



Ministère de l'Education Nationale  
Université de Montpellier II  
Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier Cedex 5



---

TP FMIN105  
Algorithmique / Complexité / Calculabilité

---

RAPPORT (DÉCEMBRE 2011)

Travail préparé par :

Thibaut MARMIN  
Clément SIPIETER  
William DYCE



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Partie théorique</b>	<b>5</b>
1.1	Algorithmique . . . . .	5
1.2	Complexité . . . . .	8
1.2.1	$\text{SAT} \propto 3\text{-SAT}$ . . . . .	8
1.2.2	$3\text{-SAT} \propto 2\text{-SAT}?$ . . . . .	11
1.2.3	2-SAT, un problème polynomial . . . . .	12
1.3	Calculabilité . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Partie pratique</b>	<b>17</b>



# Chapitre 1

## Partie théorique

### 1.1 Algorithmique

1. Le nombre de manières de colorier un graphe est le produit des nombres de façons de colorier chaque arc.
    - Si le graphe  $G$  est complet, on aura  $k$  couleurs possibles pour le premier sommet,  $(k - 1)$  pour le deuxième, etc... (Le graphe  $G$  étant complet, la couleur du premier sommet est nécessairement exclu des autres sommets)
- Le  $n^{\text{ième}}$  sommet pourra être colorié de  $k - (n - 1)$  manières. D'où :

$$P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k - i)$$

- Si  $G$  est vide, la coloration d'un sommet ne contraint pas la coloration des autres sommets. On obtient alors :

$$P_{\overline{K_n}}(k) = k^n$$

2.  $\chi(G)$  étant, par définition, le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier  $G$ , si  $k < \chi(G)$  alors le graphe  $G$  ne peut pas être colorié par  $k$  couleurs. Si  $k \geq \chi(G)$  alors il doit y avoir au moins une manière de colorier  $G$ , celui utilisant  $\chi(G)$  couleurs.

On a donc :

$$P_G(k) \begin{cases} = 0 & \text{si } k < \chi(G) \\ \geq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrons d'abord que la propriété est vraie pour tout graphe complet  $K_n$ . Pour commencer on remarque que, pour tout arrête  $e$  :
  - $K_{n \setminus e}$  est exactement  $K_{n-1}$ , et donc :

$$P_{K_{n \setminus e}}(k) = P_{K_{n-1}} = \prod_{i=0}^{n-2} (k - i)$$

- Soit  $e = (a, b)$ . On peut supposer (sans perte de généralité) que  $b$  est considéré en dernier lors de la coloration de  $K_n$ , donc qu'il lui reste  $k - (n - 1)$  couleurs. Pour colorier  $K_{n-e}$  on aura un choix de plus pour lui, à savoir la couleur de  $a$ , donc  $k - (n - 2)$  en totale. De ce fait :

$$P_{K_n-e}(k) = P_{K_{n-1}}(k)(k - (n - 2)) = \left( \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2))$$

On a donc très clairement :

$$\begin{aligned} P_{K_n-e}(k) - P_{K_n \setminus e}(k) &= \left( \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \right) (k - (n - 2)) - \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) \\ &= \prod_{i=0}^{n-2} (k - i) (k - (n - 1)) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} (k - i) \\ &= P_{K_n}(k) \end{aligned}$$

Tout graphe de rang  $n$  pouvant se générer à partir de  $K_n$  (en enlevant des arrêtes) on cherchera à prouver que la suppression d'arrête conserve notre propriété. Autrement dit on aimerait montrer que pour tout graphe  $G$  et tout arrête  $a$  de celui-ci :

$$\begin{aligned} P_G(k) &= P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \\ \Rightarrow P_{G-a}(k) &= P_{G-e-a}(k) - P_{G \setminus e-a}(k) \end{aligned}$$

On supposera évidemment que  $a$  et  $e$  sont distinctes.

