Цифровая обработка сигналов

Лабораторная работа № 2

Линейные дискретные системы

Содержание

Цель работы

Изучить математическое описание линейных дискретных систем и овладеть программными средствами их моделирования и анализа в MATLAB.

Содержание работы

1. Способы математического описания линейных дискретных систем.
2. Характеристики линейных дискретных систем.
3. Влияние параметров ЛДС на характеристики.

Краткие сведения из теории

Базовые понятия и определения

Системой обработки сигналов (*системой*) называется объект, выполняющий требуемое преобразование входного сигнала (воздействия) в выходной (реакцию).

В соответствии с определением, системой можно называть как физическое устройство, так и математическое преобразование. По умолчанию под системой будем понимать *математическое преобразование*.

Математической моделью системы называют ее соотношение *вход/выход*, которое устанавливает связь между входным и выходным сигналами.

Систему называют *линейной*, если она отвечает условиям *аддитивности* или *принцип суперпозиции* (реакция на сумму воздействий равна сумме реакций на данные воздействия) и *однородности* (воздействию, умноженному на весовой коэффициент, соответствует реакция, умноженная на тот коэффициент).

Систему называют дискретной, если она преобразует дискретное воздействие $x(n)$ в дискретную реакцию $y(n)$.

Систему называют *стационарной*, если ее реакция инвариантна по отношению к началу отсчета времени (*свойство инвариантности во времени*). Параметры стационарной системы *неизменны во времени* – задержке воздействия соответствует такая же задержка реакции.

По умолчанию будем рассматривать стационарные линейные дискретные системы (ЛДС).

Нулевые начальные условия (ННУ) означают, что все значения воздействия и реакции, которые может помнить ЛДС в моменты времени, предшествующие началу воздействия (в нормированном времени, здесь и далее) $n = 0$, равны нулю.

В ЛДС с одним входом и одним выходом соотношение вход/выход представляет собой *линейное* математическое преобразование, вид которого однозначно связан с *основной характеристикой* ЛДС во временной области или в z-области.

Под *моделированием* ЛДС понимают вычисление ее реакции в соответствии с соотношением вход/выход, а под *анализом* ЛДС — анализ ее характеристик во временной, z- и частотной областях.

Описание ЛДС в линейной области

Основной характеристикой ЛДС во временной области является импульсная характеристика (ИХ).

Импульсной характеристикой h(n) ЛДС называют ее реакцию на цифровой единичный импульс $u_0(n)$ при ННУ

$$u_0(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}. \tag{1}$$

Соотношение вход/выход ЛДС, однозначно связанное с его основной характеристикой во временной области — ИХ, имеет вид линейного математического преобразования в виде *формулы свертки*:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{\infty} h(n-m)\,x(m)=\sum_{m=0}^{\infty} h(m)\,x(n-m). \tag{2}$$

Соотношение вход/выход ЛДС, однозначно связанное с его основной характеристикой в z-области — передаточной функцией (см. далее), имеет вид линейного математического преобразования в виде разностного уравнения (РУ):

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i)-\sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k). \qquad (3)$$

В отличие от линейных аналоговых систем, где соответствующие соотношения вход/выход имеют вид интеграла свертки или линейного дифференциального уравнения, вычисление реакции по формуле свертки (2) или РУ (3) выполняется методом прямой подстановки при ННУ, т. е. эти соотношения непосредственно описывают алгоритмы вычисления реакции (строго говоря, при использовании (2), только в случае так называемой *конечной импульсной характеристики* (КИХ)).

По виду РУ различают два типа ЛДС:

- *рекурсивная ЛДС*, реакция которой зависит от текущего и предшествующих отсчетов воздействия и предшествующих отсчетов реакции, т. е.:

  $a_k \neq 0$ хотя бы для одного значения k;

- нерекурсивная ЛДС, реакция которой зависит только от текущего и предшествующих отсчетов воздействия, т. е.:

  $a_k = 0$ для всех k.

Рекурсивные и нерекурсивные ЛДС имеют соответственно *бесконечную* и *конечную* ИХ, отсюда их тождественные названия:

- БИХ ЛДС (IIR — Infinite Impulse Response);
- КИХ ЛДС (FIR — Finite Impulse Response).

