



Ministère de l'Education Nationale
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 5



TP FMIN105

Algorithmique / Complexité / Calculabilité

RAPPORT (DÉCEMBRE 2011)

Travail préparé par :

Thibaut MARMIN
Clément SIPIETER
William DYCE

<https://github.com/marminthibaut/acc-tp>

Table des matières

1	Partie théorique	5
1.1	Algorithmique	5
1.1.1	Fonction chromatique $P_G(k)$	5
1.1.2	Nombre chromatique $\chi(G)$	5
1.1.3	Décomposition de P_G	6
1.1.4	Polynôme chromatique ?	6
1.1.5	Application de la décomposition	7
1.1.6	Coefficients alternatifs	8
1.1.7	Polynôme chromatique de $K_{1,5}$	8
1.1.8	Coloration de graphes non-connexes	8
1.1.9	Coloration d'arbres	8
1.1.10	$k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$	9
1.1.11	Polynôme chromatique de $K_{2,5}$	9
1.1.12	Polynômes chromatiques de C_4 et C_5	10
1.1.13	Coloration de cycles	10
1.1.14	Coloration de graphes bipartis complets	10
1.2	Complexité	11
1.2.1	SAT \propto 3-SAT	11
1.2.2	3-SAT \propto 2-SAT ?	14
1.2.3	2-SAT, un problème polynomial	15
1.3	Calculabilité	18
1.3.1	Énumération des couples d'entiers	18
1.3.2	Codons et décodons	18
1.3.3	Énumération des triplets d'entiers	19
1.3.4	Énumération de l'ensemble $[0; 1]$	19

2	Partie pratique	21
2.1	Spécification fonctionnelles	21
2.1.1	Résolution du problème de flot maximum	21
2.1.2	Génération aléatoire d'un réseau de transport	21
2.2	Spécification technique	22
2.2.1	Programmation C++	22
2.2.2	Structures de données	22
2.2.3	Modélisation	22
2.2.4	Implémentation	23
2.3	Génération de réseaux de transport aléatoires	27
2.4	Procédures principales	28
2.4.1	Algorithme de Dinic	28
2.5	Tests & résultats	28
2.5.1	Méthode de test	28
2.5.2	Analyse des résultats	29

Chapitre 1

Partie théorique

1.1 Algorithmique

1.1.1 Fonction chromatique $P_G(k)$

Le nombre de manières de colorier un graphe est le produit des nombres de façons de colorier chaque arc.

- Si le graphe G est complet, on aura k couleurs possibles pour le premier sommet, $(k - 1)$ pour le deuxième, etc... (Le graphe G étant complet, la couleur du premier sommet est nécessairement exclu des autres sommets). Le $n^{\text{ième}}$ sommet pourra être colorié de $k - (n - 1)$ manières. D'où :

$$P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k - i)$$

- Si G est vide, la coloration d'un sommet ne contraint pas la coloration des autres sommets. On obtient alors :

$$P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$$

1.1.2 Nombre chromatique $\chi(G)$

On l'appelle "nombre chromatique" de G : $\chi(G)$ étant, par définition, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G , si $k < \chi(G)$ alors le graphe G ne peut pas être colorié par k couleurs. Si $k \geq \chi(G)$ alors il doit y avoir au moins une manière de colorier G , celui utilisant $\chi(G)$ couleurs.

On a donc :

$$P_G(k) \begin{cases} = 0 & \text{si } k < \chi(G) \\ \geq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.1.3 Décomposition de P_G

Montrons d'abord que la propriété est vraie pour tout graphe complet K_n . Pour commencer on remarque que, pour tout arrête e :

- $K_{n \setminus e}$ est exactement K_{n-1} , et donc :

$$P_{K_{n \setminus e}}(k) = P_{K_{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-2} (k - i)$$

- Soit $e = (a, b)$. On peut supposer (sans perte de généralité) que b est considéré en dernier lors de la coloration de K_n , donc qu'il lui reste $k - (n - 1)$ couleurs. Pour colorier K_{n-e} on aura un choix de plus pour lui, à savoir la couleur de a , donc $k - (n - 2)$ en totale. De ce fait :

$$P_{K_{n-e}}(k) = P_{K_{n-1}}(k)(k - (n - 2)) = \left(\prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2))$$

On a donc très clairement :

$$\begin{aligned} P_{K_{n-e}}(k) - P_{K_{n \setminus e}}(k) &= \left(\prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2)) - \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \\ &= \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) (k - (n - 1)) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (k - i) \\ &= P_{K_n}(k) \end{aligned}$$

Tout graphe de rang n pouvant se générer à partir de K_n (en enlevant des arrêtes) on cherchera à prouver que la suppression d'arrête conserve notre propriété. Autrement dit on aimerait montrer que pour tout graphe G et tout arrête a de celui-ci :

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \\ \Rightarrow P_{G-a}(k) &= P_{G-e-a}(k) - P_{G \setminus e-a}(k) \end{aligned}$$

On supposera évidemment que a et e sont distinctes.

TODO FINISH

1.1.4 Polynôme chromatique ?

Soit H un prédicat tel que :

$$H(m) = \begin{cases} \top & \text{si } \forall G, \text{ graphe de } m \text{ arrêtes ou moins, } P_G(k) \text{ est polynomiale.} \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous rappelons que $P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$, donc $H(0)$ est vraie.
- Supposons $\exists m \in \mathbb{N} \mid H(m)$ l'est également. Ajoutons l'arc a à G . G_{m+e} est un graphe à $(m+1)$ arrêtes :

$$P_{G_{m+z}} = P_{G_{m+e}-e} - P_{G_{m+e} \setminus e}$$

Clairement $P_{G_{m+1}-e}$ et $P_{G_{m+1} \setminus e}$ ont $(m+1) - 1 = m$ arrêtes. Or par hypothèse de récurrence $H(m)$ est vraie, $P_{G_{m+1}}$ est la différence entre deux polynômes, donc est polynomiale lui-même. On a donc $H(m+1)$.

- On vient de montrer $(H(0) \wedge (H(m) \Rightarrow H(m+1)))$. Par récurrence on a donc $H(m)$ vrai $\forall m \in \mathbb{N}$.

