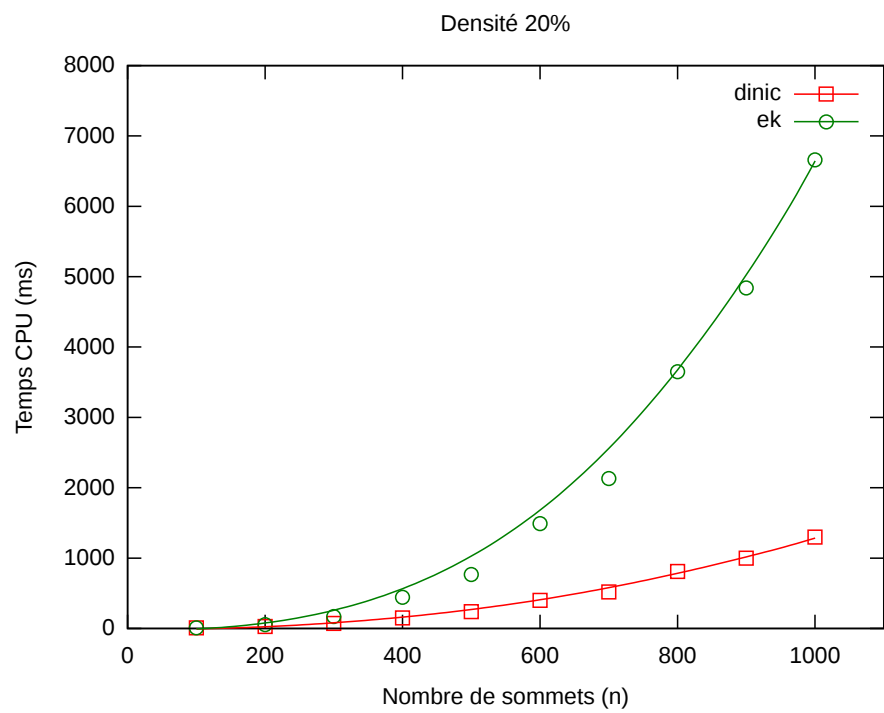


FIG. 2.2 – Temps CPU en fonction du nombre de sommets, densité de 20%

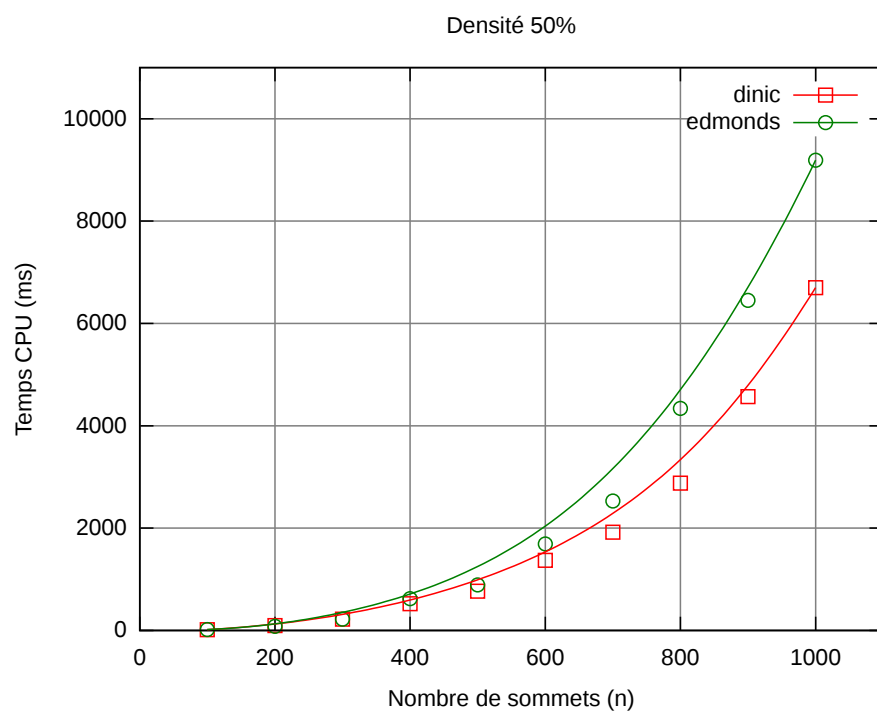


FIG. 2.3 – Temps CPU en fonction du nombre de sommets, densité de 50%

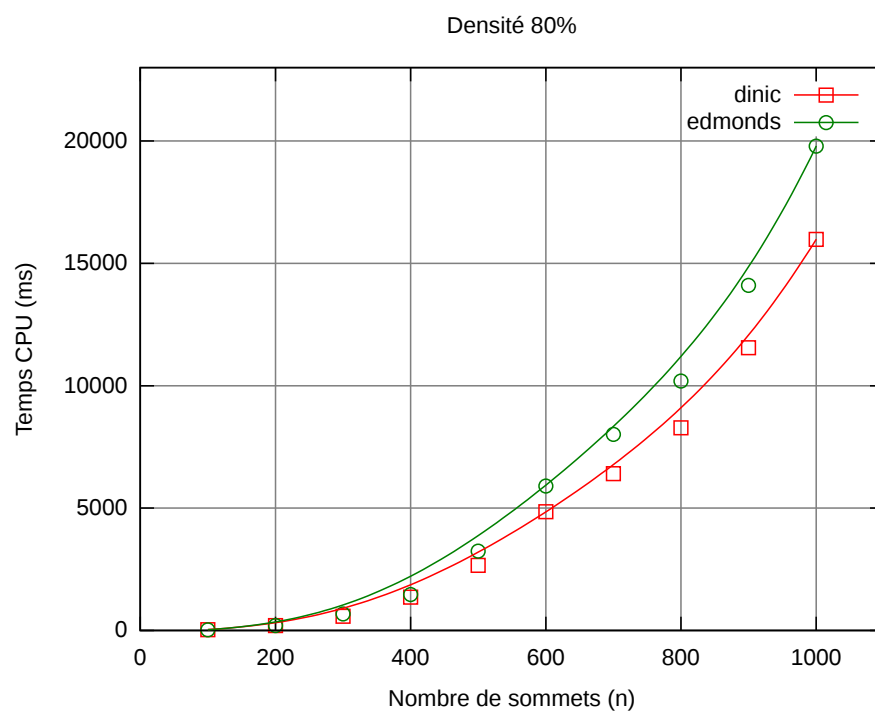


FIG. 2.4 – Temps CPU en fonction du nombre de sommets, densité de 80%



L'évolution du temps CPU de l'algorithme d'Edmonds-Karp change peu en fonction de la densité du graphe. Ces premiers graphiques montre également que l'algorithme de Dinic reste plus performant en terme de temps CPU même si l'on constate que l'écart diminue lorsque la densité augmente.

Ce résultat est cohérent, étant donné les complexité des algorithmes :

- $O(nm^2)$  pour Dinic,
- $O(n^2m)$  pour Edmonds-Karp,

il est normal que la densité influe plus sur le premier que le second.

Nous nous sommes cependant intéressés aux résultats obtenus sur des plus petits graphes. Voici deux graphiques qui montrent nos résultats sur des graphes inférieurs à 200 sommets.