Импульсная характеристика КИХ ЛДС совпадает с коэффициентами b_i РУ (3):

$$h(n)=b_i, \quad n=i \qquad (4)$$

В MATLAB вычисление реакции по формуле свертки (2) выполняется с помощью функции:

```
y = conv(h,x)
```

где h — вектор отсчетов ИХ длины N_1; бесконечная ИХ рекурсивной ЛДС ограничивается до конечной длины; x — вектор отсчетов воздействия длины N_2; y — вектор отсчетов реакции длины $L=N_1+N_2-1$ (длина свертки).

Вычисление реакции по РУ (8.2) выполняется с помощью функции:

```
y = filter(b,a,x)
```

где b, a — векторы коэффициентов $[b_0, b_1, \ldots, b_{N-1}]$ и $[1, a_1, a_2, \ldots, a_{M-1}]$; x — вектор отсчетов воздействия; y — вектор отсчетов реакции с длиной, равной длине воздействия.

Обратим внимание на то, что коэффициенты a_k записываются без учета знака "минус", стоящего перед суммой в РУ (3).

Импульсная характеристика вычисляется с помощью функции:

```
h = impz(b,a,N)
```

где b, a — определены ранее для функции filter; N — количество отсчетов (длина) ИХ; h — вектор отсчетов ИХ.

Импульсная характеристика может также вычисляться с помощью функции filter, если в качестве воздействия используется цифровой единичный импульс (1).

Описание ЛДС в *z*-области

Основной характеристикой ЛДС в *z*-области является передаточная функция $H(z)$ — *z*-изображение ИХ $h(n)$:

$$H(z)=\sum_{n=1}^{\infty} h(n) z^{-n}.$$

Передаточной функцией ЛДС называют отношение *z*-изображения реакции к *z*-изображению воздействия при ННУ:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Данное отношение легко получить, выполнив Z-преобразование РУ (3). Передаточная функция рекурсивной ЛДС имеет вид дробно-рациональной функции:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1+\sum_{k=0}^{M-1} a_k z^{-k}}. \qquad (5)$$

Показатель степени z^{-i} соответствует задержкам воздействия, а z^{-k} — задержкам реакции; коэффициенты a_k передаточной функции и РУ (3) имеют противоположные знаки.

Для *нерекурсивных* ЛДС передаточная функция, с учетом (4), принимает вид:

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}.$$

Порядок рекурсивной ЛДС равен порядку знаменателя передаточной функции (5) $(M-1)$ − при соблюдении условия $(N-1)<(M-1)$ (по умолчанию).

Порядок нерекурсивной ЛДС равен $(N-1)$.

Нулями передаточной функции называют значения z, при которых она равна нулю, а *полюсами* (особыми точками) — значения *z*, при которых ее знаменатель равен нулю.

Картой нулей и полюсов называют *z*-плоскость с нанесенной единичной окружностью и символически изображенными нулями и полюсами.

По карте нулей и полюсов можно сделать вывод об устойчивости ЛДС: полюсы устойчивой ЛДС располагаются внутри единичного круга [1].

Комплексно сопряженные нули $z_{\circ k\,1,2}$ и полюсы $z_{*k\,1,2}$ представляют в показательной форме, где аргументы — углы (в радианах) на комплексной z-плоскости:

$$\begin{cases} z_{\circ k\,1,2} = r_{\circ k} e^{\pm j\varphi_{\circ k}} \\ z_{*k\,1,2} = r_{*k} e^{\pm j\varphi_{*k}} \end{cases}.$$

Помимо общего вида (8.4), передаточная функция рекурсивных ЛДС может быть представлена следующими своими разновидностями (представленными в MATLAB стандартными функциями):

- произведение простейших множителей:

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{M-1} \frac{(1 - z_{\circ k} z_{-1})}{(1 - z_{*k} z_{-1})}, \tag{6}$$