1.1.5 Application de la décomposition

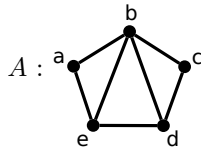
Utilisons la formule trouvée au point précédent, et admettons que pour P_n une chaîne de taille n on a :

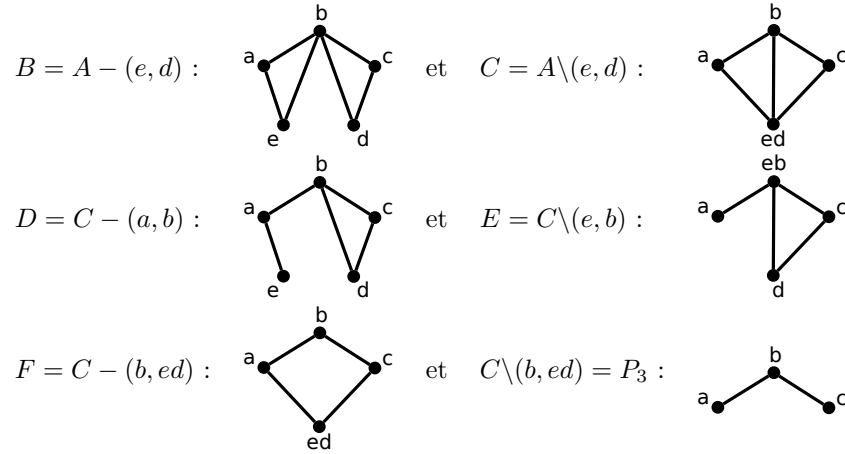
$$P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$$

Prenons A le graphe initial :

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= P_B(k) - P_C(k) \\
 &= (P_D(k) - P_E(k)) - (P_F(k) - P_{P_3}(k)) \\
 &= \left[(P_{P_5}(k) - P_{P_4}(k)) - (P_{P_4}(k) - P_{P_3}(k)) \right] - \left[(P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k)) - P_{P_3}(k) \right] \\
 &= P_{P_5}(k) + 2P_{P_3}(k) - P_{K_3}(k) + 3P_{P_4}(k) \\
 &= k(k-1)^4 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - 3(k-1)^3 \\
 &= k(k-1) \left[(k-1)^3 + (k-1) + (k-2) - 3(k-1)^2 \right] \\
 &= (k^2 - k) \left[(k-1)^2 ((k-1) - 3) + 3k - 4 \right] \\
 &= (k^2 - k) [k^3 - 6k^2 + 12k - 8] \\
 &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k
 \end{aligned}$$

Où :





1.1.6 Coefficients alternatifs

TODO coefficient de k^n est 1, alternating - and + etc

1.1.7 Polynôme chromatique de $K_{1,5}$

$K_{1,5}$ étant un arbre, on aura k choix de coloration pour la racine, peu importe le choix de celle-ci, et $k-1$ pour les autres, car chacun qu'on considère sera relié à exactement une autre déjà colorié. En totale ça nous fait donc :

$$\begin{aligned}
 P_{K_{1,5}}(k) &= k(k-1)^5 \\
 &= k((k-1)^2)^2(k-1) \\
 &= k(k^2 - (2k-1))^2(k-1) \\
 &= (k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k)(k-1) \\
 &= k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k
 \end{aligned}$$

1.1.8 Coloration de graphes non-connexes

La coloration de chaque composante connexe C_i n'influx pas sur celui des autres. Du coup le nombre de manières de colorier un graphe entier est le produit des polynômes chromatiques de ses composantes connexes :

$$G = \bigcup_{i=0}^n C_i \Rightarrow P_G(k) = \prod_{i=0}^n P_{C_i}(k)$$

1.1.9 Coloration d'arbres

Supposons qu'on ait un graphe G tel que $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$:

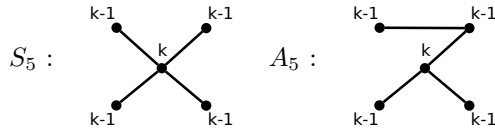
- Intuitivement ceci veut dire qu'on a k choix de couleurs pour le premier sommet colorié, puis $(k - 1)$ pour chacun des $(n - 1)$ autres. Du coup chaque sommet, lors de sa coloration, ne doit être en contact qu'avec un seul sommet déjà colorié. Ceci n'est possible que dans un graphe sans cycle.
-

$$1.1.10 \quad k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$$

Grace aux développements précédentes (questions 7 et 12) on reconnait :

$$\begin{aligned} & k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k \\ = & k(k - 1)^4 \\ = & P_{P_5}(k) \end{aligned}$$

Notre premier exemple sera donc P_5 le chemin de taille 5. Ensuite d'après la propriété de la question 6 nous ne cherchions que des graphes aillant 5 sommets et 4 arrêtes, et d'après celle de la question 9 ils doivent en plus être arbres. Nous proposons donc le graphe étoile $S_5 = K_{1,4}$ ainsi que l'arbre à 5 sommets dont la particularité est d'être sans particularité :



1.1.11 Polynôme chromatique de $K_{2,5}$

Nous avons déjà calculé le polynôme chromatique de $K_{1,5}$:

$$P_{K_{1,5}}(k) = k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k$$

Or $K_{2,5}$ se construit à partir de $K_{1,5}$ par l'ajout d'un sommet relié au 5 de la partition majoritaire. Ce nouveau sommet pourra être colorié de $(k - 5)$ manières, car seront interdits les couleurs de ses 5 voisins. On a donc :

$$\begin{aligned} P_{K_{2,5}} &= (P_{K_{1,5}}(k))(k - 5) \\ &= (k^6 - 5k^5 + 10k^4 - 10k^3 + 5k^2 - k)(k - 5) \\ &= k^7 - 10k^6 + 35k^5 - 60k^4 + 55k^3 - 26k^2 + 5k \end{aligned}$$