TODO FINISH

4. Soit  $H$  un prédicat tel que :

$$H(m) \begin{cases} \top & \text{si } \forall G, \text{ graphe de } m \text{ arrêtes ou moins, } P_G(k) \text{ est polynomiale.} \\ \perp & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Nous rappelons que  $P_{K_n}(k) = k^n$ , donc  $H(0)$  est vraie.
- Supposons  $\exists m \in \mathbb{N} \mid H(m)$  l'est également. Soit  $G_{m+1}$  un graphe à  $m + 1$  arrêtes :

$$P_{G_{m+1}} = P_{G_{m+1}-e} - P_{G_{m+1} \setminus e}$$

Clairement  $P_{G_{m+1}-e}$  et  $P_{G_{m+1} \setminus e}$  ont  $(m + 1) - 1 = m$  arrêtes. Or par hypothèse de récurrence  $H(m)$  est vraie,  $P_{G_{m+1}}$  est la différence entre deux polynomiales, donc est polynomiale lui-même. On a donc  $H(m+1)$ .

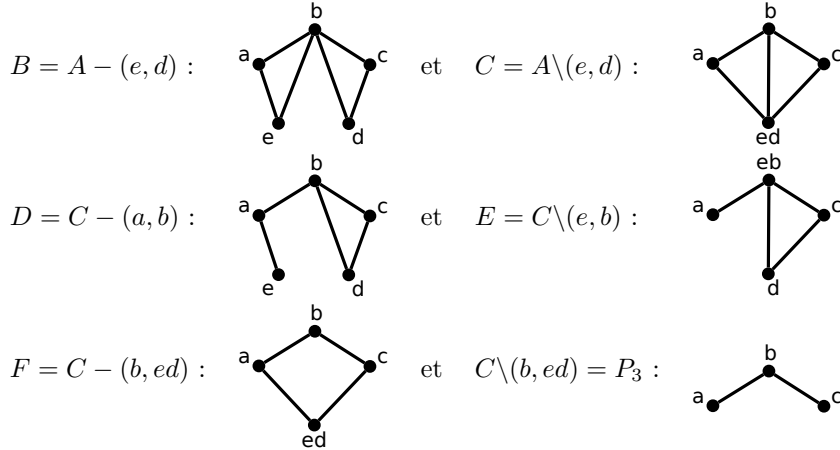
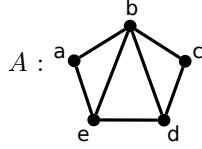
- On vient de montrer  $H(0) \wedge (H(m) \Rightarrow H(m + 1))$ . Par récurrence on a donc  $H(m) \forall m \in \mathbb{N}$ .
5. Utilisons la formule trouvée au point précédent, et admettons que pour  $P_n$  une chaîne de taille  $n$  on a :

$$P_n(k) = k(k - 1)^{n-1}$$

Prenons  $A$  le graphe initial :

$$\begin{aligned}
 P_A(k) &= P_B(k) - P_C(k) \\
 &= (P_D(k) - P_E(k)) - (P_F(k) - P_{P_3}(k)) \\
 &= \left[ (P_{P_5}(k) - P_{P_4}(k)) - (P_{P_4}(k) - P_{P_3}(k)) \right] - \left[ (P_{P_4}(k) - P_{K_3}(k)) - P_{P_3}(k) \right] \\
 &= P_{P_5}(k) + 2P_{P_3}(k) - P_{K_3}(k) + 3P_{P_4}(k) \\
 &= k(k-1)^4 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) - 3(k-1)^3 \\
 &= k(k-1) \left[ (k-1)^3 + z(k-1) + (k-z) - 3(k-1)^2 \right] \\
 &= (k^2 - k) \left[ (k-1)^2 ((k-1) - 3) + 3k - 4 \right] \\
 &= (k^2 - k) [k^3 - 6k^2 + 12k - 8] \\
 &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k
 \end{aligned}$$

Où :



6. TODO coefficient de  $k^n$  est 1, alternating - and + etc

7.

## 1.2 Complexité

### 1.2.1 SAT $\propto$ 3-SAT

(a) **Énoncé de SAT :**

Données :  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$  *Ensemble de  $n$  variables*

$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$  *Ensemble de  $m$  clauses*

où  $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee \dots \vee l_{ik})$  *Clauses de  $k$  littéraux*

avec  $l_{ij} = v$  ou  $\neg v$  *avec  $v \in U$*

Problème : existe-il au moins une affectation des variables telle que chaque clause de  $\mathcal{C}$  soit vrai.

**Énoncé de 3-SAT :**

3-SAT est identique au problème SAT avec  $k = 3$ .

