Université de Montpellier II — 2007/2008
Algo/complexité/calculabilité — Durée: 6h

TP
TD – Séance n°

---

1 Descriptif des tâches

Vos résultats seront présentés en procédant à la rédaction d'un mémoire dont la qualité influencera la note finale. Ce manuscrit sera rendu le jour de la soutenance. La soutenance consiste à la présentation des résultats pratiques (choix du langage, choix des structures de données, résultats obtenus, tests sur un grand jeu de données, analyse de ceux-ci ...). Vous aurez 15 minutes au maximum questions comprises. Vous avez la possibilité d'utiliser des transparents.

2 Partie théorique

2.1 Partie algorithmique

Exercice 1 – Polynômes chromatiques

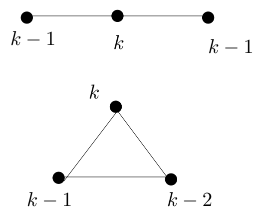

Fig. 1 – Exemple de fonction chromatique associé à un graphe

Soit G un graphe quelconque. Nous définissons la fonction chromatique, notée $P_G(k)$, le nombre de possibilités de colorier les sommets du graphe G avec k couleurs. Si nous prenons le graphe donné par la figure 1 on a $P_G(k) = k(k-1)^2$ pour la chaine et $P_G(k) = k(k-1)(k-2)$ pour le triangle.

1. Donner la fonction chromatique associé au graphe complet K_n et au graphe vide $\bar{K}_n$.
2. Dans le cas où $k < \chi(G)$ que peut-on dire de $P_G(k)$? Et dans le cas où $k \geq \chi(G)$?
3. Pour un graphe simple G, on note $G - e$ et $G \backslash e$ les graphes obtenues à partir de G par suppression et contraction de l'arête e. Montrer que $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\backslash e}(k)$. La figure 2 vous aidera à la démonstration.
4. Montrer que la fonction chromatique est un polynôme (Faire une récurrence sur le nombre d'arêtes de G).

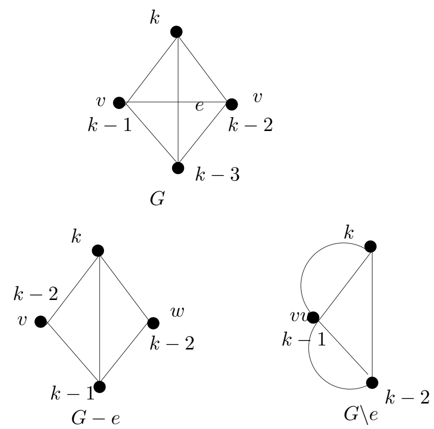

Fig. 2 – Illustration

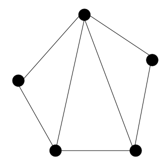

Fig. 3 – polynôme chromatique associé ?

5. Donner le polynôme chromatique associé au graphe donné par la figure 3.
6. Démontrer (par récurrence) que pour un graphe simple G ayant n sommets et m arêtes, le degré du polynôme est n, que le coefficient de k^n est 1, que le coefficient de k^{n-1} est $-m$ et que les coefficients de $P_G(k)$ sont alternativement positifs et négatifs.
7. Donner le polynôme chromatique pour le graphe biparti complet $K_{1,5}$.
8. Que vaut le polynôme chromatique d'un graphe G si admet plusieurs composantes connexes ?
9. Démontrer que si $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ alors G est un arbre.
10. Déterminer les trois graphes ayant pour polynôme chromatique $k^5 - 4k^4 + 6k^3 - 4k^2 + k$.
11. Déterminer le polynôme chromatique du graphe biparti complet $K_{2,5}$,
12. Déterminer le polynôme chromatique du cycle C_4 et C_5
13. Démontrer que le polynôme chromatique du cycle C_n est $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.
14. Démontrer que le polynôme chromatique du graphe biparti complet $K_{2,s}$ est $k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$.