1.1.12 Polynômes chromatiques de C_4 et C_5

- Pour calculer P_{C_4} , commençons par constater que $C_3 = K_3$:

$$\begin{aligned}
 P_{C_4}(k) &= P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k) \\
 &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
 &= (k^2 - k)((k-1)^2 - (k-2)) \\
 &= (k^2 - k)(k^2 - 3k + 3) \\
 &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k
 \end{aligned}$$

- On peut alors utiliser P_{C_4} pour calculer P_{C_5} :

$$\begin{aligned}
 P_{C_5}(k) &= P_{P_5}(k) - P_{C_4}(k) \\
 &= k(k-1)^4 - k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \\
 &= k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 4k
 \end{aligned}$$

1.1.13 Coloration de cycles

cycles générales

1.1.14 Coloration de graphes bipartis complets

graphe bipartie générale

1.2 Complexité

1.2.1 SAT \propto 3-SAT

(a) **Énoncé de SAT :**

Données : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ *Ensemble de n variables*
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$ *Ensemble de m clauses*
 où $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee \dots \vee l_{ik})$ *Clauses de k littéraux*
 avec $l_{ij} = v$ ou $\neg v$ *avec $v \in U$*

Problème : existe-il au moins une affectation des variables telle que chaque clause de \mathcal{C} soit vrai.

Énoncé de 3-SAT :

3-SAT est identique au problème SAT avec $k = 3$.

Données : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$
 $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$
 où $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$
 avec $l_{ij} = v$ ou $\neg v$

- (b) La réduction du problème SAT peut être défini en montrant que chaque clause c de \mathcal{C} peut-être transformée en un ensemble de clauses \mathcal{C}' tel que pour toute affectation rendant vrai l'ensemble des clauses de \mathcal{C} , on peut trouver une affectation rendant vrai chaque clause de \mathcal{C}' . Chaque clause de \mathcal{C}' devant être de taille exactement 3. La réciproque doit également être montrée.

Définissons les réductions :

$k = 1$

Soit ci_1 une clause de taille 1, on a $ci_1 = (l)$. Ajoutons deux variables $v_1, v_2 \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en quatre clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ avec :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l \vee v_1 \vee v_2) \\ c_2 &= (l \vee v_1 \vee \neg v_2) \\ c_3 &= (l \vee \neg v_1 \vee v_2) \\ c_4 &= (l \vee \neg v_1 \vee \neg v_2) \end{aligned}$$

$k = 2$

Soit ci_2 une clause de taille 2, on a $ci_2 = (l_1 \vee l_2)$. Ajoutons une variable $v \notin \mathcal{V}$ et transformons la clause c en deux clauses. On obtient l'ensemble $\mathcal{C}_2 = \{c_1, c_2\}$ avec :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee l_2 \vee v) \\ c_2 &= (l_1 \vee l_2 \vee \neg v) \end{aligned}$$

$k = 3$

La clause ci_3 ne subit pas de transformation.

$$\mathcal{C}_3 = \{ci_3\}$$

$k > 3$

Soit la clause $ci_k = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$. On ajoute $(k - 3)$ nouvelles variables $(v_1, v_2 \dots v_{k-3})$.

$$\mathcal{C}_k = \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee v_1)}_{c_1} \bigwedge_{i=1}^{k-4} \left[\underbrace{(\neg v_i \vee l_{i+2} \vee v_{i+1})}_{c_{i+1}} \right] \wedge \underbrace{(\neg v_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)}_{c_{k-2}}$$

Montrons que SAT est vrai si et seulement si 3-SAT est vrai :

SAT \rightarrow 3-SAT

- Soit une interprétation I_1 qui satisfasse la clause ci_1 :

$$val(I_1, ci_1) = val(I_1, l) = vrai$$

Prenons une interprétation I'_1 avec $val(I_1, l) = val(I'_1, l)$, peu importe les affectations de v_1 et v_2 , l étant présent dans toutes les clauses de \mathcal{C}_1 :

$$val(I'_1, \mathcal{C}) = \top$$

- Soit une interprétation I_2 qui satisfasse la clause ci_2 :

$$\exists i, val(I_2, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation I'_2 avec :

$$val(I_2, l_1) = val(I'_2, l_1)$$

$$val(I_2, l_2) = val(I'_2, l_2)$$

Peu importe l'affectation de v dans I'_2 , on a $val(I'_2, \mathcal{C}_2) = \top$.

- Soit une interprétation I_k qui satisfasse la clause ci_k :

$$\exists i, val(I_k, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation I'_k telle que :

$$val(I_k, l_i) = val(I'_k, l_i)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid j \leq (i - 2), val(I'_k, v_j) = \top$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid (i - 1) \leq j \leq (k - 3), val(I'_k, v_j) = \perp$$

On obtient :

$$val(I'_k, \mathcal{C}_k) = \top$$

3-SAT \rightarrow SAT

- Prenons une interprétation I_1 telle que $val(I_1, \mathcal{C}_1) = \top$.
Sans perte de généralité, on suppose que :

$$val(I_1, v_1) = val(I_1, v_2) = \top$$

La clause c_4 de \mathcal{C}_1 ne peut être satisfaite que si $val(I_1, l) = \top$.

On a donc :

$$val(I_1, ci_1) = \top$$

- Prenons une interprétation I_2 telle que $val(I_2, \mathcal{C}_2) = \top$.
Sans perte de généralité on suppose que :

$$val(I_2, v) = \top$$

La clause c_2 de \mathcal{C}_2 ne peut être satisfaite que si $val(I_2, (l_1 \vee l_2)) = \top$.

On a donc :

$$val(I_2, ci_2) = \top$$

- Prenons une interprétation I_k telle que $val(I_k, \mathcal{C}_k) = \top$ et montrons qu'il existe forcément un i tel que $val(I_k, l_i) = \top$.
Supposons que l'interprétation I_k est modèle de \mathcal{C}_k avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq k, val(I_k, l_i) = \perp$$

$$\Rightarrow val(I_k, v_1) = \top \text{ (dans } c_1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq (k-4), val(I_k, v_{i+1}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, v_{k-3}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, c_{k-2}) &= \perp \\ \Rightarrow val(I_k, \mathcal{C}_k) &= \perp \end{aligned}$$

Pour que l'interprétation I_k satisfasse \mathcal{C}_k , il doit exister un $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $i \leq k$ et que $val(I_k, l_i) = \top$.