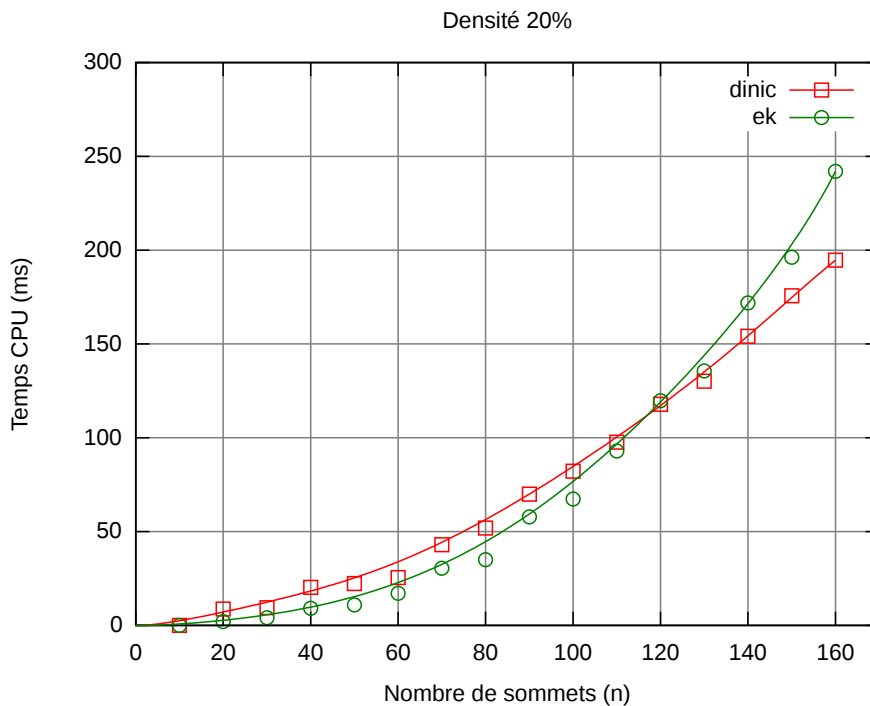


FIG. 2.5 – Temps CPU en fonction du nombre de sommets (valeur faible), densité de 20%

On remarque ici que l'algorithme d'Edmonds-Karp est plus rapide que Dinic sur des graphes de 160 sommets pour une densité de 20%, et 120 sommets pour une densité de 80%.

De manière générale, on constate que l'algorithme de Dinic est plus rapide qu'Edmonds-Karp, surtout sur des graphes peu denses. Edmonds-Karp demeure cependant plus rapide sur des graphes extrêmement petits (nombre de sommets inférieur à 150), d'autant plus si le graphe est peu dense.

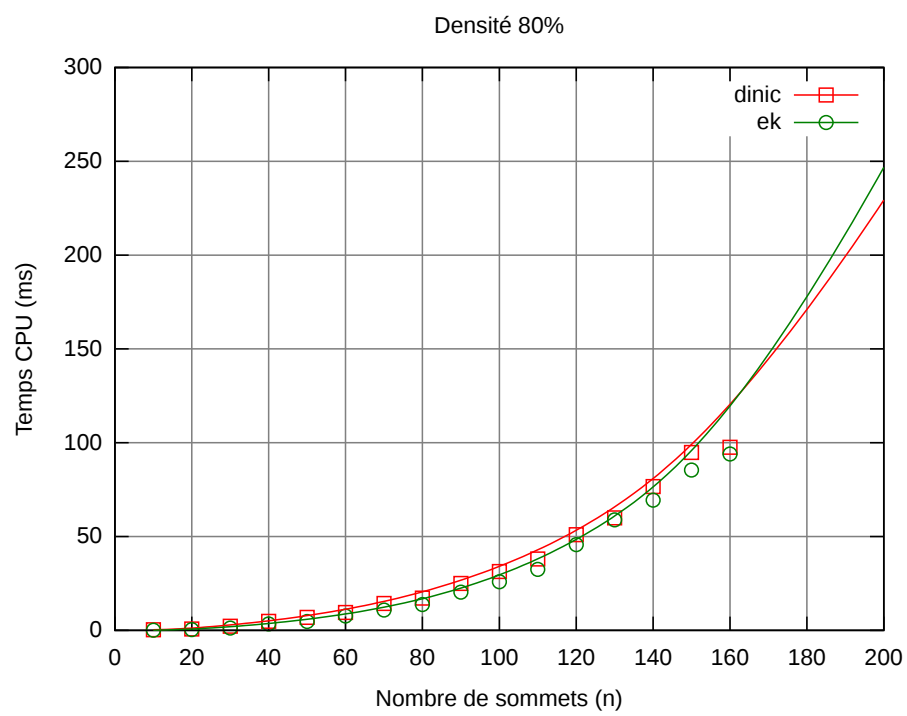


FIG. 2.6 – Temps CPU en fonction du nombre de sommets (valeur faible), densité de 80%