  где $z_{\circ k}, z_{*k}$ — соответственно *k*-е нуль и полюс передаточной функции (5).
  В общем случае нули и полюсы — попарно комплексно сопряженные числа;
- произведение множителей второго порядка:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{L} \frac{b_{0k} + \widetilde{b}_{1k} z^{-1} + \widetilde{b}_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}, \tag{7}$$

  где $b_{0k}, \widetilde{b}_{1k}, \widetilde{b}_{2k}, a_{1k}, a_{2k}$ — вещественные коэффициенты рекурсивных звеньев 2-го порядка, называемых также *биквадратными*; L — количество звеньев, равное

$$L = \mathrm{int}\left(\frac{M-1}{2}\right)$$

  где int — функция округления до ближайшего целого в сторону увеличения.
  В MATLAB используется представление передаточной функции (7) в эквивалентном виде, получаемом при вынесении за скобки коэффициентов b_{0k} :

$$H(z)=G\prod_{k=1}^{L}\frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}},\qquad(8)$$

где $G=b_{01}\cdot b_{02}\cdot\ldots\cdot b_{0L}$ — коэффициент усиления, а соответствующие коэффициенты связаны соотношениями: $b_{1k}=\widetilde{b}_{1k}/G, b_{2k}=\widetilde{b}_{2k}/G$;

- сумма простых дробей:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}H_k(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\frac{A_k}{1-z_{*k}z^{-1}}\qquad(9)$$

где z_{*k} — простой (не кратный) k-й полюс передаточной функции (5); A_k —коэффициент разложения при k-м полюсе; A_k и z_{*k} — всегда числа одинакового типа, комплексные или вещественные.

При одинаковых порядках числителя и знаменателя $(M-1)=(N-1)$ в (5) будем иметь в (9) целую часть — вещественную константу C:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{M-1}H_k(z)=\sum_{k=1}^{M-1}\frac{A_k}{1-z_{*k}z^{-1}}+C\qquad(10)$$

В MATLAB для представления передаточной функции (8.4) в виде произведения простейших множителей (8.7) используется функция:

```
[q,p,K] = tf2zpk(b,a)
```

где `b`, `a` — векторы коэффициентов числителя $[b_0,b_1,\ldots,b_{N-1}]$ и знаменателя $[1,a_1,a_2,\ldots,a_{M-1}]$ передаточной функции (5); `q`, `p` — векторы-столбцы нулей $z_{\circ k}$ и полюсов z_{*k} передаточной функции (6), представленные в алгебраической форме; `K` — коэффициент усиления b_0 в (6).

Представление передаточной функции (5) в виде произведения множителей второго порядка (7) выполняется с помощью функции:

```
[s,G] = tf2sos(b,a)
```

где `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk`; `G` — коэффициент усиления G в (8); `s` — матрица коэффициентов числителей и знаменателей биквадратных звеньев передаточной функции (8) в виде:

$$\begin{bmatrix} 1\ b_{11}\ b_{21}\ 1\ a_{11}\ a_{21} \\ 1\ b_{12}\ b_{22}\ 1\ a_{12}\ a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1\ b_{1L}\ b_{2L}\ 1\ a_{1L}\ a_{2L} \end{bmatrix}$$

Для представления передаточной функции (5) в виде суммы простых дробей (10) применяется функция:

```
[r,p,c] = residuez(b,a)
```

где `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk`; `r`, `p` — векторы-столбцы коэффициентов разложения A_k и полюсов z_{*k} в (10), представленные в алгебраической форме; `c` — целая часть C в (10); при ее отсутствии выводится пустая матрица `c=[]`.