On a donc :

$$val(I_k, ci_k) = \top$$

- (c) Le point (b) définit la réduction de SAT vers 3-SAT. Afin de montrer la NP-Complétude de 3-SAT, montrons que la réduction s'effectue en un temps polynomial.

Soit :

k la taille de la clause initiale,

v_k le nombre de variables à ajouter pour obtenir des clauses de taille 3,

w_k le nombre de clauses de taille 3 obtenues à partir de la clause initiale.

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0 & w_3 = 1 \\ v_4 = 1 & w_4 = 2 \\ v_5 = 2 & w_5 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Pour tout $k > 3$:

$$v_k = v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} + 1$$

$$w_k = w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$$

$v_k = \theta(k)$, donc borné par la taille de F . La réduction s'effectue donc en un temps polynomial.

Il est possible de réduire le problème SAT à 3-SAT en un temps polynomial, SAT étant NP-complet, 3-SAT l'est aussi.

- (d) Soit \mathcal{C} un ensemble de clause à n_v variables avec n_1 clauses de taille 1, n_2 clauses de taille 2, n_3 clauses de taille 3, n_4 clauses de taille 4 et n_5 clauses de taille 5. Calculons le nombre de variables et le nombre de clauses obtenues après réduction (respectivement n'_v et n'_c).

Les points (b) et (c) permettent de déterminer pour une clause de taille k , le nombre de clause obtenues et le nombre de variables ajoutées après réduction. On peut donc en déduire la tableau suivant :

Taille de la clause dans \mathcal{C}	1	2	3	4	5
Nombre de clauses	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
Nombre de variables ajoutées par clause	2	1	0	1	2
Nombre de variables ajoutées au total	$2n_1$	n_2	0	n_4	$2n_5$
Nombre de clauses obtenues par clause	4	2	1	2	3
Nombre de clauses obtenues au total	$4n_1$	$2n_2$	n_3	$2n_4$	$3n_5$

On a donc :

$$\begin{aligned} n'_v &= n_v + 2n_1 + n_2 + n_4 + 2n_5 \\ n'_c &= 4n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 \end{aligned}$$

1.2.2 3-SAT \propto 2-SAT ?

Cette réduction repose sur un principe qui consiste à décomposer une clause de taille k en plusieurs clauses de tailles inférieures.

Soit une clause $c = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ une clause de taille 3 et I une interprétation qui satisfait c .

Cas 1 : décomposons cette clause en deux clauses c_1 et c_2 de tailles 1 et 2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT \leftrightarrow 2-SAT, il faut ajouter une variable v aux deux clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3 \vee \neg v) \end{aligned}$$

On a donc la clause c_2 de taille 3.

Cas 2 : décomposons cette clause en trois clauses c_1 , c_2 et c_3 de taille 1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2) \\ c_3 &= (l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT \leftrightarrow 2-SAT, il faut ajouter deux variables v_1 et v_2 aux trois clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v_1 \vee \neg v_2) \\ c_2 &= (l_2 \vee \neg v_1 \vee v_2) \\ c_3 &= (l_3 \vee v_1 \vee v_2) \end{aligned}$$

On a donc également des clauses de taille 3. La réduction définie ci-avant ne permet donc pas la réduction de 3-SAT vers 2-SAT.

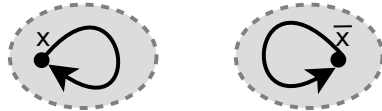
1.2.3 2-SAT, un problème polynomial

(a) Systèmes de deux clauses à deux littéraux :

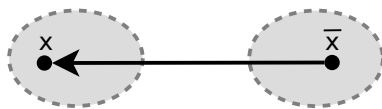
Insatisfiable : $(x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x)$



Valide : $(x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee x)$



Contingent : $(x \vee x) \wedge (x \vee x)$



Insatisfaisabilité du premier ensemble de clauses est clairement visible sur le graphe car les sommets x et $\neg x$ sont dans la même composante fortement connexe.

Le deux autres ensembles sont satisfiables, les deux sommets ne sont pas dans la même composante fortement connexe.

(b) L'algorithme suivant permet la génération du graphe correspondant à l'ensemble de clauses passé en paramètres, que nous appellerons graphe de satisfaction :

Algorithme 1: GrapheSatisfaction(\mathcal{C}, \mathcal{V})

Données :

\mathcal{C} // Ensemble de clauses

\mathcal{V} // Ensemble des variables

```

1 début
2   Graphe. $\mathcal{S} = \emptyset$ ; // Ensemble des sommets du graphe
3   Graphe. $\mathcal{A} = \emptyset$ ; // Ensemble des arcs du graphe
4   // Initialisation des sommets
5   pour tous les  $v \in \mathcal{V}$  faire
6     ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $v$ );
7     ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $\neg v$ );
8   // Parcours des clauses
9   pour tous les  $c \in \mathcal{C}$  faire
10    ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.x, c.y)$ );
11    ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.y, c.x)$ );
12  retourner Graphe;
```

Cet algorithme effectue un parcours de \mathcal{V} et un parcours de \mathcal{C} , sa complexité est donc $O(|\mathcal{C}| + |\mathcal{V}|)$.

(d) Les composantes fortement connexes du graphe de satisfaction généré, ainsi

que leur ordre topologique, peuvent être calculées par l'algorithme de Tarjan.