Données :  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3 \dots v_n\}$

$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_m\}$

où  $c_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$

avec  $l_{ij} = v$  ou  $\neg v$

- (b) La réduction du problème SAT peut être défini en montrant que chaque clause  $c$  de  $\mathcal{C}$  peut-être transformée en un ensemble de clauses  $\mathcal{C}'$  tel que pour toute affectation rendant vrai l'ensemble des clauses de  $\mathcal{C}$ , on peut trouver une affectation rendant vrai chaque clause de  $\mathcal{C}'$ . Chaque clause de  $\mathcal{C}'$  devant être de taille exactement 3. La réciproque doit également être montrée.

Définissons les réductions :

**$k = 1$**

Soit  $ci_1$  une clause de taille 1, on a  $ci_1 = (l)$ . Ajoutons deux variables  $v_1, v_2 \notin \mathcal{V}$  et transformons la clause  $c$  en quatre clauses. On obtient l'ensemble  $\mathcal{C}_1 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  avec :

$$c_1 = (l \vee v_1 \vee v_2)$$

$$c_2 = (l \vee v_1 \vee \neg v_2)$$

$$c_3 = (l \vee \neg v_1 \vee v_2)$$

$$c_4 = (l \vee \neg v_1 \vee \neg v_2)$$

**$k = 2$**

Soit  $ci_2$  une clause de taille 2, on a  $ci_2 = (l_1 \vee l_2)$ . Ajoutons une variable  $v \notin \mathcal{V}$  et transformons la clause  $c$  en deux clauses. On obtient l'ensemble  $\mathcal{C}_2 = \{c_1, c_2\}$  avec :

$$c_1 = (l_1 \vee l_2 \vee v)$$

$$c_2 = (l_1 \vee l_2 \vee \neg v)$$

**$k = 3$**

La clause  $ci_3$  ne subit pas de transformation.

$$\mathcal{C}_3 = \{ci_3\}$$



**$k > 3$**

Soit la clause  $ci_k = (l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_k)$ . On ajoute  $(k - 3)$  nouvelles variables  $(v_1, v_2 \dots v_{k-3})$ .

$$C_k = \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee v_1)}_{c_1} \bigwedge_{i=1}^{k-4} \left[ \underbrace{(\neg v_i \vee l_{i+2} \vee v_{i+1})}_{c_{i+1}} \right] \wedge \underbrace{(\neg v_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)}_{c_{k-2}}$$

Montrons que SAT est vrai si et seulement si 3-SAT est vrai :

**SAT  $\rightarrow$  3-SAT**

- Soit une interprétation  $I_1$  qui satisfasse la clause  $ci_1$  :

$$val(I_1, ci_1) = val(I_1, l) = vrai$$

Prenons une interprétation  $I'_1$  avec  $val(I_1, l) = val(I'_1, l)$ , peu importe les affectations de  $v_1$  et  $v_2$ ,  $l$  étant présent dans toutes les clauses de  $\mathcal{C}_1$  :

$$val(I'_1, \mathcal{C}) = \top$$

- Soit une interprétation  $I_2$  qui satisfasse la clause  $ci_2$  :

$$\exists i, val(I_2, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation  $I'_2$  avec :

$$val(I_2, l_1) = val(I'_2, l_1)$$

$$val(I_2, l_2) = val(I'_2, l_2)$$

Peu importe l'affectation de  $v$  dans  $I'_2$ , on a  $val(I'_2, \mathcal{C}_2) = \top$ .

- Soit une interprétation  $I_k$  qui satisfasse la clause  $ci_k$  :

$$\exists i, val(I_k, l_i) = \top$$

Prenons une interprétation  $I'_k$  telle que :

$$val(I_k, l_i) = val(I'_k, l_i)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid j \leq (i - 2), val(I'_k, v_j) = \top$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \mid (i - 1) \leq j \leq (k - 3), val(I'_k, v_j) = \perp$$