Карта нулей и полюсов передаточной функции выводится с помощью функции:

```
zplane(b,a)
```

Описание ЛДС в частотной области

Основной характеристикой ЛДС в частотной области является частотная характеристика (ЧХ) $H(e^{j\hat{\omega}})$ — Фурье-изображение ИХ $h(n)$:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-j\hat{\omega}n},$$

где $\hat{\omega}$ — нормированная частота:

$$\hat{\omega} = \omega T \text{ (рад)}. \tag{8.13}$$

Частотная характеристика $H(e^{j\hat{\omega}})$ связана с передаточной функцией $H(z)$ соотношением:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\hat{\omega}}}, \tag{8.14}$$

что позволяет путем подстановки $z = e^{j\hat{\omega}}$ в (8.4) получить ее в виде:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N-1} b_i e^{-ji\hat{\omega}}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{M-1} a_k e^{-jk\hat{\omega}}}, \tag{8.15}$$

Частотную характеристику $H(e^{j\hat{\omega}})$ (8.15) можно представить в показательной форме:

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \left|H(e^{j\hat{\omega}})\right| e^{j\arg\left\{H(e^{j\hat{\omega}})\right\}} = A(\hat{\omega})\,e^{j\varphi(\hat{\omega})}. \tag{8.16}$$

Модуль $A(\hat{\omega})$ и аргумент $\varphi(\hat{\omega})$ частотной характеристики соответствуют амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам ЛДС.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) отображает частотную зависимость отношения амплитуды реакции к амплитуде гармонического воздействия в установившемся режиме.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) отображает частотную зависимость разности фаз реакции и гармонического воздействия в установившемся режиме.

АЧХ и ФЧХ — *периодические* функции с периодом 2π в шкале частот $\hat{\omega}$ или $f_{д}$ в шкале частот f (Гц).

АЧХ — *четная*, а ФЧХ — *нечетная* функция частоты.

АЧХ и ФЧХ рассчитываются в *основной полосе частот* $[0;\ \pi]$ в шкале частот $\hat{\omega}$ или $\left[0;\ f_{д}/2\right]$ в шкале частот f (Гц).

По карте нулей и полюсов можно определить местоположение максимумов, минимумов и нулей АЧХ в основной полосе частот $[0;\ \pi]$, а именно:

- ❒ частота комплексно сопряженного *полюса* $\hat{\omega}_{*k}$, где $\hat{\omega}_{*k} = \varphi_{*k}$ в (8.6), соответствует частоте *максимума* АЧХ (приблизительно);
- ❒ частота комплексно сопряженного *нуля* $\hat{\omega}_{\circ k}$, где $\hat{\omega}_{\circ k} = \varphi_{\circ k}$ в (8.6), соответствует частоте *минимума* АЧХ (приблизительно), если $r_{\circ k} \neq 1$, или *нуля* АЧХ, если $r_{\circ k} = 1$ (комплексно сопряженные нули на единичной окружности); в точке нуля АЧХ наблюдается скачок ФЧХ на π;
- ❒ *вещественным* нулям $z_{\circ k} = 1$ и/или $z_{\circ k} = -1$ (на единичной окружности) соответствует нуль АЧХ на границе основной полосы частот 0 и/или π.

В MATLAB частотная характеристика (8.15) вычисляется с помощью функции `freqz` одного из следующих форматов:

```
H = freqz(b,a,f,Fs)
H = freqz(b,a,w)
H = freqz(b,a,N)
```

где: `b`, `a` — определены ранее для функции `tf2zpk` *(см. разд. 8.1.2)*; `f` — вектор частот в герцах; `Fs` — частота дискретизации $f_д$ (Гц); `w` — вектор нормированных частот $\hat{\omega}$ (рад); `N` — количество точек ЧХ; в отсутствии параметра по умолчанию `N = 512`; `H` — вектор комплексных значений ЧХ.

Модуль частотной характеристики (АЧХ) определяется с помощью функции `abs(H)`, а аргумент (ФЧХ) — с помощью функции `angle(H)` (см. табл. 1.4).

Порядок выполнения работы

Задание на лабораторную работу связано с моделированием рекурсивного звена 2-го порядка и анализом его характеристик и включает в себя следующие пункты:

1. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h1`) длины N_1 с помощью функции `impz` с выводом графика.
2. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h2`) с помощью функции `filter` с выводом графика.
3. Вычисление реакции $y_1(n)$ (идентификатор `y1`) по формуле свертки.
   В качестве воздействия $x_1(n)$ длины N_2 выбрать дискретный прямоугольный импульс (идентификатор `x`), реализуемый вспомогательной функцией `input_1` (см. далее)
   Вывести график воздействия $x_1(n)$ и два графика реакции $y_1(n)$ с длиной L, равной длине свертки L , и длиной, ограниченной до длины воздействия.
4. Вычисление реакции $y_2(n)$ (идентификатор `y2`) по разностному уравнению.
5. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения простейших множителей.
6. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения множителей второго порядка.
7. Вычисление параметров передаточной функции в виде суммы простых дробей.
8. Вывод карты нулей и полюсов.
9. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале нормированных частот.
10. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале абсолютных частот.
11. Анализ влияния нулей и полюсов на вид АЧХ.