Algorithme 2: Tarjan_Main(G)

Données : G // Le graphe

```

1 début
2   date  $\leftarrow$  0;
3   pour tous les  $s \in G.S$  faire
4     DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow$  0;
5     CFC[ $s$ ]  $\leftarrow$  0;
6   Pile  $\leftarrow$   $\emptyset$ ;
7   numCFC  $\leftarrow$  0;
8   pour tous les  $s \in G.S$  faire
9     si DEBUT[ $s$ ] = 0 alors
10      Tarjan_Rec( $s$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC);
11  retourner Comp;
```

Algorithme 3: Tarjan_Rec(s , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC)

Données :

s // Le sommet

date // Date de visite du sommet courant

DEBUT // Tableau de dates de visites pour chaque sommet

Pile // Pile de sommets

numCFC // Numéro de la CFC

CFC // Liste des CFC

```

1 début
2   date  $\leftarrow$  date+1;
3   DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow$  date;
4   min  $\leftarrow$  DEBUT[ $s$ ];
5   Empiler(Pile,  $s$ );
6   pour tous les  $v \in Adj[s]$  faire
7     si DEBUT[ $v$ ] = 0 alors
8       min  $\leftarrow$ 
9         MIN(min, Tarjan_Rec( $v$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC));
10    sinon si CFC[ $v$ ] = 0 alors
11      min  $\leftarrow$  MIN(min, DEBUT[ $v$ ]);
12  si min = DEBUT[ $s$ ] alors
13    Ncfc  $\leftarrow$  numCFC + 1;
14  répéter
15     $k \leftarrow$  Depiler(Pile);
16    CFC[ $k$ ]  $\leftarrow$  numCFC;
17  jusqu'à  $k \neq s$ ;
18  retourner Comp;
```

L'algorithme **Tarjan_Main** initialise la date de visite de chaque sommet à zéro. On constate que les deux algorithmes exécutent **Tarjan_Rec** uniquement sur des sommet dont la date de première visite est nulle. Or chaque

appel à `Tarjan_Rec` affecte une date de visite supérieure à zéro au sommet courant. `Tarjan_Rec` est donc appelé exactement une fois par sommet.

De même, un sommet n'est empilé qu'à l'exécution de `Tarjan_Rec`, donc chaque sommet ne sera empilé (et donc dépilé) qu'une seule fois. La boucle de l'algorithme `Tarjan_Rec` (ligne 13) a une complexité globale en $O(|V|)$.

En revanche, la boucle ligne 6 est effectuée une fois pour chaque voisin du sommet courant, donc $|V|$ fois au pire pour chaque appel. `Tarjan_Rec` n'étant appelée que $|V|$ fois en totale on arrive donc à une complexité de $O(|V|^2)$.

Dans le pire des cas le nombre de variables d'une instance de 2-SAT est égale à deux fois le nombre de clauses (chaque clause comportant dans ce cas deux variables uniques). Or notre conversion génère deux sommets par variable. La complexité de l'algorithme en fonction du nombre de clauses est donc de $O(|C|^2)$.

- (e) Nous passerons par la double-implication pour montrer l'équivalence entre le problème 2-SAT et le tri topologique dans notre graphe de satisfaction. Avant de commencer, notons que les arcs dans le graphe de satisfaction correspondent à des implications. En effet on ajoute un arc de x vers $!x$...
blah blah

– **Tri topologique \Rightarrow 2-SAT**

Étant donnée les composantes fortement connexes (CFC) du graphe étiqueté on peut vérifier linéairement en le nombre de sommets du graphe qu'on a une variable ensemble avec sa négation.

Dans un tel cas

donc un instance 2-SAT insatisfiable. Si par contre n'a pas de variables ensembles avec leurs négative dans le même CFC il suffit de prendre l'ordre topologique calculée dans l'ordre inverse et d'affecter les variables de chaque composant comme précisée dans l'article. Nous finissons alors ou une affectation modèle, ou l'affirmation de l'insatisfiabilité de la forme normale conjonctive. Un tri topologique de notre graphe étiqueté permet donc de résoudre le problème 2-SAT.

– **2-SAT \Rightarrow Tri topologique**

1.3 Calculabilité

1.3.1 Énumération des couples d'entiers

La stratégie d'énumération des couples d'entiers peut être visualisée sur un graphique en suivant les diagonales successives comme sur l'image¹ suivante :

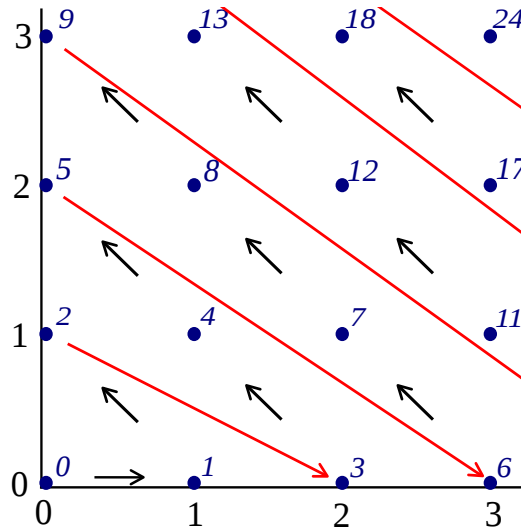


FIG. 1.1 – La fonction de couplage de Cantor établit une bijection de $\mathbb{N} * \mathbb{N}$ dans \mathbb{N} .

Soit $(x, y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ un couple. On trie par ordre lexicographique $(x + y)$. Ainsi on obtient le tableau suivant :

(x, y)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)	...
$(x + y)$	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	...
$c_2(x + y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

1.3.2 Codons et décodons...

Fonction de codage

$$c_2(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$$

Fonctions de décodage Les fonctions de décodage ne peuvent pas être décrites sous la forme de formules arithmétiques. Elles nécessitent l'algorithme sui-

¹Image provenant de Wikipedia, ce fichier est disponible selon les termes de la licence Creative Commons.

vant :

Algorithme 4: CalculXY(z)

Données : z // Rang du couple (x, y)

```

1 début
2    $s \leftarrow 0$ ;
3    $t \leftarrow 0$ ;
4   tant que  $s \leq z$  faire
5      $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
6      $t \leftarrow t + 1$ ;
7    $t \leftarrow t - 2$ ;
8    $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
9    $y \leftarrow z - s$ ;
10   $x \leftarrow t - y$ ;
11  retourner Couple( $x, y$ );
  
```

1.3.3 Énumération des triplets d'entiers

Codage des triplets : il peut avoir lieu de manière récursive :

$$c_3(x, y, z) = c_2(x, c_2(y, z))$$

Généralisation au codage des k-uplets :

$$c_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_2(x_1, c_{k-1}(x_2, \dots, x_k))$$

$$\text{Avec : } c_2(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

1.3.4 Énumération de l'ensemble $[0; 1]$

Prenons une suite $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$ qui énumère les réels de l'intervalle $[0; 1]$, puis créons un réel x compris dans cet intervalle, tel que si la $n^{\text{ième}}$ décimale de r_n est égale à 1, la $n^{\text{ième}}$ décimale de x est égale à 2. Dans la cas contraire, la $n^{\text{ième}}$ décimale de x est égale à 1.