On obtient :

$$val(I'_k, \mathcal{C}_k) = \top$$

**3-SAT  $\rightarrow$  SAT**

- Prenons une interprétation  $I_1$  telle que  $val(I_1, \mathcal{C}_1) = \top$ .  
Sans perte de généralité, on suppose que :

$$val(I_1, v_1) = val(I_1, v_2) = \top$$

La clause  $c_4$  de  $\mathcal{C}_1$  ne peut être satisfaite que si  $val(I_1, l) = \top$ .  
On a donc :

$$val(I_1, ci_1) = \top$$

- Prenons une interprétation  $I_2$  telle que  $val(I_2, \mathcal{C}_2) = \top$ .  
Sans perte de généralité on suppose que :

$$val(I_2, v) = \top$$

La clause  $c_2$  de  $\mathcal{C}_2$  ne peut être satisfaite que si  $val(I_2, (l_1 \vee l_2)) = \top$ .

On a donc :

$$val(I_2, ci_2) = \top$$

- Prenons une interprétation  $I_k$  telle que  $val(I_k, \mathcal{C}_k) = \top$  et montrons qu'il existe forcément un  $i$  tel que  $val(I_k, l_i) = \top$ .  
Supposons que l'interprétation  $I_k$  est modèle de  $\mathcal{C}_k$  avec

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq k, val(I_k, l_i) = \perp$$

$$\Rightarrow val(I_k, v_1) = \top \text{ (dans } c_1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}^* \mid i \leq (k-4), val(I_k, v_{i+1}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, v_{k-3}) &= \top \\ \Rightarrow val(I_k, c_{k-2}) &= \perp \\ \Rightarrow val(I_k, \mathcal{C}_k) &= \perp \end{aligned}$$

Pour que l'interprétation  $I_k$  satisfasse  $\mathcal{C}_k$ , il doit exister un  $i \in \mathbb{N}^*$  tel que  $i \leq k$  et que  $val(I_k, l_i) = \top$ .

On a donc :

$$val(I_k, ci_k) = \top$$

- (c) Le point (b) définit la réduction de SAT vers 3-SAT. Afin de montrer la NP-Complétude de 3-SAT, montrons que la réduction s'effectue en un temps polynomial.

Soit :

$k$  la taille de la clause initiale,

$v_k$  le nombre de variables à ajouter pour obtenir des clauses de taille 3,

$w_k$  le nombre de clauses de taille 3 obtenues à partir de la clause initiale.

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0 & w_3 = 1 \\ v_4 = 1 & w_4 = 2 \\ v_5 = 2 & w_5 = 3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Pour tout  $k > 3$  :

$$v_k = v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1} + 1$$

$$w_k = w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1} + w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$$

$v_k = \theta(k)$ , donc borné par la taille de  $F$ . La réduction s'effectue donc en un temps polynomial.

Il est possible de réduire le problème SAT à 3-SAT en un temps polynomial, SAT étant NP-complet, 3-SAT l'est aussi.

- (d) Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble de clause à  $n_v$  variables avec  $n_1$  clauses de taille 1,  $n_2$  clauses de taille 2,  $n_3$  clauses de taille 3,  $n_4$  clauses de taille 4 et  $n_5$  clauses de taille 5. Calculons le nombre de variables et le nombre de clauses obtenues après réduction (respectivement  $n'_v$  et  $n'_c$ ).

Les points (b) et (c) permettent de déterminer pour une clause de taille  $k$ , le nombre de clause obtenues et le nombre de variables ajoutées après réduction. On peut donc en déduire la tableau suivant :

Taille de la clause dans $\mathcal{C}$	1	2	3	4	5
Nombre de clauses	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
Nombre de variables ajoutées par clause	2	1	0	1	2
<b>Nombre de variables ajoutées au total</b>	$2n_1$	$n_2$	0	$n_4$	$2n_5$
Nombre de clauses obtenues par clause	4	2	1	2	3
<b>Nombre de clauses obtenues au total</b>	$4n_1$	$2n_2$	$n_3$	$2n_4$	$3n_5$

On a donc :

$$\begin{aligned} n'_v &= n_v + 2n_1 + n_2 + n_4 + 2n_5 \\ n'_c &= 4n_1 + 2n_2 + n_3 + 2n_4 + 3n_5 \end{aligned}$$

### 1.2.2 3-SAT $\propto$ 2-SAT ?

Cette réduction repose sur un principe qui consiste à décomposer une clause de taille  $k$  en plusieurs clauses de tailles inférieures.