12. Выполнить задание на самостоятельную работу

Указания по выполнению работы

Базовая часть работы

Исходные данные для пунктов задания определяются по таблице 1 с учетом номера бригады $N_{бр}$, где $N_{бр}=1,2,...,30$.

Коэффициенты b_0, b_1, b_2 и a_1, a_2 передаточной функции звена 2-го порядка

$$1\ H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}$$

рассчитываются с точностью до четырех значащих цифр.

В расчетном файле MATLAB следует определить следующие переменные:

```
% 1. Коэффициенты числителя передаточной функции
b0=0.5;
b1=b0*0.982;
b2=b0*0.8;
b = [b0, b1, b2];
% 2. Коэффициенты знаменателя передаточной функции
a0=1;
a1=0.7788;
a2=0.64;
a = [a0, a1, a2];
% 3. Длина ИХ
N1=20;
% 4. Длина воздействия
N2=30;
% 5. Частота дискретизации
```

```
Fs=1000;
```

1. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h1`) длины N_1 с помощью функции `impz` с выводом графика может быть выполнено с использованием следующего кода

```
h1 = impz(b,a,N1);          % импульсная характеристика
n = 0:(N1-1);               % нормированное время
figure('Name', 'Импульсная характеристика');
subplot(2,1,1);
stem(n,h1,'fill','MarkerSize',3), grid;
xlabel('n'), ylabel('h(n)'), title('ИХ - impz')
```

2. Вычисление импульсной характеристики (идентификатор `h2`) с помощью функции `filter` с выводом графика может быть выполнено с использованием следующего кода

```
u0 = [1, zeros(1, (N1-1))];
h2 = filter(b, a, u0);
subplot(2,1,2);
stem(n,h2,'fill','MarkerSize',3), grid;
xlabel('n'), ylabel('h(n)'), title('ИХ — filter')
```

Сравнить результаты вычислений импульсной характеристики двумя методами.

3. Для вычисления реакции $y_1(n)$ (идентификатор `y1`) по формуле свертки можно использовать следующий код

```
x = input_1(N2);      % воздействие (дискретный прямоугольный импульс)
y1 = conv(x,h1);      % реакция (длина равно длине свертки)
```

В качестве воздействия $x_1(n)$ длины N_2 здесь используется дискретный прямоугольный импульс (идентификатор `x`), реализуемый вспомогательной функцией `input_1` (см. далее)

Следует вывести график воздействия $x_1(n)$ и два графика реакции $y_1(n)$ с длиной L, равной длине свертки L, и длиной, ограниченной до длины воздействия.

```
L = N1+N2-1;            % длина свертки
n = 0:(N2-1);           % дискретное нормированное время для воздействия
n1 = 0:(L-1);           % дискретное нормированное время для свертки
figure('Name','Входной и выходной сигналы','NumberTitle', 'off')
subplot(4,1,1);
stem(n,x,'fill','MarkerSize',3), grid;
xlabel('n'), ylabel('x(n)');
title('Входной — дискретный прямоугольный импульс');
subplot(4,1,2);
stem(n1,y1,'fill','MarkerSize',3), grid;
xlabel('n'), ylabel('y(n)');
title('Выходной сигнал — conv (length = L)')
subplot(4,1,3);
stem(n,y1(1:N2),'fill','MarkerSize',3), grid;
xlabel('n'), ylabel('y1(n)');
title('Выходной сигнал y1(n) — conv (length = N2)');
```