On obtient sur cet exemple :

r_1	=	0	,	4	2	9	6	4	6	1	...
r_2	=	0	,	2	7	3	2	9	4	0	...
r_3	=	0	,	6	4	1	1	5	1	2	...
r_4	=	0	,	3	0	5	9	0	4	3	...
r_5	=	0	,	9	1	3	3	1	8	2	...
r_6	=	0	,	0	2	0	8	3	2	7	...
r_7	=	0	,	2	5	7	3	6	4	0	...
\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots
				\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
x	=	0	,	1	1	2	1	2	1	1	...

Le réel x ne peut pas être énuméré par la suite r car il diffère de sa première décimale dans r_1 , de sa deuxième décimale dans r_2 , ... de sa $n^{\text{ième}}$ décimale dans r_n . Pourtant le réel x est clairement dans l'intervalle $[0; 1]$.

L'ensemble des éléments de l'intervalle $[0; 1]$ n'est donc pas dénombrable, donc pas énumérable. On ne peut donc pas trouver de fonction de codage pour cet ensemble.

On peut généraliser à l'ensemble \mathbb{R} : $[0; 1]$ étant inclus dans \mathbb{R} , et $[0; 1]$ n'étant pas dénombrable, l'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Chapitre 2

Partie pratique

Le but de ce TP est d'implémenter deux algorithmes de résolution du problème de flot maximum : l'algorithme d'Edmonds-Karp et l'algorithme de Dinic. Nous commencerons par spécifier les fonctionnalités que devra implémenter notre programme, puis nous détaillerons la manière dont ces fonctionnalités ont été développées. Une troisième partie sera consacrée aux tests effectués sur les deux algorithmes ainsi qu'à l'analyse des résultats.

2.1 Spécification fonctionnelles

2.1.1 Résolution du problème de flot maximum

Le programme doit être capable de :

- générer et d'actualiser les graphes d'écarts successifs
- calculer la valeur du flot obtenu à partir du graphe d'écart final
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l'algorithme d'**Edmonds-Karp**
- résoudre le problème de flot maximum en suivant l'algorithme de **Dinic**
- retourner la solution de manière exploitable pour l'analyse

Il faudra veiller à conserver les complexités des deux algorithmes, notamment en prenant garde aux structures de données et bibliothèques utilisées.

2.1.2 Génération aléatoire d'un réseau de transport

La génération aléatoire de graphes de type réseau de transport permettra de tester les deux algorithmes. Il faudra veiller à ce que le graphe respecte les conditions d'un réseau de transport notamment la possession d'une source et d'un puits, la pondération des arcs (capacités), et assurer la connexité du graphe. La génération de ce réseau de transport devra être paramétrable selon la taille (nombre de sommets) et la couverture (nombre d'arcs).

2.2 Spécification technique

2.2.1 Programmation C++

Parce qu'il s'agit d'un bon compromis entre langage orienté objet et langage de bas niveau, nous avons choisi de développer cette application en C++. Nous pourrions ainsi abstraire la gestion des graphes (notamment des structures de données) dans nos algorithmes, tout en gardant la possibilité d'optimiser le code grâce à la flexibilité du langage C.

2.2.2 Structures de données

Plusieurs structures de données sont possibles. Nous avons choisi d'implémenter une représentation par listes d'adjacences et une autre par matrice d'adjacences.

Listes d'adjacences : chaque sommet possède la liste de ses voisins. Ces listes ont l'avantage d'allouer de la mémoire uniquement lorsqu'une information doit être stockée.

Matrice d'adjacences : la mémoire allouée pour cette structure de données ne dépend que du nombre de sommets (n^2). Cette structure a l'avantage d'offrir un accès direct à un arc pour deux sommets donnés.

Dans un but d'optimisation mémoire, on utilise en général des listes d'adjacences lorsque l'on travaille sur des graphes peu denses. En effet, la taille allouée par cette structure de données étant directement dépendante du nombre d'arcs, elle est donc réduite par rapport aux matrices d'adjacences. Sur des graphes très denses, on utilisera plutôt des matrices d'adjacences, permettant un accès aux données plus rapide.

Ce choix s'effectue en général en fonction des ressources matérielles disponibles.

2.2.3 Modélisation

Dans un but d'abstraction de la structure de donnée, nous avons choisi de créer une classe abstraite **AbstractGraph** dont deux classes fille héritent. Un graphe peut donc être de type **AdjacencyListGraph** ou **MatrixGraph**. Cela permet une grande genericité des algorithmes développés, ce qui permet d'utiliser une structure de données de manière totalement détachée des algorithmes.

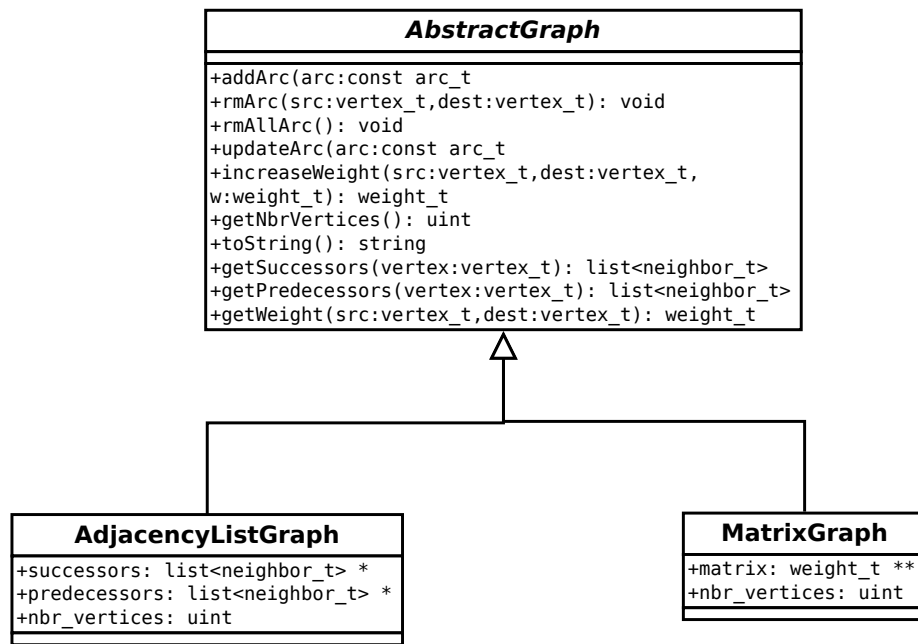


FIG. 2.1 – Diagramme de classes.