Soit une clause  $c = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$  une clause de taille 3 et  $I$  une interprétation qui satisfait  $c$ .

**Cas 1 :** décomposons cette clause en deux clauses  $c_1$  et  $c_2$  de tailles 1 et 2 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT  $\leftrightarrow$  2-SAT, il faut ajouter une variable  $v$  aux deux clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v) \\ c_2 &= (l_2 \vee l_3 \vee \neg v) \end{aligned}$$

On a donc la clause  $c_2$  de taille 3.

**Cas 2 :** décomposons cette clause en trois clauses  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  de taille 1 :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1) \\ c_2 &= (l_2) \\ c_3 &= (l_3) \end{aligned}$$

Pour montrer l'équivalence 3-SAT  $\leftrightarrow$  2-SAT, il faut ajouter deux variables  $v_1$  et  $v_2$  aux trois clauses créées :

$$\begin{aligned} c_1 &= (l_1 \vee v_1 \vee \neg v_2) \\ c_2 &= (l_2 \vee \neg v_1 \vee v_2) \\ c_3 &= (l_3 \vee v_1 \vee v_2) \end{aligned}$$

On a donc également des clauses de taille 3. La réduction définie ci-avant ne permet donc pas la réduction de 3-SAT vers 2-SAT.

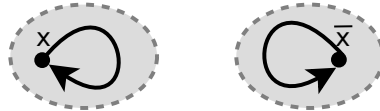
### 1.2.3 2-SAT, un problème polynomial

(a) Systèmes de deux clauses à deux littéraux :

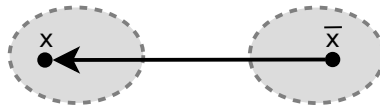
**Insatisfiable** :  $(x \vee x) \wedge (\neg x \vee \neg x)$



**Valide** :  $(x \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee x)$



**Contingent** :  $(x \vee x) \wedge (x \vee x)$



Insatisfaisabilité du premier ensemble de clauses est clairement visible sur le graphe car les sommets  $x$  et  $\neg x$  sont dans la même composante fortement connexe.

Le deux autres ensembles sont satisfiables, les deux sommets ne sont pas dans la même composante fortement connexe.

(b) L'algorithme suivant permet la génération du graphe correspondant à l'ensemble de clauses passé en paramètres, que nous appellerons graphe de satisfaction :

---

**Algorithme 1:** GrapheSatisfaction( $\mathcal{C}, \mathcal{V}$ )

---

**Données :**

$\mathcal{C}$  // Ensemble de clauses

$\mathcal{V}$  // Ensemble des variables

**1 début**

**2**    Graphe. $\mathcal{S} = \emptyset$ ; // Ensemble des sommets du graphe

**3**    Graphe. $\mathcal{A} = \emptyset$ ; // Ensemble des arcs du graphe

**4**    // Initialisation des sommets

**5**    **pour tous les**  $v \in \mathcal{V}$  **faire**

**6**       ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $v$ );

**7**       ajouter(Graphe. $\mathcal{S}$ ,  $\neg v$ );

**8**    // Parcours des clauses

**9**    **pour tous les**  $c \in \mathcal{C}$  **faire**

**10**       ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.x, c.y)$ );

**11**       ajouter(Graphe. $\mathcal{A}$ ,  $(\neg c.y, c.x)$ );

**12**    **retourner** Graphe;

---

Cet algorithme effectue un parcours de  $\mathcal{V}$  et un parcours de  $\mathcal{C}$ , sa complexité est donc  $O(|\mathcal{C}| + |\mathcal{V}|)$ .

(d) Les composantes fortement connexes du graphe de satisfaction généré, ainsi

que leur ordre topologique, peuvent être calculées par l'algorithme de Tarjan.