4. Вычисление реакции $y_2(n)$ (идентификатор y2) по разностному уравнению выполняется при помощи функции filter

```
y2 = filter(b,a,x);
subplot(4,1,4);
stem(n,y2,'fill','MarkerSize',3), grid
xlabel('n'), ylabel('y(n)')
title('Выходной сигнал y2(n) — filter (length = N2)');
```

5. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения простейших множителей и вывод их значений в алгебраической и показательной формах можно осуществить при помощи следующего кода

```
[q,p,K] = tf2zpk(b,a) % нули (q) и полюсы (p) в алгебраической форме и
коэффициент усиления (K)
 rq = abs(q)    % модули комплексно сопряженных нулей
 wq = angle(q) % аргументы комплексно сопряженных нулей
 %
 rp = abs(p)    % модули комплексно сопряженных полюсов
 wp = angle(p) % аргументы комплексно сопряженных полюсов
```

В отчете следует привести явный вид передаточной функции согласно (6).

6. Вычисление параметров передаточной функции в виде произведения множителей второго порядка может быть выполнено с помощью следующего кода

```
[s,G] = tf2sos(b,a) % коэффициенты (s) и коэффициент усиления (G)
```

Следует также привести соответствующий вид передаточной функции в отчете.

7. Вычисление параметров передаточной функции в виде суммы простых дробей выполняется с помощью кода

```
[r,p,c] = residuez(b,a) % коэффициенты разложения (r) и полюсы (p)
                        % в алгебраической форме и целая часть (c) (c)
rr = abs(r)     % модули комплексно-сопряженных коэффициентов разложения
wr = angle(r)   % аргументы комплексно сопряженных коэффициентов
```

Также привести соответствующий вид передаточной функции в отчете.

8. Вывод карты нулей и полюсов.

```
figure('Name',' Z-plane zero-pole plot','NumberTitle', 'off')
zplane(b,a), title('Z-plane zero-pole plot'), grid
xlabel('Re'), ylabel('jIm')
```

Пояснить:

- является ли рекурсивное звено устойчивым;
- совпадают ли значения нулей и полюсов с вычисленными в п. 5.

9. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале нормированных частот.

```
w = 0:pi/100:pi;           % вектор нормированных частот (рад)
H_w = freqz(b,a,w);        % комплексный коэффициент передачи
MAG_w = abs(H_w);          % АЧХ
PHASE_w = angle(H_w);      % ФЧХ
figure('Name','Magnitude and Phase Responses','NumberTitle', 'off')
subplot(2,2,1);
plot(w,MAG_w), grid;
xlabel('w (rad)'), title('MAGNITUDE —|H(w)|')
subplot(2,2,3);
plot(w,PHASE_w), grid;
xlabel('w (rad)'), title('PHASE — arg[H(w)] (rad)')
```

Пояснить:

- чему равны границы основной полосы частот;
- соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ;
- какому значению АЧХ соответствует скачок на π , если он имеется;
- какие частотные составляющие воздействия, низкие или высокие, оказались преимущественно подавленными в реакции.

10. Вычисление АЧХ и ФЧХ в шкале абсолютных частот.

```
f = 0:Fs/100:Fs/2;         % Вектор абсолютных частот (Гц)
H = freqz(b,a,f,Fs);       % Комплексный коэффициент усиления
MAG = abs(H);              % АЧХ
PHASE = angle(H);          % ФЧХ
subplot(2,2,2);
```

```
plot(f,MAG), grid, xlabel('f (Hz)'), title('MAGNITUDE — |H(f)|')
subplot(2,2,4);
plot(f,PHASE), grid, xlabel('f (Hz)'), title('PHASE — arg [H(f)] (rad)')
```

11. Анализ влияния нулей и полюсов на вид АЧХ.

    В отдельных полях одного графического окна вывести карты нулей и полюсов и соответствующие нормированные АЧХ (идентификатор MAGN) в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$ для различных вариантов коэффициентов передаточной функции, заданных в таблице 2.