2.2.4 Implémentation

Types et structures

Déclaration des types `weight_t`, `vertex_t` et `path_t`, et des structures `edge`, `neighbor_t`

```

1  typedef int weight_t;
2  typedef uint vertex_t;
3
4  typedef struct
5  {
6      vertex_t u;
7      vertex_t v;
8  } edge;
9
10 typedef struct
11 {
12     vertex_t vertex_src;
13     vertex_t vertex_dest;
14     weight_t weight;
15 } arc_t;
16
17 typedef struct
18 {
19     vertex_t vertex;
20     weight_t weight;
21 } neighbor_t;
22
23 typedef list<vertex_t> path_t;
  
```

Classe AbstractGraph

Cette classe déclare une série de méthodes qui doivent être implémentés dans les classes filles.

Header de la classe AbstractGraph

```

1  class AbstractGraph
2  {
3  public:
4
5      AbstractGraph();
6      virtual
7      ~AbstractGraph() = 0;
8
9      virtual bool
10     addArc(const arc_t &arc) = 0;
11
12     virtual bool
13     addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;
14
15     virtual void
16     rmArc(const arc_t &arc) = 0;
17
18     virtual void
19     rmArc(vertex_t src, vertex_t dest) = 0;
20
21     virtual void
22     rmAllArc() = 0;
23
24     virtual void
25     updateArc(const arc_t &arc) = 0;
26
27     virtual weight_t
28     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w) = 0;
29
30     virtual uint
31     getNbrVertices() const = 0;
32
33     virtual string
34     toString() const;
35
36     virtual list<neighbor_t>
37     getSuccessors(vertex_t vertex) const = 0;
38
39     virtual list<neighbor_t>
40     getPredecessors(vertex_t vertex) const = 0;
41
42     virtual weight_t
43     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const = 0;
44
45 };

```

Classe AdjacencyListGraph

Cette classe représente un réseau de transport sous la forme de deux listes d'adjacences : une représente les successeurs d'un sommet, l'autre les prédécesseurs.

Ce doublon d'information permet d'accélérer l'accès aux voisins d'un sommet, notamment à ces prédécesseurs. En effet, cette méthode nous permet d'accéder aux prédécesseurs directement (complexité de $O(m)$) alors que l'accès via la liste des successeurs implique une recherche des arcs pour chaque sommet (complexité de $O(nm)$).

Ces doubles listes d'adjacences nous assurent un gain de performances en

terme de rapidité, qui se fait au détriment de la quantité de mémoire utilisé, qui se trouve doublée.

Header de la classe `AdjacencyListGraph`

```

1  class AdjacencyListGraph : public AbstractGraph
2  {
3
4  public:
5      // *****
6      // CONSTRUCTOR
7      // *****
8
9      AdjacencyListGraph(uint nbr_vertices);
10
11     AdjacencyListGraph(const AbstractGraph& graph);
12     AdjacencyListGraph(const AdjacencyListGraph& graph);
13
14     AdjacencyListGraph &
15     operator=(const AbstractGraph& graph);
16     AdjacencyListGraph &
17     operator=(const AdjacencyListGraph& graph);
18
19     virtual
20     ~AdjacencyListGraph();
21
22     virtual bool
23     addArc(const arc_t &arc);
24
25     virtual bool
26     addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
27
28     virtual void
29     rmArc(const arc_t &arc);
30
31     virtual void
32     rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);
33
34     virtual void
35     rmAllArc();
36
37     virtual void
38     updateArc(const arc_t &arc);
39
40     virtual weight_t
41     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
42
43     virtual uint
44     getNbrVertices() const;
45
46     virtual list<neighbor_t>
47     getSuccessors(vertex_t vertex) const;
48
49     virtual list<neighbor_t>
50     getPredecessors(vertex_t vertex) const;
51
52     virtual weight_t
53     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;
54
55     private:
56     list<neighbor_t> *successors, *predecessors;
57     uint nbr_vertices;
58
59     protected:
60     void
61     _clear();
62
63     void
64     _construct(const AbstractGraph& graph);
65
66 };

```

Classe MatrixGraph

Header de la classe MatrixGraph

```

1  class MatrixGraph : public AbstractGraph
2  {
3
4  public:
5      //*****
6      // CONSTRUCTOR
7      //*****
8
9      MatrixGraph(uint nbr_vertices);
10
11     MatrixGraph(const AbstractGraph& graph);
12
13     MatrixGraph(const MatrixGraph& graph);
14
15     MatrixGraph &
16     operator=(const AbstractGraph& graph);
17
18     MatrixGraph &
19     operator=(const MatrixGraph& graph);
20
21     virtual
22     ~MatrixGraph();
23
24     virtual bool
25     addArc(const arc_t &arc);
26
27     virtual bool
28     addArc(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
29
30     virtual void
31     rmArc(const arc_t &arc);
32
33     virtual void
34     rmArc(vertex_t src, vertex_t dest);
35
36     virtual void
37     rmAllArc();
38
39     virtual void
40     updateArc(const arc_t &arc);
41
42     virtual weight_t
43     increaseWeight(vertex_t src, vertex_t dest, weight_t w);
44
45     virtual uint
46     getNbrVertices() const;
47
48     virtual list<neighbor_t>
49     getSuccessors(vertex_t vertex) const;
50
51     virtual list<neighbor_t>
52     getPredecessors(vertex_t vertex) const;
53
54     virtual weight_t
55     getWeight(vertex_t src, vertex_t dest) const;
56
57 private:
58     weight_t **matrix;
59     uint nbr_vertices;
60
61 protected:
62     void
63     _clear();
64
65     void
66     _construct(int nbr_vertices);
67
68     void
69     _construct(const AbstractGraph& graph);
70