2.2 Partie complexité

Exercice 2 – Sur quelques réductions

1. On vous demande de rappeler la réduction de SAT à 3-SAT.
   (a) ennoncer SAT et $3-SAT$
   (b) définir la réduction.
   (c) justifier alors que $3-SAT$ est $\mathcal{NP}$-complet (sachant que SAT est $\mathcal{NP}$-complet).
   (d) Application : si un ensemble de clauses contient n_v variables, n_1 clauses à un littéral, n_2 clauses à 2 littéraux, n_3 clauses à 3 littéraux, n_4 clauses à 4 littéraux et n_5 clauses à 5 littéraux (et pas d'autre clause) combien le système obtenu par votre réduction contient-il de variables et de clauses ? vous devrez bien sûr justifier votre réponse.
2. Pourquoi le principe de la réduction ne permet-il pas de réduire $3-SAT$ à $2-SAT$ et de prouver ainsi que $2-SAT$ est $\mathcal{NP}$-complet ? (il ne s'agit pas d'expliquer pourquoi $2-SAT$ n'est pas $\mathcal{NP}$-complet, mais pourquoi cette réduction ne marche pas).
3. Il s'agit de prouver que $2-SAT$ est un problème polynomial. Vous avez un article en français expliquant cette preuve à
   http ://philippe.gambette.free.fr/SCOL/Graphes/Gambette
   (a) Vous commencerez par fabriquer trois ensembles de 2-clauses, le premier valide, le deuxième insatisfiable et le troisième contingent, et pour chacun de ces ensembles de clauses vous construirez le graphe correspondant. Vous expliquerez comment apparaît sur chacun des trois graphes la validité de l'ensemble de clauses correspondant.
   (b) Vous expliciterez ensuite l'algorithme de transformation et vous évaluerez sa complexité.
   (c) Vous expliciterez ensuite l'algorithme d'exploration du graphe et vous évaluerez sa complexité *en fonction de la taille de l'ensemble de clauses initial.*
   (d) enfin vous justifierez l'équivalence de la réponse au problème $2-SAT$ et au problème qui est posé dans le graphe.

2.3 Partie Calculabilité

Exercice 3 – Sur le problème de codage

1. Comment enumérer les couples d'entiers ?
2. Donner les fonctions de codage et de décodage $f_1(z) \to x$ et $f_2(z) \to y$.
3. Montrer que l'on peut coder les triplets. Génraliser aux k-uplets.
4. Pensez-vous que l'on peut coder les l'éléments de l'intervalle $[0, 1]$. Justifier.

3 Partie pratique sur les algorithmes de flots

Exercice 4 – La méthode de Edmonds-Karp et celle de Dinic

1. Programmer une procédure qui construit à partir d'un graphe orienté valué (les valuations représentent les capacités)et deux sommets s et p du graphe , le graphe d'écart associé (correspondant à un flot nul sur chaque arc).

2. Programmer un procédure qui à partir d'un graphe orienté et deux sommets s et p donne un plus court chemin en nombre d'arcs de s à p ou qui signale si il n'y en a pas.
3. Étant donnés un graphe G orienté et valué et un chemin de G, écrire une fonction qui calcule l'arc de plus petite valuation sur le chemin.
4. Étant donnés un graphe d'écart, un chemin et un entier k, donner une procédure qui met à jour le graphe d'écart si on augmente le flot de k le long de la chaîne augmentante correspondant au chemin.
5. Écrire une procédure qui à partir du graphe initial et du graphe d'écart final (plus de chemins entre s et p donne la valeur du flot maximum ainsi que la valeur du flot sur chaque arc lorsque le flot maximum est atteint).
6. En utilisant les procédures et les fonctions précédentes, programmer l'algorithme de Edmonds-Karp.
7. Écrire une procédure qui prend en compte l'ensemble des plus courts chemins en nombres d'arcs.
8. Écrire une procédure qui calcule la plus petite valeur du flot dans le graphe de couche.
9. Écrire une procédure qui met à jour le flot dans le graphe G.
10. En déduire l'algorithme de Dinic.
11. Comparer les résultats (temps d'exécution, taux d'occupation mémoire) entre les deux méthodes. Vous apporterez un soin tout particulier à la génération des vos résultats et à leur présentation.

4 Barême

- $7pts$ partie théorique
- $8pts$ mémoire sur la partie 3,
- $5pts$ présentation.