    Для одновременного вычисления нормированных АЧХ при четырех вариантах коэффициентов, коэффициенты числителей и знаменателей представляются в виде матриц размером 4×3.

```
b(1,:) = [1 0 0];    % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧИСЛИТЕЛЯ — 1-я СТРОКА МАТРИЦЫ
b(2,:) = [1 0 0];    % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧИСЛИТЕЛЯ — 2-я СТРОКА МАТРИЦЫ
b(3,:) = [1 0 0];    % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧИСЛИТЕЛЯ — 3-я СТРОКА МАТРИЦЫ
b(4,:) = [1 1 0];    % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЧИСЛИТЕЛЯ — 4-я СТРОКА МАТРИЦЫ
a(1,:) = a;          % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗНАМЕНАТЕЛЯ — 1-я СТРОКА МАТРИЦЫ
a(2,:) = [1 -a(1,2) a(1,3)]; % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗНАМЕНАТЕЛЯ — 2-я СТРОКА МАТРИЦЫ
a(3,:) = [1 a(1,2) 1.2*a(1,3)];   % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗНАМЕНАТЕЛЯ — 3-я СТРОКА МАТРИЦЫ
a(4,:) = [1 a(1,2) a(1,3)];   % КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗНАМЕНАТЕЛЯ — 4-я СТРОКА МАТРИЦЫ
w = 0:pi/100:pi;     % ВЕКТОР НОРМИРОВАННЫХ ЧАСТОТ (РАД)
for i=1:4
    H3(:,i) = freqz(b(i,:),a(i,:),w); % ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА — i-й СТОЛБЕЦ
МАТРИЦЫ
    MAG3(:,i) = abs(H3(:,i)); MAX(:,i) = max(MAG3(:,i)); % АЧХ — i-й СТОЛБЕЦ
МАТРИЦЫ — И МАКСИМУМ АЧХ
    MAGN(:,i) = MAG3(:,i)/MAX(:,i); % НОРМИРОВАННАЯ АЧХ — i-й СТОЛБЕЦ МАТРИЦЫ
end
figure('Name','Z-plane zero-pole plots and Normalized Magnitudes','NumberTitle',
'off')
```

```
for i = 1:4
    subplot(4,2,2*i-1), zplane(b(i,:),a(i,:)), title('Z-plane zero-pole plot'),
    grid
    xlabel('Re'), ylabel('jIm')
    subplot(4,2,2*i), plot(w,MAGN(:,i)), grid
    xlabel('w (rad)'), title('Normalized Magnitude A(w)')
end
```

Пояснить соответствие между картой нулей и полюсов и видом АЧХ.

Вспомогательная функция input_1

```
function x = input_1(N)
%Формирование воздействия x длины N
for n = 0:(N-1)
    if n<round(N/2)
        x(n+1) = 1;
    else
        x(n+1) = 0;
    end
end
```

Самостоятельная работа

Задание на самостоятельную работу заключается в создании function-файлов для моделирования и анализа характеристик двух последовательно соединенных рекурсивных звеньев 2-го порядка.

В качестве исходных данных использовать коэффициенты передаточной функции для номера бригады $N_{бр}$ и следующего за ним; для номера бригады $N_{бр}=30$ второй вариант соответствует $N_{бр}=1$.

При создании function-файлов представить коэффициенты числителей и знаменателей звеньев в виде двух матриц размером 2×3 (см. аналогично в п. 11 script-файла) и организовать ввод строк каждой из матриц с клавиатуры.

Пункты самостоятельного задания включают в себя:

1. Вычисление и вывод графиков ИХ двух рекурсивных звеньев.

   Для вычисления ИХ использовать функцию `filter`. Задать большую длину воздействия, например 1000, и определить длину ИХ N_1 исходя из условия достижения заданной точности $\varepsilon=10^{-3}$ (итерационный цикл):

$$\| h(n) | - | h(n-1) \| \leqslant \varepsilon, n=0,1,\ldots,999$$

2. Вычисление реакции двух рекурсивных звеньев по формуле свертки на воздействие $x(n)$:

$$x(n)=\begin{cases} U, & n_0 \le n \le (n_0+n_{imp}-1); \\ 0, & 0 \le n < n_0;\ (n_0+n_{imp}) \le n \le (N-1). \end{cases}$$

При этом в качестве параметров взять следующие:

- начальный момент импульса: $n_0 = N_{бр} \bmod 5 + 3$;
- длина импульса: $n_{imp} = N_{бр} \bmod 5 + 5$;
- амплитуда импульса: $N_{бр}$.