---

**Algorithme 2:** Tarjan\_Main( $G$ )

---

**Données :**  $G$  // Le graphe

```

1 début
2   date  $\leftarrow 0$ ;
3   pour tous les  $s \in G.S$  faire
4     DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow 0$ ;
5     CFC[ $s$ ]  $\leftarrow 0$ ;
6   Pile  $\leftarrow \emptyset$ ;
7   numCFC  $\leftarrow 0$ ;
8   pour tous les  $s \in G.S$  faire
9     si DEBUT[ $s$ ] = 0 alors
10      Tarjan_Rec( $s$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC);
11 retourner Comp;

```

---



---

**Algorithme 3:** Tarjan\_Rec( $s$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC)

---

**Données :**

$s$  // Le sommet

date // Date de visite du sommet courant

DEBUT // Tableau de dates de visites pour chaque sommet

Pile // Pile de sommets

numCFC // Numéro de la CFC

CFC // Liste des CFC

```

1 début
2   date  $\leftarrow$  date+1;
3   DEBUT[ $s$ ]  $\leftarrow$  date;
4   min  $\leftarrow$  DEBUT[ $s$ ];
5   Empiler(Pile,  $s$ );
6   pour tous les  $v \in Adj[s]$  faire
7     si DEBUT[ $v$ ] = 0 alors
8       min  $\leftarrow$ 
9         MIN(min, Tarjan_Rec( $v$ , date, DEBUT, Pile, numCFC, CFC));
10    sinon si CFC[ $v$ ] = 0 alors
11      min  $\leftarrow$  MIN(min, DEBUT[ $v$ ]);
12  si min = DEBUT[ $s$ ] alors
13    Ncfc  $\leftarrow$  numCFC + 1;
14  répéter
15     $k \leftarrow$  Depiler(Pile);
16    CFC[ $k$ ]  $\leftarrow$  numCFC;
17  jusqu'à  $k \neq s$ ;
18 retourner Comp;

```

---

L'algorithme **Tarjan\_Main** initialise la date de visite de chaque sommet à zéro. On constate que les deux algorithmes exécutent **Tarjan\_Rec** uniquement sur des sommet dont la date de première visite est nulle. Or chaque

appel à `Tarjan_Rec` affecte une date de visite supérieure à zéro au sommet courant. `Tarjan_Rec` est donc appelé exactement une fois par sommet.

De même, un sommet n'est empilé qu'à l'exécution de `Tarjan_Rec`, donc chaque sommet ne sera empilé (et donc dépilé) qu'une seule fois. La boucle de l'algorithme `Tarjan_Rec` (ligne 13) a une complexité globale en  $O(|V|)$ .

En revanche, la boucle ligne 6 est effectuée une fois pour chaque voisin du sommet courant, donc  $|V|$  fois au pire pour chaque appel. `Tarjan_Rec` n'étant appelée que  $|V|$  fois en totale on arrive donc à une complexité de  $O(|V|^2)$ .

Dans le pire des cas le nombre de variables d'une instance de 2-SAT est égale à deux fois le nombre de clauses (chaque clause comportant dans ce cas deux variables uniques). Or notre conversion génère deux sommets par variable. La complexité de l'algorithme en fonction du nombre de clauses est donc de  $O(|C|^2)$ .

- (e) Nous passerons par la double-implication pour montrer l'équivalence entre le problème 2-SAT et le tri topologique dans notre graphe de satisfaction. Avant de commencer, notons que les arcs dans le graphe de satisfaction correspondent à des implications. En effet on ajoute un arc de  $x$  vers  $!x$  ...  
blah blah

– **Tri topologique  $\Rightarrow$  2-SAT**

Étant donnée les composantes fortement connexes (CFC) du graphe étiqueté on peut vérifier linéairement en le nombre de sommets du graphe qu'on a une variable ensemble avec sa négation.

Dans un tel cas

donc une instance 2-SAT insatisfiable. Si par contre n'a pas de variables ensembles avec leurs négative dans le même CFC il suffit de prendre l'ordre topologique calculée dans l'ordre inverse et d'affecter les variables de chaque composant comme précisée dans l'article. Nous finissons alors ou une affectation modèle, ou l'affirmation de l'insatisfiabilité de la forme normale conjonctive. Un tri topologique de notre graphe étiqueté permet donc de résoudre le problème 2-SAT.