```

```
71 };
```

2.3 Génération de réseaux de transport aléatoires

```
1  /**
2   * A random flow network generator
3   * Attention si le graph passe en parametre contient des arcs ceux-ci seront
4   * supprimer.
5   * @param graph une reference vers un graph initialiser avec un nombre de sommets
6   * @param rate la proportion d'arcs a ajouter au graphe en pourcentage par rapport au graphe complet.
7   * @param min_weight valuation minimal des arcs
8   * @param max_weight valuation maximal des arcs
9   */
10 void
11 flowNetworkGenerator(AbstractGraph& graph, float rate, uint min_weight = 1,
12                      uint max_weight = 1);
13
14 \subsection{Fonctions generales}
15
16 /**
17 * Cette procedure genere une chaine de caracteres representant l'affichage
18 * de la valeur total du flot sur le reseau de transport ainsi que la valeur
19 * du flot sur chaque arc.
20 * @param flow_network le reseau de transport
21 * @param residual_network le graphe d'ecart associe
22 */
23 string
24 flowToString(const AbstractGraph& flow_network,
25             const AbstractGraph& residual_network);
26
27
28
29 \subsection{Edmonds–Karp}
30
31 /**
32 * Cette fonction retourne le plus court chemin en nombre d'arcs depuis
33 * le sommet start jusqu'au sommet end
34 * @param g un graphe
35 * @param start le sommet de depart
36 * @param end le sommet d'arriver
37 * @return le plus court chemin en nombre d'arcs de start a end
38 */
39 path_t
40 leastArcsPath(AbstractGraph &g, vertex_t start, vertex_t end);
41
42 /**
43 * Cette fonction retourne la plus petite valuation presente sur un chemin
44 * donne dans un graphe
45 * @param g un graphe
46 * @param path une chemin dans g
47 * @return la plus petite valuation presente sur le chemin path dans g
48 */
49 weight_t
50 lightestArc(AbstractGraph& g, path_t path);
51
52 /**
53 * Cette fonction converti un chemin en chaine de caractere dans un but d'affichage
54 * @param path le chemin
55 * @param g le graphe
56 */
57 string
58 pathToString(path_t path, const AbstractGraph& g);
59
60 /**
61 * Mise a jour du graphe d'ecart depuis un chemin et la valeur du flot a ajouter
62 * sur ce chemin
63 * @param le graphe de couche
64 * @param p le chemin
65 * @param k la valeur du flot a ajouter
66 */
```

```

67 void
68 updateResidualNetwork(AbstractGraph& residualNetwork, path_t p, uint k);
69
70
71 /**
72  * algorithme d'Edmonds–Karp
73  * @param flow_network le reseau de transport
74  * @param src le sommet source
75  * @param dest le puit
76  * @return le graphe d'ecart final
77  */
78 AdjacencyListGraph
79 edmondsKarp(const AbstractGraph& flow_network, vertex_t src, vertex_t dest);

```

2.4 Procédures principales

2.4.1 Algorithme de Dinic

Mise à jour du graphe d'écart

```

1 /**
2  * Mise à jour du graphe d'ecart depuis un flot
3  * @param residual_network le graphe de couche
4  * @param p le flot
5  */
6 void
7 updateResidualNetwork(AbstractGraph& residual_network, AbstractGraph& flow);

```

Calcul du flot bloquant

```

1 /**
2  * Calcul du flot bloquant
3  * @param level_graph le graphe de couche
4  * @param src la source
5  * @param dest le puit
6  * @return un flot bloquant
7  */
8 AdjacencyListGraph
9 blockingFlow(LevelGraph& level_graph, vertex_t src, vertex_t dest);

```

Exécution de Dinic

```

1 /**
2  * algorithme de Dinic
3  * @param flow_network le reseau de transport
4  * @param src le sommet source
5  * @param dest le puits
6  * @return le graphe d'ecart final
7  */
8 AdjacencyListGraph
9 dinic(const AbstractGraph& graph, vertex_t src, vertex_t dest);

```

2.5 Tests & résultats

2.5.1 Méthode de test

Série de tests

Pour tester les performances des deux algorithmes implémentés, nous avons généré une série de problèmes à résoudre sur des réseaux de transports ayant les paramètres suivants :

- nombre de sommets variant de 100 à 1000 par palier de 100,
- densité du graphe variant de 10% à 100% par palier de 10.

Pour chaque test (un nombre de sommets et une densité donnés), nous avons généré dix graphes afin de travailler sur des moyennes lors de l'analyse.

GNU gprof

Nous avons évalué les algorithmes en fonction de leurs temps d'exécution. Le temps réel d'exécution (real time) ayant peu de sens pour effectuer des statistiques correctes, nous avons choisi de mesurer les temps CPU (CPU time). Le temps CPU est le temps alloué au processus par le système d'exploitation sur le processeur. Contrairement au temps réel, le temps CPU est indépendant des autres processus en cours d'activité et aux interruptions systèmes : il s'agit du temps effectivement passé par le CPU pour traiter le processus.

L'analyse des temps CPU a été faite à l'aide de l'outil GNU gprof. Son utilisation requiert l'ajout de l'argument `-pg` lors la compilation. A l'exécution du programme, un fichier `gmon.out` est généré. La commande `gprof` permet ensuite de créer un fichier texte de statistiques. Pour chaque méthode, un grand nombre de données sont disponibles, nous nous sommes intéressés principalement aux suivantes :

- pourcentage du temps CPU total,
- temps CPU total,
- temps CPU par appel, de manière cumulative (en prenant en compte les appels à d'autres fonctions) ou non.

2.5.2 Analyse des résultats