Ограничить реакции до длины воздействия и вывести графики воздействия и реакций.

3. Вычисление реакции двух рекурсивных звеньев по РУ на воздействие $x(n)$.

   Вывести графики воздействия и реакций.

4. Вычисление АЧХ двух рекурсивных звеньев в шкале нормированных частот $\hat{\omega}$.

   В отдельных полях одного графического окна вывести карты нулей и полюсов и АЧХ рекурсивных звеньев.

Исходные данные

Таблица 1

Переменная	**Назначение**	**Значение**	**Идентификатор**
$N_{бр}$	Номер бригады	$N_{бр}$	`Nb =`
b_0 b_1 b_2	Коэффициенты числителя передаточной функции	$b_0 = 0,5 + 0,02 N_{бр}$ $b_1 = b_0 (-1)^{N_{бр}+1} (0,9822 + 0,0178 N_{бр})$ $b_2 = b_0 \left[0,8 + 0,2 (N_{бр} \bmod 5) \right]$	Вектор `b = [...]`
a_0 a_1 a_2	Коэффициенты знаменателя передаточной функции	$a_0 = 1$ $a_1 = (-1)^{N_{бр}} (0,7778 + 0,025 N_{бр})$ $a_2 = 0,64 + 0,006 N_{бр}$	Вектор `a = [1...]`
N_1	Длина ИХ	$N_1 = N_{бр} \bmod 10 + 20$	`N1 =`
N_2	Длина воздействия	$N_2 = N_{бр} \bmod 10 + 30$	`N2 =`
$f_д$	Частота дискретизации	$f_д = 1000 N_{бр}$	`Fs =`

Таблица 2

Вариант	**Векторы коэффициентов передаточной функции**	
	числителя	**знаменателя**
1	`[1 0 0]`	`[1 a1 a2]`
2	`[1 0 0]`	`[1 -a1 a2]`
3	`[1 0 0]`	`[1 a1 1.2*a2]`
4	`[1 1 0]`	`[1 a1 a2]`

Контрольные вопросы

1. Дайте определение ИХ.
2. Запишите формулу свертки.
3. Поясните, как в формуле свертки учитываются ННУ.
4. Запишите РУ общего вида.
5. Поясните, как в РУ учитываются ННУ.
6. Дайте определение рекурсивных и нерекурсивных ЛДС.
7. Поясните принципиальное отличие ИХ рекурсивных и нерекурсивных ЛДС.
8. Приведите тождественные названия рекурсивных и нерекурсивных ЛДС.
9. Дайте определение передаточной функции.
10. Запишите общий вид передаточной функции рекурсивной ЛДС.
11. Приведите основные разновидности передаточной функции рекурсивной ЛДС.
12. Запишите передаточную функцию нерекурсивной ЛДС.
13. Что такое нули и полюсы ЛДС?
14. Что такое карта нулей и полюсов?
15. Дайте определение устойчивости ЛДС.
16. Как определить, является ли ЛДС устойчивой?
17. Дайте определения АЧХ и ФЧХ.
18. Поясните связь частотной характеристики с передаточной функцией.
19. Перечислите основные свойства АЧХ и ФЧХ.
20. Приведите определение и поясните смысл нормированной частоты $\hat{\omega}$.
21. В какой полосе частот и почему рассчитывают АЧХ и ФЧХ?
22. Чем определяется местоположение максимумов АЧХ?

23. Чем определяется местоположение минимумов АЧХ?
24. Чем определяется местоположение нулей АЧХ?
25. В каких точках ФЧХ имеет скачок на π ?
26. Что отображает структура ЛДС и чем определяется ее вид?
27. Назовите четыре разновидности структур рекурсивного звена 2-го порядка.

Литература

1. Солонина А.И. и др. Основы цифровой обработки сигналов. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.