– **2-SAT  $\Rightarrow$  Tri topologique**

### 1.3 Calculabilité

1. La stratégie d'énumération des couples d'entier peut être visualisée sur un graphique en suivant les diagonales successives comme sur l'image<sup>1</sup> suivante :

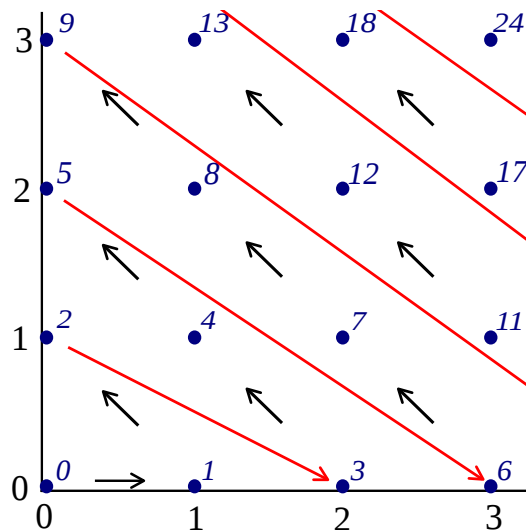


FIGURE 1.1 – La fonction de couplage de Cantor établit une bijection de  $\mathbb{N} * \mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$  un couple. On trie par ordre lexicographique  $(x + y)$ . Ainsi on obtient le tableau suivant :

$(x, y)$	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)	...
$(x + y)$	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	...
$c_2(x + y)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

#### 2. Fonction de codage

$$c_2(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$$

**Fonctions de décodage** Les fonctions de décodage ne peuvent pas être décrites sous la forme de formules arithmétiques. Elles nécessitent

<sup>1</sup>. Image provenant de Wikipedia, ce fichier est disponible selon les termes de la licence Creative Commons.

l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 4:** CalculXY( $z$ )

---

**Données :**  $z$  // Rang du couple  $(x, y)$

```

1 début
2    $s \leftarrow 0$ ;
3    $t \leftarrow 0$ ;
4   tant que  $s \leq z$  faire
5      $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
6      $t \leftarrow t + 1$ ;
7    $t \leftarrow t - 2$ ;
8    $s \leftarrow \frac{t*(t+1)}{2}$ ;
9    $y \leftarrow z - s$ ;
10   $x \leftarrow t - y$ ;
11  retourner Couple( $x, y$ );

```

---

3. **Codage des triplets** : il peut avoir lieu de manière récursive :

$$c_3(x, y, z) = c_2(x, c_2(y, z))$$

**Généralisation au codage des k-uplets** :

$$c_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_2(x_1, c_{k-1}(x_2, \dots, x_k))$$

$$\text{Avec : } c_2(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$$

4. Prenons une suite  $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  qui énumère les réels de l'intervalle  $[0; 1]$ , puis créons un réel  $x$  compris dans cet intervalle, tel que si la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $r_n$  est égale à 1, la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $x$  est égale à 2. Dans la cas contraire, la  $n^{\text{ième}}$  décimale de  $x$  est égale à 1.

On obtient sur cet exemple :

$r_1$	=	0	,	<b>4</b>	2	9	6	4	6	1	...
$r_2$	=	0	,	2	<b>7</b>	3	2	9	4	0	...
$r_3$	=	0	,	6	4	<b>1</b>	1	5	1	2	...
$r_4$	=	0	,	3	0	5	<b>9</b>	0	4	3	...
$r_5$	=	0	,	9	1	3	3	<b>1</b>	8	2	...
$r_6$	=	0	,	0	2	0	8	3	<b>2</b>	7	...
$r_7$	=	0	,	2	5	7	3	6	4	<b>0</b>	...
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
				$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$x$	=	0	,	1	1	2	1	2	1	1	...

Le réel  $x$  ne peut pas être énuméré par la suite  $r$  car il diffère de sa première décimale dans  $r_1$ , de sa deuxième décimale dans  $r_2$ , ... de sa  $n^{\text{ième}}$  décimale dans  $r_n$ . Pourtant le réel  $x$  est clairement dans l'intervalle  $[0; 1]$ .

L'ensemble des éléments de l'intervalle  $[0; 1]$  n'est donc pas dénombrable, donc pas énumérable. On ne peut donc pas trouver de fonction de codage pour cet ensemble.

On peut généraliser à l'ensemble  $\mathbb{R} : [0; 1]$  étant inclus dans  $\mathbb{R}$ , et  $[0; 1]$  n'étant pas dénombrable, l'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.



## Chapitre 2

### Partie pratique